

TRẢ LỜI NGẮN BÀI HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Câu 1. Biết tập giá trị của hàm số: $y = 5 + 4\sin 2x \cos 2x$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

Trả lời:

Câu 2. Biết tập giá trị của hàm số: $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ là $T = [a; b]$. Tính $4a + b$.

Trả lời:

Câu 3. Biết tập giá trị của hàm số: $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

Trả lời:

Câu 4. Biết tập giá trị của hàm số: $y = \cos^2 x + 2\sin x + 2$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

Trả lời:

Câu 5. Biết tập giá trị của hàm số: $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right]$ là $T = [a; b]$. Tính $11a + 11b$.

Trả lời:

Câu 6. Biết tập giá trị của hàm số $y = \frac{2\sin x + \cos x}{\sin x + 2\cos x + 4}$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

Trả lời:

Câu 7. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{m - 2\sin x}$ xác định trên $\mathbb{R}$. Biết $S = [a; +\infty)$. Giá trị a bằng bao nhiêu?

Trả lời:

Câu 8. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2\sin x + 3\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2}$.

Trả lời:

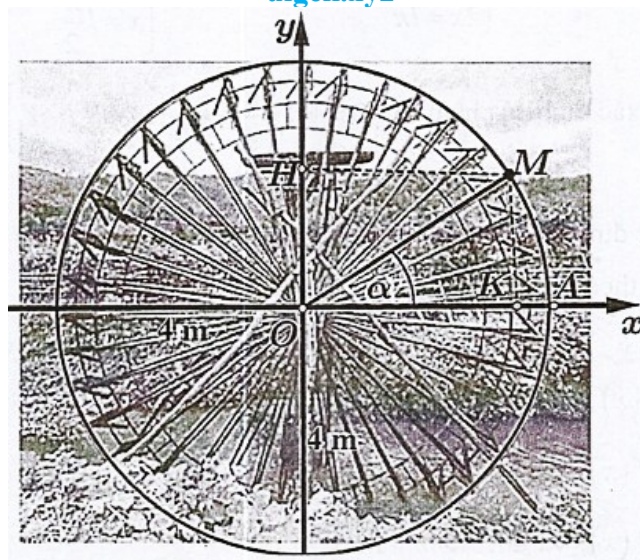
Câu 9. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x + \sin x - 3$. Tính $4a + b$.

Trả lời:

Câu 10. Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Trả lời:

Câu 11. Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm

không nhận được cho bởi hàm số
$$d(t) = 3 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{182} (t - 80) \right] + 12$$
 với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Trả lời:

Câu 12. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau: $y = \tan x + 2 \sin x$

Trả lời:

Câu 13. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau: $y = \sin^2 x + \cos x$

Trả lời:

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$.

a) $y = \sqrt{x^2 + m}$

b) $y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$

Trả lời:

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = 2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) - 1$.

Trả lời:

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$.

Trả lời:

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = 2 + 2 \cos x + \cos^2 x$

Trả lời:

Câu 18. Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời:

Câu 19. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\cot(3x + \pi)}$

Trả lời:

Câu 20. Tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m} - 2 \cos 4x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Trả lời:

Câu 21. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - \cos 3x$.

b) $y = |x| \sin x$.

Trả lời:

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số:

a) $y = 3 \sin^2 \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + 4$

b) $y = \sin x + \cos x$

Trả lời:

Câu 23. Tính chu kỳ các hàm số

a) $y = 2 \sin 2x$.

b) $y = \cos 3x$.

Trả lời:

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Biết tập giá trị của hàm số: $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

Lời giải

$$y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có $y = 5 + 4 \sin 2x \cos 2x = 5 + 2 \sin 4x$

Do $-1 \leq \sin 4x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin 4x \leq 2 \Leftrightarrow 3 \leq 5 + 2 \sin 4x \leq 7 \Leftrightarrow 3 \leq y \leq 7$.

Suy ra giá trị của hàm số là $T = [3; 7]$.

Vậy $a + b = 3 + 7 = 10$.

Câu 2. Biết tập giá trị của hàm số: $y = \sin^6 x + \cos^6 x$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

$$T = \left[\frac{1}{4}; 1 \right]$$

Trả lời:

Lời giải

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$y = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x$$

Do $0 \leq \sin^2 2x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{3}{4} \sin^2 2x \geq -\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1 \geq 1 - \frac{3}{4} \sin^2 2x \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq y \geq \frac{1}{4}$.

