

Họ và
tên:

Số báo danh: Mã đề 0101

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Tìm $I = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x+1}$.

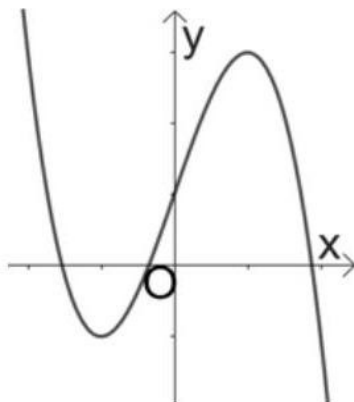
A. $I = \frac{1}{2}$.

B. $I = 1$.

C. $I = +\infty$.

D. $I = 0$.

Câu 2. Hàm số nào dưới đây có đồ thị như hình vẽ?



A. $f(x) = x^3 + 3x + 1$.

B. $f(x) = -x^3 + 3x - 1$.

C. $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

D. $f(x) = x^3 - 3x - 1$.

Câu 3. Thống kê điểm thi tốt nghiệp môn Toán THPT năm 2024 của lớp 12D tại một trường THPT thu được kết quả như sau:

Nhóm	$[3; 4)$	$[4; 5)$	$[5; 6)$	$[6; 7)$	$[7; 8)$	$[8; 9)$	$[9; 10]$
Tần số	3	4	5	10	15	10	5

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu thống kê trên bằng

A. 10.

B. 7.

C. 6.

D. 8.

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của M lên trục Ox .

A. $(2; 0; 0)$.

B. $(3; 0; 0)$.

C. $(1; 0; 0)$.

D. $(1; 0; 3)$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

Điểm cực tiểu của hàm số $y = f(x)$ là

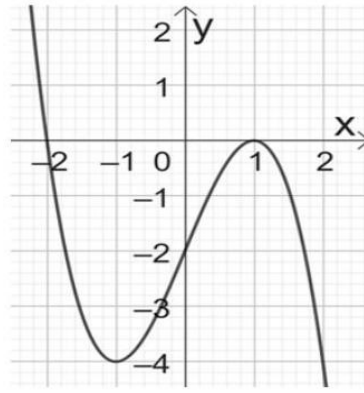
A. $x = 1$.

B. $x = 3$.

C. $x = -1$.

D. $x = 5$.

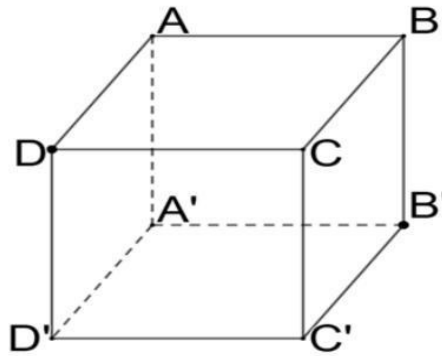
Câu 6. Cho hàm số $y = -x^3 + 3x - 2$ có đồ thị như hình vẽ.



Tâm đối xứng của đồ thị hàm số đã cho là

- A. $J(0; -2)$. B. $O(0; 0)$. C. $I(-2; 0)$. D. $K(0; 2)$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Xét phép chiếu song song theo phương $A'A$ lên mặt phẳng $(ABCD)$. Ảnh của đoạn thẳng $A'C'$ qua phép chiếu song song đó là



- A. đoạn thẳng $A'C$. B. đoạn thẳng AB .
C. đoạn thẳng BD . D. đoạn thẳng AC .

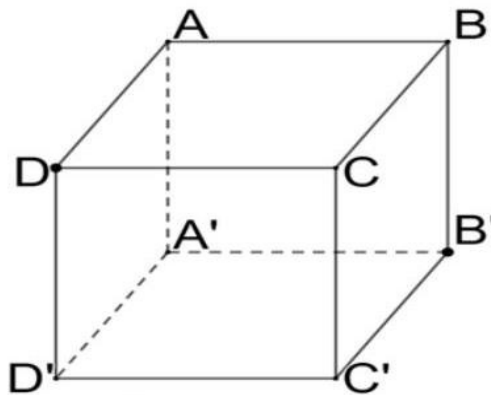
Câu 8. Trong các dãy số có số hạng tổng quát dưới đây, dãy số nào là dãy số tăng?

- A. $\frac{1}{3^n}$. B. $n+1$. C. $1+\frac{1}{n}$. D. $6-2n$.

Câu 9. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2(x-1) > 3$ là

- A. $(1; +\infty)$. B. $(1; 9)$. C. $(9; +\infty)$. D. $(-\infty; 9)$.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có cạnh bằng 1. Tích vô hướng của hai vec tơ $\overrightarrow{CC'}$ và $\overrightarrow{A'A}$ bằng



- A. 0 . B. -1 . C. 2 . D. 1 .

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình nào sau đây là phương trình tổng quát của một mặt phẳng?

