

CHUYÊN ĐỀ 14. CÁC DẠNG TOÁN THỰC LŨY THỪA-LOGARIT. HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN CẦN NẮM

1. Phép tính lũy thừa với số mũ nguyên

Cho số thực a khác 0 và số nguyên dương n . Ta đặt $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Chú ý

- 0^0 và 0^{-n} (n nguyên dương) không có nghĩa.
- Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

2. Căn bậc n

a) Định nghĩa

Cho số thực a và số nguyên dương n ($n \geq 2$). Số b được gọi là căn bậc n của số a nếu $b^n = a$.

Nhận xét

- Với n lẻ và $a \in \mathbb{R}$: Có duy nhất một căn bậc n của a , kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.
- Với n chẵn, ta xét ba trường hợp sau:
 - $a < 0$: Không tồn tại căn bậc n của a ;
 - $a = 0$: Có một căn bậc n của a là số 0;
 - $a > 0$: Có hai căn bậc n của a là hai số đối nhau, giá trị dương kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$, còn giá trị âm kí hiệu là $-\sqrt[n]{a}$.

b) Tính chất

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{nếu } n \text{ lẻ} \\ |a| & \text{nếu } n \text{ chẵn;} \end{cases}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}; \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$$

(Ở mỗi công thức trên, ta giả sử các biểu thức xuất hiện trong đó là có nghĩa).

3. Phép tính lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \frac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Lũy thừa của a với số mũ r xác định

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

bởi:

Nhận xét

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} (a > 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2)$$

•

- Luỹ thừa với số mũ hữu tỉ của số thực dương có đầy đủ các tính chất của lũy thừa với số mũ nguyên.

4. Phép tính lũy thừa với số mũ thực

a) Định nghĩa

Cho a là số thực dương, α là số vô tỉ, (r_n) là dãy số hữu tỉ và $\lim r_n = \alpha$. Giới hạn của dãy số (a^{r_n}) gọi là lũy thừa của a với số mũ α , kí hiệu a^α , $a^\alpha = \lim a^{r_n}$.

b) Tính chất

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tùy ý. Khi đó, ta có:

$$a^\alpha \cdot a^\beta = a^{\alpha+\beta}; \quad (ab)^\alpha = a^\alpha \cdot b^\alpha; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha = \frac{a^\alpha}{b^\alpha};$$

$$\frac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}; \quad (a^\alpha)^\beta = a^{\alpha\beta};$$

- Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Nếu $0 < a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

- Cho $0 < a < b, \alpha$ là một số thực. Ta có:

$$a^\alpha < b^\alpha \Leftrightarrow \alpha > 0; \quad a^\alpha > b^\alpha \Leftrightarrow \alpha < 0.$$

5. Khái niệm lôgarit

a) Định nghĩa

Với $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$, ta có: $c = \log_a b \Leftrightarrow a^c = b$. Ngoài ra:

- Lôgarit thập phân của b là lôgarit cơ số 10 của số thực dương b : $c = \log b \Leftrightarrow 10^c = b$;
- Lôgarit tự nhiên của b là lôgarit cơ số e của số thực dương b : $c = \ln b \Leftrightarrow e^c = b$.

b) Tính chất

$$a > 0, a \neq 1 \quad b > 0$$

Với và , ta có:

$$\log_a 1 = 0 \quad \log_a a = 1 \quad \log_a a^c = c \quad a^{\log_a b} = b.$$

6. Một số tính chất của phép tính lôgarit

Trong mục này, ta xét $a > 0, a \neq 1$ và $b > 0$.

a) Lôgarit của một tích, một thương

Với $m > 0, n > 0$, ta có:

$$\log_a (mn) = \log_a m + \log_a n; \quad \log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$$

$$\log_a \left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$$

Nhận xét:

b) Lôgarit của một lũy thừa

Với mọi số thực α , ta có: $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$.

Nhận xét: Với mọi số nguyên dương $n \geq 2$, ta có: $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n} \log_a b$.

c) Đổi cơ số của lôgarit

Với a, b là hai số thực dương khác 1 và c là số thực dương, ta có: $\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$.

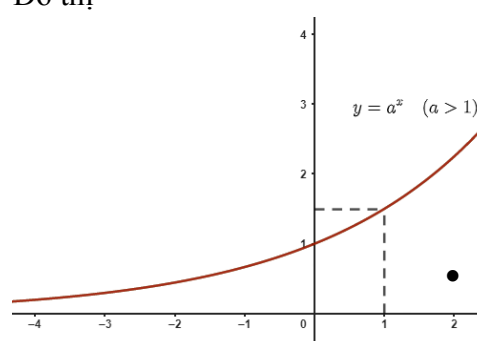
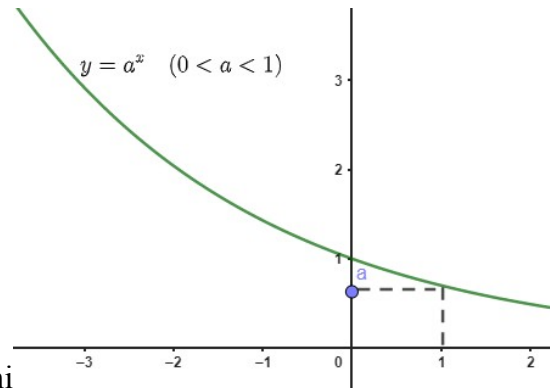
Nhận xét: Với a, b là hai số thực dương khác 1, $c > 0$ và $\alpha \neq 0$, ta có những công thức sau:

$$\log_a b \cdot \log_b c = \log_a c; \quad \log_a b = \frac{1}{\log_b a}; \quad \log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha} \log_a b.$$

7. Hàm số mũ

Cho số thực $a (a > 0, a \neq 1)$. Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a .

