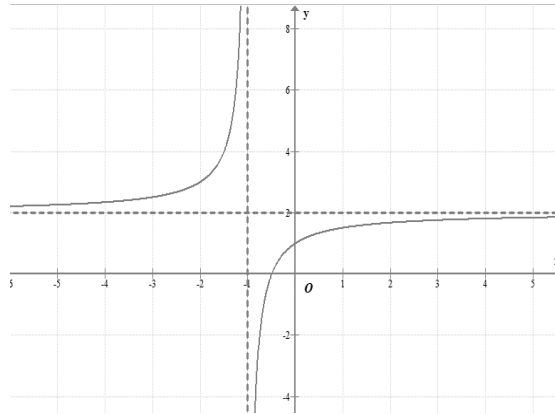


Họ tên thí sinh.....; SBD.....; Chữ kí của CBCT:.....

PHẦN I. (8,0 điểm) Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

- Câu 1:** Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?
A. $(-1; 1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; +\infty)$.

- Câu 2:** Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào



- A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x-3}{x+1}$. C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$. D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.
- Câu 3:** Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ ($a > 0, b > 0$) thỏa mãn $f(3) = -\frac{7}{3}; f(9) = 81$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $\max_{[-1;5]} |g(x)| + \min_{[-1;5]} |g(x)| = 86$ với $g(x) = f(1-2x) + 2f(x+4) + m$. Tổng các phần tử của S là
A. -74 . B. 11 . C. 5 . D. -75 .
- Câu 4:** Cho một cấp số nhân với công sai $q = 3, u_5 = 12$. Tìm tổng của số hạng thứ tư và số hạng thứ tám của cấp số nhân đó.
A. 324 . B. 332 . C. 328 . D. 976 .

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ \frac{m(8-5x)}{4} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$$

- Câu 5:** Giá trị của tham số m sao cho hàm số liên tục tại $x = 0$ là

- A. 3. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{8}$.

Câu 6: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véc tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. B. $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. C. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. D. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Câu 7: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có $AB = AE = 2$, $AD = 3$ và đặt

$\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AD}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Lấy điểm M thỏa $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ và điểm N thỏa $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$, độ dài

đoạn $MN = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $a \in \square$, $b \in \square^+$. Tính $a + b$

- A. 64. B. 65. C. 66. D. 68.

Câu 8: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng x và chiều cao bằng y . Để

Góc $(AC_1, CB_1) > 60^\circ$ thì $\frac{y}{x}$ thuộc khoảng nào

- A. $(0; \sqrt{2})$. B. $(\sqrt{2}; \frac{3}{2})$. C. $(\frac{3}{2}; 2)$. D. $(2; 2\sqrt{3})$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4)$, $K(-1; 3; 1)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N . Tìm tọa độ vectơ $\overrightarrow{KP}$.

- A. $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -11)$. B. $\overrightarrow{KP} = (8; 6; -11)$. C. $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -4)$. D. $\overrightarrow{KP} = (3; 3; -2)$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -4; 0)$. Gọi I, J lần lượt là tâm đường

tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác OAB . Độ dài đoạn thẳng $IJ = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $a \in \square$, $b \in \square^+$. Tính $2a + b$

- A. 8. B. 9. C. 10. D. 12.

Câu 11: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$. Biết

tọa độ điểm $D(x; y; z)$ sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\Delta ABC}$. Tính $x + y + z$

- A. 8. B. -9. C. -10. D. 12.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AB , hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng

45° . Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng

$$\frac{a\sqrt{m}}{n} \quad (m, n \in \mathbf{Z}, m < 100)$$

Tính $m+n$?

- A. 35. B. 22. C. 99. D. 28.

Câu 13: Cho mẫu số liệu về chiều cao (cm) của các học sinh nữ trong khối 11 của một trường như sau:

Chiều cao	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh	20	45	34	27	15	4

Giá trị đại diện của nhóm $[155;160)$ là

- A. 157,5. B. 155. C. 157. D. 160.

Câu 14: Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một chi nhánh của doanh nghiệp được ghi lại dưới bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Hãy tính tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?

- A. 7,86. B. 7,68. C. 7,81. D. 7,56.

Câu 15: Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = 4\cos^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Tính giá trị biểu thức $T = M^2 + m^2$.

- A. $T = 14$. B. $T = 15$. C. $T = 12$. D. $T = 17$.

$$\sin x + \sin 5x = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right).$$

Câu 16: Cho phương trình nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là ?

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 6.

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}, x \in \mathbf{R}$. Nếu $a+b=3$ thì $f(a)+f(b-2)$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{3}{4}$.

Câu 18: Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9; 9)$ của tham số m để bất phương trình $3\log x \leq 2\log(m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})$ có nghiệm thực?

- A. 6. B. 7. C. 10. D. 11.

Câu 19: Một hộp đựng 2^6 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 2^6 . Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc bốn tấm thẻ trong hộp. Hỏi có bao nhiêu cách rút bốn tấm thẻ sao cho bất kỳ hai trong bốn tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?

- A. 2024. B. 8855. C. 7315. D. 10626.

Câu 20: Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có tám chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A , tính xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 7? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)

- A. 0,17. B. 0,14. C. 0,21. D. 0,12.

PHẦN II. (7,2 điểm) Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x + 3}$.

- a) Hàm số nghịch biến trên $(-7; -3)$.
b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.
c) Có 15 giá trị nguyên của tham số p thuộc khoảng $(0; 20)$ để đồ thị hàm số số $y = \frac{2024}{f(x) + p}$ có đúng ba đường tiệm cận.
d) Có 2022 giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2024; 2025]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0; 0; -1)$, $B(-1; 1; 0)$, $C(1; 0; 1)$.

- a) Điểm $I(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2})$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .
b) Khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $OD = \sqrt{6}$.
c) Điểm $H(a; b; c)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC của tam giác ABC . Khi đó $a + b + c = \frac{5}{3}$.
d) Biết điểm $M(x; y; z)$ để biểu thức $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $4x - 2y + z = 2024$.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi M , N , P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh $A'B'$, CC' , AD . Biết rằng BM và NP vuông góc với nhau.

- a) Góc giữa hai đường thẳng AC và MP bằng 90° .
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BP và MC' bằng $a\sqrt{2}$.

- c) Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ thì $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
- d) Thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng $\frac{1}{16}a^3$.

Câu 4: Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9. Ký hiệu $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Xét phép thử: “Rút ngẫu nhiên n tấm thẻ từ hộp đã cho”.

- a) Mỗi tập con gồm 3 thẻ được lấy từ hộp là số tổ hợp chập 3 của 9.
- b) Mỗi số có 3 chữ số đôi một khác nhau lập từ X là một chỉnh hợp chập 3 của 9.
- c) Số tập con của tập X là 256.
- d) Gọi A là biến cố: “Có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 3”. Số lần rút tấm thẻ để xác suất của biến cố A bằng $\frac{83}{84}$ là 6.

Câu 5: Mức lương theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của nhân viên ở hai công ty A, B như sau:

Mức lương theo tháng (triệu đồng)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)
Số nhân viên của công ty A	15	18	10	10	5	2
Số nhân viên của công ty B	16	15	12	9	5	3

- a) Mức lương trung bình theo tháng của nhân viên ở công ty A là $20,67$ triệu đồng (làm tròn đến hàng phần trăm).
- b) Đối với công ty A, nhân viên có mức lương tối đa khoảng 18 triệu đồng.
- c) Đối với công ty B, 25% số nhân viên có mức lương từ $26,11$ triệu đồng trở lên (làm tròn đến hàng phần trăm).
- d) Công ty A có mức lương đồng đều hơn công ty B?

Câu 6: Cho phương trình $\frac{\cos x \cdot \cos 2x - m \cdot \cos x + \cos 2x - m}{\sin x} = 0$ với m là tham số.

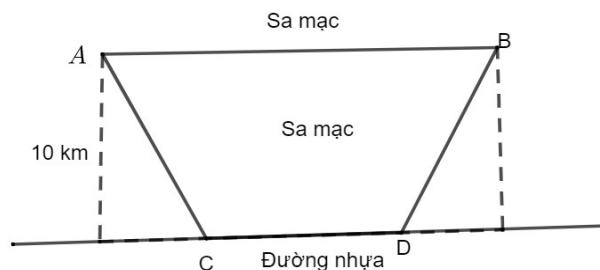
- a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$.
- b) Với $m = 1$, phương trình đã cho có 2 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$
- c) Khi $m = \frac{1}{2}$ các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên đường tròn lượng giác là một đa giác. Diện tích đa giác đó bằng $\sqrt{3}$.

d) Có hai giá trị m để $4m$ nguyên và phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

PHẦN III. (4,8 điểm) Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1: Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 70 km. Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h. Nhà địa chất phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi từ A đến B sẽ không thể đến

đúng giờ được. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km . Trên đường nhựa đó thì xe nhà địa chất này có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h . Thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A đến B là bao nhiêu phút.