A. $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$. B. $x-1=0$. C. $x^2+y^2+z^2-4=0$. D. $\frac{2}{x} + \frac{1}{y} - \frac{3}{z} = 0$.

Câu 12. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{a} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$. Độ dài của $\vec{a}$ là

A. $\sqrt{17}$. B. 35 . C. 17 . D. $\sqrt{35}$.

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý **a), b), c), d)** ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một hợp tác xã (viết tắt là HTX) nông nghiệp tại Nghệ An đầu tư dự án trồng dưa lưới nhà màng VietGAP. Xét trong một vụ canh tác, với diện tích x (nghìn $m^2, x \geq 1$), tổng chi phí là $C(x) = x^2 + 30x + 100$ (triệu đồng). Tổng doanh thu dự kiến là $R(x) = x^2 + 100x$ (triệu đồng).

a) Hàm số lợi nhuận của HTX sau một vụ canh tác là $L(x) = 70x - 100$ (triệu đồng).

b) Nếu HTX muốn đạt mức lợi nhuận là 250 triệu đồng cho một vụ thì diện tích canh tác cần thiết là 5 nghìn m^2 .

c) Chi phí trung bình trên mỗi đơn vị diện tích được định nghĩa là $P(x) = \frac{C(x)}{x}$. Khi diện tích canh tác tăng từ 1 nghìn m^2 đến 11 nghìn m^2 thì chi phí trung bình luôn giảm.

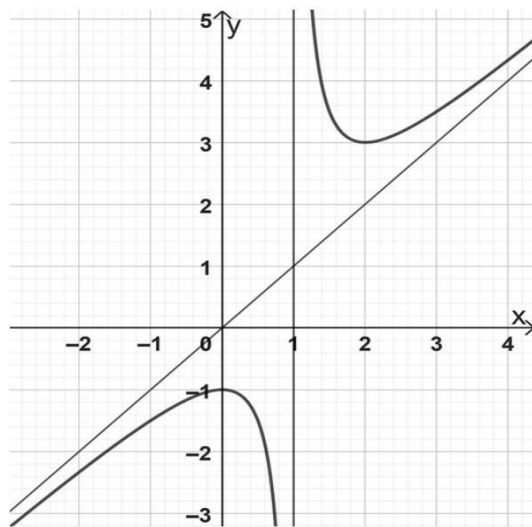
d) Để đồng vốn đầu tư đạt hiệu quả cao nhất (tỉ lệ lợi nhuận trên tổng chi phí $Q(x) = \frac{L(x)}{C(x)}$ đạt giá trị lớn nhất), HTX cần tính toán để chi phí trung bình trên mỗi đơn vị diện tích $P(x)$ đạt mức thấp nhất.

Câu 2. Cho hàm số $y = -x - \frac{1}{x-1}$ có đồ thị là đường cong (C).

a) Đường thẳng $x = 1$ là tiệm cận đứng của đường cong (C).

b) $f'(x) = \frac{-x^2 + 2x}{x-1}, \forall x \neq 1$.

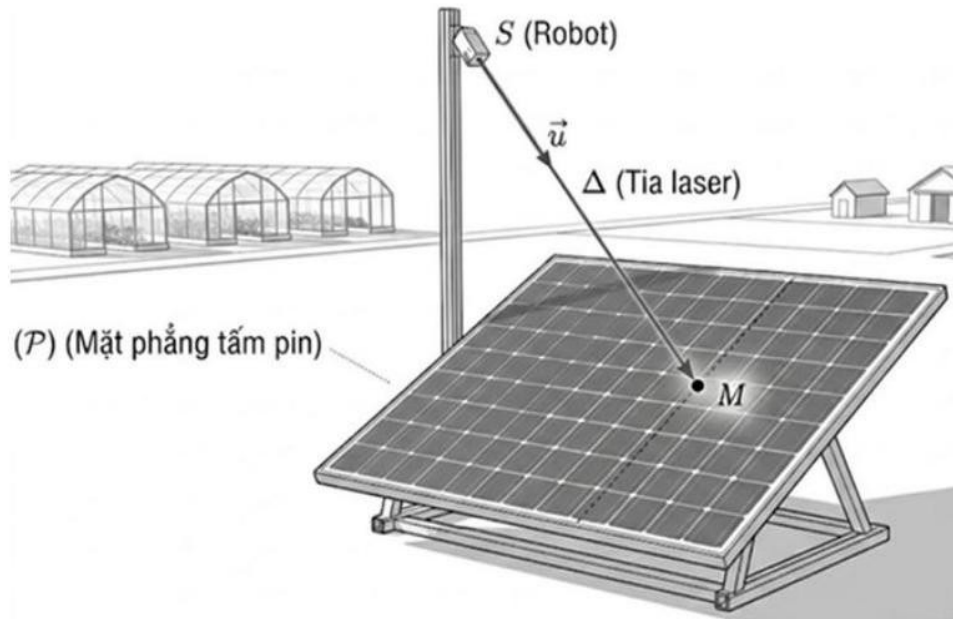
c) Điểm cực đại của hàm số là $N(2; 3)$.