Xét hai trường hợp:

$y = a^x (a > 1)$	$y = a^x (0 < a < 1)$																
<p>Tập xác định: $\mathbb{R}$; tập giá trị: $(0; +\infty)$</p> <p>Tính liên tục</p> <p>Hàm số $y = a^x (a > 1)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.</p> <p>Giới hạn đặc biệt</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty.$ <p>Sự biến thiên</p> <p>Hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.</p> <p>Bảng biến thiên</p> <table><tr><th>x</th><th>$-\infty$</th><th>0</th><th>$+\infty$</th></tr><tr><td>$y = a^x$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table> <p>Đồ thị</p> 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$y = a^x$	0	1	$+\infty$	<p>Tập xác định: $\mathbb{R}$; tập giá trị: $(0; +\infty)$</p> <p>Tính liên tục</p> <p>Hàm số $y = a^x (0 < a < 1)$ là hàm số liên tục trên $\mathbb{R}$.</p> <p>Giới hạn đặc biệt</p> $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0.$ <p>Sự biến thiên</p> <p>Hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.</p> <p>Bảng biến thiên</p> <table><tr><th>x</th><th>$-\infty$</th><th>0</th><th>$+\infty$</th></tr><tr><td>$y = a^x$</td><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>0</td></tr></table> 	x	$-\infty$	0	$+\infty$	$y = a^x$	$+\infty$	1	0
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$y = a^x$	0	1	$+\infty$														
x	$-\infty$	0	$+\infty$														
$y = a^x$	$+\infty$	1	0														

8. Hàm số lôgarit

Cho số thực $a (a > 0, a \neq 1)$. Hàm số $y = \log_a x$ được gọi là hàm số lôgarit cơ số a . Xét hai trường hợp:

$y = \log_a x, (a > 1)$	$y = \log_a x, (0 < a < 1)$																														
<p>1. Tập xác định: $(0; +\infty)$</p> <p>2. Sự biến thiên.</p> $y' = \frac{1}{x \ln a} > 0, \forall x > 0$ <p>→ hàm số luôn đồng biến trên $(0; +\infty)$</p> <p>Giới hạn đặc biệt:</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty.$ <p>Tiệm cận: Oy là tiệm cận đứng</p> <p>3. Bảng biến thiên.</p> <table><tr><th>x</th><td>0</td><td>1</td><td>a</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><th>y'</th><td></td><td>+</td><td>+</td><td>+</td></tr><tr><th>y</th><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr></table> <p>4. Đồ thị</p>	x	0	1	a	$+\infty$	y'		+	+	+	y	$-\infty$	0	1	$+\infty$	<p>1. Tập xác định: $(0; +\infty)$</p> <p>2. Sự biến thiên.</p> $y' = \frac{1}{x \ln a} < 0, \forall x > 0$ <p>→ hàm số luôn nghịch biến trên $(0; +\infty)$</p> <p>Giới hạn đặc biệt:</p> $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty.$ <p>Tiệm cận: Oy là tiệm cận đứng.</p> <p>3. Bảng biến thiên.</p> <table><tr><th>x</th><td>0</td><td>a</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><th>y'</th><td></td><td>-</td><td>-</td><td>-</td></tr><tr><th>y</th><td>$+\infty$</td><td>1</td><td>0</td><td>$-\infty$</td></tr></table> <p>4. Đồ thị</p>	x	0	a	1	$+\infty$	y'		-	-	-	y	$+\infty$	1	0	$-\infty$
x	0	1	a	$+\infty$																											
y'		+	+	+																											
y	$-\infty$	0	1	$+\infty$																											
x	0	a	1	$+\infty$																											
y'		-	-	-																											
y	$+\infty$	1	0	$-\infty$																											

B. BÀI TẬP VẬN DỤNG

Câu 1: Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt

Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1 AU khoảng 93 000 000 dặm) (**Nguồn: R.I. Challes et al., Algebra 2, Pearson**)

Hỏi Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)? Biết khoảng cách từ Sao Hỏa đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Sao Hỏa quay quanh Mặt Trời thì mất số năm Trái Đất là:

$$P = d^{\frac{3}{2}} = 1.52^{\frac{3}{2}} \approx 1,87 \text{ (năm)}$$

Câu 2: Với một chỉ vàng, giả sử người thợ lành nghề có thể dát mỏng thành lá vàng rộng 1m^2 và dày khoảng $1,94 \cdot 10^{-7}\text{m}$. Đồng xu 5000 đồng dày $2,2 \cdot 10^{-3}\text{m}$. Cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng? Làm tròn kết quả đến chữ số hàng trăm.

Lời giải

Để có độ dày bằng đồng xu loại 5000 đồng ta cần chồng bao nhiêu lá vàng như trên là:

$$(2,2 \cdot 10^{-3}) : (1,94 \cdot 10^{-7}) \approx 11300 \text{ (lá vàng)}$$

Câu 3: Tại một xí nghiệp, công thức $P(t) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{3}}$ được dùng để tính giá trị còn lại (tính theo triệu đồng) của một chiếc máy sau thời gian t (tính theo năm) kể từ khi đưa vào sử dụng.

a) Tính giá trị còn lại của máy sau 2 năm; sau 2 năm 3 tháng.

b) Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng bao nhiêu phần trăm so với ban đầu?

Lời giải

a) Với $t = 2 : P(2) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 314,98$ (triệu đồng)

2 năm 3 tháng $= 2,25$ năm.

Với $t = 2,25 : P(2,25) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2,25}{3}} \approx 297,3$ (triệu đồng)

b) Với $t = 1 : P(1) = 500 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \approx 396,85$ (triệu đồng)

Sau 1 năm đưa vào sử dụng, giá trị còn lại của máy bằng: $396,85 : 500 \cdot 100 = 79,37\%$ so với ban đầu.

Câu 4: Nếu một khoản tiền gốc P được gửi ngân hàng với lãi suất hằng năm r (được biểu thị dưới dạng số thập phân), được tính lãi n lần trong một năm, thì tổng số tiền A nhận được (cả vốn

lẫn lãi) sau N kì gửi cho bởi công thức sau:

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{Nn}$$

Hỏi nếu bác An gửi tiết kiệm số tiền 120 triệu đồng theo kì hạn 6 tháng với lãi suất không đổi là 5% một năm, thì số tiền thu được (cả vốn lẫn lãi) của bác An sau 2 năm là bao nhiêu?

Lời giải

Với số tiền gốc $P = 120$ triệu đồng, lãi suất $r = 0.05$ (vì lãi suất được biểu thị dưới dạng số thập phân), và số kỳ gửi trong một năm $n = 2$ (vì một năm có 2 kỳ gửi 6 tháng), số kỳ gửi trong 2 năm là $N = 4$.

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^N = 120 \left(1 + \frac{0.05}{2} \right)^4 \approx 136.047$$

Áp dụng công thức tính lãi suất kép: triệu đồng.