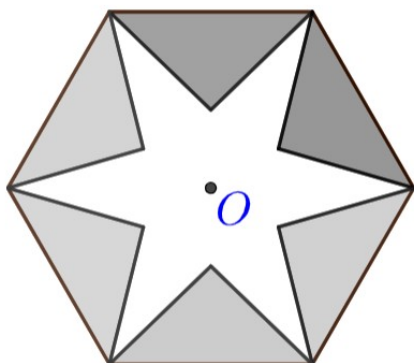
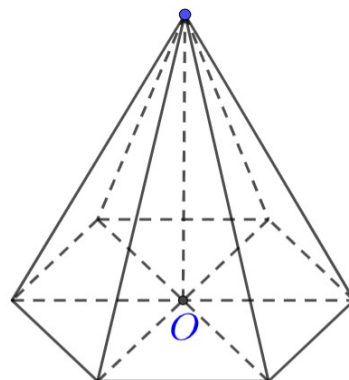


Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập R , biết $f'(x) = x^{2024}(x-2)^{2025}(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4)$, $\forall x \in R$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các giá trị của các phân tử của tập hợp S .

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 0)$, $B(2; 0; -2)$ và điểm $M(a, b, c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a + 2b - c - 1 = 0$. Biết $MA = MB$ và góc $\angle AMB$ có số đo lớn nhất. Tính $S = a.b.c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Câu 4: Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Tìm xác suất sao cho số của Hoa lớn hơn số của Bình (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 5: Cho tấm tôn hình lục giác đều cạnh 24 cm . Người ta cần làm một hình chóp lục giác đều bằng cách cắt bỏ đi các phần tô đậm là các tam giác cân, sau đó gập và hàn lại (các đường hàn không đáng kể) thành hình chóp lục giác đều (như hình vẽ dưới đây). Thể tích lớn nhất khối chóp tạo thành bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Câu 6: Cho hàm số $f(x) = 4^{-x} - 4^x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Tìm số giá trị nguyên $m \in [-2024; 2024]$ để bất phương trình $f(x^2 + 2mx + \sin x) + f(4x - \sin x - 2m + 11) \geq 0$ nghiệm đúng $\forall x \in [2; 6]$?

.....HẾT.....

Thí sinh thực hiện nghiêm túc Quy chế thi. CBCT không giải thích gì thêm

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA
KHỐI THPT TRIỆU SƠN - THPT LÊ LỢI

**KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HỌC SINH GIỎI
LIÊN TRƯỜNG LẦN 2 NĂM HỌC 2024 – 2025
MÔN: TOÁN**

(ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC)

I. ĐÁP ÁN ĐỀ CHẤM BÀI

Câu	Mã đề 121
1	B
2	D
3	A
4	C
5	D
6	B
7	C
8	A
9	A
10	D
11	C
12	C
13	A
14	A
15	C
16	D
17	A
18	B
19	B
20	B
1	SĐSĐ
2	ĐSSS
3	ĐSĐĐ
4	SĐSĐ
5	ĐSĐĐ
6	ĐSĐĐ
1	116
2	9
3	0
4	0,66
5	1142
6	2013

II. HDG CÁC CÂU VẬN
CAO.

DỤNG VÀ VẬN DỤNG

PHẦN 1. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: [2] Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$.

Hàm số $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-1; 1)$. B. $(0; 1)$. C. $(-\infty; -1)$. D. $(2; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^3(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

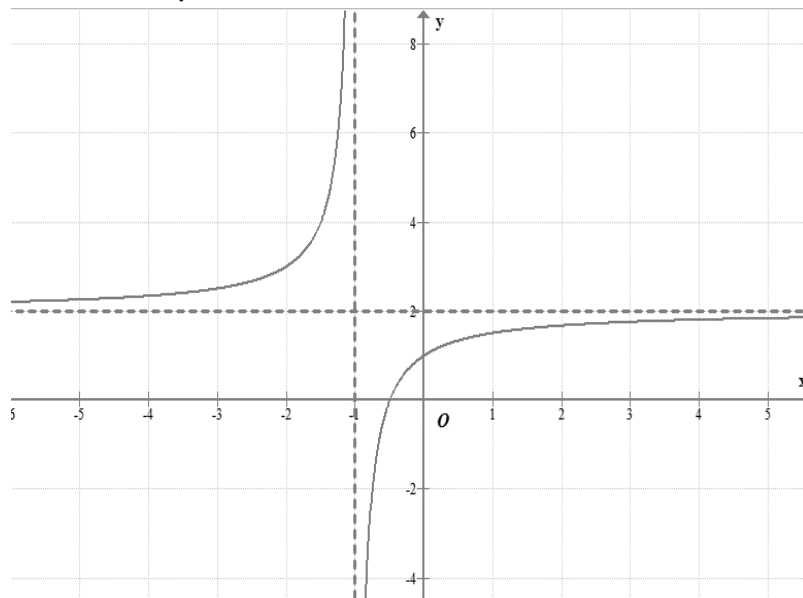
Ta có

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$	0	$-$

Ta có $1 < \frac{x}{2} + 1 < 2 \Leftrightarrow 0 < x < 2$ suy ra hàm số $y = f\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ đồng biến trên khoảng $(0; 1)$.

Câu 2: [1] Hình vẽ bên dưới là đồ thị của hàm số nào



- A. $y = \frac{2x-1}{x+1}$. B. $y = \frac{2x-3}{x+1}$. C. $y = \frac{2x+3}{x+1}$. D. $y = \frac{2x+1}{x+1}$.

Chọn D Đồ thị hàm số cắt trục Oy tại điểm có tọa độ $(0; 1)$ nên chọn phương

Câu 3: Cho hàm số $f(x) = ax^5 + bx^3 + cx$ ($a > 0, b > 0$) thỏa mãn $f(3) = -\frac{7}{3}; f(9) = 81$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m sao cho $\max_{[-1;5]} |g(x)| + \min_{[-1;5]} |g(x)| = 86$ với $g(x) = f(1-2x) + 2f(x+4) + m$. Tổng các phần tử của S là

A. -74 . **B.** 11 . **C.** 5 . **D.** -75 .

Lời giải

Chọn A

Ta có $g'(x) = -2f'(1-2x) + 2f'(x+4); g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1-2x) = f'(x+4)$

$$f'(x) = 5ax^4 + 3bx^2 + c \Rightarrow f'(x+4) = f'(1-2x)$$

$$\Leftrightarrow 5a(x+4)^4 + 3b(x+4)^2 = 5a(1-2x)^4 + 3b(1-2x)^2$$

$$\Leftrightarrow [(x+4)^2 - (1-2x)^2] [5a((x+4)^2 + (1-2x)^2) + 3b] = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+4)^2 = (1-2x)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 5 \end{cases}$$

Do đó $g'(x)$ không đổi dấu trên $[-1;5]$.

$$g(-1) = f(3) + 2f(3) + m = m - 7$$

$$g(5) = f(-9) + 2f(9) + m = m + 81$$

$$\text{Vì } f(-x) = -ax^5 - bx^3 - cx = -f(x)$$

Suy ra $m - 7 \leq g(x) \leq 81 + m$ với $\forall x \in [-1;5]$.

TH1: $m \geq 7 \Rightarrow m - 7 \geq 0; m + 81 > 0$

$$\max_{[-1;5]} |g(x)| + \min_{[-1;5]} |g(x)| = 81 + m + m - 7 = 86 \Leftrightarrow m = 6 \quad (\text{loại})$$

TH2: $m \leq -81 \Rightarrow m - 7 < 0; m + 81 \leq 0$

$$\max_{[-1;5]} |g(x)| + \min_{[-1;5]} |g(x)| = 7 - m - m - 81 = 86 \Leftrightarrow m = -80 \quad (\text{loại})$$

TH3: $81 < m < 7 \Rightarrow m + 81 > 0; m - 7 < 0$

$$\max_{[-1;5]} |g(x)| + \min_{[-1;5]} |g(x)| = 81 + m + 0 = 86 \Leftrightarrow m = 5 \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{Hoặc } \max_{[-1;5]} |g(x)| + \min_{[-1;5]} |g(x)| = 7 - m + 0 = 86 \Leftrightarrow m = -79 \quad (\text{thỏa mãn}).$$

Vậy $m = -79; m = 5$. Suy ra tổng các giá trị của các phần tử của S là $-79 + 5 = -74$

Câu 4: [1] Cho một cấp số nhân với công sai $q = 3, u_5 = 12$. Tìm tổng của số hạng thứ tư và số hạng thứ tám của cấp số nhân đó.

A. 324 . **B.** 332 . **C.** 328 . **D.** 976 .

Lời giải

Chọn C

Ta có: $u_n = u_1 q^{n-1} \Rightarrow u_5 = u_1 \cdot 3^4 \Leftrightarrow 12 = u_1 \cdot 3^4 \Leftrightarrow u_1 = \frac{4}{27}$. Suy ra: $u_4 = u_1 \cdot q^3 = \frac{4}{27} \cdot 3^3 = 4$ và
 $u_8 = u_1 \cdot q^7 = \frac{4}{27} \cdot 3^7 = 324$. Từ đó suy ra: $u_4 + u_8 = 4 + 324 = 328$.

