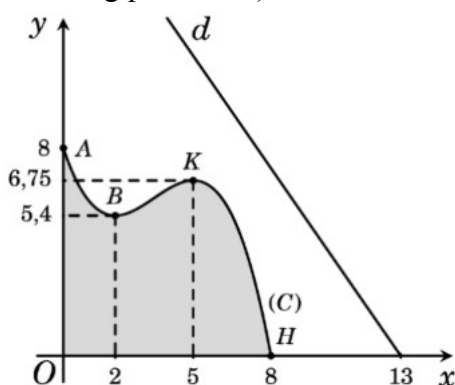


BÀI TOÁN THỰC TẾ KHẢO SÁT HÀM SỐ BẬC BA

Câu 1. Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hóa bằng hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số. Trong đó x ($0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{Q}$) là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

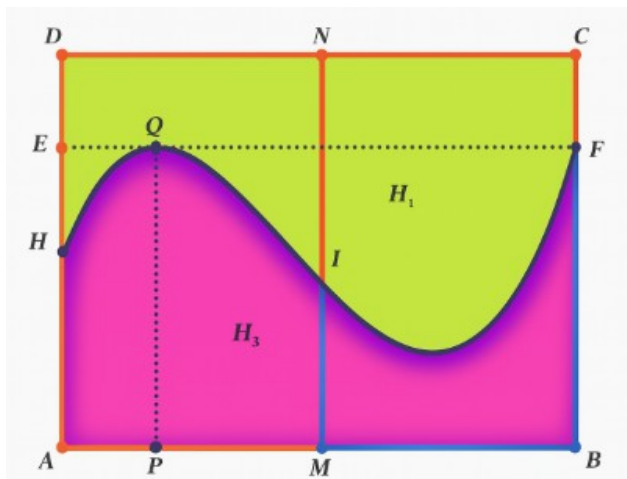
Câu 2. Một khu vực trồng hoa được xây dựng trong khu du lịch sinh thái. Trong mô hình minh họa (như hình vẽ bên), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị (C) của một hàm số bậc ba. Biết rằng đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0; 8)$, $B(2; 5,4)$, $K(5; 6,75)$ và $H(8; 0)$. Trong khu du

lịch sinh thái có một con đường chạy dọc theo đường thẳng $d: y = -\frac{13}{9}x + \frac{169}{9}$. Tìm hoành độ của điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

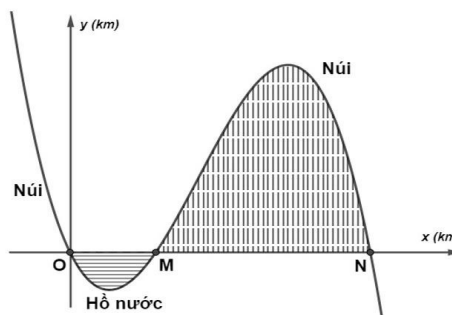


Câu 3. Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100 \text{ m}$; $AD = 80 \text{ m}$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (không tô màu) dành cho trẻ em và H_2 (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với $AH = 40 \text{ m}$; $AE = 60 \text{ m}$; $AP = 20 \text{ m}$ và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

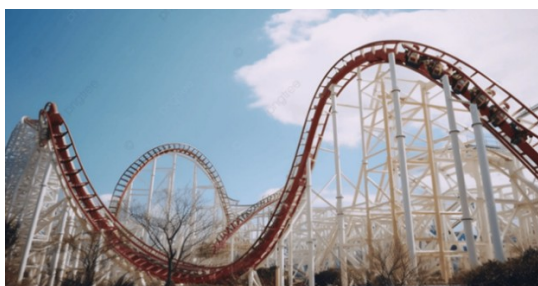
Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng.



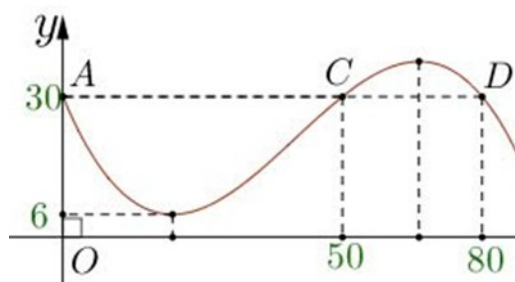
- Câu 4.** Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2\text{km}$; độ rộng của núi $MN = 3,5\text{km}$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).



- Câu 5.** Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($0 \leq x < 90$); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A , đi qua các điểm C, D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là 6m. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

