

MỘT SỐ BÀI TOÁN TỌA ĐỘ HÓA MỘT SỐ HÌNH HỌC KHÔNG GIAN VÀ ỨNG DỤNG THỰC TẾ

Phương pháp: Để tọa độ hóa một số hình học không gian thì ta thực hiện như sau:

- **Bước 1:** Chọn hệ trục tọa độ. Trong bước này ta sẽ xác định 3 đường vuông góc có trong bài toán và gọi đó là 3 đường cơ sở. Thông thường thì ta sẽ quy ước trục Ox hướng vào mình, trục Oy nằm ngang, còn lại là trục Oz .
- **Bước 2:** Xác định tọa độ các điểm liên quan trên hình liên quan tới bài toán. Với những bạn chưa quen thì chúng ta xác định tọa độ hình chiếu của điểm cần tìm lên các trục, từ đó sẽ suy ra được tọa độ điểm cần tính.
- **Bước 3:** Áp dụng công thức. Sau đây chúng ta sẽ nhắc lại một số công thức cần nhớ trong phần này:

Diện tích và thể tích: Diện tích tam giác, thể tích tứ diện, thể tích hình hộp, thể tích hình lăng trụ.

Góc: Góc giữa 2 mặt phẳng, góc giữa 2 đường thẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Khoảng cách: Khoảng cách từ điểm đến mặt phẳng, Khoảng cách từ một điểm đến 1 đường thẳng, Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Chú ý: Thông thường các bài mà không có 3 đường vuông góc thì ta sẽ phải tự dựng thêm để gán tọa độ và những bài liên quan tới hình lập phương, hình hộp chữ nhật, chóp có 3 đường vuông góc, lăng trụ đứng thì khi áp dụng phương pháp này sẽ giải rất nhanh.

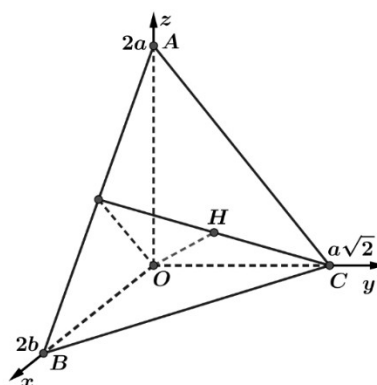
A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OA = OB = 2a, OC = a\sqrt{2}$. Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) bằng

- A. $a\sqrt{2}$ B. a C. $\frac{a}{2}$ D. $\frac{3a}{4}$

Lời giải



Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ như sau điểm O là gốc tọa độ $OA \equiv Oz$; $OB \equiv Ox$ và $OC \equiv Oy$.

Khi đó ta có $O(0;0;0)$, $A(0;0;2a)$, $B(2a;0;0)$ và $C(0;a\sqrt{2};0)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{2a} + \frac{y}{a\sqrt{2}} + \frac{z}{2a} = 1 \Leftrightarrow x + \sqrt{2}y + z - 2a = 0$.

Khoảng cách từ điểm O đến mặt phẳng (ABC) là $d(O, (ABC)) = \frac{|0 + \sqrt{2} \cdot 0 + 0 - 2a|}{\sqrt{1+2+1}} = a$.

Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ cạnh bằng a . Khoảng cách giữa $A_1 B$ và $B_1 C$ bằng

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{\sqrt{6}}$. C. $a\sqrt{3}$. D. $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Đặt $a = 1$. Chọn $B_1 A_1$ là trục Ox , $B_1 C_1$ là trục Oy , $B_1 B$ là trục Oz

Suy ra $B_1(0;0;0)$, $A_1(1;0;0)$, $C_1(0;1;0)$, $B(0;0;1)$, $C(0;1;1)$

Ta có $\overrightarrow{A_1 B} = (-1;0;1)$, $\overrightarrow{B_1 B} = (0;0;1)$, $\overrightarrow{B_1 C} = (0;1;1)$

$$d(A_1 B, B_1 C) = \frac{|\overrightarrow{A_1 B} \cdot \overrightarrow{B_1 C}|}{|\overrightarrow{B_1 C}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vậy

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $4x - 4y + 2z - 1 = 0$ và $2x - 2y + z + 1 = 0$ chứa hai mặt của hình lập phương. Thể tích khối lập phương đó bằng

A. $V = \frac{1}{27}$. B. $V = \frac{1}{8}$. C. $V = \frac{1}{3\sqrt{3}}$. D. $V = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải

Giả sử $(P): 4x - 4y + 2z - 1 = 0$, $(Q): 2x - 2y + z + 1 = 0$. Ta thấy $(P) \parallel (Q)$. Mặt khác lấy điểm $M(0;0;-1) \in (Q)$. Gọi a là độ dài cạnh hình lập phương

$$a = d((P), (Q)) = d(M, (P)) = \frac{|-3|}{\sqrt{4^2 + 4^2 + 2^2}} = \frac{1}{2} \text{ nên } V = a^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}.$$

Khi đó ta có:

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là tam giác vuông với $AB = AC = 2$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = 3$. Gọi M là trung điểm của SC . Tính khoảng cách giữa AM và BC .

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{3\sqrt{22}}{11}$. D. $\frac{\sqrt{22}}{6}$.

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ ta có $A(0;0;0)$ là gốc tọa độ, $S(0;0;3)$, $B(2;0;0)$, $C(0;2;0)$.