Câu 5: [2] Giá trị của tham số m sao cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & \text{khi } x > 0 \\ \frac{m(8-5x)}{4} & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ liên tục tại $x=0$ là

A. 3. B. $\frac{4}{3}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn D

$$\text{Có } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x(\sqrt{x+4}+2)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x+4}+2} = \frac{1}{4}.$$

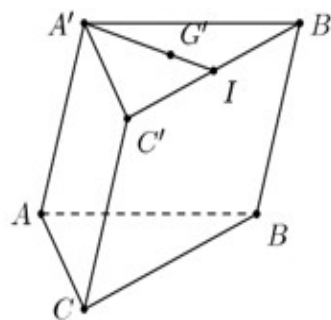
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(2m - \frac{5}{4}x \right) = 2m \quad \text{và} \quad f(0) = 2m.$$

$$\text{Hàm số liên tục tại } x=0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0) \Leftrightarrow 2m = \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = \frac{1}{8}.$$

Câu 6: [1] Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AA'}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$. Gọi G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C'$. Véc tơ $\overrightarrow{AG'}$ bằng

A. $\frac{1}{3}(\vec{a} + 3\vec{b} + \vec{c})$. B. $\frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. C. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c})$. D. $\frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$.

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $B'C'$

Vì G' là trọng tâm của tam giác $A'B'C' \Rightarrow \overrightarrow{A'G'} = \frac{2}{3} \overrightarrow{A'I}$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{A'G'} = \overrightarrow{AA'} + \frac{2}{3} \overrightarrow{A'I} = \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'})$$

$$= \overrightarrow{AA'} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{3}(3\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

Câu 7: [2] Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ có $AB = AE = 2$, $AD = 3$ và đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}, \vec{c} = \overrightarrow{AE}$. Lấy điểm M thỏa $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AD}$ và điểm N thỏa $\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC}$, độ dài

đoạn $MN = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $a \in \square, b \in \square^+$. Tính $a + b$

A. 64.

B. 65.

C. 66.

D. 68.

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{5}\overrightarrow{AD} = -\frac{1}{5}\vec{b}$.

$$\overrightarrow{EN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{EC} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EA}) = \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$$

Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN} = -\frac{1}{5}\vec{b} + \vec{c} + \frac{2}{5}(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$.

Vì $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ đôi một vuông góc nên $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} = 0$.

$$MN^2 = \overrightarrow{MN}^2 = \left(\frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}\right)^2 = \frac{4}{25}\vec{a}^2 + \frac{1}{25}\vec{b}^2 + \frac{9}{25}\vec{c}^2 = \frac{4}{25} \cdot 4 + \frac{1}{25} \cdot 9 + \frac{9}{25} \cdot 4 = \frac{61}{25}$$

Suy ra $MN = \frac{\sqrt{61}}{5}$ nên $a + b = 66$.

Câu 8: [3] Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A_1B_1C_1$ có cạnh đáy bằng x và chiều cao bằng y . Để

Góc $(AC_1, CB_1) > 60^\circ$ thì $\frac{y}{x}$ thuộc khoảng nào

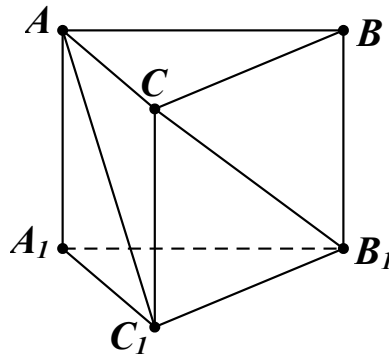
A. $(0; \sqrt{2})$.

B. $(\sqrt{2}; \frac{3}{2})$.

C. $(\frac{3}{2}; 2)$.

D. $(2; 2\sqrt{3})$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}x^2$.

$$\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$$

ACC_1A_1 là hình chữ nhật nên ta có $\overrightarrow{AC_1} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$.

$$\overrightarrow{CB_1} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CC_1} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}$$

Ta có $\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}) \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}) = y^2 - \frac{1}{2}x^2$ và $AC_1 = CB_1 = \sqrt{x^2 + y^2}$.

$$\cos(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}) = \left| \cos(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}) \right| = \frac{|\overrightarrow{AC_1} \cdot \overrightarrow{CB_1}|}{|\overrightarrow{AC_1}| \cdot |\overrightarrow{CB_1}|} = \frac{\left| y^2 - \frac{1}{2}x^2 \right|}{x^2 + y^2}$$

Khi đó

$$\frac{\left| y^2 - \frac{1}{2}x^2 \right|}{x^2 + y^2} < \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3y^4 - 6x^2y^2 < 0 \Leftrightarrow 0 < \frac{y}{x} < \sqrt{2}$$

Theo đề $(\overrightarrow{AC_1}, \overrightarrow{CB_1}) > 60^\circ$, suy ra

- Câu 9:** [1] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4)$, $K(-1; 3; 1)$. Gọi P là điểm đối xứng với M qua N . Tìm tọa độ vector $\overrightarrow{KP}$.
- A. $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -11)$ B. $\overrightarrow{KP} = (8; 6; -11)$ C. $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -4)$ D. $\overrightarrow{KP} = (3; 3; -2)$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OM} = (1; 5; 2) \Rightarrow M(1; 5; 2)$, $\overrightarrow{ON} = (3; 7; -4) \Rightarrow N(3; 7; -4)$.

Vì P là điểm đối xứng với M qua N nên N là trung điểm của MP , ta suy ra được

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{NP} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N - x_M = x_P - x_N \\ y_N - y_M = y_P - y_N \\ z_N - z_M = z_P - z_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_P = 5 \\ y_P = 9 \\ z_P = -10 \end{cases} \Rightarrow P(5; 9; -10)$$

Khi đó $\overrightarrow{KP} = (6; 6; -11)$.

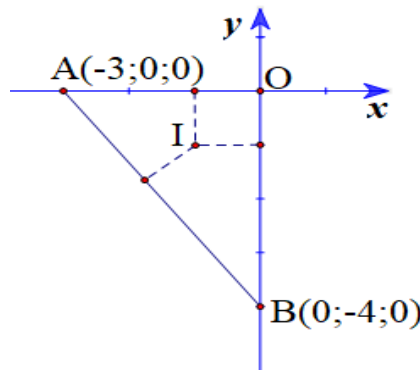
- Câu 10:** [2] Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -4; 0)$. Gọi I , J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp của tam giác OAB . Độ dài đoạn thẳng $IJ = \frac{\sqrt{a}}{b}$ với $a \in \mathbb{Q}, b \in \mathbb{Q}^+$. Tính $2a + b$
- A. 8 B. 9 C. 10 D. 12

Lời giải

Đáp số: 12.

Ta có: $\overrightarrow{OA} = (-3; 0; 0) \Rightarrow OA = 3$, $\overrightarrow{OB} = (0; -4; 0) \Rightarrow OB = 4$, $\overrightarrow{AB} = (3; -4; 0) \Rightarrow AB = 5$.

$\triangle OAB$ vuông tại O , nằm trong mặt phẳng (Oxy) .



$$S_{OAB} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6; \quad p = \frac{OA + OB + AB}{2} = 6 \Rightarrow r = \frac{S_{OAB}}{p} = 1$$

$\Rightarrow I(-1; -1; 0)$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle OAB$.

Do $\triangle OAB$ vuông tại O nên J là trung điểm của $AB \Rightarrow J\left(-\frac{3}{2}; -2; 0\right)$.
 $\overrightarrow{IJ} = \left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right) \Rightarrow IJ = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Nên $2a + b = 12$.

- Câu 11:** [3] Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(2; 1; 0)$, $C(-3; -1; 1)$.
 Biết tọa độ điểm $D(x; y; z)$ sao cho $ABCD$ là hình thang có đáy AD và $S_{ABCD} = 3S_{\triangle ABC}$. Tính $x + y + z$
- A. 8. B. -9. C. -10. D. 12.

Lời giải

Ta có: $S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot d(A, BC) \Leftrightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}(AD + BC) \cdot \frac{2S_{\triangle ABC}}{BC}$.
 $\Leftrightarrow 3S_{\triangle ABC} = \frac{(AD + BC) \cdot S_{\triangle ABC}}{BC} \Leftrightarrow 3BC = AD + BC \Leftrightarrow AD = 2BC$.

Mà $ABCD$ là hình thang có đáy AD nên $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{BC}$ (1).
 $\overrightarrow{BC} = (-5; -2; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (x_D + 2; y_D - 3; z_D - 1)$.

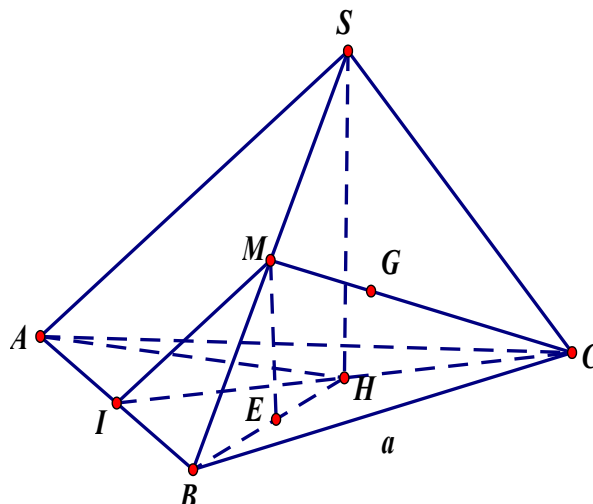
$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 2 = -10 \\ y_D - 3 = -4 \\ z_D - 1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -12 \\ y_D = -1 \\ z_D = 3 \end{cases}$$

Vậy $D(-12; -1; 3)$.

