

Họ và tên: Số báo danh: Mã đề 0103

PHẦN I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Thể tích vật thể tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ quanh trục hoành là

- A. $\frac{32\pi}{5}$. B. $\frac{8\pi}{3}$. C. $\frac{16\pi}{5}$. D. $\frac{32}{5}$.

Câu 2. Nghiệm của phương trình $\log_2(3x - 1) = 3$ là

- A. $x = 4$. B. $x = 2$. C. $x = 3$. D. $x = \frac{10}{3}$.

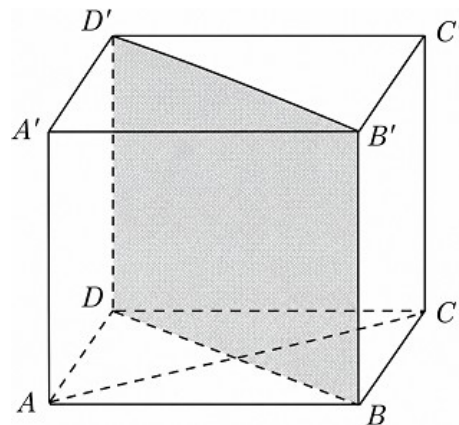
Câu 3. Họ nguyên hàm của hàm số $f(x) = 5 \cdot 2^x$ là

- A. $5 \cdot 2^x \ln 2 + C$. B. $\frac{5 \cdot 2^{x+1}}{x+1} + C$. C. $\frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$. D. $\frac{2^x}{\ln 2} + C$.

Câu 4. Cho cấp số cộng (u_n) có $u_1 = 3$ và công sai $d = -2$. Giá trị của u_7 bằng

- A. -11 . B. 15 . C. -9 . D. -14 .

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng $(BDD'B')$ bằng



- A. $\frac{a\sqrt{2}}{2}$. B. a . C. $a\sqrt{2}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Biết rằng $f'(x) = (x^2 + 1)(x - 2)$ với mọi $x \in \mathbb{R}$. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(2; +\infty)$. B. $(-\infty; -1)$. C. $(0; 2)$. D. $(-1; 2)$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $M(2; 1; -1)$ và $N(4; -1; 0)$. Một vector chỉ phương của đường thẳng MN là

- A. $\vec{u} = (2; 2; 1)$. B. $\vec{u} = (-2; 2; 1)$. C. $\vec{u} = (6; 0; -1)$. D. $\vec{u} = (2; -2; 1)$.

Câu 8. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{u} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}$. Tọa độ của vector $\vec{u}$ là

- A. $(-3; 5; -2)$. B. $(5; -3; 2)$. C. $(3; 5; 2)$. D. $(-3; 5; 2)$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-5}{3}$. Vector nào sau đây là một vector chỉ phương của đường thẳng (d) ?

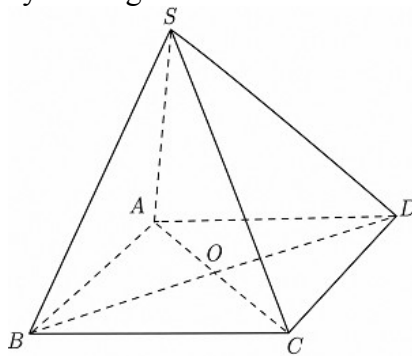
A. $\vec{u}_3 = (2; -4; 3)$

B. $\vec{u}_1 = (1; -3; 5)$

C. $\vec{u}_2 = (2; 4; 3)$

D. $\vec{u}_4 = (-2; -4; -3)$

Câu 10. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành (xem hình dưới). Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. $\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = \vec{0}$

B. $\vec{SA} + \vec{SC} = \vec{SB} + \vec{SD}$

C. $\vec{SA} + \vec{SB} = \vec{SC} + \vec{SD}$

D. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{DB}$

Câu 11. Một người thống kê thời lượng (đơn vị: giây) thực hiện các cuộc gọi điện thoại của mình trong một tuần và lập bảng tần số ghép nhóm như sau:

Nhóm	[0; 40)	[40; 80)	[80; 120)	[120; 160)	[160; 200)	[200; 240)
Tần số	8	10	12	6	3	1

Trung vị M_e (đơn vị: giây) của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng