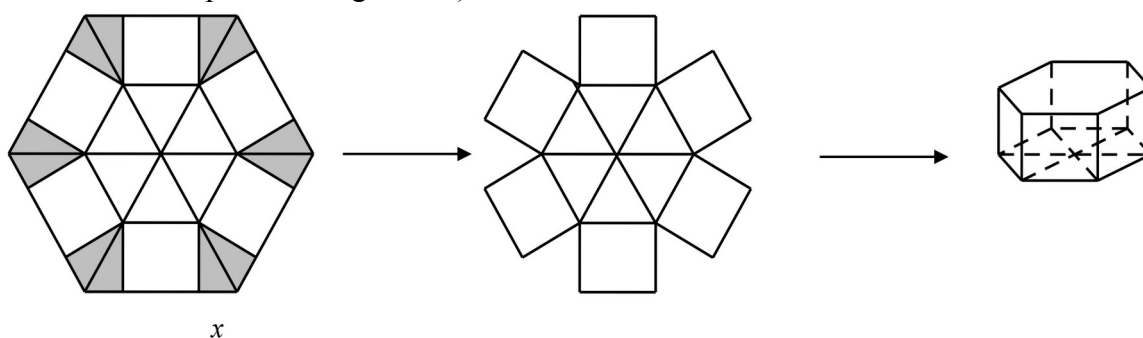


Hình 1



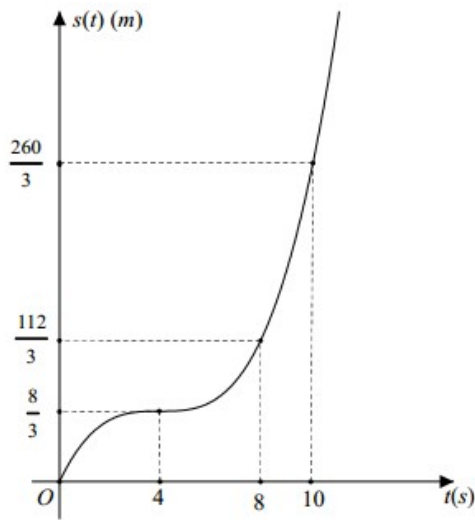
Hình 2

- Câu 6.** Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



- Câu 7.** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm. Nhà máy A cần bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

- Câu 8.** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B; Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 90 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x) = 90 - 0,01x^2$ (đơn vị triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = \frac{1}{2}(200 + 27x)$ (đơn vị triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu mỗi tháng. Hỏi mỗi tháng nhà máy A thu được lợi nhuận cao nhất là bao nhiêu triệu đồng (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng)?
- Câu 9.** Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Để mỗi tháng thu được lợi nhuận lớn nhất thì A cần bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)
- Câu 10.** Một doanh nghiệp dự định sản xuất 200 máy tính bảng dành cho học sinh. Nếu doanh nghiệp đó bán x máy tính bảng ($1 \leq x \leq 200, x \in \mathbb{N}$) thì giá bán cho mỗi máy tính bảng là $p(x) = 4000 - 10x$ (nghìn đồng), trong đó chi phí để sản xuất mỗi máy tính bảng là $c(x) = x^2 - 70x + 400 + \frac{1000}{x}$ (nghìn đồng). Hỏi doanh nghiệp đó sẽ bán bao nhiêu máy tính bảng để lợi nhuận cao nhất?
- Câu 11.** Một hộ kinh doanh sản xuất mỗi ngày được x sản phẩm, ($1 \leq x \leq 20$). Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi $C(x) = x^3 - 3x^2 + 80x + 500$ (nghìn đồng). Giả sử hộ kinh doanh này bán mỗi sản phẩm với giá 320 nghìn đồng. Lợi nhuận lớn nhất mà hộ kinh doanh có được là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).
- Câu 12.** Một vật chuyển động theo quy luật $S = -t^3 + 18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu (m/s)?
- Câu 13.** Trên một trục số thẳng đứng có chiều dương hướng lên trên, một chất điểm bắt đầu chuyển động dọc theo trục số. Giả sử, tại thời điểm t giây ($t \geq 0$) tính từ lúc bắt đầu chuyển động thì vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số thẳng đứng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$ (mét). Trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?
- Câu 14.** Một vật chuyển động. Quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t \geq 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



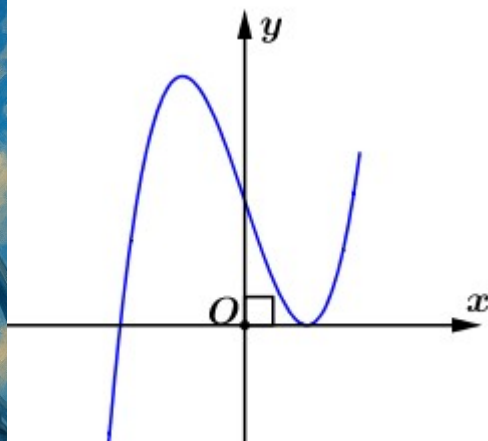
Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?

Câu 15. Ngày khai giảng năm học 2024–2025. Học sinh khối 12 trường THPT Nguyễn Hiền thả chùm bóng bay gắn thông điệp “Học Sinh khối 12 chiến thắng CT²⁰¹⁸”. Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t) = -t^3 + 3t^2, (0 \leq t \leq 3)$. Chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là: $a(km)$. Tìm a ?

Câu 16. Từ năm 2004 đến năm 2019 doanh thu $R(t)$ (tính bằng triệu đô la) của McDonald’s có thể được mô hình hóa bởi $R(t) = -130,769t^3 + 2296,47t^2 - 11493,5t + 35493$ ($4 \leq t \leq 19$), trong đó t là đại diện cho năm, với $t=4$ tương ứng với năm 2004. Biết rằng $R'(t)$ là hàm tốc độ doanh thu theo thời gian. Tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald’s lớn nhất vào năm nào? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo triệu đô la mỗi năm).