- Câu 12:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a . Gọi I là trung điểm của AB , hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của CI , góc giữa SA và mặt đáy bằng 45° . Gọi G là trọng tâm tam giác SBC . Khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và CG bằng $\frac{a\sqrt{m}}{n}$ ($m, n \in \mathbf{Z}, m < 100$). Tính $m + n$?
- A. 35. B. 22. C. 99. D. 28.

Lời giải

Chọn C



Gọi giao điểm của CG với SB là M . Suy ra M là trung điểm của SB .

Gọi E là chân đường vuông góc hạ từ M xuống mặt phẳng (ABC) .

Ta có $AS \parallel IM \Rightarrow AS \parallel (IMC)$.

Suy ra $d(SA, CG) = d(SA, (IMC)) = d(S, (IMC)) = d(B, (IMC))$.

Theo bài ra ta có $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ suy ra $IH = \frac{a\sqrt{3}}{4}$.

Suy ra $AH = \sqrt{AI^2 + IH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{16}} = \frac{a\sqrt{7}}{4}$.

Do góc $\left(\overline{SA}, (ABC)\right) = 45^\circ$ suy ra tam giác $DSHA$ vuông cân tại H .

Suy ra $SH = AH = \frac{a\sqrt{7}}{4}$. Suy ra $SA = AH\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

Xét tam giác $DSBC$: dễ thấy $SB = SA = \frac{a\sqrt{14}}{4}$.

$SC = SI = \sqrt{SH^2 + IH^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Suy ra $CM = \sqrt{\frac{2SC^2 + 2BC^2 - SB^2}{4}} = \frac{a\sqrt{38}}{8}$.

Xét tam giác $DIMC$: $IM = \frac{SA}{2} = \frac{a\sqrt{14}}{8}$, $CM = \frac{a\sqrt{38}}{8}$, $CI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Suy ra $S_{DIMC} = \frac{\sqrt{33}}{32}a^2$.

Thể tích khối chóp $MIBC$ là:

$$V_{MIBC} = \frac{1}{3}ME \cdot S_{DIMC} = \frac{1}{3} \cdot \frac{SH}{2} \cdot \frac{1}{2}IC \cdot IB = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{7}}{8} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{21}}{192}a^3$$

$$d(S, (MIC)) = d(B, (MIC)) = \frac{3V_{MIBC}}{S_{DIMC}} = \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{21}}{192}a^3}{\frac{\sqrt{33}}{32}a^2} = \frac{\sqrt{77}}{22}a$$

Suy ra

Vậy $m+n=99$.

Câu 13: Cho mẫu số liệu về chiều cao (cm) của các học sinh nữ trong khối 11 của một trường như sau:

Chiều cao	[145;150)	[150;155)	[155;160)	[160;165)	[165;170)	[170;175)
Số học sinh	20	45	34	27	15	4

Giá trị đại diện của nhóm $[155;160)$ là

A. 157,5.

B. 155.

C. 157.

D. 160.

Câu 14: Doanh thu bán hàng trong 20 ngày được lựa chọn ngẫu nhiên của một chi nhánh của doanh nghiệp được ghi lại dưới bảng sau (đơn vị: triệu đồng):

Doanh thu	[5; 7)	[7; 9)	[9; 11)	[11; 13)	[13; 15)
Số ngày	2	7	7	3	1

Hãy tính tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm trên? (giá trị gần nhất)

- A.** 7,86. **B.** 7,68. **C.** 7,81. **D.** 7,56.

Câu 15: [1] Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = 4 \cos^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right). \text{ Tính giá trị biểu thức } T = M^2 + m^2.$$

- A.** $T = 14$. **B.** $T = 15$. **C.** $T = 12$. **D.** $T = 17$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

$$f(x) = 4 \cos^2 x + \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 2 + 2 \cos 2x + \sin 2x - \cos 2x$$

Ta có

$$= \sin 2x + \cos 2x + 2 = \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2$$

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq \sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 2 \leq \sqrt{2} + 2$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{2} + 2 \leq f(x) \leq \sqrt{2} + 2$$

$$\text{Giá trị lớn nhất của hàm số } f(x) \text{ bằng } \sqrt{2} + 2 \text{ khi } \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

$$\text{Giá trị nhỏ nhất của hàm số } f(x) \text{ bằng } -\sqrt{2} + 2 \text{ khi } \sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{3\pi}{8} + k\pi$$

$$M^2 + m^2 = (2 + \sqrt{2})^2 + (2 - \sqrt{2})^2 = 12$$

$$\sin x + \sin 5x = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$$

Câu 16: [2] Cho phương trình $\sin x + \sin 5x = 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) - 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right)$. Số vị trí biểu diễn các nghiệm của phương trình trên đường tròn lượng giác là ?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải

Chọn D

$$\begin{cases} 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 1 + \sin 2x \\ 2 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} + 4x\right) = 1 - \sin 4x \end{cases}$$

Ta có

Do đó phương trình tương đương với $\sin x + \sin 5x = \sin 2x + \sin 4x$

$$\Leftrightarrow 2 \sin 3x \cdot \cos 2x = 2 \sin 3x \cdot \cos x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 3x = 0 \\ \cos 2x = \cos x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{3} \\ x = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} = \frac{k2\pi}{6} (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

Vậy có 6 điểm biểu diễn trên đường tròn lượng giác.

- Câu 17:** [2] Cho hàm số $f(x) = \frac{9^x}{3+9^x}$, $x \in \mathbb{R}$. Nếu $a+b=3$ thì $f(a)+f(b-2)$ có giá trị bằng
- A.** 1. **B.** 2. **C.** $\frac{1}{4}$ **D.** $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $b-2=1-a$

$$f(a) = \frac{9^a}{3+9^a}; f(b-2) = f(1-a) = \frac{9^{1-a}}{3+9^{1-a}} = \frac{3}{3+9^a}$$

$$\Rightarrow f(a) + f(b-2) = \frac{9^a}{3+9^a} + \frac{3}{3+9^a} = 1$$

- Câu 18:** [3] Có bao nhiêu giá trị nguyên thuộc khoảng $(-9;9)$ của tham số m để bất phương trình $3 \log x \leq 2 \log (m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})$ có nghiệm thực?
- A.** 6. **B.** 7. **C.** 10. **D.** 11.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Điều kiện } \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m\sqrt{x} - (1-x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ m > \frac{(1-x)}{\sqrt{x}} > 0 \end{cases}$$

Bất phương trình đã cho tương đương

$$\log x^3 \leq \log (m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})^2$$

$$\Leftrightarrow x^3 \leq (m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})^2$$

$$\Leftrightarrow x\sqrt{x} \leq (m\sqrt{x-x^2} - (1-x)\sqrt{1-x})$$

$$\Leftrightarrow m \geq \frac{x\sqrt{x} + (1-x)\sqrt{1-x}}{\sqrt{x-x^2}} = \frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{1-x}{\sqrt{x}}$$

Áp dụng bất đẳng thức cô si ta có

$$\left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \sqrt{1-x} \right) + \left(\frac{1-x}{\sqrt{x}} + \sqrt{x} \right) \geq 2\sqrt{x} + 2\sqrt{1-x}$$

Vì vậy $m \geq \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

Khảo sát hàm số $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$ trên $(0;1)$ ta được $f(x) \geq \sqrt{2} \approx 1,414$

Vậy m có thể nhận được các giá trị 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.

- Câu 19:** [3] Một hộp đựng 2^6 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 2^6 . Bạn Hải rút ngẫu nhiên cùng một lúc bốn tấm thẻ trong hộp. Hỏi có bao nhiêu cách rút bốn tấm thẻ sao cho bất kỳ hai trong bốn tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị?
- A. 2024. B. 8855. C. 7315. D. 10626.

Lời giải

Chọn B

Số cách rút 4 tấm thẻ trong 26 tấm thẻ sao cho bất kỳ hai trong bốn tấm thẻ lấy ra đó có hai số tương ứng trên hai tấm thẻ luôn hơn kém nhau ít nhất 2 đơn vị bằng cách bỏ thêm 4 tấm thẻ vào hàng ngang gồm 22 tấm thẻ sao cho hai tấm thẻ bỏ vào không kề nhau.

22 tấm thẻ kề nhau sinh ra 23 ô trống, nên số cách rút thẻ thỏa mãn là: $C_{23}^4 = 8855$ (cách)

- Câu 20:** [2] Gọi A là tập hợp tất cả các số tự nhiên có tám chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc A , tính xác suất để số tự nhiên được chọn chia hết cho 7? (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)
- A. 0,17. B. 0,14. C. 0,21. D. 0,12.

Lời giải

Chọn B

Gọi số có tám chữ số là $\overline{a_1a_2...a_8}$

Ta có: $n(\Omega) = 9 \cdot 10^7$

Gọi biến cố B : “Số tự nhiên lấy được chia hết cho 7”

Khi đó: $10000004 \leq \overline{a_1a_2...a_8} \leq 99999998$

$$n(B) = 12857143$$

Vậy
$$P(B) = \frac{12857143}{9 \cdot 10^7} \approx 0,14$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + x - 5}{x + 3}$.