A. 86,5

B. 84

C. $\frac{260}{3}$

D. 80

Câu 12. Tập nghiệm của phương trình $\cos x = 0$ là

A. $S = \{2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

B. $S = \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

C. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

PHẦN II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu hỏi, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một công ty điện tử có hai phân xưởng I và II cùng sản xuất một loại linh kiện. Biết rằng: phân xưởng I sản xuất 75% tổng số lượng linh kiện của công ty, phân xưởng II sản xuất 25% còn lại. Tỷ lệ linh kiện bị lỗi của phân xưởng I và phân xưởng II lần lượt là 4% và 2%. Chọn ngẫu nhiên một linh kiện trong kho của công ty để kiểm tra.

a) Xác suất để linh kiện được chọn bị lỗi là 0,035.

b) Xác suất để linh kiện được chọn bị lỗi và do phân xưởng I sản xuất là 0,03.

c) Nếu linh kiện được chọn do phân xưởng I sản xuất thì xác suất để linh kiện đó không bị lỗi là 0,94.

d) Nếu linh kiện được chọn bị lỗi thì xác suất để linh kiện đó do phân xưởng I sản xuất là $\frac{4}{7}$.

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 25$ và đường thẳng d đi qua hai điểm $A(7; 8; 5)$, $B(8; 7; 5)$. Giả sử mặt cầu (S) được tịnh tiến đi lên (theo hướng dương của trục Oz) với phương vuông góc với mặt phẳng (Oxy) .

a) Vector $\vec{u} = (1; -1; 0)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d .

b) Khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) ở vị trí ban đầu đến đường thẳng d bằng $6\sqrt{2}$.

c) Bán kính của mặt cầu (S) bằng 25.

d) Có một thời điểm trong quá trình tịnh tiến, mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng d .

Câu 3. Một quần thể vi khuẩn ban đầu có 1000 con. Sau 2 giờ, số lượng vi khuẩn tăng lên thành 4000 con. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn tại thời điểm t (giờ). Biết rằng tốc độ tăng trưởng của quần thể tỉ lệ thuận với số lượng vi khuẩn hiện có, tức là $P'(t) = k \cdot P(t)$, với k là hằng số khác 0 và $P(t) > 0$ với $t \geq 0$.

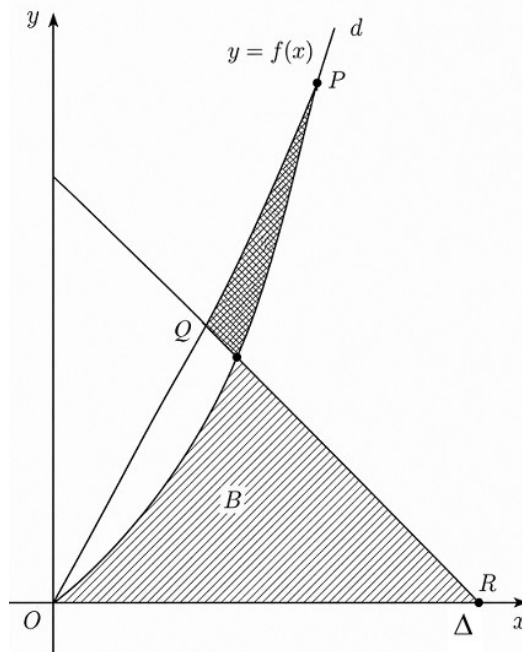
- Hằng số tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn là $k = \ln 2$.
- Công thức tính số lượng vi khuẩn tại thời điểm t là $P(t) = 4000e^{kt}$ với $t \geq 0$.
- Sau 5 giờ kể từ thời điểm ban đầu, số lượng vi khuẩn là 32000 con.
- Để số lượng vi khuẩn đạt 64000 con, cần đúng 8 giờ kể từ thời điểm ban đầu.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = x^3 - 12x + 5$.

- Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 12$.
- Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{2\}$.
- $f(2) = 11$.
- Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng 14.