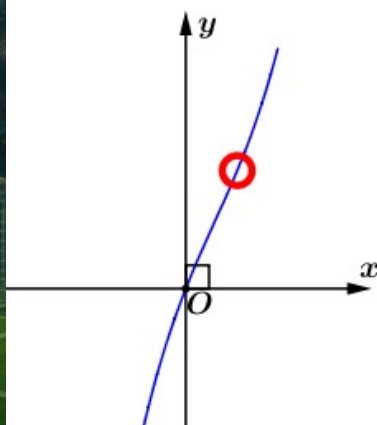
Câu 17. Một nhà máy sản xuất x sản phẩm trong mỗi tháng. Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi hàm chi phí $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ (nghìn đồng). Biết giá bán của mỗi sản phẩm là một hàm số phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x và được cho bởi công thức $p(x) = 1700 - 7x$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi tháng nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? Biết rằng kết quả khảo sát thị trường cho thấy sản phẩm sản xuất ra sẽ tiêu thụ hết.

Câu 18. Một đường ray tàu lượn trong khu vui chơi giải trí có hình dáng được mô phỏng theo đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, ký hiệu là (C). Để đảm bảo an toàn và tính thẩm mỹ, người ta chọn hai điểm $A(a;b)$ và $B(c;d)$ trên đường ray sao cho tiếp tuyến tại hai điểm này có cùng độ dốc (cùng hệ số góc). Đồng thời, đoạn đường nối hai trụ đỡ tại các điểm A và B phải vuông góc với một đường dây điện có phương trình $x + y - 5 = 0$. Tìm $b + d$



Câu 19. Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi

phương trình $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là 2.44 m . Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



LỜI GIẢI

Câu 1. Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hóa bằng hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số. Trong đó x ($0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$) là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

Lời giải

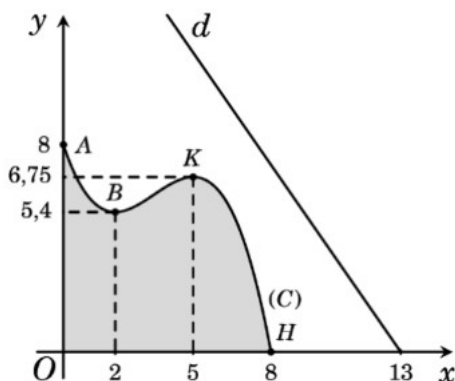
Đáp án: 84.

$$\begin{cases} f(1) = 19 \\ f'(3) = 0 \\ f(3) = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 28 \\ 6a + b = -27 \\ 9a + 3b + c = -24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = 30 \end{cases}$$

Dựa vào đề bài ta có hệ phương trình:

$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30 \Rightarrow f(6) = 84$$

Câu 2. Một khu vực trồng hoa được xây dựng trong khu du lịch sinh thái. Trong mô hình minh họa (như hình vẽ bên), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị (C) của một hàm số bậc ba. Biết rằng đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0; 8)$, $B(2; 5,4)$, $K(5; 6,75)$ và $H(8; 0)$. Trong khu du lịch sinh thái có một con đường chạy dọc theo đường thẳng $d: y = -\frac{13}{9}x + \frac{169}{9}$. Tìm hoành độ của điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 6,16.

Đồ thị (C) của một hàm số bậc ba có dạng: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).

Vì đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0; 8)$, $B(2; 5,4)$, $K(5; 6,75)$ và $H(8; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} d = 8 \\ 8a + 4b + 2c + d = 5,4 \\ 125a + 25b + 5c + d = 6,75 \\ 512a + 64b + 8c + d = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a = -\frac{1}{10} \\ b = \frac{21}{20} \\ c = -3 \\ d = 8 \end{cases}$$

Suy ra $f(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{21}{20}x^2 - 3x + 8$.

Điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất khi và chỉ khi tiếp tuyến của (C) tại M song song với d ($x_M > 5$).

Ta có: $f'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{21}{10}x - 3$.

Đường thẳng d có hệ số góc $k = -\frac{13}{9}$.

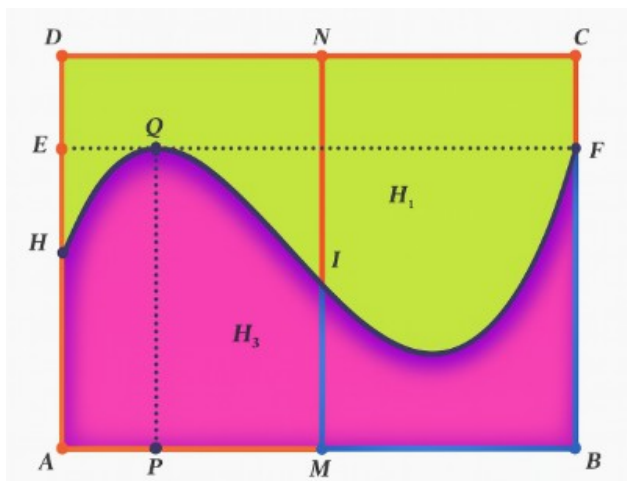
Suy ra: $-\frac{3}{10}x^2 + \frac{21}{10}x - 3 = -\frac{13}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 6,16 \\ x_2 = 0,84 < 5 \end{cases}$

Do $x_M > 5$ nên $x_M = 6,16$ thỏa mãn.

Câu 3.