Vậy sau 2 năm, bác An sẽ nhận được khoản tiền là khoảng 136.047 triệu đồng (cả vốn lẫn lãi).

Câu 5: Năm 2021, dân số của một quốc gia ở châu Á là 19 triệu người. Người ta ước tính rằng dân số của quốc gia này sẽ tăng gấp đôi sau 30 năm nữa. Khi đó dân số A (triệu người) của quốc gia đó sau t năm kể từ năm 2021 được ước tính bằng công thức $A = 19 \cdot 2^{\frac{t}{30}}$. Hỏi với tốc độ tăng dân số như vậy thì sau 20 năm nữa dân số của quốc gia này sẽ là bao nhiêu? (Làm tròn kết quả đến chữ số hàng triệu).

Lời giải

Sau 30 năm, dân số của quốc gia sẽ tăng gấp đôi, tức là sẽ đạt mức 38 triệu người. Ta có công

thức tính tỉ số tăng trưởng dân số là: $2 = 2^{\frac{t}{30}}$

Từ đó, ta có thể tìm được số năm tương ứng với tốc độ tăng dân số như vậy là:

$$\frac{t}{30} = \log_2 2 = 1 \Rightarrow t = 30$$

Vậy sau 30 năm kể từ năm 2021, tức là năm 2051, dân số của quốc gia này sẽ đạt mức 38 triệu người.

Để tính dân số sau 20 năm kể từ năm 2021, ta có thể tính tỉ số tăng trưởng dân số trong 20 năm như sau:

$$2^{\frac{20}{30}} = 2^{\frac{2}{3}}$$

Vậy dân số của quốc gia này sau 20 năm, tức là năm 2041, sẽ đạt mức: $19 \times 2^{\frac{2}{3}} \approx 27.076$ triệu người

Câu 6: Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

Lời giải

$$\text{Ta có } pH = -\log[H^+] = -\log 8 \cdot 10^{-8} \approx 7,1$$

=> Độ pH của đầm đó không thích hợp để tôm sú phát triển.

Câu 7: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng $5 \cdot 10^{-13}$ gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần (Nguồn: Câu hỏi và Câu tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008). Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi

sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6 \cdot 10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Số lượng tế bào đạt tới khối lượng của Trái Đất là:

$$N = 6 \cdot 10^{27} : (5 \cdot 10^{-13}) = 1,2 \cdot 10^{40}$$

Số lần phân chia:

$$N = N_o \cdot 2^n \Rightarrow n = \frac{\log N - \lg N_o}{\lg 2} = 133$$

Thời gian cần thiết là:

$$133 : 3 = 44,3 \text{ (giờ)}$$

- Câu 8:** a) Nước cất có nồng độ H^+ là 10^{-7} mol/L. Tính độ pH của nước cất.
b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Lời giải

$$pH = -\log[H^+] = -\log[10^{-7}] = 7$$

a) Độ pH của nước cất là:

b) Nồng độ H^+ của dung dịch đó là: $20 \cdot 10^{-7}$ mol/L

Độ pH của dung dịch đó là: $pH = -\log[H^+] = -\log[20 \cdot 10^{-7}] \approx 5,7$

- Câu 9:** Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là

$$a = 15500(5 - \log p)$$

trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal).

Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao 8850 m so với mực nước biển.

Lời giải

Để tính áp suất không khí ở độ cao 8.850 m, ta thay $a = 8.850$ vào công thức và giải phương trình để tìm giá trị của p .

Ta có: $a = 15.500(5 - \log p). 8.850 = 15.500(5 - \log p)$

$$5 - \log p = \frac{8.850}{15.500}$$

$$\log p = 5 - \frac{8.850}{15.500}$$

$$\log p = 3.407$$

$$p = 10^3 \cdot 407 \approx 245,37 \text{ Pa}$$

Vậy áp suất không khí ở độ cao 8.850 m so với mực nước biển là khoảng $245,37 \text{ Pa}$.

Câu 10: Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét

vuông, kí hiệu là W / m^2) được định nghĩa như sau:

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

trong đó $I_0 = 10^{-12} \text{ W} / \text{m}^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là *ngưỡng nghe*).

Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7} \text{ W} / \text{m}^2$.

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $I = 10^{-3} \text{ W} / \text{m}^2$.

Lời giải

$$L(I) = 10 \log \frac{I}{I_0}$$

a) Áp dụng công thức:

$$L(10^{-7}) = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10 \log 10^5 = 10 \times 5 = 50 \text{ dB}$$

$$L(10^{-3}) = 10 \log \frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10 \log 10^9 = 10 \times 9 = 90 \text{ dB}$$

b) Thay các giá trị ta có:

Câu 11: (*Vận dụng thực tiễn*) Giả sử cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó: I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là một hằng số dương, d là độ sâu tính từ mặt nước biển (tính bằng mét).

a) Ở một vùng biển cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng 95% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển. Tính giá trị của hằng số a .

b) Tại độ sâu 15 m ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt nước biển? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Từ giả thiết, ta có $d = 1$ và $I = \frac{95}{100} I_0$. Thay vào biểu thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được:

$$a^d = \frac{I}{I_0} = \frac{95}{100}$$

Mà $d = 1$ nên $a = \frac{95}{100} = \frac{19}{20}$. Vậy $a = \frac{19}{20}$.

b) Từ giả thiết, ta có $d = 15$. Thay $d = 15$ và $a = \frac{19}{20}$ vào công thức $I = I_0 \cdot a^d$, ta được:

$$\frac{I}{I_0} = a^d = \left(\frac{19}{20} \right)^{15} \approx 0,46$$

Như vậy, tại độ sâu $15m$ ở vùng biển đó, cường độ ánh sáng bằng 45% cường độ ánh sáng tại mặt nước biển.

Câu 12: Giả sử một lọ nuôi cấy có 100 con vi khuẩn lúc ban đầu và số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi sau mỗi 2 giờ. Khi đó số vi khuẩn N sau t (giờ) sẽ là $N = 100.2^{\frac{t}{2}}$ (con). Hỏi sau $3\frac{1}{2}$ giờ sẽ có bao nhiêu con vi khuẩn?