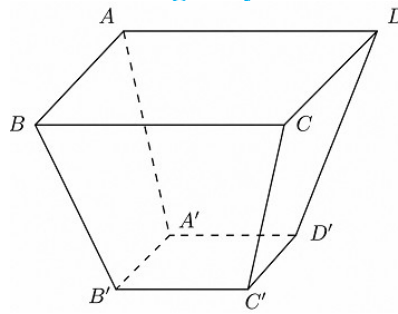
PHẦN III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x$. Đường thẳng d đi qua gốc tọa độ O và điểm $P(2; f(2))$ cắt đường thẳng $\Delta: y = -x + 3$ tại điểm Q . Gọi R là giao điểm của đường thẳng Δ với trục hoành. Gọi A là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, đường thẳng Δ và đoạn thẳng PQ ; B là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = f(x)$, đường thẳng Δ và đoạn thẳng OR . Giá trị của $B - A$ là



Câu 2. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , xét tập hợp S gồm các điểm có tọa độ $(x; y)$ với x, y là các số nguyên dương không vượt quá 15. Chọn ngẫu nhiên 2 điểm phân biệt A, B từ tập S . Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB . Gọi P là xác suất để điểm C có tọa độ đều là các số nguyên. Tính giá trị của ^{225}P .

Câu 3. Cho khối chóp cụt tứ giác đều $ABCD.A'B'C'D'$ như hình vẽ. Biết tổng diện tích của hai mặt đáy bằng 54 và độ dài đường chéo $AC' = 9$. Tìm thể tích lớn nhất của khối chóp cụt đã cho.



Câu 4. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét, một thiết bị phát tia laser được đặt tại điểm $A(5\sqrt{3}; 8; 15)$. Thiết bị này chiếu một tia sáng về phía bức tường phẳng trùng với mặt phẳng tọa độ (Oyz) . Biết rằng tia sáng phát ra luôn thay đổi nhưng luôn tạo với trục Ox một góc 60° . Gọi M là vị trí vệt sáng laser chiếu lên bức tường. Khoảng cách lớn nhất từ vệt sáng M đến gốc tọa độ O bằng bao nhiêu mét?

Câu 5. Đầu năm 2025, ông A thành lập một doanh nghiệp. Tổng số tiền ông A dùng để trả chi phí vận hành trong năm 2025 là 2 tỷ đồng. Biết rằng cứ sau mỗi năm thì tổng số tiền dùng để trả chi phí vận hành trong năm đó tăng thêm 10% so với năm trước. Hỏi năm nào là năm đầu tiên mà tổng số tiền ông A dùng để trả chi phí vận hành trong cả năm lớn hơn 4 tỷ đồng?

Câu 6. Một nhóm phát triển phần mềm độc lập cung cấp một ứng dụng Trí tuệ nhân tạo hỗ trợ quản lý công việc và học tập cá nhân. Mỗi người dùng đăng ký bản quyền sử dụng sẽ phải trả mức phí cố định là 2 triệu đồng/năm. Tổng chi phí duy trì hệ thống lưu trữ đám mây và cập nhật phần mềm trong một năm phụ thuộc vào số lượng người dùng x ($x \in \mathbb{N}^*$) đang sử dụng và được mô hình hóa bởi hàm số $C(x) = 10\ln(x) + 50$ (triệu đồng). Để nhóm phát triển đạt mức lợi nhuận tối thiểu là 200 triệu đồng trong một năm, họ cần thu hút được ít nhất bao nhiêu người dùng đăng ký phần mềm đó?

HẾT

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

PHẦN I.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	A	C	C	C	A	A	D	D	A	B	C	C

PHẦN II.

Câu	a	b	c	d
Câu 1	Đ	Đ	S	S
Câu 2	Đ	Đ	S	S
Câu 3	Đ	S	Đ	S
Câu 4	Đ	S	S	S

PHẦN III.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	2	56	144	32	2033	151

LỜI GIẢI THAM KHẢO

PHẦN I.

Câu 1

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = x^2$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục hoành, thể tích là

$$V = \pi \int_0^2 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 x^4 dx$$

$$V = \pi \cdot \frac{x^5}{5} \Big|_0^2 = \pi \cdot \frac{32}{5} = \frac{32\pi}{5}$$

Chọn A.

Câu 2

Ta có:

$$\log_2(3x-1) = 3$$

$$3x-1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$$

Điều kiện:

$$\log_2(3x-1) = 3 \Rightarrow 3x-1 = 2^3 = 8$$

$$3x = 9 \Rightarrow x = 3$$

Chọn C.