- a) Hàm số nghịch biến trên $(-7; -3)$.
- b) Đồ thị hàm số có đường tiệm cận xiên tạo với 2 trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 2.
- c) Có 15 giá trị nguyên của tham số P thuộc khoảng $(0; 20)$ để đồ thị hàm số số $y = \frac{2024}{f(x) + P}$ có đúng ba đường tiệm cận.
- d) Có 2022 giá trị nguyên của tham số m thuộc $[-2024; 2025]$ để hàm số $g(x) = f(x^2 - 2x - m)$ có 5 điểm cực trị.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
S	Đ	S	Đ

a) TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$$y' = \left(\frac{x^2 + x - 5}{x + 3} \right)' = \frac{(2x + 1)(x + 3) - x^2 - x + 5}{(x + 3)^2} = \frac{x^2 + 6x + 8}{(x + 3)^2}$$

Ta có

$$y' = \frac{x^2 + 6x + 8}{(x + 3)^2} \Rightarrow y' < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -4 < x < -3 \\ -3 < x < -2 \end{cases}$$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng $(-4; -3)$ và $(-3; -2)$.

Vậy mệnh đề a) là SAI.

b) Ta có $y = \frac{x^2 + x - 5}{x + 3} = x - 2 + \frac{1}{x + 3}$.

Khi đó $\lim_{x \rightarrow +\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x + 3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} [y - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x + 3} = 0$.

Vậy đồ thị có tiệm cận xiên $d: y = x - 2$.

Gọi $A = d \cap Ox \Rightarrow A(2; 0)$; $B = d \cap Oy \Rightarrow B(0; -2)$. Vậy $S_{\triangle OAB} = 2$.

Vậy mệnh đề b) là ĐÚNG.

c) Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2024}{f(x) + P} = 0$ và $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2024}{f(x) + P} = 0$ với mọi giá trị của tham số P nên đồ thị hàm

số $y = \frac{2024}{f(x) + P}$ luôn có đường tiệm cận ngang $y = 0$ do đó để đồ thị hàm số $y = \frac{2024}{f(x) + P}$ có đúng ba đường tiệm cận thì phương trình $f(x) + P = 0 \Leftrightarrow f(x) = -P$ có hai nghiệm phân biệt.

Ta có $y' = f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{(x + 3)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \Rightarrow f(-2) = -3 \\ x = -4 \Rightarrow f(-4) = -7 \end{cases}$

Căn cứ vào bảng biến thiên của hàm số đã cho suy ra phương trình trên có đúng hai nghiệm

phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases} -p > -3 \Rightarrow 0 < p < 3 \\ -p < 7 \Rightarrow 7 < p < 20 \end{cases}$ đồng thời p là một số nguyên nên ta tìm được tất cả ¹⁴ giá trị thỏa mãn.

Vậy mệnh đề c) là mệnh đề SAI.

d) Do $y' = f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 8}{(x+3)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = -4 \end{cases}$ nên

$$g'(x) = 2(x-1)f'(x^2 - 2x - m) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x - m \neq -3 \\ x = 1 \\ x^2 - 2x - m = -2 \\ x^2 - 2x - m = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x^2 - 2x = m - 2 \\ x^2 - 2x = m - 4 \end{cases}$$

Xét $h(x) = x^2 - 2x$ có bảng biến thiên

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$h(x)$	$+\infty$		-1		$+\infty$

Để thỏa mãn thì $m - 4 > -1 \Leftrightarrow m > 3$.

Do m nguyên thuộc $[-2024; 2025]$ nên có 2022 giá trị thỏa mãn

Chọn ĐÚNG.

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(0;0;-1)$, $B(-1;1;0)$, $C(1;0;1)$.

a) Điểm $I(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2})$ là trung điểm của đoạn thẳng AB .

b) Khi tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì $OD = \sqrt{6}$.

c) Điểm $H(a;b;c)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC của tam giác ABC . Khi đó $a+b+c = \frac{5}{3}$.

d) Biết điểm $M(x;y;z)$ để biểu thức $3MA^2 + 2MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất, khi đó $4x - 2y + z = 2024$.

Lời giải

a)	b)	c)	d)
Đ	S	S	S

a) Tọa độ trung điểm I của đoạn thẳng AB là $I(\frac{0-1}{2}; \frac{0+1}{2}; \frac{-1+0}{2})$ hay $I(\frac{-1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2})$.
 Vậy a) **đúng**.

b) Gọi $D(x;y;z)$. Để tứ giác $ABCD$ là hình bình hành thì

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} -1 = 1 - x \\ 1 = 0 - y \\ 1 = 1 - z \end{cases} \Rightarrow D(2; -1; 0) \Rightarrow OD = \sqrt{5}.$$

Vậy b) **sai**.

c) Ta có $\overrightarrow{BC} = (2; -1; 1)$.

Gọi $H(x; y; z)$ là chân đường cao kẻ từ A xuống cạnh BC của tam giác ABC .

Suy ra $\overrightarrow{BH} = (x+1; y-1; z)$.

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{BH} // \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=2t; y-1=-t; z=t \quad (1) \\ \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow H(2t-1; -t+1; t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t-1; -t+1; t+1)$$

$$(2) \Rightarrow 2.(2t-1) - (-t+1) + t+1 = 0 \Leftrightarrow 6t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow H\left(\frac{-1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right) \text{ nên } a+b+c = \frac{2}{3}.$$

Vậy c) **sai**.

d)

$$M(x; y; z) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = (x; y; z+1) \\ \overrightarrow{BM} = (x+1; y-1; z) \\ \overrightarrow{CM} = (x-1; y; z-1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} AM^2 = x^2 + y^2 + (z+1)^2 \\ BM^2 = (x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2 \\ CM^2 = (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P &= 3MA^2 + 2MB^2 - MC^2 \\ &= 3[x^2 + y^2 + (z+1)^2] + 2[(x+1)^2 + (y-1)^2 + z^2] - [(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2] \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 + 6x - 4y + 8z + 5 = \left(2x + \frac{3}{2}\right)^2 + (2y-1)^2 + (2z+2)^2 - \frac{9}{4} \geq -\frac{9}{4} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Min} P = -\frac{9}{4} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}, z = -1, \text{ khi đó } M\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right).$$

$$\text{Vậy } P = 4x - 2y + z = -3 - 1 - 1 = -5.$$

Vậy d) **Sai**.

Câu 3: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Gọi M, N, P theo thứ tự là trung điểm của các cạnh $A'B', CC', AD$. Biết rằng BM và NP vuông góc với nhau.

a) Góc giữa hai đường thẳng AC và MP bằng 90° .

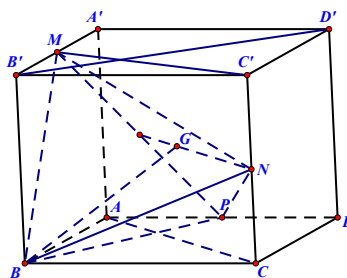
b) Khoảng cách giữa hai đường thẳng BP và MC' bằng $a\sqrt{2}$.

c) Nếu φ là góc giữa hai mặt phẳng (MNP) và $(ABCD)$ thì $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

d) Thể tích khối tứ diện $AMNP$ bằng $\frac{1}{16}a^3$.

Lời giải

Câu 3	a)	b)	c)	d)
	Đ	S	Đ	Đ



a)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AP}$$

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{MP} &= (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AP} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AP} \\ &= -\frac{1}{2} a^2 + \frac{1}{2} a^2 = 0\end{aligned}$$

Vậy góc giữa AC và MP bằng 90° .

b) Khẳng định sai, vì:

$$\left. \begin{array}{l} MC' \subset (A'B'C'D') \\ BP \subset (ABCD) \end{array} \right\} \Rightarrow d(MC', BP) = d((BCD), (A'B'C'D')) = AA'$$

Đặt $AA' = h$.

$$+) \quad \overrightarrow{BM} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$$

$$+) \quad \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'}$$

$$+) \quad BM \perp PN \Rightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} \right) \cdot \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'} \right) = 0$$

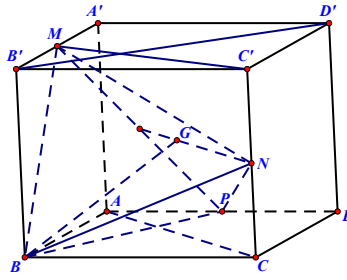
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} \overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'}^2 = 0 \Leftrightarrow h = a$$

Vậy $d(MC', BP) = a$.

c) Khẳng định đúng.

$$\text{Ta có } BM = BN = BP = \frac{a\sqrt{5}}{2}, \quad MN = NP = MP = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$\Rightarrow B.MNP$ là hình chóp đều.



Gọi G là trọng tâm tam giác $MNP \Rightarrow BG \perp (MNP)$.