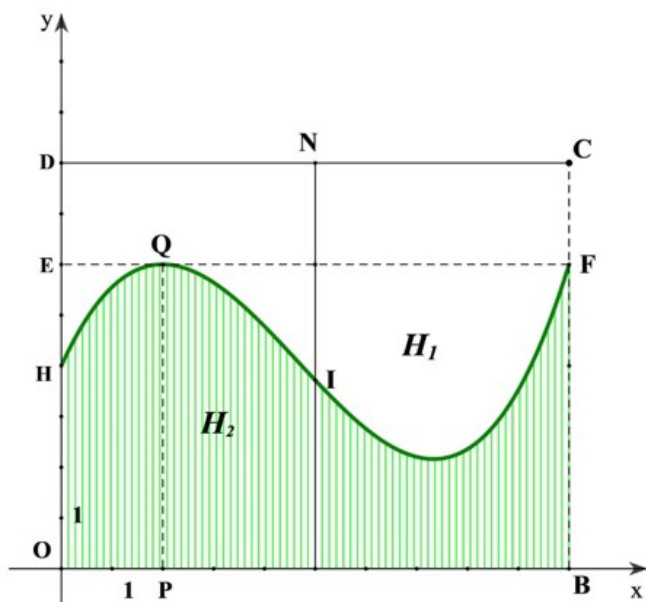
Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100\text{ m}$; $AD = 80\text{ m}$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (không tô màu) dành cho trẻ em và H_2 (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với $AH = 40\text{ m}$; $AE = 60\text{ m}$; $AP = 20\text{ m}$ và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng.



Lời giải

Đáp án: 13,9.



Xét trục tọa độ Oxy , với gốc tọa độ là điểm A . Tia Ox trùng với tia AB , tia Oy trùng với tia AD thì đường cong ranh giới giữa hai khu vực là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Theo giả thiết đồ thị hàm số này đi qua các điểm $H(0;40)$; $Q(20;60)$; $F(100;60)$ và có điểm cực trị là $Q(20;60)$ nên ta có hệ

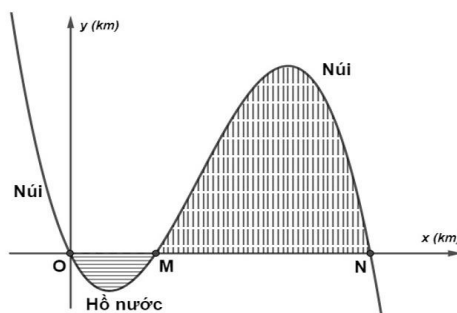
$$\begin{cases} d = 40 \\ 60 = 8000a + 400b + 20c + d \\ 60 = 1000000a + 10000b + 100c + d \\ 3.10000a + 2.100b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = \frac{1}{10000}; b = \frac{-11}{500}; c = \frac{7}{5}; d = 40$.

Do M là trung điểm của AB nên tọa độ điểm I là $(50; 67,5)$. Do đó chiều dài đoạn dây thuộc phần dành cho người lớn là $67,5\text{ m}$, chiều dài đoạn dây thuộc phần dành cho trẻ em là $12,5\text{ m}$.

Tổng số tiền mắc dây đèn là $67,5 \cdot 0,18 + 12,5 \cdot 0,14 = 13,9$ (triệu đồng).

Câu 4. Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2\text{ km}$; độ rộng của núi $MN = 3,5\text{ km}$. Độ sâu của hồ nước là 450 m . Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp số: 1191

Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$)

Ta có: $ON = OM + MN = 2 + 3,5 = 5,5\text{ (km)}$

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm: $O(0;0)$, $M(2;0)$ và $N(5,5;0)$

Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = 0; x = 2; x = 5,5$.

$\Rightarrow f(x) = k \cdot x(x-2)(x-5,5) = k(x^3 - 7,5x^2 + 11x)$ với đồ thị hàm số $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$ nên $k < 0$

Ta có: $f'(x) = k(3x^2 - 15x + 11)$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k(3x^2 - 15x + 11) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{93}}{6}$.

Độ sâu của hồ nước là $450\text{ m} = 0,45\text{ km}$ nên ta có giá trị cực tiểu của đồ thị hàm số trên là $y_{CT} = -0,45$.

Suy ra, $f\left(\frac{15-\sqrt{93}}{6}\right) = -0,45 \Leftrightarrow k \cdot \frac{-135+31\sqrt{93}}{36} = -0,45 \Leftrightarrow k = \frac{-16,2}{-135+31\sqrt{93}}$

$$y_{CD} = f\left(\frac{15+\sqrt{93}}{6}\right) \approx 1,19106(km) \approx 1191(m)$$

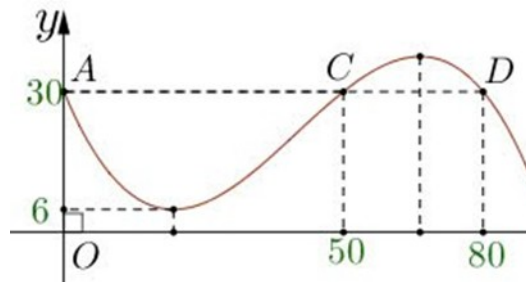
Chiều cao của ngọn núi tương ứng với

Vậy ngọn núi cao khoảng $1191m$.

Câu 5. Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($0 \leq x < 90$); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A , đi qua các điểm C, D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là $6m$. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Hình 1



Hình 2

Lời giải

Đáp án: 39,9

Dựa vào hình 2 ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a < 0$) và đường thẳng $y = 30$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x = 0; x = 50; x = 80$.