Câu 3

Ta có công thức:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \text{ với } a > 0, a \neq 1.$$

Do đó:

$$\int 5 \cdot 2^x dx = 5 \int 2^x dx = \frac{5 \cdot 2^x}{\ln 2} + C$$

Chọn C.

Câu 4

Cấp số cộng có:

$$u_1 = 3, d = -2$$

Công thức số hạng tổng quát:

$$u_n = u_1 + (n-1)d$$

Suy ra:

$$u_7 = 3 + (7-1)(-2) = 3 - 12 = -9$$

Chọn C.

Câu 5

Đặt hệ trục tọa độ với:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), B'(a;0;a), D'(0;a;a).$$

Mặt phẳng $(BDD'B')$ đi qua B, D, B', D' nên có phương trình:

$$x + y = a$$

Khoảng cách từ $A(0;0;0)$ đến mặt phẳng $x + y - a = 0$ là

$$d = \frac{|0+0-a|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Chọn A.

Câu 6

Ta có:

$$f'(x) = (x^2+1)(x-2)$$

Vì $x^2+1 > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên dấu của $f'(x)$ phụ thuộc vào $x-2$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 2.$$

Vậy hàm số đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$.

Chọn A.

Câu 7

Ta có:

$$M(2; 1; -1), N(4; -1; 0).$$

Một vector chỉ phương của đường thẳng MN là

$$\overrightarrow{MN} = (4 - 2; -1 - 1; 0 - (-1)) = (2; -2; 1).$$

Chọn D.

Câu 8

Cho:

$$\vec{u} = -3\vec{i} + 5\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Suy ra tọa độ của vector $\vec{u}$ là

$$\vec{u} = (-3; 5; 2).$$

Chọn D.

Câu 9

Đường thẳng

$$(d): \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-5}{3}$$

có một vector chỉ phương là vector gồm các mẫu số:

$$\vec{u} = (2; -4; 3).$$

Chọn A.

Câu 10

Vì $ABCD$ là hình bình hành nên hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường.

Do đó:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ và } \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

Suy ra:

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}.$$

Ta có:

$$\overrightarrow{SA} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA},$$

$$\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC}.$$

Do đó:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{SO}.$$

Tương tự:

$$\overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{SO}.$$

Vậy:

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$$

Chọn B.

Câu 11

Bảng tần số:

Nhóm	[0; 40)	[40; 80)	[80; 120)	[120; 160)	[160; 200)	[200; 240)
Tần số	8	10	12	6	3	1

Tổng số quan sát:

$$n = 8 + 10 + 12 + 6 + 3 + 1 = 40.$$

Ta có:

$$\frac{n}{2} = 20$$

Tần số tích lũy:

- Nhóm $[0; 40)$: 8
- Nhóm $[40; 80)$: $8 + 10 = 18$
- Nhóm $[80; 120)$: $18 + 12 = 30$

Vì $18 < 20 \leq 30$ nên nhóm chứa trung vị là $[80; 120)$.

Áp dụng công thức trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm:

$$M_e = L + \frac{\frac{n}{2} - F}{f} \cdot h$$

Trong đó:

$$L = 80, F = 18, f = 12, h = 40$$

Suy ra:

$$M_e = 80 + \frac{20 - 18}{12} \cdot 40$$

$$M_e = 80 + \frac{2}{12} \cdot 40 = 80 + \frac{20}{3} = \frac{260}{3}$$

Chọn C.

Câu 12

Ta có:

$$\cos x = 0$$

Suy ra:

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi, \text{ với } k \in \mathbb{Z}$$

Vậy tập nghiệm là

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Chọn C.

PHẦN II

Câu 1

Gọi:

- I : linh kiện do phân xưởng I sản xuất.
- II : linh kiện do phân xưởng II sản xuất.
- L : linh kiện bị lỗi.

Theo đề:

$$P(I) = 0,75, P(II) = 0,25$$

$$P(L|I) = 0,04, P(L|II) = 0,02$$

a) Xác suất để linh kiện được chọn bị lỗi là $0,035$.

Ta có:

$$P(L) = P(I) \cdot P(L|I) + P(II) \cdot P(L|II)$$

$$P(L) = 0,75 \cdot 0,04 + 0,25 \cdot 0,02$$

$$P(L) = 0,03 + 0,005 = 0,035$$

Mệnh đề đúng.

b) Xác suất để linh kiện được chọn bị lỗi và do phân xưởng I sản xuất là $0,03$.