Lời giải

Thay $t = 3\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ (giờ) vào công thức ta được số vi khuẩn sau $3\frac{1}{2}$ giờ là:

$$N = 100.2^{\frac{7}{2}} = 100.2^{\frac{7}{2}} \approx 336 \text{ (con)}.$$

Câu 13: Chu kì dao động (tính bằng giây) của một con lắc có chiều dài là L (tính bằng mét) được cho bởi $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}}$. Nếu một con lắc có chiều dài $19,6m$, hãy tính chu kì T của con lắc này (làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất).

Lời giải

Thay $L = 19,6$ vào công thức ta được chu kì dao động của con lắc là:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{9,8}} = 2\pi\sqrt{\frac{19,6}{9,8}} \approx 8,9 \text{ (giây)}$$

Câu 14: Định luật thứ ba của Kepler nói rằng bình phương chu kì quỹ đạo P (tính bằng năm Trái Đất) của một hành tinh chuyển động xung quanh Mặt Trời (theo quỹ đạo của bán trục lớn d (tính bằng đơn vị thiên văn AU).

a) Tính P theo d .

b) Nếu Sao Thổ có chu kì quỹ đạo là 29,46 năm Trái Đất, hãy tính bán trục lớn quỹ đạo của Sao Thổ đến Mặt Trời (kết quả tính theo đơn vị thiên văn và làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Theo định luật thứ ba của Kepler, ta có: $P^2 = d^3$ hay $P = \sqrt{d^3}$

b) Thay $P = 29,46$ vào công thức $P = \sqrt{d^3}$, ta được: $d \approx 9,54 AU$

Câu 15: Khoảng cách từ một hành tinh đến Mặt Trời có thể xấp xỉ bằng một hàm số của độ dài năm của hành tinh đó. Công thức của hàm số đó là $d = \sqrt[3]{6t^2}$ trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời (tính bằng triệu dặm) và t là độ dài năm của hành tinh đó (tính bằng số ngày Trái Đất)

(Theo Algebra 2, NXB MacGraw-Hill, 2008)

a) Nếu độ dài của một năm trên Sao Hoả là 687 ngày Trái Đất thì khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là bao nhiêu?

b) Tính khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời (coi một năm trên Trái Đất có 365 ngày).

(Kết quả của câu a và câu b tính theo đơn vị triệu dặm và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thay $t = 687$ vào công thức ta được khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là:

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6 \cdot 687^2} \approx 141,48 \text{ (triệu dặm)}$$

b) Thay $t = 365$ vào công thức ta được khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời là:

$$d = \sqrt[3]{6t^2} = \sqrt[3]{6 \cdot 365^2} \approx 92,81 \text{ (triệu dặm)}$$

Câu 16: (*Vận dụng thực tiễn*) Trong Hoá học, độ pH của một dung dịch được tính theo công thức $pH = -\log[H^+]$, trong đó $[H^+]$ là nồng độ ion hydrogen tính bằng mol/lít. Nếu $pH < 7$ thì dung dịch có tính acid, nếu $pH > 7$ thì dung dịch có tính base và nếu $pH = 7$ thì dung dịch là trung tính.

a) Tính độ Ph của dung dịch có nồng độ ion hydrogen bằng 0,001 mol/l.

b) Xác định nồng độ ion hydrogen của một dung dịch có độ $pH = 8$.

c) Khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Thay $[H^+] = 0,001$ vào công thức, ta được $pH = -\log[H^+] = -\log 0,001 = 3$. Vậy độ pH của dung dịch bằng 3.

b) Thay $pH = 8$ vào công thức, ta được $8 = -\log[H^+]$, do đó $[H^+] = 10^{-8} \text{ mol/l}$. Vậy nồng độ ion hydrogen trong dung dịch là $[H^+] = 10^{-8}$.

c) Thay vào công thức ta thấy khi pH tăng 1 đơn vị thì nồng độ ion hydrogen của dung dịch giảm đi 10 lần.

Câu 17: Biết rằng số chữ số của một số nguyên dương N viết trong hệ thập phân được cho bởi công thức $[logN] + 1$, ở đó $[logN]$ là phần nguyên của số thực dương $logN$. Tìm số các chữ số của 2^{2023} khi viết trong hệ thập phân.

Lời giải

Số các chữ số của 2^{2023} là: $[log 2^{2023}] + 1 = [2023 \cdot log 2] + 1 = 609$

Câu 18: Khi gửi tiết kiệm P (đồng) theo thể thức trả lại kép định kì với lãi suất mỗi kì là r (r cho dưới dạng số thập phân) thì số tiền A (cả vốn lẫn lãi) nhận được sau t kì gửi là $A = P(1+r)^t$ (đồng). Tính thời gian gửi tiết kiệm cần thiết để số tiền ban đầu tăng gấp đôi.

Lời giải

Để số tiền ban đầu tăng gấp đôi thì $A = 2P$. Thay $A = 2P$ vào công thức lãi kép ta có:

$$2P = P(1+r)^t \Rightarrow (1+r)^t = 2 \Rightarrow t = \log_{1+r} 2 \text{ (năm)}$$

Câu 19: Một người gửi tiết kiệm 100 triệu đồng vào ngân hàng theo thể thức lãi kép kì hạn 6 tháng với lãi suất 8% một năm. Giả sử lãi suất không thay đổi. Hỏi sau bao lâu người đó nhận được ít nhất 120 triệu đồng?

Lời giải

Lãi suất năm là 8% nên lãi suất kì hạn 6 tháng sẽ là $r = 4\% = 0,04$. Thay

$P = 100; r = 0,04; A = 120$ vào công thức $A = P(1 + r)^t$, ta được:

$$120 = 100(1 + 0,04)^t \Rightarrow 1,2 = 1,04^t \Rightarrow t = \log_{1,04} 1,2 \approx 4,65$$

Vậy sau 5 kì gửi tiết kiệm kì hạn 6 tháng, tức sau 30 tháng, người đó sẽ nhận được ít nhất 120 triệu đồng.