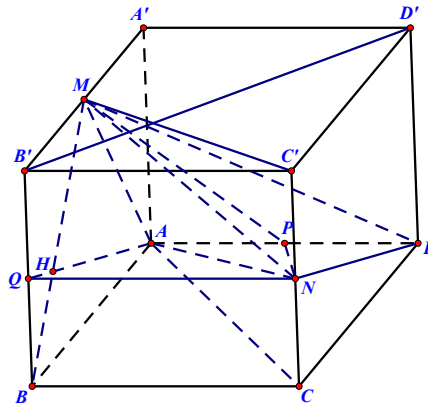
$$\begin{aligned}\overrightarrow{BG} &= \frac{1}{3}(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{BP}) = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'} \\ \Rightarrow BG &= \frac{a\sqrt{3}}{2}\end{aligned}$$

$$+) \quad \overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AA'} = \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}\right) \cdot \overrightarrow{AA'} = \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \cos(BG, AA') = \cos(\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{\overrightarrow{BG} \cdot \overrightarrow{AA'}}{BG \cdot AA'} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

d) Khẳng định sai.

Gọi A là trung điểm của $BB' \Rightarrow QN \parallel AD, AQ \perp BM$.



$$\text{Gọi } H = BM \cap AQ \Rightarrow BH = \frac{a}{\sqrt{5}}, MH = \frac{3\sqrt{5}a}{10}$$

$$+) \quad \left. \begin{array}{l} MH \perp AQ \\ MH \perp QN \end{array} \right\} \Rightarrow MH \perp (AQND)$$

$$+) \quad V_{M \cdot AQND} = \frac{1}{3}MH \cdot S_{AQND} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{5}a}{10} \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2} \cdot a = \frac{a^3}{4}$$

$$+) V_{AMNP} = V_{M \dots ANP} = \frac{1}{2} V_{MAND} = \frac{1}{4} V_{M \dots AQND} = \frac{a^3}{16}.$$

Câu 4: Một hộp đựng 9 tấm thẻ được đánh số từ 1 đến 9 . Ký hiệu $X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$. Xét phép thử: “Rút ngẫu nhiên n tấm thẻ từ hộp đã cho”.

a) Mỗi tập con gồm 3 thẻ được lấy từ hộp là số tổ hợp chập 3 của 9 .

b) Mỗi số có 3 chữ số đôi một khác nhau lập từ X là một chỉnh hợp chập 3 của 9 .

c) Số tập con của tập X là 256 .

d) Gọi A là biến cố: “Có ít nhất một thẻ ghi số chia hết cho 3 ”. Số lần rút tám thẻ để xác suất của biến cố A bằng $\frac{83}{84}$ là 6 .

Lời giải

ĐÁP ÁN:

Câu	a)	b)	c)	d)
	S	Đ	S	Đ

Theo định nghĩa về tổ hợp, chỉnh hợp thì mệnh đề a) là sai. Mệnh đề b) đúng.

c) Số tập con của tập X là $2^9 = 512$. Nên mệnh đề c) sai

d) Xét phép thử: “Rút ngẫu nhiên n tấm thẻ từ hộp đã cho”. Khi đó

$$n(\Omega) = C_9^n$$

$\bar{A}$ là biến cố: “ n tấm thẻ được chọn không có tấm thẻ nào được ghi số chia hết cho 3 ”.

$$\text{Ta có } P(A) = \frac{83}{84} \Rightarrow 1 - P(\bar{A}) = \frac{83}{84} \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{1}{84}$$

Trong 9 tấm thẻ có 3 tấm thẻ được ghi số chia hết cho 3 .

Chọn n tấm thẻ ghi số không chia hết cho 3 từ 6 tấm thẻ còn lại có: C_6^n cách.

Suy ra

$$n(\bar{A}) = C_6^n \Rightarrow P(\bar{A}) = \frac{n(\bar{A})}{n(\Omega)}$$

$$P(\bar{A}) = \frac{C_6^n}{C_9^n} \Leftrightarrow \frac{C_6^n}{C_9^n} = \frac{1}{84} \Leftrightarrow 84 \cdot \frac{6!}{n!(6-n)!} = \frac{9!}{n!(9-n)!}$$

$$\Leftrightarrow 84(9-n)(8-n)(7-n) = 9 \cdot 8 \cdot 7$$

$$\Leftrightarrow n^3 - 24n^2 + 191n - 498 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = 6.$$

Vậy số tấm thẻ phải rút là 6 .

Nên mệnh đề d) đúng.

Câu 5: Mức lương theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của nhân viên ở hai công ty A, B như sau:

Mức lương theo tháng (triệu đồng)	[10;15)	[15;20)	[20;25)	[25;30)	[30;35)	[35;40)
Số nhân viên của công ty A	15	18	10	10	5	2
Số nhân viên của công ty B	16	15	12	9	5	3

- a) Mức lương trung bình theo tháng của nhân viên ở công ty A là $20,67$ triệu đồng (làm tròn đến hàng phần trăm).
- b) Đối với công ty A, nhân viên có mức lương tối đa khoảng 18 triệu đồng.
- c) Đối với công ty B, 25% số nhân viên có mức lương từ $26,11$ triệu đồng trở lên (làm tròn đến hàng phần trăm).
- d) Công ty A có mức lương đồng đều hơn công ty B?

Lời giải

Câu 5	a)	b)	c)	d)
	Đ	S	Đ	Đ

- a) Mệnh đề đúng. Vì theo bài ra ta có

$$\bar{x}_A = \frac{15 \cdot 12,5 + 18 \cdot 17,5 + 10 \cdot 22,5 + 10 \cdot 27,5 + 5 \cdot 32,5 + 2 \cdot 37,5}{15 + 18 + 10 + 10 + 5 + 2} \approx 20,67$$

- b) Mệnh đề sai. Vì đối với công ty A, nhân viên có mức lương tối đa gần 40 triệu đồng.

- c) Mệnh đề đúng.

Ta có $Q_3 = 26,11$

Suy ra % nhân viên có mức lương từ $26,11$ triệu trở lên là: 25%

$$\bar{x}_B = \frac{12,5 \cdot 16 + 17,5 \cdot 15 + 24,5 \cdot 12 + 27,5 \cdot 9 + 34,5 \cdot 5 + 37,5 \cdot 3}{60} = 20,92$$

- d) Mệnh đề đúng. Vì

Độ lệch chuẩn là $s_A = 7,01$ và $s_B = 7,5$.

Ta thấy công ty A có mức lương đồng đều hơn công ty B.

Câu 6:

Cho phương trình $\frac{\cos x \cdot \cos 2x - m \cdot \cos x + \cos 2x - m}{\sin x} = 0$ với m là tham số.

- a) Điều kiện xác định của phương trình là $x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

- b) Với $m = 1$, phương trình đã cho có 2 nghiệm thuộc $[0; 2\pi]$

- c) Khi $m = \frac{1}{2}$ các nghiệm của phương trình được biểu diễn trên đường tròn lượng giác là một đa giác.

Diện tích đa giác đó bằng $\sqrt{3}$.

- d) Có hai giá trị m để $4m$ nguyên và phương trình có đúng 2 nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

Lời giải

Câu 6	a)	b)	c)	d)
	Đ	S	Đ	Đ

- a) Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi$

b) Với $m = 1$, ta có:

$$\frac{\cos x \cdot \cos 2x - \cos x + \cos 2x - 1}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \frac{(\cos x + 1)(\cos 2x - 1)}{\sin^2 x} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

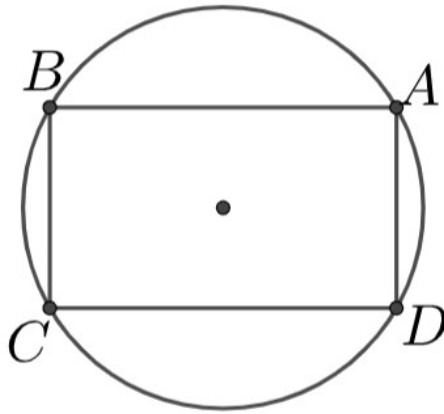
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2\sin^2 x = 1 \\ \cos x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0 (l) \\ \cos x = -1 (l) \end{cases}$$

Vậy phương trình vô nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

c) Với $m = \frac{1}{2}$, Ta có $\frac{(\cos x + 1)(\cos 2x - \frac{1}{2})}{\sin x} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \text{ (loại)} \\ \cos 2x = \frac{1}{2} \text{ (2)} \end{cases}$.

$$\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{6} + l\pi \end{cases}$$

Ta có :



Khi đó, các điểm biểu diễn của nghiệm là A, B, C, D

Diện tích $S_{ABCD} = AB \cdot BC = \sqrt{3} \cdot 1 = \sqrt{3}$.

d) Với $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$: không có nghiệm $x \in \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.