Ta có:

$$P(I \cap L) = P(I) \cdot P(L|I)$$

$$P(I \cap L) = 0,75 \cdot 0,04 = 0,03$$

Mệnh đề **đúng**.

c) Nếu linh kiện được chọn do phân xưởng I sản xuất thì xác suất để linh kiện đó không bị lỗi là $0,94$.

Ta có:

$$P(\bar{L}|I) = 1 - P(L|I) = 1 - 0,04 = 0,96$$

Không phải $0,94$.

Mệnh đề **sai**.

d) Nếu linh kiện được chọn bị lỗi thì xác suất để linh kiện đó do phân xưởng I sản xuất là $\frac{4}{7}$.

Ta có:

$$P(I|L) = \frac{P(I \cap L)}{P(L)} = \frac{0,03}{0,035} = \frac{6}{7}$$

Không phải $\frac{4}{7}$.

Mệnh đề **sai**.

Vậy Câu 1: **ĐĐSS**.

Câu 2

Mặt cầu (S) có phương trình:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 25$$

Suy ra tâm mặt cầu là:

$$I(1;2;5)$$

bán kính:

$$R = \sqrt{25} = 5$$

Đường thẳng d đi qua hai điểm $A(7;8;5)$, $B(8;7;5)$.

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (8-7; 7-8; 5-5) = (1; -1; 0)$$

a) Vector $\vec{u} = (1; -1; 0)$ là một vector chỉ phương của đường thẳng d .

Vì $\overrightarrow{AB} = (1; -1; 0)$ nên $\vec{u} = (1; -1; 0)$ là một vector chỉ phương của d .

Mệnh đề **đúng**.

b) Khoảng cách từ tâm mặt cầu (S) ở vị trí ban đầu đến đường thẳng d bằng $6\sqrt{2}$.

Ta có:

$$I(1;2;5), A(7;8;5)$$

$$\overrightarrow{AI} = I - A = (1-7; 2-8; 5-5) = (-6; -6; 0)$$

Vector chỉ phương của d là $\vec{u} = (1; -1; 0)$.

Ta thấy:

$$\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u} = (-6) \cdot 1 + (-6) \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = 0$$

Vậy $\overrightarrow{AI}$ vuông góc với đường thẳng d .

Do đó khoảng cách từ I đến d là:

$$d(I, d) = AI = \sqrt{(-6)^2 + (-6)^2} = 6\sqrt{2}$$

Mệnh đề **đúng**.

c) Bán kính của mặt cầu (S) bằng 25.

Từ phương trình mặt cầu:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-5)^2 = 25,$$

ta có:

$$R^2 = 25 \Rightarrow R = 5.$$

Bán kính bằng 5, không phải 25.

Mệnh đề sai.

d) Có một thời điểm trong quá trình tịnh tiến, mặt cầu (S) tiếp xúc với đường thẳng d .

Khi mặt cầu tịnh tiến lên theo hướng dương của trục Oz , tâm mặt cầu có dạng:

$$I_t(1; 2; 5+t), \text{ với } t \geq 0.$$

Đường thẳng d nằm trong mặt phẳng $z = 5$.

Khoảng cách từ I_t đến d là:

$$d(I_t, d) = \sqrt{(6\sqrt{2})^2 + t^2} = \sqrt{72 + t^2}.$$

Vì $t \geq 0$ nên:

$$d(I_t, d) \geq \sqrt{72} = 6\sqrt{2} > 5.$$

Trong khi bán kính mặt cầu là $R = 5$.

Vậy trong quá trình tịnh tiến, mặt cầu không thể tiếp xúc với đường thẳng d .

Mệnh đề sai.

Vậy Câu 2: ĐĐSS.

Câu 3

Quần thể vi khuẩn ban đầu có 1000 con nên:

$$P(0) = 1000.$$

Sau 2 giờ có 4000 con nên:

$$P(2) = 4000.$$

Theo đề:

$$P'(t) = kP(t).$$

Suy ra nghiệm có dạng:

$$P(t) = P(0)e^{kt} = 1000e^{kt}.$$

Dùng điều kiện $P(2) = 4000$:

$$1000e^{2k} = 4000$$

$$e^{2k} = 4$$

$$2k = \ln 4 = 2 \ln 2$$

$$k = \ln 2.$$

a) Hằng số tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn là $k = \ln 2$.