Câu 20: Nồng độ cồn trong máu (BAC) là chỉ sử dụng để đo lượng cồn trong máu của một người. Chẳng hạn, BAC 0,02% hay 0,2 mg/ml, nghĩa là có 0.02 g cồn trong 100 ml máu. Nếu một người với BAC bằng 0,02% có nguy cơ bị tai nạn ô tô cao gấp 14 lần so với một người không uống rượu, thì nguy cơ tương đối của tai nạn với BAC 0,02%. Nghiên cứu y tế gần đây cho thấy rằng nguy cơ tương đối của việc gặp tai nạn khi đang lái ô tô có thể được mô hình hóa bằng một phương trình có dạng $R = e^{kx}$, trong đó $x(\%)$ là nồng độ cồn trong máu và k là một hằng số,

a) Nghiên cứu chỉ ra rằng nguy cơ tương đối của một người bị tai nạn với BAC bằng 0,02% là 1,4. Tìm hằng số k trong phương trình.

b) Nguy cơ tương đối là bao nhiêu nếu nồng độ cồn trong máu là 0,17%?

c) Tìm BAC tương ứng với nguy cơ tương đối là 100.

d) Giả sử nếu một người lái xe có nguy cơ tương đối từ 5 trở lên sẽ không được phép lái xe, thì một người có nồng độ cồn trong máu từ bao nhiêu trở lên sẽ không được phép lái xe?

Lời giải

a) Thay $R = 1,4; x = 0,02\%$ vào công thức ta được $1,4 = e^{k \frac{0,02}{100}} \Rightarrow k \approx 1682,36$

b) $R = e^{1682,36 \frac{0,17}{100}} \approx 17,46$

c) Thay $R = 100$ vào công thức, ta được $100 = e^{1682,36x} \Rightarrow x \approx 0,27\%$

d) Với $R \geq 5$ thì $x \geq 0,096\%$, tức là một người có nồng độ cồn trong máu từ khoảng 0,096% trở lên thì không được lái xe.

Câu 21: Định luật thứ ba của Kepler về quỹ đạo chuyển động cho biết cách ước tính khoảng thời gian P (tính theo năm Trái Đất) mà một hành tinh cần để hoàn thành một quỹ đạo quay quanh Mặt Trời. Khoảng thời gian đó được xác định bởi hàm số $P = d^{\frac{3}{2}}$, trong đó d là khoảng cách từ hành tinh đó đến Mặt Trời tính theo đơn vị thiên văn AU (1 AU là khoảng cách từ Trái Đất đến Mặt Trời, tức là 1AU khoảng 93000000 dặm) (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Hỏi Sao Hoả quay quanh Mặt Trời thì mất bao nhiêu năm Trái Đất (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn)? Biết khoảng cách từ Sao Hoả đến Mặt Trời là 1,52 AU.

Lời giải

Thời gian để Sao Hoả quay quanh Mặt Trời là:

$$P = d^{\frac{3}{2}} = 1,52^{\frac{3}{2}} \approx 1,874 \text{ (năm Trái Đất)}$$

Câu 22: Một chất phóng xạ có chu kì bán rã là 25 năm, tức là cứ sau 25 năm, khối lượng của chất phóng xạ đó giảm đi một nửa. Giả sử lúc đầu có 10 g chất phóng xạ đó. Viết công thức tính khối lượng của chất đó còn lại sau t năm và tính khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn theo đơn vị gam).

Lời giải

Công thức tính khối lượng của chất phóng xạ đó còn lại sau t năm là:

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{25}} \text{ (g)}.$$

Khối lượng của chất đó còn lại sau 120 năm là:

$$m = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{120}{25}} \approx 0,359 \text{ (g)}.$$

Câu 23: Trong nuôi trồng thủy sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khỏe và sự phát triển của thủy sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $[H^+](\text{mol L}^{-1})$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $[H^+] = 8 \cdot 10^{-8}$ (Nguồn: <https://nongnghiep.farmvina.com>). Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không? Biết $\text{pH} = -\log[H^+]$.

Lời giải

$$\text{pH} = -\log[H^+] = -\log(8 \cdot 10^{-8}) \approx 7,097$$

Độ pH của đầm đó là:

Do $7,097 < 7,2$ nên đầm đó không thích hợp cho tôm sú phát triển.

Câu 24: Để tính độ tuổi của mẫu vật bằng gỗ, người ta đo độ phóng xạ của ^{14}C có trong mẫu vật tại thời điểm t (năm) (so với thời điểm ban đầu $t = 0$), sau đó sử dụng công thức tính độ phóng xạ $H = H_0 e^{-\lambda t}$ (đơn vị là Becquerel, kí hiệu Bq) với H_0 là độ phóng xạ ban đầu (tại thời điểm $t = 0$); $\lambda = \frac{\ln 2}{T}$ là hằng số phóng xạ, $T = 5730$ (năm) (Nguồn: Vật lí 12 Nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2014). Khảo sát một mẫu gỗ cổ, các nhà khoa học đo được độ phóng xạ là $0,215 \text{ Bq}$. Biết độ phóng xạ của mẫu gỗ tươi cùng loại là $0,250 \text{ Bq}$. Xác định độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi t là độ tuổi của mẫu gỗ cổ.

Ta có: $H = H_0 e^{-\lambda t}$ với $H = 0,215; H_0 = 0,250; \lambda = \frac{\ln 2}{5730}$.

Từ đó, $\lambda t = \ln \frac{H_0}{H} = \ln \frac{0,250}{0,215} \approx 0,1508$. Vậy $t \approx \frac{0,1508}{\lambda} \approx 1247$.

Vậy độ tuổi của mẫu gỗ cổ đó xấp xỉ 1247 năm.

Câu 25: Cường độ ánh sáng tại độ sâu h (m) dưới một mặt hồ được tính bằng công thức $I_h = I_0 \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{h}{4}}$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt hồ đó.

a) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng bao nhiêu phần trăm so với cường độ ánh sáng tại mặt hồ?

b) Cường độ ánh sáng tại độ sâu 3 m gấp bao nhiêu lần cường độ ánh sáng tại độ sâu 6 m?

Lời giải

$$\frac{I_1}{I_0} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 0,84 = 84\%$$

a)

$$\frac{I_3}{I_6} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{4} - \frac{6}{4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{3}{4}} \approx 1,68$$

b) (lần).