Suy ra tập giá trị của hàm số là $T = \left[\frac{1}{4}; 1 \right]$.

Vậy $a + b = 2$.

Câu 3. Biết tập giá trị của hàm số: $y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

Lời giải

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3$$

$$y = \sin x + \sqrt{3} \cos x + 3 = 2 \left(\frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x \right) + 3 = 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3$$

Ta có

$$-1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2 \sin \left(x + \frac{\pi}{3} \right) + 3 \leq 5 \Leftrightarrow 1 \leq y \leq 5$$

Do

Suy ra tập giá trị của hàm số là $T = [1; 5]$.

Vậy $a + b = 6$.

Câu 4. Biết tập giá trị của hàm số: $y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

Lời giải

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2$$

Hàm số có tập xác định $D = \mathbb{R}$.

Ta có:

$$y = \cos^2 x + 2 \sin x + 2 = (1 - \sin^2 x) + 2 \sin x + 2 = -\sin^2 x + 2 \sin x + 3 = -(\sin x - 1)^2 + 4$$

$$\text{Do } -1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow -2 \leq \sin x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \geq (\sin x - 1)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 4 \geq -(\sin x - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq -(\sin x - 1)^2 + 4 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq y \leq 4.$$

Suy ra giá trị của hàm số là $T = [0; 4]$.

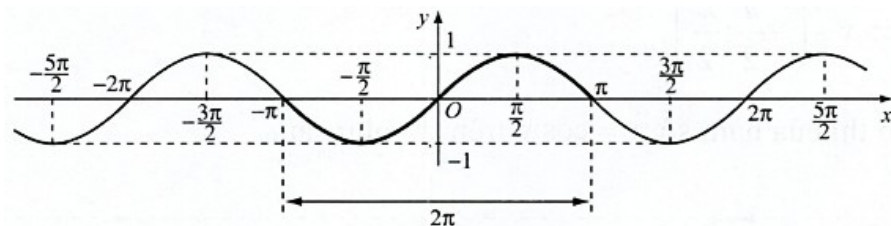
Vậy $a + b = 2$.

Câu 5. Biết tập giá trị của hàm số: $y = \sin x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$ là $T = [a; b]$. Tính $a + b$.

Lời giải

$$y = \sin x \text{ trên đoạn } \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right].$$

Ta có đồ thị của hàm số $y = \sin x$ trên $\mathbb{R}$ như sau:



Dựa vào đồ thị trên, ta có bảng biến thiên của hàm số $y = \sin x$ xét trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3} \right]$ là:

x	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
$\sin x$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$T = \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; 1 \right].$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy tập giá trị của hàm số là

Câu 6. Biết tập giá trị của hàm số $y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4}$ là $T = [a; b]$. Tính $11a + 11b$.

$$T = \left[\frac{-4 - \sqrt{71}}{11}; \frac{-4 + \sqrt{71}}{11} \right]$$

Trả lời:

Lời giải

Tập xác định hàm số $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } y = \frac{2 \sin x + \cos x}{\sin x + 2 \cos x + 4} \Leftrightarrow y(\sin x + 2 \cos x + 4) = 2 \sin x + \cos x$$

$$\Leftrightarrow (y-2) \sin x + (2y-1) \cos x = -4y.$$

Điều kiện để tồn tại cặp $(x; y)$ là $(y-2)^2 + (2y-1)^2 \geq (-4y)^2$

$$\Leftrightarrow -11y^2 - 8y + 5 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-4 - \sqrt{71}}{11} \leq y \leq \frac{-4 + \sqrt{71}}{11}.$$

$$T = \left[\frac{-4 - \sqrt{71}}{11}; \frac{-4 + \sqrt{71}}{11} \right].$$

Suy ra tập giá trị hàm số là

Vậy $11a + 11b = -8$.

Câu 7. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \sqrt{m - 2 \sin x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Biết $S = [a; +\infty)$. Giá trị a bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$\Leftrightarrow m - 2 \sin x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m \geq 2 \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hàm số xác định

$$\Leftrightarrow m \geq \max_{x \in \mathbb{R}} (2 \sin x) \Leftrightarrow m \geq 2$$

Suy ra $S = [2; +\infty)$.

Vậy $a = 2$ thỏa mãn đề bài.