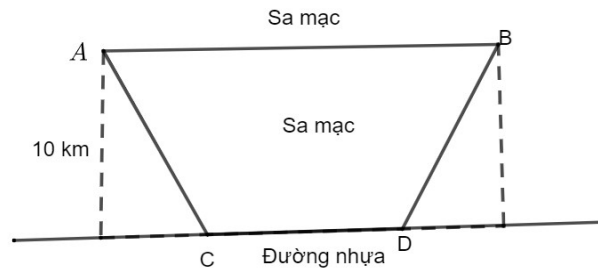
Với $\cos 2x = m$, đặt $2x = t \Rightarrow t \in \left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$

Trên $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$, phương trình $\cos t = m$ có 2 nghiệm phân biệt thuộc $\left[0; \frac{4\pi}{3}\right]$ khi $-1 < m \leq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow -4 < 4m \leq -2$ nên $4m \in \{-3; -2\}$

Vậy. d) đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

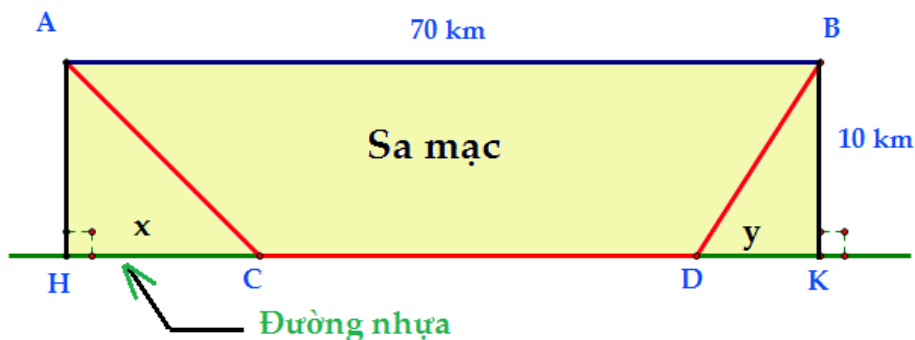
Câu 1: Một nhà địa chất học đang ở tại điểm A trên sa mạc. Anh ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 70 km . Trong sa mạc thì xe anh ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc là 30 km/h . Nhà địa chất phải đến được điểm B sau 2 giờ. Vì vậy, nếu anh ta đi từ A đến B sẽ không thể đến đúng giờ được. May mắn thay, có một con đường nhựa song song với đường nối A và B và cách AB một đoạn 10 km . Trên đường nhựa đó thì xe nhà địa chất này có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h . Thời gian ngắn nhất để nhà địa chất di chuyển từ A đến B là bao nhiêu phút.



Lời giải

Đáp số: 116

Ta có thể mô tả bài toán trên bằng hình vẽ sau:



Như đã phân tích ở trên, nếu đi trực tiếp từ A đến B trên sa mạc với vận tốc và khoảng cách hiện có thì nhà địa chất học không thể đến đúng thời gian quy định.

Vì vậy cần thiết phải chia quãng đường đi được thành 3 giai đoạn:

Giai đoạn 1: đi từ A đến C (từ sa mạc đến đường nhựa song song).

Giai đoạn 2: đi từ C đến D (một quãng đường nào đó trên đường nhựa).

Giai đoạn 3: đi từ D đến B (từ điểm kết thúc D trên đường nhựa đi tiếp đến B bằng qua sa mạc).

Gọi H, K, C, D là các điểm như hình vẽ.

Khi đó gọi $HC = x$ ($0 < x < 70$) và $DK = y$ ($0 < y < 70$).

Quãng đường đi từ A đến C là

$$AC = \sqrt{100 + x^2} \Rightarrow t_1 = \frac{AC}{v_{\text{sa mạc}}} = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30}$$

Quãng đường đi từ D đến B là

$$DB = \sqrt{100 + y^2} \Rightarrow t_2 = \frac{DB}{v_{\text{sa mạc}}} = \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30}$$

Và quãng đường đi C đến D là

$$CD = 70 - (x + y) \Rightarrow t_3 = \frac{CD}{v_{\text{đường nhựa}}} = \frac{70 - (x + y)}{50}$$

Vậy tổng thời gian mà nhà địa chất học đi từ A đến B là $t = t_1 + t_2 + t_3$.

$$\Rightarrow t = T(x; y) = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \frac{70 - (x + y)}{50}$$

Đến đây ta cần tìm $\min T(x; y)$.

Ta có
$$T(x; y) = \frac{\sqrt{10^2 + x^2}}{30} + \frac{35 - x}{50} + \frac{\sqrt{10^2 + y^2}}{30} + \frac{35 - y}{50} = f(x) + f(y)$$

Xét hàm số:
$$f(u) = \frac{\sqrt{100 + u^2}}{30} + \frac{35 - u}{50}, \quad 0 < u < 70$$

Ta có:
$$f'(u) = \frac{u}{30\sqrt{100 + u^2}} - \frac{1}{50}, \quad f'(u) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{10^2 + u^2} = \frac{5u}{3} > 0 \Leftrightarrow u = \frac{15}{2}$$

Lập bảng biến thiên ta có:
$$\min_{u \in (0; 70)} f(u) = f\left(\frac{15}{2}\right) = \frac{29}{30}$$

Do đó ta có:
$$T(x; y) = f(x) + f(y) \geq \frac{29}{30} + \frac{29}{30} = \frac{29}{15} (h) = 116 \text{ (phút)}.$$

Dấu “=” xảy ra khi
$$x = y = \frac{15}{2}.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên tập R , biết $f'(x) = x^{2024}(x-2)^{2025}(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4)$, $\forall x \in R$. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên của tham số m để đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị. Tính tổng tất cả các giá trị của các phần tử của tập hợp S .

Lời giải

Đáp số: 9.

$f'(x) = x^{2024}(x-2)^{2025}(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4) = x^{2024}(x-2)^{2024}(x-2)(x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4)$. Để đồ thị hàm số $y = g(x) = f(|x|)$ có 5 điểm cực trị thì đồ thị hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị có hoành độ dương. (Nghĩa là hàm số $y = f(x)$ có hai điểm cực trị dương)

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \\ x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4 = 0 \quad (1) \end{cases}$$

Ta có

Có $x = 0$ là nghiệm bội chẵn, $x = 2$ là nghiệm bội lẻ.

Vậy $x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4 = 0 \quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 2$, có một nghiệm $x \leq 0$

$$m^2 - 3m - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = 4 \end{cases}$$

Trường hợp 1: Có nghiệm $x = 0$ khi đó

Với $m = -1, m = 4$ ta được
$$x^2 - 8x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 8 \end{cases} \quad (tm)$$

Trường hợp 2: $x^2 - 8x + m^2 - 3m - 4 = 0 \quad (1)$ có hai nghiệm phân biệt, có một nghiệm dương $x \neq 2$, có một nghiệm âm điều kiện tương đương

$$\begin{cases} m^2 - 3m - 4 < 0 \\ 2^2 - 8.2 + m^2 - 3m - 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m^2 - 3m - 16 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 4 \\ m \neq \frac{3 \pm \sqrt{73}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < m < 4.$$

Vì $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 0, m = 1, m = 2, m = 3$.

Tập hợp các giá trị tham số m thỏa mãn là $S = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.

Suy ra tổng các giá trị của tham số m thỏa mãn là $T = -1 + 0 + 4 + 3 + 2 + 1 = 9$.

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; 2; 0), B(2; 0; -2)$ và điểm $M(a, b, c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi thỏa mãn $a + 2b - c - 1 = 0$. Biết $MA = MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Tính $S = a.b.c$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Đáp số: 0

Vì $MA = MB$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực (P) của đoạn AB .

Ta có $(P): y + z = 0$ nên $\begin{cases} b + c = 0 \\ a + 2b - c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -b \\ a = 1 - 3b \end{cases}$.

$$\overrightarrow{MA} = (1 + 3b; 2 - b; b), \overrightarrow{MB} = (1 + 3b; -b; -2 + b)$$

$$\Rightarrow \cos \widehat{AMB} = \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}}{|\overrightarrow{MA}| \cdot |\overrightarrow{MB}|} = \frac{(1 + 3b)^2 + 2b(b - 2)}{\sqrt{(1 + 3b)^2 + (b - 2)^2 + b^2} \cdot \sqrt{(1 + 3b)^2 + (b - 2)^2 + b^2}}$$

$$= \frac{9b^2 + 6b + 1 + 2b^2 - 4b}{9b^2 + 6b + 1 + 2b^2 - 4b + 4} = \frac{11b^2 + 2b + 1}{11b^2 + 2b + 5}$$

Xét $f(b) = \frac{11b^2 + 2b + 1}{11b^2 + 2b + 5}$ có $f'(b) = \frac{4(22b + 2)}{11b^2 + 2b + 5} = 0 \Rightarrow b = -\frac{1}{11}$.

Nhận thấy $f(b)$ nhỏ nhất tại $b = -\frac{1}{11} \Rightarrow a = \frac{14}{11}, c = \frac{1}{11}$

Khi đó $S = a.b.c = -1,3$.

Câu 4: Bạn Hoa chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Bạn Bình chọn ngẫu nhiên 3 số phân biệt trong tập hợp $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ và sắp xếp chúng theo thứ tự giảm dần để tạo thành một số gồm ba chữ số. Tìm xác suất sao cho số của Hoa lớn hơn số của Bình (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 0,66

Xét hai trường hợp

Trường hợp 1: Hoa chọn được số 9.