Câu 26: Ta coi năm lấy làm mốc để tính dân số của một vùng (hoặc một quốc gia) là năm 0. Khi đó, dân số của quốc gia đó ở năm thứ t là hàm số theo biến t được cho bởi công thức: $S = A \cdot e^{rt}$. Trong đó A là dân số của vùng (hoặc quốc gia) đó ở năm 0 và r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm (Nguồn: Giải tích 12, NXBGD Việt Nam, 2021). Biết rằng dân số Việt Nam năm 2021 ước tính là 98564407 người và tỉ lệ tăng dân số 0,93%/năm (Nguồn: <https://danso.org/viet-nam>). Giả sử tỉ lệ tăng dân số hằng năm là như nhau tính từ năm 2021, nêu dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$S = A \cdot e^{rt}$$

Ta có: , trong đó:

S là dân số của Việt Nam năm 2030 (cần dự đoán).

A là dân số của Việt Nam năm 2021, đã biết là 98,564,407 người.

r là tỉ lệ tăng dân số hằng năm, đã biết là 0,93%

$$t = 2030 - 2021 = 9$$

t là số năm từ năm 2021 đến năm 2030, tức là 9 năm.

$$S = 98,564,407.e^{(0,0093,9)}$$

Thay các giá trị vào công thức, ta có:

$$S \approx 107169341$$

Sau khi tính toán, ta có kết quả: người.

Vậy dự đoán dân số Việt Nam năm 2030 là khoảng 107 triệu người.

Câu 27: Các nhà tâm lý học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được (Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson). Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em học sinh là $k = 0,2$. Hỏi em học sinh sẽ nhớ được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày?

Lời giải

Để tính số đơn vị kiến thức học sinh đã học được sau một số ngày nhất định, ta chỉ cần thay giá

$$f(t) = c(1 - e^{(-kt)})$$

trị của t vào công thức, trong đó:

$$t = 2$$

Số đơn vị kiến thức học sinh đã học được sau 2 ngày: Thay vào công thức

$$f(t) = c(1 - e^{(-kt)})$$

$$f(t) = 25$$

$$k = 0.2$$

, và biết rằng (số đơn vị kiến thức đã học được), (tốc độ tiếp thu), ta có:

$$f(2) = c(1 - e^{-kt}) = 25.(1 - e^{-0,2.2}) \approx 8$$

(đơn vị)

Trong 8 ngày, em học sinh nhớ được:

$$f(t) = c(1 - e^{-kt}) = 25.(1 - e^{-0,2.8}) \approx 20$$

(đơn vị)

Câu 28: Chỉ số hay độ pH của một dung dịch được tính theo công thức: $pH = -\log[H^+]$. Phân tích nồng độ ion hydrogen $[H^+]$ trong hai mẫu nước sông, ta có kết quả sau:

$$1: [H^+] = 8 \cdot 10^{-7}; \quad 2: [H^+] = 2 \cdot 10^{-9}$$

Mẫu

Mẫu

.

Không dùng máy tính cầm tay, hãy so sánh độ pH của hai mẫu nước trên.

Lời giải

Độ pH của mẫu 1 là:

$$pH = -\log[8 \cdot 10^{-7}] = -(\log 8 + \log 10^{-7}) = -(\log 8 - 7\log 10) = 7 - \log 8 = 7 - 3\log 2$$

Độ pH của mẫu 2 là:

$$pH = -\log[2 \cdot 10^{-9}] = -(\log 2 + \log 10^{-9}) = 9 - \log 2$$

$$7 < 9$$

$$-3\log 2 < -\log 2$$

Nhận thấy $\Rightarrow 7 - 3\log 2 < 9 - \log 2$.

Câu 29: Một người gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và người đó không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), người đó

sử dụng công thức $y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right)$. Hỏi sau bao nhiêu năm thì người đó có được tổng số tiền cả vốn và lãi là 15 triệu đồng? 20 triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$\text{Có } y = \log_{1,06} \frac{15}{10} \approx 7$$

Vậy sau ít nhất 7 năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó.

Câu 30: Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số ($a > 0$) và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <https://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

a) Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.

b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .

c) Tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải

$$I = I_0 \cdot a^d$$

a) Vì cường độ ánh sáng giảm dần theo độ sâu nên hàm số nghịch biến.

$$0 < a < 1$$

Vậy .

$$I = I_0 \cdot a^d \Leftrightarrow 0,95I_0 = I_0 \cdot a^1 \Leftrightarrow a = 0,95$$

b) Ta có:

$$I = I_0 \cdot a^d = I_0 \cdot 0,95^{20} \approx 0,36I_0$$

c) Ta có:

Vậy tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng 36% phần trăm so với I_0

Câu 31: Công thức $h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$ là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng kilômét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa – đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <https://doi.org/10.1007/s40828-020-01111-6>)

- a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2} P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?
- b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

Lời giải

- a) Độ cao của máy bay khi áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2} P_0$ là:

$$h = -19,4 \cdot \log \frac{\frac{1}{2} P_0}{P_0} = -19,4 \cdot \log \frac{1}{2} \approx 5,84 \text{ (km)}$$

$$h_A = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0}$$

- b) Độ cao của ngọn núi A là:

$$h_B = -19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0}$$

Độ cao của ngọn núi B là:

Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B nên ta có:

$$P_A = \frac{4}{5} P_B \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{4}{5}$$

Ta có:

$$h_A - h_B = \left(-19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} \right) - \left(-19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} + 19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0}$$

$$= -19,4 \log \left(\frac{P_A}{P_0} : \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \log \frac{P_A}{P_B} = -19,4 \log \frac{4}{5} \approx 1,88 \text{ (km)}$$

Vậy ngọn núi A cao hơn ngọn núi B 1,88km.

Câu 32: Cường độ ánh sáng I dưới mặt biển giảm dần theo độ sâu theo công thức $I = I_0 \cdot a^d$, trong đó I_0 là cường độ ánh sáng tại mặt nước biển, a là hằng số ($a > 0$) và d là độ sâu tính bằng mét tính từ mặt nước biển.

(Nguồn: <https://www.britannica.com/science/seawater/Optical-properties>)

- a) Có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$ không? Giải thích.
- b) Biết rằng cường độ ánh sáng tại độ sâu 1 m bằng $0,95I_0$. Tìm giá trị của a .
- c) Tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng bao nhiêu phần trăm so với I_0 ? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.)