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 30 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - 30 = 0 \quad \text{có 3 nghiệm phân biệt } x = 0; x = 50; x = 80.$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - 30 = ax(x-50)(x-80) = a(x^3 - 130x^2 + 4000x)$$

Suy ra $f(x) = a(x^3 - 130x^2 + 4000x) + 30 \Rightarrow f'(x) = a(3x^2 - 260x + 4000)$

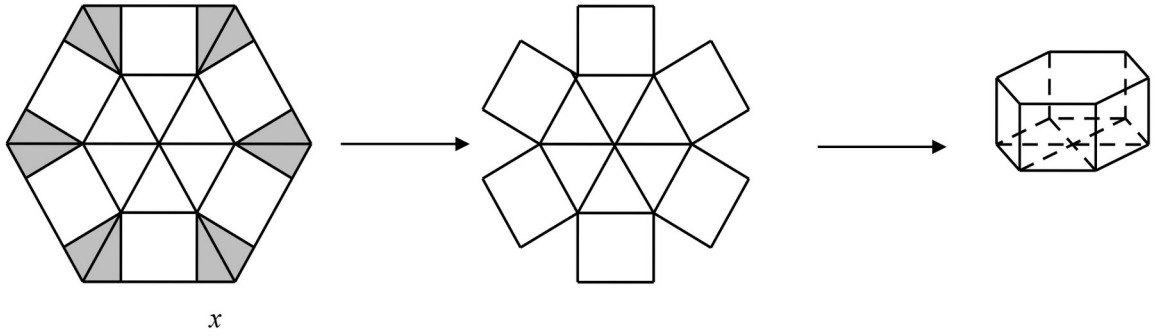
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 (TM) \\ x = \frac{200}{3} (TM) \end{cases}$$

Theo bài ra độ cao nhỏ nhất bằng 6 hay $f(20) = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{1500}$

Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là $f\left(\frac{200}{3}\right) = \frac{3230}{81} \approx 39,9$.

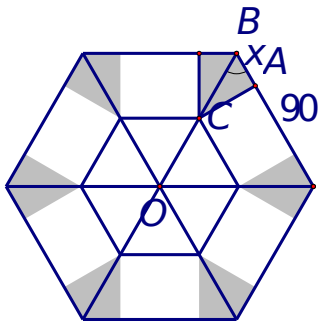
Câu 6. Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm. Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi gập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp.

Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 15.



Lăng trụ có:

Diện tích đáy:

$$S = 6 \cdot \frac{OC^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot (OB - BC)^2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(OB - \frac{x}{\cos \angle ABC} \right)^2$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2} (90 - 2x)^2 = 6\sqrt{3} (45 - x)^2$$

Chiều cao: $h = AC = x \cdot \tan \angle ABC = x\sqrt{3}$

Thể tích lăng trụ: $V = Sh = 18x(45 - x)^2 = 18(x^3 - 90x^2 + 45^2)$

$$V' = 18(3x^2 - 180x + 45^2); V' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 15 \Rightarrow y = 243000 \\ x = 45 \Rightarrow y = 0 \end{cases}$$

Đạo hàm:

x	0	15	45
V'		+	0
V	0	243000	0

Dựa vào bảng biến thiên ta nhận $x = 15$.

Câu 7. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán

cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm. Nhà máy A cần bán cho nhà máy B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp số: 70,7.

Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng).

Doanh thu khi nhà máy A bán hết x tấn sản phẩm cho nhà máy B là:
 $x \cdot P(x) = x(45 - 0,001x^2) = 45x - 0,001x^3$

Lợi nhuận thu được là: $L(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$

Ta có: $L'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 70,7 \\ x \approx -70,7 \end{cases}$

Bảng biến thiên:

x	0	70,7	$+\infty$
$L'(x)$		+	0
$L(x)$			—

Như vậy, nhà máy A cần bán cho nhà máy B 70,7 tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 8. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B; Hai nhà máy thảo thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của nhà máy B (tối đa 90 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $p(x) = 90 - 0,01x^2$ (đơn vị triệu đồng). Chi phí để nhà máy A sản xuất x tấn

sản phẩm trong một tháng là $C(x) = \frac{1}{2}(200 + 27x)$ (đơn vị triệu đồng), thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là 10% tổng doanh thu mỗi tháng. Hỏi mỗi tháng nhà máy A thu được lợi nhuận cao nhất là bao nhiêu triệu đồng (sau khi đã trừ thuế giá trị gia tăng)?

Lời giải

Đáp án: 2150

Gọi x là số tấn sản phẩm nhà máy B đặt hàng nhà máy A hàng tháng ($0 \leq x \leq 90$)

Tổng doanh thu hàng tháng của nhà máy A là $x p(x) = 90x - 0,01x^3$ (triệu đồng)

Thuế giá trị gia tăng mà nhà máy A phải đóng cho nhà nước là $9x - 0,001x^3$ (triệu đồng)

Tổng chi phí mà nhà máy A phải chi trả hàng tháng là $\frac{1}{2}(200 + 27x) + (9x - 0,001x^3)$ (triệu đồng)

Khi đó, lợi nhuận hàng tháng của nhà máy A là

$$(90x - 0,01x^3) - \frac{1}{2}(200 + 27x) - (9x - 0,001x^3) = -0,009x^3 + 67,5x - 100 \quad (\text{triệu đồng})$$

Xét hàm số $f(x) = -0,009x^3 + 67,5x - 100$, $x \in [0; 90]$

Ta có: $f'(x) = -0,027x^2 + 67,5$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 50 \\ x = -50 \end{cases} \text{ (l)} \quad \text{và} \quad f(0) = -100, f(50) = 2150, f(90) = -586.$$

Vậy mỗi tháng nhà máy A thu được lợi nhuận cao nhất là 2150 triệu đồng.