Trong trường hợp này số của Hoa chắc chắn lớn hơn số của Bình.

$$\frac{C_8^2}{C_9^3} = \frac{1}{3}.$$

Xác suất Hoa chọn được số 9 là

Trường hợp 2. Hoa không chọn được số 9.

$$\frac{C_8^3}{C_9^3} = \frac{2}{3}.$$

Xác suất để Hoa không chọn được số 9 là

Trong trường hợp này Hoa chọn số cùng tập với Bình nên xác suất Hoa chọn được số lớn hơn cũng bằng xác suất Bình chọn được số lớn hơn.

Ta tính xác suất để 2 bạn chọn được cùng số:

- Số cách chọn của hai bạn là: $C_8^3 \cdot C_8^3$

- Số cách để Hoa chọn được ba số bất kỳ là C_8^3 ; Ứng với mỗi cách chọn của Hoa thì Bình chỉ có một cách chọn để giống Hoa nên số cách hai người chọn được số giống nhau là C_8^3

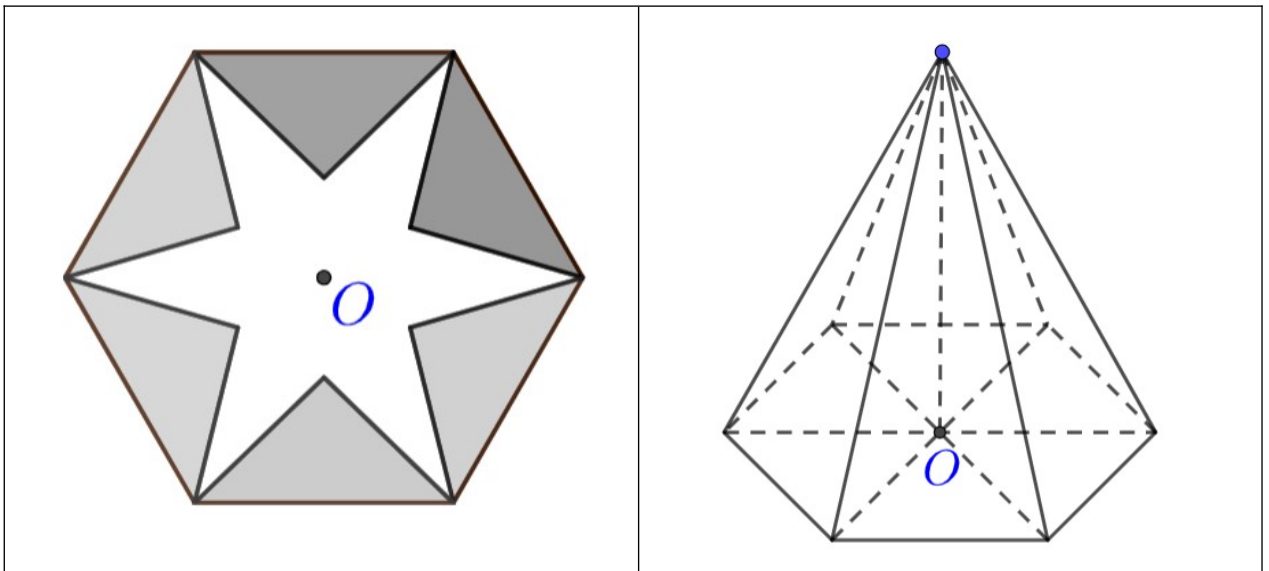
Vậy, xác suất để 2 bạn chọn được cùng số là $\frac{C_8^3}{C_8^3 \cdot C_8^3} = \frac{3!}{8 \cdot 7 \cdot 6} = \frac{1}{56}$ nên xác suất để Hoa chọn

được số lớn hơn là: $\frac{1 - \frac{1}{56}}{2} = \frac{55}{112}.$

Do đó xác suất trong trường hợp này là $\frac{2}{3} \cdot \frac{55}{112} = \frac{55}{168}.$

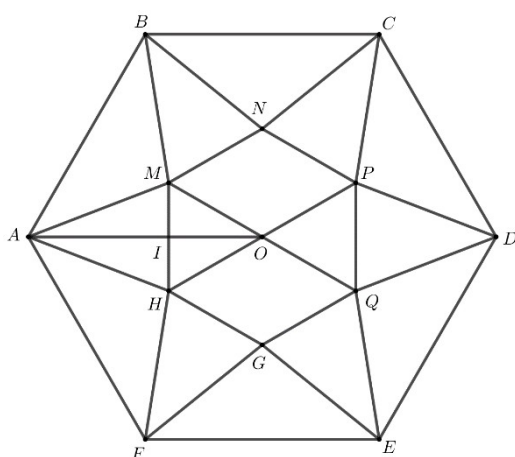
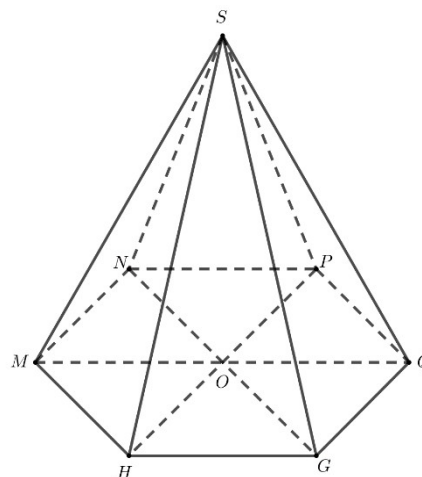
Vậy, xác suất cần tìm là $\frac{1}{3} + \frac{55}{168} = \frac{37}{56}.$

Câu 5: Cho tấm tôn hình lục giác đều cạnh $24cm$ như hình vẽ dưới đây. Người ta cần làm một hình chóp lục giác đều bằng cách cắt bỏ đi các phần tô đậm là các tam giác cân, sau đó gập và hàn lại (các đường hàn không đáng kể) thành hình chóp lục giác đều (như hình vẽ dưới đây). Thể tích lớn nhất khối chóp tạo thành bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp số: 1142



Chiều cao $SO = \sqrt{(24 - OI)^2 - OI^2} = \sqrt{24^2 - 48OI}$

Diện tích đáy bằng $\frac{3\sqrt{3}}{2} OM^2 = 2\sqrt{3} OI^2$

Do đó thể tích khối chóp tạo thành là: $\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(24^2 - 48OI)} OI^4$

Vì $\frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{(24^2 - 48OI)} OI^4 = \frac{1}{72\sqrt{3}} \sqrt{(24^2 - 48OI)(12OI)^4} \leq \frac{36864\sqrt{15}}{125}$

Vậy thể tích lớn nhất bằng $\frac{36864\sqrt{15}}{125} \text{ cm}^3 \approx 1142 \text{ cm}^3$

Câu 6: Cho hàm số $f(x) = 4^{-x} - 4^x - \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Tìm số giá trị nguyên $m \in [-2024; 2024]$ để bất phương trình $f(x^2 + 2mx + \sin x) + f(4x - \sin x - 2m + 11) \geq 0$ nghiệm đúng $\forall x \in [2; 6]$?

Lời giải

Đáp án: 2013

Hàm số $f(x)$ có TXĐ là $\mathbb{R}$ vì $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} \geq |x| \geq -x \Rightarrow x + \sqrt{1+x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Ta thấy rằng: $f(x)$ là hàm lẻ vì:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 4^x - 4^{-x} - \ln(-x + \sqrt{1+x^2}) = 4^x - 4^{-x} - \ln\left(\frac{1}{x + \sqrt{1+x^2}}\right) \\ &= 4^x - 4^{-x} + \ln(x + \sqrt{1+x^2}) = -f(x) \end{aligned}$$

Đạo hàm $f'(x) = -4^{-x} \ln 2 - 4^x \ln 2 - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến

Từ bất phương trình giả thiết: $f(x^2 + 2mx + \sin x) + f(4x - \sin x - 2m + 11) \geq 0$

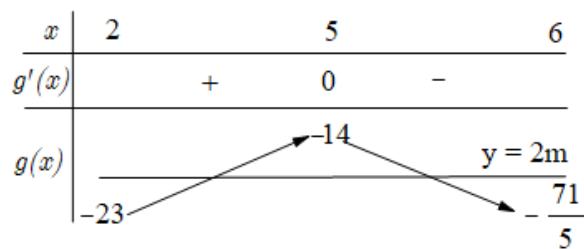
$$\Leftrightarrow f(x^2 + 2mx + \sin x) \geq -f(4x - \sin x - 2m + 11)$$

$$\Leftrightarrow f(x^2 + 2mx + \sin x) \geq f(-4x + \sin x + 2m - 11)$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(m+2)x + 11 - 2m \leq 0 \quad \text{đúng với } \forall x \in [2; 6]$$

$$\Rightarrow 2m(x-1) \leq -x^2 - 4x - 11 \Leftrightarrow 2m \leq \frac{-x^2 - 4x - 11}{x-1} = g(x) \quad \text{đúng với } \forall x \in [2; 6]$$

Ta có bảng biến thiên như bên dưới:



Suy ra: $2m \leq -23 \Rightarrow m \leq -\frac{23}{2}$. Do $m \in \mathbb{Q}, m \in [-2024; 2024]$
 $\Rightarrow m \in \{-2024; -2023; -2022; -2021; \dots; -12\}$.

Vậy có 2013 giá trị m nguyên thỏa mãn bài toán.