d) Đường cong (C) có dạng như hình vẽ:

Câu 3. Trong một mô hình nông nghiệp công nghệ cao, một tấm pin năng lượng mặt trời phẳng được lắp đặt nghiêng sao cho bề mặt của nó nằm trên mặt phẳng $(P): 2x + 2y + z - 6 = 0$ (xét trong hệ không gian tọa độ $Oxyz$ với đơn vị đo là mét, mặt phẳng (Oxy) được xem là mặt đất phẳng). Người ta lắp đặt một robot cố

định ở trên cao để kiểm tra bụi bẩn. Robot có mắt phát tia laser tại điểm $S(1;1;6)$. Robot thực hiện quét tia laser trên bề mặt tấm pin. Tại một thời điểm tia laser được chiếu theo đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -2)$ và chạm vào bề mặt tấm pin tại điểm M .



a) Khoảng cách từ mắt phát tia laser S đến mặt phẳng (P) bằng $\frac{4}{3}$ mét.

b) Điểm M có tọa độ là $(1; 1; 2)$.

c) Góc α hợp bởi tia laser Δ và mặt phẳng (P) thỏa mãn hệ thức $\sin \alpha = \frac{4}{9}$.

d) Khi vệ sinh, nước được phun trúng điểm chạm của tia laser trên tấm pin sẽ tạo thành dòng nước chảy trên bề mặt pin xuống đất theo hướng dốc nhất, quỹ đạo chảy của dòng nước nằm trên một đường thẳng.

Đường thẳng đó có một vector chỉ phương là $\vec{v} = (1; 1; 3)$.

Câu 4. Để tuyển chọn thành viên cho Câu lạc bộ Toán - Tin, nhà trường tổ chức một bài thi đánh giá năng lực (thang điểm 100) cho 100 học sinh. Kết quả điểm thi được thống kê trong bảng số liệu ghép nhóm gồm 6 nhóm như sau:

Điểm số	$[40; 50)$	$[50; 60)$	$[60; 70)$	$[70; 80)$	$[80; 90)$	$[90; 100)$
Số học sinh	10	15	25	30	15	5

An và Bình là hai học sinh tham gia thi, đạt số điểm lần lượt là 82 điểm và 69,5 điểm. Ban chủ nhiệm Câu lạc bộ đưa ra quy định phân loại dựa trên các chỉ số thống kê của toàn bộ mẫu số liệu như sau:

Xếp loại "xuất sắc": Điểm số lớn hơn hoặc bằng tứ phân vị thứ ba.

Xếp loại "tiềm năng": Điểm số từ mức điểm trung vị đến dưới tứ phân vị thứ ba.

Xếp loại "chưa đạt": Điểm số dưới mức điểm trung vị.

Một điều hết sức thú vị là không có học sinh nào có điểm số bằng một trong ba giá trị tứ phân vị.

a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm này là 60.

b) Điểm trung vị của 100 học sinh tham gia kỳ thi là 71 điểm.

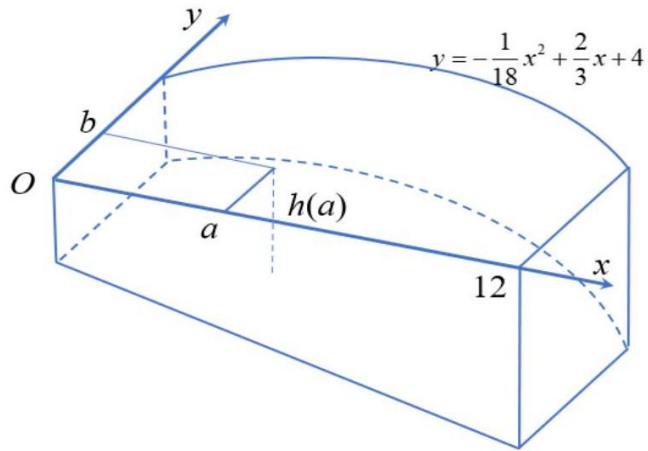
c) Mặc dù Bình xếp loại chưa đạt, nhưng điểm số của Bình vẫn cao hơn mức điểm trung bình.

d) Để đánh giá chất lượng đề thi, ban tổ chức chọn ngẫu nhiên 4 học sinh tham gia kỳ thi để phỏng vấn. Xác suất để nhóm 4 học sinh được chọn có đầy đủ đại diện của cả 3 nhóm xếp loại và luôn có mặt An là