Lưu ý: Giả sử hàm số $f(x)$ có giá trị lớn nhất trên tập K là $\max_{x \in K} f(x)$, có giá trị nhỏ nhất trên tập K là $\min_{x \in K} f(x)$. Khi đó:

$$m \geq f(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \geq \max_{x \in K} f(x)$$

$$m > f(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m > \max_{x \in K} f(x)$$

$$m \leq f(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m \leq \min_{x \in K} f(x)$$

$$m < f(x), \forall x \in K \Leftrightarrow m < \min_{x \in K} f(x)$$

Câu 8. Tìm tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2}$.

Trả lời: 3

Lời giải

$$\text{Ta có: } y = \frac{2 \sin x + 3 \cos x + 1}{\sin x - \cos x + 2} \Leftrightarrow (y-2) \sin x - (y+3) \cos x = 1 - 2y$$

Điều kiện để tồn tại cặp số $(x; y)$ là $(y-2)^2 + (y+3)^2 \geq (1-2y)^2$

$$\Leftrightarrow -2y^2 + 6y + 12 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{3-\sqrt{33}}{2} \leq y \leq \frac{3+\sqrt{33}}{2}$$

Tổng giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số: $\frac{3-\sqrt{33}}{2} + \frac{3+\sqrt{33}}{2} = 3$

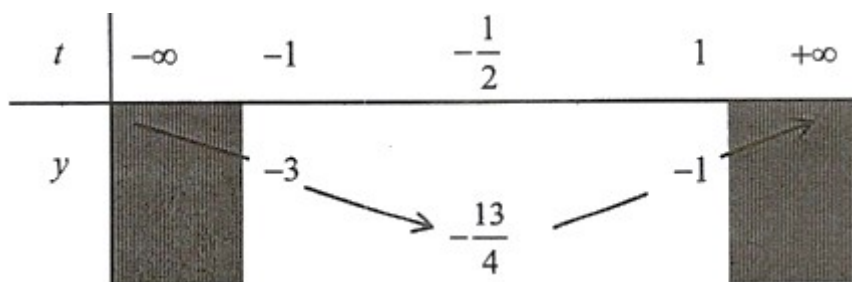
Câu 9. Gọi a và b lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \sin^2 x + \sin x - 3$. Tính $4a + b$.

Lời giải

Đặt $t = \sin x, t \in [-1; 1]$. Ta có: $y = t^2 + t - 3$.

Đây là hàm bậc hai với $a = 1, b = 1 \Rightarrow -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$. Vì $a > 0$ nên bề lõm parabol tương ứng sẽ hướng lên trên.

Bảng biến thiên:



Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy: Max $y = -1$, khi đó $t = 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Tương tự Min $y = -\frac{13}{4}$, khi đó $t = -\frac{1}{2}$

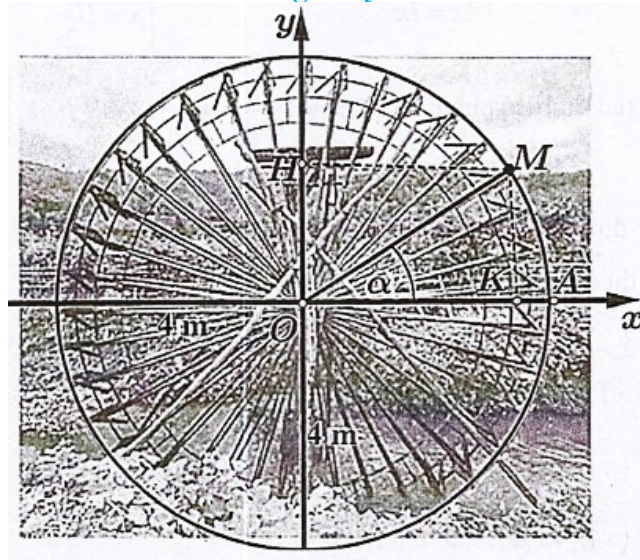
$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy $a + 4b = -1 - 13 = -14$.

Câu 10. Một cái guồng nước có vành kim loại ngoài cùng là một đường tròn tâm O , bán kính là $4m$. Xét chất điểm M thuộc đường tròn đó và góc $\alpha = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM})$.

Giả sử mực nước lúc đang xét là tiếp xúc với đường tròn $(O; 4)$ và guồng nước quay theo chiều dương (ngược chiều kim đồng hồ).