Theo tính toán trên, $k = \ln 2$.

Mệnh đề đúng.

b) Công thức tính số lượng vi khuẩn tại thời điểm t là $P(t) = 4000e^{kt}$ với $t \geq 0$.

Công thức đúng phải là:

$$P(t) = 1000e^{kt}.$$

Vì tại $t = 0$, ta phải có $P(0) = 1000$.

Công thức $P(t) = 4000e^{kt}$ cho $P(0) = 4000$, sai với dữ kiện ban đầu.

Mệnh đề sai.

c) Sau 5 giờ kể từ thời điểm ban đầu, số lượng vi khuẩn là 32000 con.

Vì $k = \ln 2$ nên:

$$P(t) = 1000e^{t \ln 2} = 1000 \cdot 2^t$$

Do đó:

$$P(5) = 1000 \cdot 2^5 = 1000 \cdot 32 = 32000$$

Mệnh đề **đúng**.

d) Để số lượng vi khuẩn đạt 64000 con, cần đúng 8 giờ kể từ thời điểm ban đầu.

Ta cần:

$$P(t) = 64000$$

$$1000 \cdot 2^t = 64000$$

$$2^t = 64 = 2^6$$

$$t = 6$$

Cần 6 giờ, không phải 8 giờ.

Mệnh đề **sai**.

Vậy Câu 3: **ĐSĐS**.

Câu 4

Cho hàm số:

$$f(x) = x^3 - 12x + 5$$

a) Hàm số đã cho có đạo hàm là $f'(x) = 3x^2 - 12$.

Ta có:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$

Mệnh đề **đúng**.

b) Phương trình $f'(x) = 0$ có tập nghiệm là $S = \{2\}$.

Ta có:

$$f'(x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 4$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 2$$

Vậy tập nghiệm là:

$$S = \{-2; 2\}$$

Không phải $S = \{2\}$.

Mệnh đề **sai**.

c) $f(2) = 11$.

Ta có:

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 5$$

$$f(2) = 8 - 24 + 5 = -11$$

Không phải 11.

Mệnh đề **sai**.

d) Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3; 3]$ bằng 14.

Xét các điểm tới hạn và hai đầu mút đoạn $[-3; 3]$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ hoặc } x = 2$$

Ta tính:

$$f(-3) = (-3)^3 - 12(-3) + 5 = -27 + 36 + 5 = 14$$

$$f(3) = 3^3 - 12 \cdot 3 + 5 = 27 - 36 + 5 = -4$$

$$f(-2) = (-2)^3 - 12(-2) + 5 = -8 + 24 + 5 = 21$$

$$f(2) = 2^3 - 12 \cdot 2 + 5 = 8 - 24 + 5 = -11$$

Vậy giá trị lớn nhất trên đoạn $[-3; 3]$ là:
 $\max f(x) = 21$

Không phải 14.

Mệnh đề sai.

Vậy Câu 4: ĐSSS.

PHẦN III

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	2	56	144	32	2033	151

Câu 1

$$f(x) = \frac{1}{4}x^3 + x$$

Cho

Ta có:

$$f(2) = \frac{1}{4} \cdot 2^3 + 2 = 4$$

Suy ra $P(2; 4)$.

Đường thẳng d đi qua $O(0; 0)$ và $P(2; 4)$ nên có phương trình:
 $d: y = 2x$

Đường thẳng $\Delta: y = -x + 3$.

Giao điểm Q của d và Δ :

$$2x = -x + 3 \Rightarrow 3x = 3 \Rightarrow x = 1$$

Suy ra $Q(1; 2)$.

Giao điểm R của Δ với trục hoành:

$$-x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3$$

Suy ra $R(3; 0)$.

Gọi $K(a; f(a))$ là giao điểm của đồ thị $y = f(x)$ và đường thẳng Δ , với $1 < a < 2$.