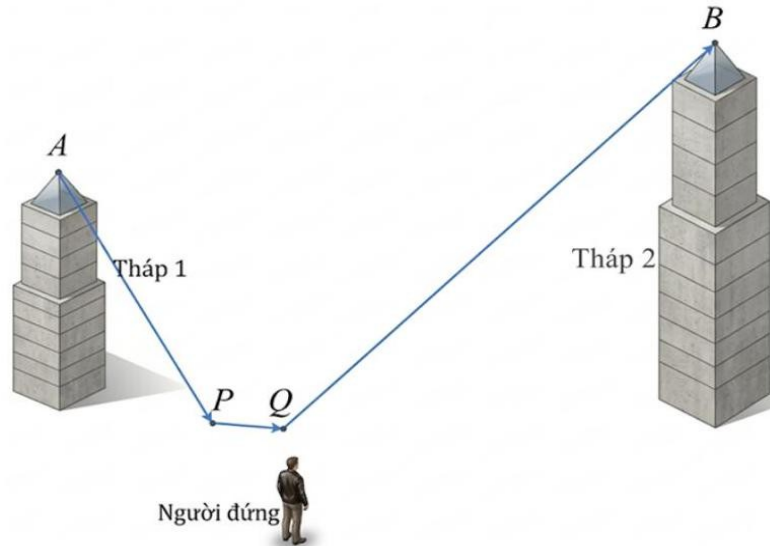
$$\frac{275}{14259}$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6 .

Câu 1. Một kiến trúc sư thiết kế một hồ bơi vô cực có mặt trên của bể bơi nằm trong mặt phẳng Oxy (đơn vị trục là mét). Một cạnh của hồ bơi dài $12m$ nằm trên trục Ox ; hai cạnh bên lần lượt nằm trên trục Oy và đường thẳng $x = 12$; cạnh còn lại (mặt vô cực) là một phần đồ thị của hàm số $y = -\frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x + 4$. Đáy hồ bơi không phẳng mà độ sâu tại điểm $(a; b)$ được tính theo công thức $h(a) = \frac{1}{4}a + 1$ (mét). Thể tích nước tối đa mà hồ bơi có thể chứa là bao nhiêu m^3 ?



Câu 2. Một nhân viên cứu hộ đứng ở mặt đất, điều khiển một drone chở vật tư y tế, dự kiến bay thẳng từ đỉnh A của tháp thứ nhất đến đỉnh B của tháp thứ hai. Tuy nhiên, do gặp một khu vực nhiễu sóng an ninh, nên drone phải bay thẳng từ A đến một điểm P trên mặt đất để hạ cánh. Nhân viên đó mang drone từ điểm P dọc theo hướng Tây 40 m đến điểm Q và sau đó drone bay thẳng từ Q lên đỉnh B của tháp thứ hai (Hình vẽ). Biết đỉnh A cao 100 m và có hình chiếu lên mặt đất cách vị trí người đứng ban đầu 200 m về phía Đông và 100 m về phía Nam. Đỉnh B cao 300 m và có hình chiếu lên mặt đất cách vị trí người đứng ban đầu 140 m về phía Tây và 200 m về phía Nam.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc tại vị trí người đứng ban đầu, mặt phẳng (Oxy) là mặt đất, trục Ox hướng Đông, trục Oy hướng Nam và trục Oz hướng thẳng đứng lên trên (đơn vị trên các trục là 100 m). Để hoàn thành nhiệm vụ, người đó chọn vị trí điểm $P(a; b; c)$ trên mặt đất sao cho tổng quãng đường bay là ngắn nhất.

Tính giá trị của biểu thức $S = 2a + 4b + c$.

Câu 3. Một doanh nghiệp phân bổ ngân sách quảng cáo trên Facebook và Google với tổng số tiền không vượt quá 80 triệu. Chi phí cho Facebook nằm trong khoảng từ 20 đến 50 triệu. Chi phí cho Google tối thiểu là 15 triệu. Số tiền chi cho chạy quảng cáo trên Google không được vượt quá chi phí chi cho quảng cáo trên Facebook. Biết rằng số khách tiếp cận là 4 nghìn khách cho mỗi triệu tiền chi quảng cáo trên Facebook và 6 nghìn khách cho mỗi triệu quảng cáo trên Google. Hỏi lượng khách tiếp cận lớn nhất là bao nhiêu nghìn?

Câu 4. Cho hình chóp $S.ABCD$ có $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 4. Tam giác SAB cân tại S , có diện tích bằng 6 và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Tính cosin của góc nhị diện $[S; AC; D]$ (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Câu 5. Nồng độ thuốc C (mg/ml) trong máu của một bệnh nhân sau t giờ tiêm vào tĩnh mạch được xác

định bởi công thức $C(t) = \frac{at}{t^2 + 4}$, với a là hằng số dương. Đạo hàm của $C(t)$ được gọi là tốc độ thay đổi tức thời của nồng độ thuốc tại thời điểm t . Biết rằng nồng độ thuốc đạt giá trị lớn nhất là $0,5 \text{ mg/ml}$. Một bác sĩ muốn tính tốc độ thay đổi tức thời của nồng độ thuốc tại thời điểm $t = 4$ giờ để quyết định liều tiêm tiếp theo. Tính giá trị tuyệt đối của tốc độ này (đơn vị: mg/ml/h).