Biết rằng guồng nước quay hết một vòng sau 40 giây ($t = 0$ giây khi điểm M trùng A). Hỏi thời điểm nào (trong 1 vòng quay đầu tiên) thì điểm M ở vị trí cao nhất so với mặt nước?



Trả lời: 10 (giây).

Lời giải

$$h(x) = 4 + 4\sin \alpha$$

Ta có:

Khi M ở vị trí cao nhất so với mặt nước (tức là $h(x) = 8$) thì $\sin \alpha = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ (vì chỉ xét 1 vòng quay đầu tiên).

Thời gian thực hiện của guồng nước là: $t = \frac{\frac{\pi}{2} \cdot 40}{2\pi} = 10$ (giây).

Câu 11. Số giờ có ánh sáng của thành phố T ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm

không thuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12$ với $t \in \mathbb{Z}$ và $0 < t \leq 365$. Bạn An muốn đi tham quan thành phố T nhưng lại không thích ánh sáng mặt trời, vậy bạn An nên chọn đi vào ngày nào trong năm để thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Trả lời: 353

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Do } \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] \geq -1 &\Rightarrow 3 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] \geq -3 \\ \Rightarrow 3 \cdot \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] + 12 &\geq 9 \Rightarrow d(t) \geq 9 \end{aligned}$$

Vậy thành phố T có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi:

$$\begin{aligned} \sin \left[\frac{\pi}{182}(t - 80) \right] = -1 &\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t - 80) = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \\ \Leftrightarrow t - 80 = 182 \left(-\frac{1}{2} + 2k \right) &\Leftrightarrow t = 364k - 11, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 \leq 364k - 11 \leq 365 &\Leftrightarrow \frac{11}{364} \leq k \leq \frac{376}{364} \Leftrightarrow k = 1 \text{ (do } k \in \mathbb{Z}) \\ \Rightarrow t = 364 - 11 = 353 \end{aligned}$$

Vậy thành phố T có ít giờ ánh sáng Mặt Trời nhất là 9 giờ khi $t = 353$, tức là vào ngày thứ 353 trong năm.

Câu 12. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau: $y = \tan x + 2 \sin x$

Trả lời: hàm số lẻ

Lời giải

$$y = f(x) = \tan x + 2 \sin x$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\text{Ta có: } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = \tan(-x) + 2 \sin(-x) = -\tan x - 2 \sin x = -f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in D$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ trên D .

Câu 13. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số sau: $y = \sin^2 x + \cos x$

Trả lời: hàm số chẵn

Lời giải

$$y = f(x) = \sin^2 x + \cos x$$

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

$$\text{Ta có: } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = \sin^2(-x) + \cos(-x) = \sin^2(x) + \cos(x) = f(x)$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn trên D .

Câu 14. Tìm tất cả các giá trị m để hàm số sau có tập xác định $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 + m}$$

$$\text{b) } y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$$

$$\text{Trả lời: a) } m \leq 0 \quad \text{b) } \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Lời giải

$$\text{a) } y = \sqrt{x^2 + m}$$

$$\text{Điều kiện xác định: } x^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq -m$$

$$\text{Hàm số xác định trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow -m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq 0.$$

$$\text{b) } y = \frac{\sin x - 1}{\cos x + m}$$

$$\text{Điều kiện xác định: } \cos x + m \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -m$$

$$\text{Hàm số xác định trên } \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -m < -1 \\ -m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < -1 \end{cases}$$

Câu 15. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$.

Trả lời: $f_{\text{Max}}(x) = 1$ và $f_{\text{Min}}(x) = -3$

Lời giải

$$y = f(x) = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$$

$$\text{TXD: } D = \mathbb{R}.$$

$$-1 \leq \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\text{Max}}(x) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_{\text{Min}}(x) = -3 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -1 \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{3} = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{4\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 16. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = \sqrt{1 + \sin x} - 3$.