Đặt:

$$g(x) = 2x, \quad h(x) = -x + 3$$

Diện tích A gồm hai phần:

$$A = \int_1^a (g(x) - h(x)) dx + \int_a^2 (g(x) - f(x)) dx$$

Tức là:

$$A = \int_1^a (3x - 3) dx + \int_a^2 \left(x - \frac{1}{4}x^3 \right) dx$$

Suy ra:

$$A = \left(\frac{3}{2}x^2 - 3x \right) \Big|_1^a + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{16} \right) \Big|_a^2$$

$$A = \frac{a^4}{16} + a^2 - 3a + \frac{5}{2}$$

Diện tích B gồm hai phần:

$$B = \int_0^a f(x)dx + \int_a^3 h(x)dx$$

Tức là:

$$B = \int_0^a \left(\frac{1}{4}x^3 + x \right) dx + \int_a^3 (-x + 3) dx$$

Suy ra:

$$B = \left(\frac{x^4}{16} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^a + \left(-\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_a^3$$

$$B = \frac{a^4}{16} + a^2 - 3a + \frac{9}{2}$$

Vậy:

$$B - A = \frac{9}{2} - \frac{5}{2} = 2$$

Đáp số: 2.

Câu 2

Tập S gồm các điểm $(x; y)$ với x, y là các số nguyên dương không vượt quá 15.

Số điểm của S là:

$$15 \cdot 15 = 225$$

Chọn ngẫu nhiên 2 điểm phân biệt A, B từ S .

Trung điểm C có tọa độ nguyên khi và chỉ khi hoành độ của A, B cùng tính chẵn lẻ và tung độ của A, B cùng tính chẵn lẻ.

Trong các số từ 1 đến 15:

- Có 8 số lẻ.
- Có 7 số chẵn.

Chia các điểm của S thành 4 nhóm theo tính chẵn lẻ của tọa độ:

Loại điểm Số điểm

Lẻ, lẻ $8 \cdot 8 = 64$

Lẻ, chẵn $8 \cdot 7 = 56$

Chẵn, lẻ $7 \cdot 8 = 56$

Chẵn, chẵn $7 \cdot 7 = 49$

Để trung điểm có tọa độ nguyên, hai điểm phải nằm trong cùng một nhóm.

Số cách chọn thuận lợi là:

$$\begin{aligned} & C_{64}^2 + C_{56}^2 + C_{56}^2 + C_{49}^2 \\ &= \frac{64 \cdot 63}{2} + 2 \cdot \frac{56 \cdot 55}{2} + \frac{49 \cdot 48}{2} \\ &= 2016 + 3080 + 3080 + 1176 = 6272 \end{aligned}$$

Tổng số cách chọn 2 điểm phân biệt từ 225 điểm là:

$$C_{225}^2 = \frac{225 \cdot 224}{2} = 25200$$

Do đó:

$$P = \frac{6272}{25200} = \frac{56}{225}$$

Vậy:

$$225p = 225 \cdot \frac{56}{225} = 56$$

Đáp số: 56.

Câu 3

Gọi độ dài cạnh hai đáy của khối chóp cắt tứ giác đều lần lượt là a, b , chiều cao là h .

Tổng diện tích hai mặt đáy bằng 54 nên:

$$a^2 + b^2 = 54$$

Vì $AC' = 9$ nên:

$$AC'^2 = 81$$

Trong khối chóp cắt tứ giác đều, hình chiếu của AC' lên mặt đáy có độ dài:

$$\frac{a+b}{\sqrt{2}}$$

Do đó:

$$AC'^2 = h^2 + \frac{(a+b)^2}{2}$$

Suy ra:

$$81 = h^2 + \frac{a^2 + 2ab + b^2}{2}$$

Vì $a^2 + b^2 = 54$ nên:

$$81 = h^2 + \frac{54 + 2ab}{2}$$

$$81 = h^2 + 27 + ab$$

$$h^2 = 54 - ab$$

Thể tích khối chóp cắt là:

$$V = \frac{h}{3}(a^2 + b^2 + ab)$$

Suy ra:

$$V = \frac{h}{3}(54 + ab)$$

Đặt $t = ab$. Khi đó:

$$h = \sqrt{54 - t}$$

và

$$V = \frac{1}{3}(54 + t)\sqrt{54 - t}$$

Xét hàm:

$$\varphi(t) = (54 + t)\sqrt{54 - t}$$

Ta có:

$$\varphi'(t) = \sqrt{54 - t} - \frac{54 + t}{2\sqrt{54 - t}}$$

$$= \frac{2(54 - t) - (54 + t)}{2\sqrt{54 - t}}$$

$$= \frac{54 - 3t}{2\sqrt{54 - t}}$$

Suy ra $\varphi'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 18$.