Câu 9. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cung cấp cho nhà máy B. Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hàng tháng nhà máy A cung cấp cho nhà máy B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Chi phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ (triệu đồng) (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm). Để mỗi tháng thu được lợi nhuận lớn nhất thì A cần bán cho B bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đáp án: 71.

Doanh thu khi nhà máy A bán hết x tấn sản phẩm cho nhà máy B là:
 $x \cdot P(x) = x(45 - 0,001x^2) = 45x - 0,001x^3$.

Lợi nhuận thu được là: $L(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) = -0,001x^3 + 15x - 100$.

$$L'(x) = -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \approx 70,7 \\ x \approx -70,7 \end{cases}$$

Ta có:

Bảng biến thiên:

x	0	70,7	$+\infty$
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$			

Ta có: $L(70) = 607$, $L(71) = 607,089 > L(70)$

Như vậy, nhà máy A cần bán 71 tấn sản phẩm cho nhà máy B mỗi tháng để lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 10. Một doanh nghiệp dự định sản xuất 200 máy tính bảng dành cho học sinh. Nếu doanh nghiệp đó bán x máy tính bảng ($1 \leq x \leq 200, x \in \mathbb{N}$) thì giá bán cho mỗi máy tính bảng là $p(x) = 4000 - 10x$ (nghìn đồng), trong đó chi phí để sản xuất mỗi máy tính bảng là

$c(x) = x^2 - 70x + 400 + \frac{1000}{x}$ (nghìn đồng). Hỏi doanh nghiệp đó sẽ bán bao nhiêu máy tính bảng để lợi nhuận cao nhất?

Lời giải

Đáp số: 60.

Ta có doanh thu của doanh nghiệp khi bán x máy tính bảng là:

$$D(x) = x \cdot p(x) = x(4000 - 10x) = 4000x - 10x^2$$

Chi phí của doanh nghiệp để sản xuất x máy tính bảng là:

$$C(x) = x \cdot c(x) = x \left(x^2 - 70x + 400 + \frac{1000}{x} \right) = x^3 - 70x^2 + 400x + 1000$$

Lợi nhuận của doanh nghiệp khi bán x máy tính bảng là:

$$L(x) = D(x) - C(x) = 4000x - 10x^2 - (x^3 - 70x^2 + 400x + 1000) = -x^3 + 60x^2 + 3600x - 1000$$

Xét hàm $L(x) = -x^3 + 60x^2 + 3600x - 1000$ ($1 \leq x \leq 200; x \in \mathbb{N}$).

Có $y' = -3x^2 + 120x + 3600$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 & (N) \\ x = -20 & (L) \end{cases}$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	60	200
y'		+	-
y	0	215000	-4881000

60

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy doanh nghiệp đó sẽ bán máy tính bảng để lợi nhuận cao nhất.

Câu 11. Một hộ kinh doanh sản xuất mỗi ngày được x sản phẩm, ($1 \leq x \leq 20$). Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi $C(x) = x^3 - 3x^2 + 80x + 500$ (nghìn đồng). Giả sử hộ kinh doanh này bán mỗi sản phẩm với giá 320 nghìn đồng. Lợi nhuận lớn nhất mà hộ kinh doanh có được là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

Lời giải

Đáp án: 1,2

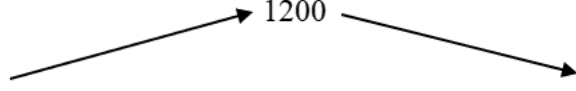
Doanh thu tối đa mà hộ kinh doanh có thể thu được là $320x$ (nghìn đồng).

Lợi nhuận hộ kinh doanh thu được là

$$L(x) = 320x - (x^3 - 3x^2 + 80x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

Ta có $L'(x) = -3x^2 + 6x + 240 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = -8. \end{cases}$

Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$			

Vậy lợi nhuận lớn nhất mà hộ kinh doanh có được là 1200 nghìn đồng^{1,2} triệu đồng.

Câu 12. Một vật chuyển động theo quy luật $S = -t^3 + 18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu (m/s)?

Lời giải

Đáp án: 108.

Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 36t$ với $t \in [0; 10]$.

$v'(t) = -6t + 36$; $v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$

$v(0) = 0$; $v(10) = 60$; $v(6) = 108$.

Vậy vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động là 108 (m/s).

Câu 13. Trên một trục số thẳng đứng có chiều dương hướng lên trên, một chất điểm bắt đầu chuyển động dọc theo trục số. Giả sử, tại thời điểm t giây ($t \geq 0$) tính từ lúc bắt đầu chuyển động thì vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số thẳng đứng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$ (mét). Trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Đáp án: 756

Ta có $s'(t) = 3t^2 - 36t + 81$.