Câu 6. Một khóa mã số sử dụng mật khẩu là một dãy gồm 5 chữ số phân biệt từ 1 đến 9. Một mật khẩu được gọi là mạnh nếu nó thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

- Không có hai chữ số lẻ nào đứng cạnh nhau.
- Chữ số đứng sau luôn lớn hơn chữ số đứng trước hoặc luôn nhỏ hơn chữ số đứng trước.

Chọn ngẫu nhiên một mật khẩu. Xác suất để chọn được mật khẩu mạnh bằng $a \cdot 10^{-3}$. Tính giá trị của a (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

PHẦN I: Trắc nghiệm nhiều lựa chọn

Mã đề	Đáp án											
0101	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	B	C	B	C	B	A	D	B	C	B	B	D

PHẦN II: Trắc nghiệm đúng sai

Mã đề	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
0101	a)D-b)D-c)S-d)S	a)D-b)S-c)S-d)S	a)D-b)S-c)D-d)S	a)D-b)S-c)D-d)D

PHẦN III: Trắc nghiệm trả lời ngắn

Mã đề	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
0101	160	7.5	400	-0,4	0,06	8,2

LỜI GIẢI CHI TIẾT THAM KHẢO

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai

Câu 1.

a) Ta có $C(x) = x^2 + 30x + 100$, $R(x) = x^2 + 100x$ ($x \geq 1$).

Lợi nhuận là $L(x) = R(x) - C(x) = (x^2 + 100x) - (x^2 + 30x + 100) = 70x - 100$.

b) Đúng.

Nếu lợi nhuận là 250 triệu đồng thì $70x - 100 = 250 \Leftrightarrow 70x = 350 \Rightarrow x = 5$.
 Vậy diện tích canh tác cần thiết là 5 nghìn m².

c) Sai.

Chi phí trung bình trên mỗi đơn vị diện tích là $P(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 + 30x + 100}{x} = x + 30 + \frac{100}{x}$.

Khi đó $P'(x) = 1 - \frac{100}{x^2}$.

Giải phương trình $P'(x) = 0$

$$1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow x = 10 \quad (x \geq 1).$$

Suy ra: $P'(x) < 0$ do $1 \leq x < 10$, $P'(x) > 0$ do $x > 10$.

Vậy $P(x)$ giảm trên $[1, 10]$ rồi tăng trên $(10, 11]$, nên khi x tăng từ 1 đến 11, chi phí trung bình không luôn giảm}.

d) Sai.

Ta có $Q(x) = \frac{L(x)}{C(x)} = \frac{70x - 100}{x^2 + 30x + 100}$.

Khi đó $Q'(x) = \frac{70(x^2 + 30x + 100) - (70x - 100)(2x + 30)}{(x^2 + 30x + 100)^2}$.

Rút gọn tử số: $70x^2 + 2100x + 7000 - (140x^2 + 1900x - 3000) = -70x^2 + 200x + 10000$.

Do đó $Q'(x) = \frac{-70x^2 + 200x + 10000}{(x^2 + 30x + 100)^2}$.

Việc $Q(x)$ lớn nhất phụ thuộc vào việc giải bài toán cực trị của $Q(x)$, không tương đương với việc

$P(x) = \frac{C(x)}{x}$ nhỏ nhất.

Thật vậy, $P(x)$ nhỏ nhất tại $x=10$, còn cực đại của $Q(x)$ không đạt tại $x=10$. Vậy khẳng định đã cho là sai.
 Vậy **câu 1: a) Đúng; b) Đúng; c) Sai; d) Sai.**

Câu 2. Cho hàm số $y = -x - \frac{1}{x-1}$.
a) Đúng.

Hàm số không xác định tại $x=1$. Khi $x \rightarrow 1^\pm$, ta có $-\frac{1}{x-1} \rightarrow \pm\infty$,
 nên đường thẳng $x=1$ là tiệm cận đứng của đồ thị.

b) Sai.

Ta tính đạo hàm: $y' = -1 + \frac{1}{(x-1)^2}$.

Quy đồng: $y' = \frac{-(x-1)^2 + 1}{(x-1)^2} = \frac{-(x^2 - 2x + 1) + 1}{(x-1)^2} = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2}, \quad \forall x \neq 1$.

c) Sai.

$$y' = \frac{-x^2 + 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2}.$$

Ta có

Suy ra $y'=0$ khi $x=0$ hoặc $x=2$.

Xét dấu: $y' < 0$ khi $x < 0$, $y' > 0$ khi $0 < x < 1$ hoặc $1 < x < 2$, $y' < 0$ khi $x > 2$.

Vậy hàm số đạt cực đại tại $x=2$. Khi đó $y(2) = -2 - \frac{1}{2-1} = -3$.