Vậy thể tích lớn nhất đạt được khi $ab = 18$.

Khi đó:

$$h = \sqrt{54 - 18} = 6.$$

Thể tích lớn nhất là:

$$\begin{aligned} V_{\max} &= \frac{1}{3}(54 + 18) \cdot 6 \\ &= \frac{1}{3} \cdot 72 \cdot 6 = 144. \end{aligned}$$

Đáp số: 144.

Câu 4

Điểm đặt thiết bị là:

$$A(5\sqrt{3}; 8; 15).$$

Bức tường trùng với mặt phẳng (Oyz) nên mọi điểm M trên tường có dạng:
 $M(0; y; z)$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (Oyz) .

Suy ra:

$$H(0; 8; 15).$$

Ta có:

$$AH = 5\sqrt{3}.$$

Tia sáng tạo với trục Ox góc 60° , nên:

$$\frac{AH}{AM} = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

Suy ra:

$$AM = 2AH = 10\sqrt{3}.$$

Trong tam giác vuông AHM :

$$\begin{aligned} HM^2 &= AM^2 - AH^2 \\ &= (10\sqrt{3})^2 - (5\sqrt{3})^2 \\ &= 300 - 75 = 225. \end{aligned}$$

Suy ra:

$$HM = 15.$$

Vậy điểm M nằm trên đường tròn trong mặt phẳng (Oyz) , tâm $H(0; 8; 15)$, bán kính 15.

Ta có:

$$OH = \sqrt{8^2 + 15^2} = \sqrt{289} = 17.$$

Khoảng cách lớn nhất từ M đến O là:

$$OM_{\max} = OH + HM = 17 + 15 = 32.$$

Đáp số: 32 mét.

Câu 5

Năm 2025, chi phí vận hành là 2 tỷ đồng.

Sau mỗi năm, chi phí tăng 10% so với năm trước.

Gọi n là số năm sau năm 2025. Khi đó chi phí năm $2025 + n$ là:

$$2(1,1)^n \text{ tỷ đồng.}$$

Cần tìm năm đầu tiên để:

$$2(1,1)^n > 4$$

Suy ra:

$$(1,1)^n > 2$$

Lấy logarit hai vế:

$$n > \frac{\ln 2}{\ln 1,1}$$

Tính gần đúng:

$$\frac{\ln 2}{\ln 1,1} \approx 7,27$$

Vì n là số nguyên nên $n_{\min} = 8$.

Năm cần tìm là:

$$2025 + 8 = 2033$$

Đáp số: 2033.

Câu 6

Mỗi người dùng trả 2 triệu đồng/năm.

Nếu có x người dùng thì doanh thu là:

$2x$ triệu đồng.

Chi phí là:

$$C(x) = 10 \ln x + 50 \text{ triệu đồng.}$$

Lợi nhuận là:

$$L(x) = 2x - (10 \ln x + 50)$$

Cần lợi nhuận tối thiểu 200 triệu đồng nên:

$$2x - 10 \ln x - 50 \geq 200$$

Suy ra:

$$2x - 10 \ln x \geq 250$$

Ta thử quanh giá trị $x = 150$.

Với $x = 150$:

$$\begin{aligned} L(150) &= 2 \cdot 150 - 10 \ln 150 - 50 \\ &= 250 - 10 \ln 150 \approx 199,89 < 200 \end{aligned}$$

Vậy 150 người dùng chưa đủ.

Với $x = 151$:

$$\begin{aligned} L(151) &= 2 \cdot 151 - 10 \ln 151 - 50 \\ &= 252 - 10 \ln 151 \approx 201,83 > 200 \end{aligned}$$

Vậy 151 người dùng là đủ.

Ngoài ra, với $x > 5$ thì:

$$L'(x) = 2 - \frac{10}{x} > 0$$

nên lợi nhuận tăng khi x tăng. Do đó 151 là số người dùng ít nhất cần có.

Đáp số: 151 người dùng.