$s'(t) = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 36t + 81 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \\ t = 9 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

t	0	3	9	15	
$s'(t)$		+	0	-	+
$s(t)$					

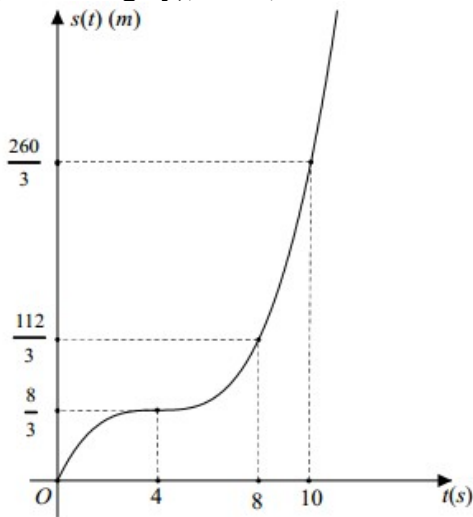
Trong 3 giây đầu, chất điểm di chuyển hướng lên $108m$.

Trong khoảng $(3;9)$ giây tiếp theo chất điểm di chuyển hướng xuống $108m$.

Trong khoảng $(9;15)$ giây cuối chất điểm di chuyển hướng lên $540m$.

Vậy trong 15 giây chuyển động đầu tiên thì chất điểm di chuyển được quãng đường là $108 + 108 + 540 = 756$ (mét).

Câu 14. Một vật chuyển động. Quãng đường $s(t)$ (tính theo mét) vật đi được sau khoảng thời gian t (tính theo giây), $t \geq 0$, được mô tả là một hàm số bậc ba có đồ thị như hình vẽ dưới đây:



Hỏi trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài bao nhiêu giây?

Lời giải

Đáp án: 8.

Giả sử $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ ($a \neq 0$).

Vì đồ thị hàm số $s(t)$ đi qua các điểm $(0;0)$, $\left(4; \frac{8}{3}\right)$, $\left(8; \frac{112}{3}\right)$ và $\left(10; \frac{260}{3}\right)$ nên ta có

$$\begin{cases} 64a + 16b + 4c = \frac{8}{3} \\ 512a + 64b + 8c = \frac{112}{3} \\ 1000a + 100b + 10c = \frac{260}{3} \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{6} \\ b = -1 \\ c = 2 \\ d = 0 \end{cases}$$

Do đó $s(t) = \frac{1}{6}t^3 - t^2 + 2t$.

Ta có $v(t) = s'(t) = \frac{1}{2}t^2 - 2t + 2 \Rightarrow v'(t) = t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Bảng biến thiên:

t	0	2	10
v'		-	0
v	2	0	32

Dựa vào bảng biến thiên, từ giây thứ 2 trở đi vận tốc của vật tăng dần theo thời gian. Do đó trong 10 giây đầu tiên, khoảng thời gian vật chuyển động nhanh dần kéo dài trong 8 giây.

Câu 15. Ngày khai giảng năm học 2024–2025. Học sinh khối 12 trường THPT Nguyễn Hiền thả chùm bóng bay gắn thông điệp “Học Sinh khối 12 chiến thắng CT²⁰¹⁸”. Ước tính độ cao h (tính bằng km) của chùm bóng bay so với mặt đất vào thời điểm t (đơn vị giờ) được cho bởi công thức $h(t) = -t^3 + 3t^2, (0 \leq t \leq 3)$. Chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là: $a(km)$. Tìm a ?

Lời giải

Đáp án: 4.

Ta có $h'(t) = -3t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $h(t) = -t^3 + 3t^2, (0 \leq t \leq 3)$

t	0	2	3
$h'(t)$		+	0
$h(t)$	0	4	0

Vậy chùm bóng bay đạt độ cao lớn nhất so với mặt đất là $4(km)$.

- Câu 16.** Từ năm 2004 đến năm 2019 doanh thu $R(t)$ (tính bằng triệu đô la) của McDonald's có thể được mô hình hóa bởi $R(t) = -130,769t^3 + 2296,47t^2 - 11493,5t + 35493$ ($4 \leq t \leq 19$), trong đó t là đại diện cho năm, với $t=4$ tương ứng với năm 2004. Biết rằng $R'(t)$ là hàm tốc độ doanh thu theo thời gian. Tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm nào? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị, tính theo triệu đô la mỗi năm).

Lời giải

Đáp án: 2006.

Ta có hàm tốc độ doanh thu là $R'(t) = -392,307t^2 + 4592,94t - 11493,5$.

$$R''(t) = -784,614t + 4592,94 = 0 \Leftrightarrow t \approx 6 \text{ (nhận)}.$$

Ta có bảng biến thiên của hàm số

t	4	6	19
$R''(t)$	+	0	-
$R'(t)$	601	1941	65851

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy rằng tốc độ thay đổi doanh thu của McDonald's lớn nhất vào năm 2006 (tương ứng với $t=6$).

- Câu 17.** Một nhà máy sản xuất x sản phẩm trong mỗi tháng. Chi phí sản xuất x sản phẩm được cho bởi hàm chi phí $C(x) = 16000 + 500x - 1,6x^2 + 0,004x^3$ (nghìn đồng). Biết giá bán của mỗi sản phẩm là một hàm số phụ thuộc vào số lượng sản phẩm x và được cho bởi công thức $p(x) = 1700 - 7x$ (nghìn đồng). Hỏi mỗi tháng nhà máy nên sản xuất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được là lớn nhất? Biết rằng kết quả khảo sát thị trường cho thấy sản phẩm sản xuất ra sẽ tiêu thụ hết.