Điểm cực đại là $(2; -3)$, không phải $N(2;3)$.

d) Sai.

Ta có tiệm cận xiên của đồ thị là $y = -x$, chứ không phải đường thẳng có hệ số góc dương như hình đã cho. Vì vậy hình vẽ trong đề không đúng với đồ thị của hàm số.

Vậy câu 2: a) Đúng; **b)** Sai; **c)** Sai; **d)** Sai.

Câu 3.

Mặt phẳng của tấm pin là $(P): 2x + 2y + z - 6 = 0$.

Điểm phát tia laser là $S(1;1;6)$,

và đường thẳng tia laser có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -2; -2)$.

a) Đúng.

$$d(S, (P)) = \frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 6 - 6|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}.$$

Khoảng cách từ điểm S đến mặt phẳng (P) là

b) Sai.

Phương trình tham số của tia laser:

$$\begin{cases} x = 1 + t, \\ y = 1 - 2t, \\ z = 6 - 2t. \end{cases}$$

Vì Min (P), ta thay vào phương trình mặt phẳng:

$$2(1+t) + 2(1-2t) + (6-2t) - 6 = 0 \Leftrightarrow 2 + 2t + 2 - 4t + 6 - 2t - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4 - 4t = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Suy ra $M(2; -1; 4)$.

Do đó M không có tọa độ $(1;1;2)$.

c) Đúng.

Gọi α là góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (P). Khi đó

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|},$$

với vector pháp tuyến của (P) là $\vec{n} = (2; 2; 1)$.

Ta có $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 2 + (-2) \cdot 1 = 2 - 4 - 2 = -4$, nên $|\vec{u} \cdot \vec{n}| = 4$.

Lại có $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2} = 3$, $|\vec{n}| = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3$.

$$\sin \alpha = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}.$$

Do đó

d) Sai.

Nếu quỹ đạo dòng nước nằm trên mặt phẳng (P) thì vectơ chỉ phương của nó phải song song với (P), tức là vuông góc với vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;2;1)$.

Với $\vec{v} = (1;1;3)$, ta có $\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \neq 0$.

Vậy $\vec{v}$ không song song với mặt phẳng (P), nên không thể là vectơ chỉ phương của quỹ đạo dòng nước trên mặt phẳng đó.

Vậy câu 3: **a)** Đúng; **b)** Sai; **c)** Đúng; **d)** Sai.

Câu 4: Bảng số liệu ghép nhóm:

Tổng số học sinh: $n=100$.

a) Đúng.

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm là $100 - 40 = 60$.

b) Sai.

Tần số tích lũy là: 10, 25, 50, 80, 95, 100.

Lớp chứa trung vị là lớp [60;70) hoặc ngay tại ranh giới với lớp [70;80). Theo công thức trung vị cho số

liệu ghép nhóm:

$$Me = 60 + \frac{50 - 25}{25} \cdot 10 = 70.$$

Vậy trung vị là 70, không phải 71.

c) Đúng.

Bình được 69,5 điểm. Vì $69,5 < 70 = Me$, nên Bình thuộc loại "chưa đạt".

Tính điểm trung bình của mẫu:

$$\bar{x} = \frac{10 \cdot 45 + 15 \cdot 55 + 25 \cdot 65 + 30 \cdot 75 + 15 \cdot 85 + 5 \cdot 95}{100}.$$

$$\bar{x} = \frac{6900}{100} = 69.$$

Tính được

Vì $69,5 > 69$, nên mặc dù Bình xếp loại "chưa đạt", điểm của Bình vẫn cao hơn điểm trung bình.

d) Đúng.

Do không có học sinh nào có điểm đúng bằng các tứ phân vị nên số học sinh trong ba nhóm là:
chưa đạt : 50, tiềm năng : 25, xuất sắc : 25.

An được 82 điểm nên thuộc nhóm "xuất sắc".

Chọn ngẫu nhiên 4 học sinh từ 100 học sinh. Để nhóm được chọn có đủ cả 3 nhóm và luôn có mặt An, ta cố định An, rồi chọn thêm 3 học sinh từ 99 học sinh còn lại sao cho có ít nhất một học sinh nhóm "tiềm năng" và ít nhất một học sinh nhóm "chưa đạt".

Số cách chọn thuận lợi là: $25 \binom{50}{2} + \binom{25}{2} \cdot 50 + 25 \cdot 50 \cdot 24$.

Tổng số cách chọn 4 học sinh có mặt An là $\binom{99}{3}$.

Nhưng nếu tính xác suất trên toàn bộ cách chọn 4 học sinh từ 100 học sinh thì:

$$P = \frac{25 \binom{50}{2} + \binom{25}{2} \cdot 50 + 25 \cdot 50 \cdot 24}{\binom{100}{4}} = \frac{275}{14259}.$$

Đúng như đề bài đã nêu.

Câu 4: a) Đúng; b) Sai; c) Đúng; d) Đúng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1.