Lời giải

$$I = I_0 \cdot a^d$$

- a) Vì cường độ ánh sáng giảm dần theo độ sâu nên hàm số nghịch biến.

$$0 < a < 1$$

Vậy

$$I = I_0 \cdot a^d \Leftrightarrow 0,95I_0 = I_0 \cdot a^1 \Leftrightarrow a = 0,95$$

- b) Ta có:

$$I = I_0 \cdot a^d = I_0 \cdot 0,95^{20} \approx 0,36I_0$$

- c) Ta có:

Vậy tại độ sâu 20 m, cường độ ánh sáng bằng 36% phần trăm so với I_0

$$h = -19,4 \cdot \log \frac{P}{P_0}$$

Câu 33: Công thức là mô hình đơn giản cho phép tính độ cao h so với mặt nước biển của một vị trí trong không trung (tính bằng kilômét) theo áp suất không khí P tại điểm đó và áp suất P_0 của không khí tại mặt nước biển (cùng tính bằng Pa – đơn vị áp suất, đọc là Pascal).

(Nguồn: <https://doi.org/10.1007/s40828-020-01111-6>)

- a) Nếu áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ thì máy bay đang ở độ cao nào?

- b) Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B. Ngọn núi nào cao hơn và cao hơn bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười.)

$$\frac{1}{2}P_0$$

a) Độ cao của máy bay khi áp suất không khí ngoài máy bay bằng $\frac{1}{2}P_0$ là:

$$h = -19,4 \cdot \log \frac{\frac{1}{2}P_0}{P_0} = -19,4 \cdot \log \frac{1}{2} \approx 5,84 \text{ (km)}$$

$$h_A = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0}$$

b) Độ cao của ngọn núi A là:

$$h_B = -19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0}$$

Độ cao của ngọn núi B là:

Áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi A bằng $\frac{4}{5}$ lần áp suất không khí tại đỉnh của ngọn núi B nên ta có:

$$P_A = \frac{4}{5}P_B \Leftrightarrow \frac{P_A}{P_0} = \frac{4}{5}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} h_A - h_B &= \left(-19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} \right) - \left(-19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \cdot \log \frac{P_A}{P_0} + 19,4 \cdot \log \frac{P_B}{P_0} \\ &= -19,4 \log \left(\frac{P_A}{P_0} : \frac{P_B}{P_0} \right) = -19,4 \log \frac{P_A}{P_B} = -19,4 \log \frac{4}{5} \approx 1,88 \text{ (km)} \end{aligned}$$

Vậy ngọn núi A cao hơn ngọn núi B 1,88km.

Câu 34: (Vận dụng thực tiễn) Trong Vật lí, sự phân rã của các chất phóng xạ được biểu diễn bằng công

thức: $m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}}$, trong đó m_0 là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm ban đầu $t=0$, $m(t)$ là khối lượng của chất phóng xạ tại thời điểm t , T là chu kì bán rã (là thời gian để một nửa số nguyên tử của chất phóng xạ bị biến thành chất khác). Biết rằng đồng vị plutonium-234 có chu kì bán rã khoảng 9 giờ. Từ khối lượng plutonium-234 ban đầu là ^{100}g , hãy tính khối lượng plutonium-234 còn lại sau:

a) 9 giờ; b) 1 ngày.

(Kết quả tính theo gam và làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

a) Thay $t = 9, T = 9, m_0 = 100$ vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{9}{9}} = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50 \text{ (g)}.$$

$$= 24 \quad t = 24, T = 9, m_0 = 100$$

b) Do 1 ngày 24 giờ nên thay vào công thức, ta được:

$$m(t) = m_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{t}{T}} = 100 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{24}{9}} \approx 15,75 \text{ (g)}.$$

Câu 35: Nếu một ô kính ngăn khoảng 3% ánh sáng truyền qua nó thì phần trăm ánh sáng P truyền qua n ô kính liên tiếp được cho gần đúng bởi hàm số sau: $P(n) = 100 \cdot (0,97)^n$.

a) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 10 ô kính?

b) Có bao nhiêu phần trăm ánh sáng sẽ truyền qua 25 ô kính? (Kết quả ở câu a và câu b được làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$a) P(10) = 100 \cdot (0,97)^{10} \approx 74\% \quad P(25) = 100 \cdot (0,97)^{25} \approx 47\%$$

. b)

Câu 36: Số tiền ban đầu 120 triệu đồng được gửi tiết kiệm với lãi suất năm không đổi là 6%. Tính số tiền (cả vốn lẫn lãi) thu được sau 5 năm nếu nó được tính lãi kép:

a) hằng quý; b) hằng tháng; c) liên tục.

(Kết quả được tính theo đơn vị triệu đồng và làm tròn đến chữ số thập phân thứ ba).

Lời giải

Để giải câu a và câu b, ta sử dụng công thức lãi kép theo định kì để tính tổng số tiền thu được

$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^t$, trong đó P là số tiền vốn ban đầu, r là lãi suất năm (r cho dưới dạng số thập phân), n là số kì tính lãi trong một năm và t là số kì gửi.

a) Ta có: $P = 120, r = 6\% = 0,06, n = 4, t = 20$. Thay vào công thức trên, ta được:

$$A = 120 \left(1 + \frac{0,06}{4} \right)^{20} = 120 \cdot 1,015^{20} \approx 161,623 \text{ (triệu đồng)}$$

$$P = 120, r = 6\% = 0,06, n = 12, t = 60$$

b) Ta có: . Thay vào công thức trên, ta được:

$$A = 120 \left(1 + \frac{0,06}{12} \right)^{60} = 120 \cdot 1,005^{60} \approx 161,862 \text{ (triệu đồng)}$$

c) Ta sử dụng công thức lãi kép liên tục $A = Pe^{rt}$, ở đây r là lãi suất năm (cho dưới dạng số thập phân) và t là số năm gửi tiết kiệm.

$$P = 120, r = 6\% = 0,06, t = 5 \quad A = 120 \cdot e^{0,06 \cdot 5} = 120 \cdot e^{0,3} \approx 161,983$$

Ta có: nên (triệu đồng).

Câu 37: Chu kì bán rã của đồng vị phóng xạ Radi 226 là khoảng 1600 năm. Giả sử khối lượng m (tính bằng gam) còn lại sau t năm của một lượng Radi 226 được cho bởi công thức:

$$m = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{1600}}$$

- a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?
- b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là bao nhiêu?