Lời giải

Đáp án: 100.

+) Số tiền nhà máy thu được khi bán hết x sản phẩm là: $x \cdot p(x) = 1700x - 7x^2$ (nghìn đồng)

Lợi nhuận nhà máy thu được khi sản xuất và bán hết x sản phẩm là:
 $x \cdot p(x) - C(x) = -0,004x^3 - 5,4x^2 + 1200x - 16000$ (với $x > 0$).

+) Xét hàm số $f(x) = -0,004x^3 - 5,4x^2 + 1200x - 16000$ trên $(0; +\infty)$

$$\text{Ta có } f'(x) = -0,012x^2 - 10,8x + 1200; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 100 \\ x = -1000 \end{cases}$$

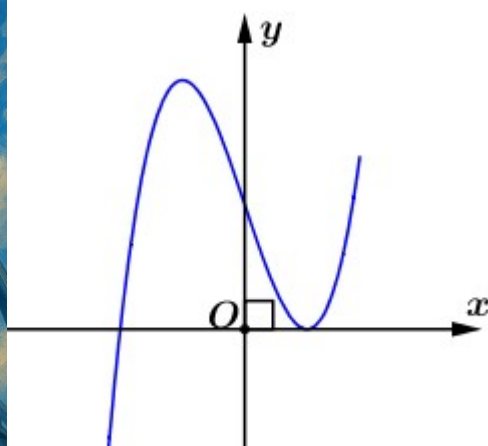
Bảng biến thiên

x	0	100	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	-16000	46000	$-\infty$

Từ bảng biến thiên, suy ra $\max_{(0;+\infty)} f(x) = f(100) = 46000$ (nghìn đồng).

Vậy mỗi tháng nhà máy nên sản xuất 100 sản phẩm thì lợi nhuận thu được là lớn nhất.

Câu 18. Một đường ray tàu lượn trong khu vui chơi giải trí có hình dáng được mô phỏng theo đồ thị của hàm số $y = x^3 - 3x + 2$, ký hiệu là (C). Để đảm bảo an toàn và tính thẩm mỹ, người ta chọn hai điểm $A(a;b)$ và $B(c;d)$ trên đường ray sao cho tiếp tuyến tại hai điểm này có cùng độ dốc (cùng hệ số góc). Đồng thời, đoạn đường nối hai trụ đỡ tại các điểm A và B phải vuông góc với một đường dây điện có phương trình $x + y - 5 = 0$. Tìm $b + d$



Lời giải

Đáp số: 4

$$y = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$$

Tiếp tuyến với (C) tại A, B có cùng hệ số góc và chỉ khi

$$f'(x_A) = f'(x_B) \Leftrightarrow x_A^2 = x_B^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = x_B \text{ (L)} \\ x_A + x_B = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow A, B$ đối xứng nhau qua $I(0;2)$ là tâm đối xứng của (C).

$$AB \perp d : x + y - 5 = 0 \Rightarrow AB : x - y + m = 0.$$

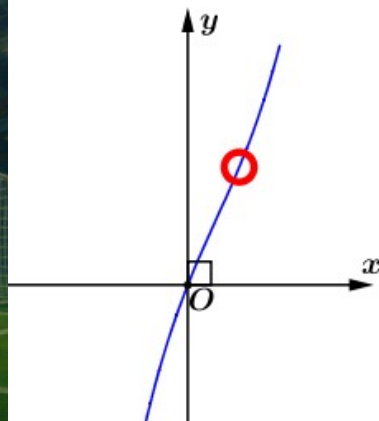
$$AB \text{ qua } I \text{ nên ta có } m = 2 \Rightarrow AB : x - y + 2 = 0.$$

Khi đó hoành độ A, B thỏa mãn phương trình

$$x^3 - 3x + 2 = x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ (L)} \\ x = \pm 2 \end{cases} \Rightarrow A(2;4), B(-2;0)$$

Câu 19. Một cầu thủ thực hiện cú sút bóng xoáy (banana kick), làm bóng bay theo đường cong hình bậc ba thay vì một parabol thông thường. Quỹ đạo bóng trong hệ trục tọa độ Oxy được mô tả bởi

phương trình $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$, với y là độ cao của bóng (m). Biết chiều cao chuẩn của khung thành là $2.44m$. Khi bóng chạm xà ngang thì góc lệch của bóng và mặt đất là bao nhiêu biết góc lệch của bóng và mặt đất là góc của đường tiếp tuyến với đồ thị hàm số $y = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100}$ tại điểm chạm xà ngang và trục Ox (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 67

Ta có bóng chạm xà ngang nên ta có tung độ $y = 2,44$

$$\Leftrightarrow 2,44 = \frac{x^3}{100} - \frac{x^2}{10} + \frac{253x}{100} \Leftrightarrow x^3 - 10x^2 + 253x - 244 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Hệ số góc của tiếp tuyến là $k_{tt} = f'(1) = \frac{3}{100} - \frac{1}{5} + \frac{253}{100} = \frac{59}{25}$

Gọi α là góc của tiếp tuyến với trục Ox , ta có $\tan \alpha = \frac{59}{25} \Rightarrow \alpha \approx 67^\circ$