Mặt trên của hồ bơi là miền phẳng giới hạn bởi:

$$x \in [0, 12], \quad y \in \left[0; -\frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 \right].$$

Độ sâu của hồ tại điểm có hoành độ $x=a$ là $h(a) = 1 + \frac{a}{4}$.

Do đó thể tích nước tối đa của hồ là $V = \int_0^{12} \left(-\frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 \right) \left(1 + \frac{x}{4} \right) dx$.

Ta khai triển: $\left(-\frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{3}x + 4 \right) \left(1 + \frac{x}{4} \right) = -\frac{x^3}{72} + \frac{x^2}{9} + \frac{5x}{3} + 4$.

Vì thế $V = \int_0^{12} \left(-\frac{x^3}{72} + \frac{x^2}{9} + \frac{5x}{3} + 4 \right) dx$.

Nguyên hàm là $-\frac{x^4}{288} + \frac{x^3}{27} + \frac{5x^2}{6} + 4x$.

Suy ra $V = \left[-\frac{x^4}{288} + \frac{x^3}{27} + \frac{5x^2}{6} + 4x \right]_0^{12}$.

Tính tại $x=12$: $-\frac{12^4}{288} + \frac{12^3}{27} + \frac{5 \cdot 12^2}{6} + 4 \cdot 12 = -72 + 64 + 120 + 48 = 160$.

Vậy thể tích nước tối đa mà hồ bơi có thể chứa là 160 m^3 .

Câu 2.

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như đề bài, đơn vị trên các trục là 100 m.

Khi đó: $A(2; 1; 1), \quad B(-1.4; 2; 3)$.

Điểm $P(a; b; c)$ nằm trên mặt đất nên $c = 0$.

Vì từ P đi về hướng Tây 40 m đến Q, mà 40 m ứng với 0{,}4 đơn vị, nên $Q(a - 0.4; b; 0)$.

Tổng quãng đường bay là $AP + QB$.

Đặt $Q(x; y; 0)$.

Khi đó $P(x + 0.4; y; 0)$,

Nên $AP + QB = \sqrt{(2 - (x + 0.4))^2 + (1 - y)^2 + (1 - 0)^2} + \sqrt{(-1.4 - x)^2 + (2 - y)^2 + (3 - 0)^2}$.

Hay tương đương với $A'(1.6; 1; 1)$, $Q(x; y; 0)$,

và cần tối thiểu hóa $A'Q + QB$.

Phản xạ A' qua mặt phẳng Oxy, ta được $A''(1.6; 1; -1)$.

Khi đó, theo nguyên lý phản xạ, tổng $A'Q + QB$ nhỏ nhất khi Q là giao điểm của đường thẳng $A''B$ với mặt phẳng Oxy.

Ta có $A''(1.6; 1; -1)$, $B(-1.4; 2; 3)$.

Phương trình tham số của đường thẳng $A''B$:

$$\begin{cases} x = 1.6 - 3t, \\ y = 1 + t, \\ z = -1 + 4t. \end{cases}$$

Vì $Q \in Oxy$ nên $z = 0$, do đó $-1 + 4t = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{4}$.

Suy ra $Q\left(1.6 - 3 \cdot \frac{1}{4}; 1 + \frac{1}{4}; 0\right) = (0.85; 1.25; 0)$.

Vì P ở phía Đông của Q 0.4 đơn vị nên $P = (1.25; 1.25; 0)$.

Vậy $a = 1.25$, $b = 1.25$, $c = 0$.

Do đó $S = 2a + 4b + c = 2 \cdot 1.25 + 4 \cdot 1.25 + 0 = 7.5$.

Vậy $S = 7.5$.

Câu 3.

Gọi: x (triệu đồng): chi cho Facebook, y (triệu đồng): chi cho Google.

Theo đề bài, ta có hệ điều kiện:

$$\begin{cases} x + y \leq 80, \\ 20 \leq x \leq 50, \\ y \geq 15, \\ y \leq x. \end{cases}$$

Số khách tiếp cận (nghìn khách) là $P = 4x + 6y$.

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $P = 4x + 6y$ trên miền nghiệm đã cho.

Vì hệ số của y lớn hơn hệ số của x , để P lớn nhất ta ưu tiên tăng y nhiều nhất có thể. Do có ràng buộc $y \leq xv$ và $x + y \leq 80$, nên giá trị lớn nhất đạt được khi

$$x = y \quad \text{và} \quad x + y = 80.$$

Suy ra $x = y = 40$.

Khi đó $P_{\max} = 4 \cdot 40 + 6 \cdot 40 = 10 \cdot 40 = 400$.

Vậy lượng khách tiếp cận lớn nhất là 400 (nghìn khách).

Câu 4.

Đặt hệ trục tọa độ Oxyz sao cho mặt phẳng đáy là (Oxy) , với $A(0, 0, 0)$, $B(4, 0, 0)$, $D(0, 4, 0)$, $C(4, 4, 0)$.