Trả lời: $f_{\text{Min}}(x) = -3$ và $f_{\text{Max}}(x) = \sqrt{2} - 3$

Lời giải

$$y = f(x) = \sqrt{1 + \sin x} - 3$$

Do $\sin x \geq -1, \forall x \in \mathbb{R}$ nên tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } -1 \leq \sin x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq \sqrt{1 + \sin x} - 3 \leq \sqrt{2} - 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq \sqrt{2} - 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\text{Min}}(x) = -3 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_{\text{Max}}(x) = \sqrt{2} - 3 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 17. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của hàm số: $y = 2 + 2 \cos x + \cos^2 x$

Trả lời: $f_{\text{Min}}(x) = 1$ và $f_{\text{Max}}(x) = 3$

Lời giải

$$y = f(x) = 2 + 2 \cos x + \cos^2 x = (\cos x + 1)^2 + 1$$

$$\forall -1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Nên } 0 \leq 1 + \cos x \leq 2, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq (1 + \cos x)^2 + 1 \leq 3, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow 1 \leq f(x) \leq 3, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_{\text{Min}}(x) = 1 \Leftrightarrow \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$f_{\text{Max}}(x) = 3 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Câu 18. Tìm x để hàm số $y = 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2 x}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Trả lời: -2

Lời giải

$$\text{Ta có: } \cos^2 \geq 0 \Rightarrow -\cos^2 \leq 0 \Leftrightarrow 1 - \cos^2 \leq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{1 - \cos^2} \leq 1 \Leftrightarrow -3\sqrt{1 - \cos^2} \geq -3 \Leftrightarrow 1 - 3\sqrt{1 - \cos^2} \geq -2$$

$$\Leftrightarrow y \geq -2.$$

$$(\text{Dấu “=” xảy ra}) \Leftrightarrow 1 - \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy tại $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ thì y đạt giá trị nhỏ nhất bằng -2 .

Câu 19. Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\cot(3x + \pi)}$

Trả lời: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}; k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$y = \frac{1}{\cot(3x + \pi)}.$$

Điều kiện xác định:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \cot(3x + \pi) \neq 0 \\ 3x + \pi \neq k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \pi \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ 3x \neq -\pi + k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq -\frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x \neq k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases} \\ &\Rightarrow D = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}; k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \right\}. \end{aligned}$$

Câu 20. Tìm giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m} - 2\cos 4x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Trả lời: $-1 \leq m \leq 0$.

Lời giải

Để hàm số $y = \sqrt{\frac{m-1}{m} - 2\cos 4x}$ xác định trên $\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{m} - 2\cos 4x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq \cos 4x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{2m} \geq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 0.$$

Câu 21. Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số sau:

a) $y = 2x^2 - \cos 3x$.

b) $y = |x| \sin x$.

Trả lời: a) hàm số chẵn b) hàm số lẻ

Lời giải

a) $y = f(x) = 2x^2 - \cos 3x$. TXD: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = 2(-x)^2 - \cos(-3x) = 2x^2 - \cos(3x) = f(x).$$

$$\Rightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) $y = |x| \sin x$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = |-x| \sin(-x) = -|x| \sin(x) = -f(x) \Rightarrow f(-x) = -f(x), \forall x \in D.$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

Câu 22. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số:

a) $y = 3 \sin^2 \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + 4$

b) $y = \sin x + \cos x$

Trả lời: a) $y_{\min} = 4$ và $y_{\max} = 7$ b) $y_{\min} = -\sqrt{2}$ và $y_{\max} = \sqrt{2}$

Lời giải

Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số:

a) $y = 3 \sin^2 \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + 4$

Ta có: $0 + 4 \leq 3 \sin^2 \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \leq 3 + 4 \Leftrightarrow 4 \leq y \leq 7$. Suy ra $y_{\min} = 4$ và $y_{\max} = 7$.

b) $y = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin x \cdot \cos \frac{\pi}{4} + \sqrt{2} \cos x \cdot \sin \frac{\pi}{4} = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$.

$-1 \leq \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \leq 1, \forall x \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq y \leq \sqrt{2}$. Suy ra $y_{\min} = -\sqrt{2}$ và $y_{\max} = \sqrt{2}$.

Câu 23. Tính chu kỳ các hàm số

a) $y = 2 \sin 2x$.

b) $y = \cos 3x$.

Trả lời: a) $T = \pi$ b) $T = \frac{2\pi}{3}$

Lời giải

a) $y = 2 \sin 2x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $x \in D \Rightarrow x \pm \pi \in D$

$$f(x + \pi) = 2 \sin[2(x + \pi)] = 2 \sin(2x + 2\pi) = 2 \sin 2x = f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với $T = \pi$.

b) $y = \cos 3x$.

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Ta có: $x \in D \Rightarrow x \pm \frac{2\pi}{3} \in D$

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left[3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right] = \cos(3x + 2\pi) = \cos 3x = f(x).$$

Vậy $f(x)$ là hàm số tuần hoàn với $T = \frac{2\pi}{3}$.