Lời giải

a) Khối lượng ban đầu (khi $t = 0$) của lượng Radi 226 đó là

$$m(0) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 25 \text{ (g)}$$

b) Sau 2500 năm khối lượng của lượng Radi 226 đó là

$$m(2500) = 25 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2500}{1600}} \approx 8,46 \text{ (g)}$$

Câu 38: Trong Vật lí, mức cường độ âm (tính bằng deciben, kí hiệu là dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{I_0}$, trong đó I là cường độ âm tính theo W / m^2 và $I_0 = 10^{-12} \text{ W} / \text{m}^2$ là cường độ âm chuẩn, tức là cường độ âm thấp nhất mà tai người có thể nghe được.

a) Tính mức cường độ âm của một cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm là $10^{-7} \text{ W} / \text{m}^2$.

b) Khi cường độ âm tăng lên 1000 lần thì mức cường độ âm (đại lượng đặc trưng cho độ to nhỏ của âm) thay đổi thế nào?

Lời giải

a) Mức cường độ âm của cuộc trò chuyện bình thường có cường độ âm $10^{-7} \text{ W} / \text{m}^2$ là

$$L = 10 \log \frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 50 \text{ (dB)}$$

$$10 \log \frac{1000I}{I_0} = 10 \cdot \left(\log 1000 + \log \frac{I}{I_0} \right) = 30 + 10 \log \frac{I}{I_0}$$

b) Ta có: . Vậy mức cường độ âm tăng lên 30 dB.

Câu 39: Các nhà tâm lý học sử dụng mô hình hàm số mũ để mô phỏng quá trình học tập của một học sinh như sau: $f(t) = c(1 - e^{-kt})$, trong đó c là tổng số đơn vị kiến thức học sinh phải học, k (kiến thức/ngày) là tốc độ tiếp thu của học sinh, t (ngày) là thời gian học và $f(t)$ là số đơn vị kiến thức học sinh đã học được.
(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson).

Giả sử một em học sinh phải tiếp thu 25 đơn vị kiến thức mới. Biết rằng tốc độ tiếp thu của em $k = 0,2$ học sinh là . Hỏi em học sinh sẽ học được (khoảng) bao nhiêu đơn vị kiến thức mới sau 2 ngày? Sau 8 ngày (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Sau 2 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$$f(2) = 25 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 2}) \approx 8 \text{ đơn vị kiến thức}$$

Sau 8 ngày, em học sinh đó học được số đơn vị kiến thức mới là:

$$f(8) = 25 \cdot (1 - e^{-0,2 \cdot 8}) \approx 20 \text{ đơn vị kiến thức}$$

Câu 40: Cô Yên gửi 10 triệu đồng vào ngân hàng theo hình thức lãi kép có kì hạn là 12 tháng với lãi suất 6%/năm. Giả sử qua các năm thì lãi suất không thay đổi và cô Yên không gửi thêm tiền vào mỗi năm. Để biết sau y (năm) thì tổng số tiền cả vốn và lãi có được là x (đồng), cô Yên sử dụng công thức $y = \log_{1,06} \left(\frac{x}{10} \right)$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu năm thì cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng từ tài khoản tiết kiệm đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Cô Yên có thể rút ra được số tiền 15 triệu đồng sau ít nhất số năm là:

$$y = \log_{1,06} \left(\frac{15}{10} \right) \approx 7 \text{ (năm)}.$$

Câu 41: Các nhà khoa học xác định được chu kì bán rã của $^{14}_6\text{C}$ là 5730 năm, tức là sau 5730 năm thì số nguyên tử $^{14}_6\text{C}$ giảm đi một nửa.

a) Gọi m_0 là khối lượng của $^{14}_6\text{C}$ tại thời điểm $t = 0$. Viết công thức tính khối lượng $m(t)$ của $^{14}_6\text{C}$ tại thời điểm t (năm).

b) Một cây còn sống có lượng $^{14}_6\text{C}$ trong cây được duy trì không đổi. Nhưng nếu cây chết thì lượng $^{14}_6\text{C}$ trong cây phân rã theo chu kì bán rã của nó. Các nhà khảo cổ đã tìm thấy một mẫu

gỗ cổ được xác định chết cách đây 2000 năm. Tính tỉ lệ phần trăm lượng $^{14}_6\text{C}$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

$$a) \quad m(t) = m_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}.$$

b) Tỷ lệ phần trăm lượng $^{14}_6\text{C}$ còn lại trong mẫu gỗ cổ đó so với lúc còn sinh trưởng là:

$$\frac{m(2000)}{m_0} \cdot 100\% = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}} \cdot 100\% \approx 78,5\%.$$

Câu 42: Mức cường độ âm L (dB) được tính bởi công thức $L = 10 \log \frac{I}{10^{-12}}$, trong đó I (W / m^2) là cường độ âm. Tai người có thể nghe được âm có cường độ âm từ $10^{-12} \text{ W} / \text{m}^2$ đến $10 \text{ W} / \text{m}^2$. Tính mức cường độ âm mà tai người có thể nghe được.

Lời giải

Mức cường độ âm tai người có thể nghe được từ 0 dB đến 130 dB.

Câu 43: Sau khi bệnh nhân uống một liều thuốc, lượng thuốc còn lại trong cơ thể giảm dần và được tính theo công thức $D(t) = D_0 \cdot a^t$ (mg), trong đó D_0 và a là các hằng số dương, t là thời gian tính bằng giờ kể từ thời điểm uống thuốc.

a) Tại sao có thể khẳng định rằng $0 < a < 1$?

b) Biết rằng bệnh nhân đã uống 100mg thuốc và sau 1 giờ thì lượng thuốc trong cơ thể còn 80mg. Hãy xác định giá trị của D_0 và a .

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc đã giảm đi bao nhiêu phần trăm so với lượng thuốc ban đầu?

Lời giải

a) Do lượng thuốc trong cơ thể giảm dần, nên hàm số $D(t)$ nghịch biến, do đó $0 < a < 1$.

$$b) \quad D_0 = 100, a = \frac{80}{100} = 0,8.$$

c) Sau 5 giờ, lượng thuốc còn $D(5) = 100 \cdot 0,8^5$. Tỷ lệ lượng thuốc đã giảm so với lượng thuốc

$$\frac{D_0 - D(5)}{D_0} = \frac{100 - 100 \cdot 0,8^5}{100} \approx 0,6723 \approx 67,23\%$$

ban đầu là