Vì mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy và chứa AB , nên chọn (SAB) là mặt phẳng $y = 0$.

Gọi M là trung điểm của AB , khi đó $M(2, 0, 0)$.

Tam giác SAB cân tại S nên $SM \perp AB$. Lại có diện tích tam giác SAB bằng 6, suy ra

$$\frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM = 6 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot SM = 6 \Rightarrow SM = 3.$$

Do đó $S(2, 0, 3)$.

Gọi O là trung điểm của AC , ta có $O(2, 2, 0)$.

Xét mặt phẳng (P) vuông góc với AC tại O . Khi đó góc nhị diện $[S; AC; D]$ là góc giữa hai đường thẳng: $(P) \cap (SAC)$ và $(P) \cap (DAC)$.

Ta có $\overrightarrow{AC} = (4, 4, 0)$.

Một vector trong mặt phẳng đáy và vuông góc với AC là $\vec{u} = (1, -1, 0)$.

Vì góc nhị diện lấy về phía chứa D , nên chọn vector chỉ phương $\vec{m} = (-1, 1, 0)$.

Xét $\overrightarrow{OS} = S - O = (0, -2, 3)$.

Lấy thành phần vuông góc với AC , được một vector chỉ phương của $(P) \cap (SAC)$:

$$\vec{n} = (1, -1, 3). \text{ Khi đó } \cos[S; AC; D] = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| |\vec{n}|}.$$

Tính $\vec{m} \cdot \vec{n} = (-1, 1, 0) \cdot (1, -1, 3) = -1 - 1 = -2$,

$$|\vec{m}| = \sqrt{2}, \quad |\vec{n}| = \sqrt{11}.$$

$$\cos[S; AC; D] = \frac{-2}{\sqrt{2} \sqrt{11}} = \frac{-2}{\sqrt{22}} \approx -0.426.$$

Suy ra

Làm tròn đến hàng phần mười: -0.4 .

Câu 5.

$$\text{Cho } C(t) = \frac{at}{t^2 + 4}, \quad a > 0.$$

$$\text{Ta có } C'(t) = \frac{a(t^2 + 4) - at \cdot 2t}{(t^2 + 4)^2} = \frac{a(4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2}.$$

Để $C(t)$ đạt cực đại thì $C'(t) = 0 \Leftrightarrow 4 - t^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$ (vì $t > 0$).

$$\text{Khi đó giá trị lớn nhất là } C(2) = \frac{2a}{2^2 + 4} = \frac{2a}{8} = \frac{a}{4}.$$

Theo đề bài, nồng độ thuốc đạt giá trị lớn nhất là 0.5 mg/ml, nên $\frac{a}{4} = 0.5 \Rightarrow a = 2$.

$$\text{Vậy } C(t) = \frac{2t}{t^2 + 4}.$$

$$\text{Khi đó } C'(t) = \frac{2(4 - t^2)}{(t^2 + 4)^2}.$$

$$\text{Tại } t=4: C'(4) = \frac{2(4 - 16)}{(16 + 4)^2} = \frac{2(-12)}{20^2} = \frac{-24}{400} = -\frac{3}{50}.$$

$$\text{Giá trị tuyệt đối của tốc độ thay đổi tức thời là } |C'(4)| = \frac{3}{50} = 0.06.$$

Vậy đáp án là 0.06 mg/ml/h.

Câu 6.

Tổng số mật khẩu gồm 5 chữ số phân biệt từ 1 đến 9 là $A_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$.

Một mật khẩu mạnh phải thỏa mãn:

không có hai chữ số lẻ nào đứng cạnh nhau;

đầy chữ số hoặc luôn tăng, hoặc luôn giảm.

Với một bộ 5 chữ số phân biệt đã chọn, nếu sắp tăng dần thì chỉ có đúng 1 cách; sắp giảm dần thì cũng chỉ có đúng 1 cách. Như vậy, mỗi tập gồm 5 chữ số thỏa mãn điều kiện sẽ cho đúng 2 mật khẩu mạnh.

Ta xét các tập con 5 phần tử của $\{1, 2, \dots, 9\}$. Khi viết theo thứ tự tăng dần, yêu cầu "không có hai chữ số lẻ nào đứng cạnh nhau" tương đương với việc trong dãy tăng đó không xuất hiện hai số lẻ liên tiếp nhau.

Đếm được có 62 tập con 5 phần tử thỏa mãn điều kiện này.

Vì thế số mật khẩu mạnh là $2 \cdot 62 = 124$.

Xác suất để chọn được mật khẩu mạnh là $\frac{124}{15120} = \frac{31}{3780} \approx 0.008201$.

Theo đề bài, $\frac{31}{3780} = a \cdot 10^{-3}$.

Suy ra $a = \frac{31}{3780} \cdot 10^3 \approx 8.201$.

Làm tròn đến hàng phần mười: $a = 8.2$.