Điểm $M\left(0;1;\frac{3}{2}\right)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(0;1;\frac{3}{2}\right), \overrightarrow{BC} = (-2;2;0)$. Gọi $\vec{n} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BC}] = (-3;-3;2)$

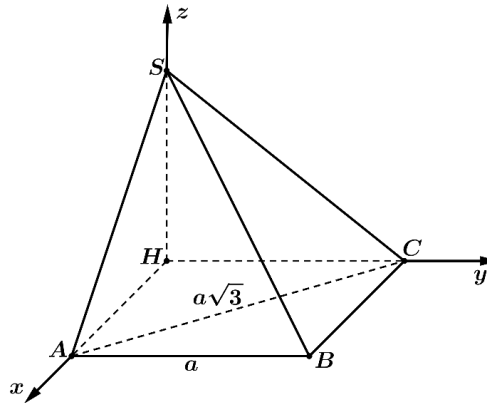
Gọi (P) là mặt phẳng qua $B(2;0;0)$ nhận $\vec{n} = (-3;-3;2)$ làm vector pháp tuyến.

$$(P): -3x - 3y + 2z + 6 = 0. \text{ Ta có } d(AM, BC) = d(A, (P)) = \frac{|-3 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 6|}{\sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 2^2}} = \frac{3\sqrt{22}}{11}.$$

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABC$ có $AB = a, AC = a\sqrt{3}, SB > 2a$ và $\angle ABC = \angle BAS = \angle BCS = 90^\circ$. Biết sin của góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{11}}{11}$. Tính thể tích khối chóp $S.ABC$

- A.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{6}$ **B.** $\frac{a^3\sqrt{3}}{9}$ **C.** $\frac{2a^3\sqrt{3}}{9}$ **D.** $\frac{a^3\sqrt{6}}{3}$

Lời giải



Gọi H là hình chiếu vuông góc của S trên mặt phẳng (ABC) .

Ta có $SH \perp (ABC) \Rightarrow SH \perp AB$ và $SH \perp BC$ mà $\angle ABC = \angle BAS = \angle BCS = 90^\circ \Rightarrow \begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp SA \\ BC \perp SC \end{cases}$

Suy ra $AB \perp (SHA) \Rightarrow AB \perp AH$ và $BC \perp (SHC) \Rightarrow BC \perp HC$ nên tứ giác $ABCH$ là hình chữ nhật. Suy ra $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = a\sqrt{2}$.

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có $H(0;0;0), A(a\sqrt{2};0;0), B(a\sqrt{2};a;0), C(0;a;0)$.

Giả sử $SH = x (x > 0) \Rightarrow S(0;0;x)$. Ta có $\overrightarrow{AC} = (-a\sqrt{2};a;0), \overrightarrow{SA} = (a\sqrt{2};0;-x)$

$\Rightarrow [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{SA}] = (-ax; -ax\sqrt{2}; -a^2\sqrt{2}) // \vec{n} = (x; x\sqrt{2}; a\sqrt{2})$ mà $\overrightarrow{SB} = (a\sqrt{2};a;-x)$.

$$\sin(SB, (SAC)) = |\cos(\overrightarrow{SB}, \vec{n})| = \frac{|\overrightarrow{SB} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{SB}| \cdot |\vec{n}|} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{11}}{11} = \frac{|xa\sqrt{2} + xa\sqrt{2} - xa\sqrt{2}|}{\sqrt{3x^2 + 2a^2} \cdot \sqrt{3a^2 + x^2}}$$

Suy ra

$$\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 + 2a^2} \cdot \sqrt{3a^2 + x^2} = \sqrt{11} |xa\sqrt{2}| \Leftrightarrow (3x^2 + 2a^2)(3a^2 + x^2) = 11(2a^2x^2)$$

$$\Leftrightarrow 9a^2x^2 + 3x^4 + 6a^4 + 2a^2x^2 = 22x^2a^2 \Leftrightarrow 3x^4 - 11x^2a^2 + 6a^4 = 0 \Leftrightarrow (3x^2 - 2a^2)(x^2 - 3a^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{2}{3}a^2 \\ x^2 = 3a^2 \end{cases} \quad HB = AC = a\sqrt{3} \quad \text{nên với } SH = x^2 = 3a^2 \Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = a\sqrt{6} > 2a$$

(thoả mãn). Do đó $SH = a\sqrt{3}$. Diện tích của tam giác ABC là $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC = \frac{a^2\sqrt{2}}{2}$.

$$\text{Vậy } V_{S \dots ABC} = \frac{1}{3} \cdot SH \cdot S_{\Delta ABC} = \frac{1}{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}.$$

Câu 6: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng $2a$. Tính góc giữa CC' và mặt phẳng $(AB'C')$

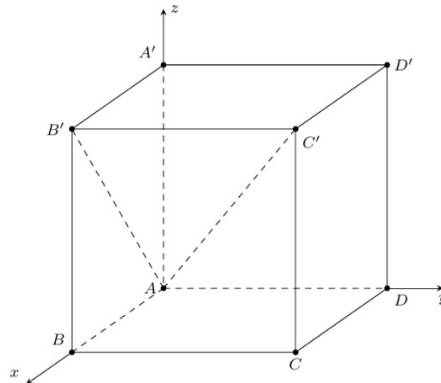
A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ



Gán tọa độ $A(0;0;0)$, $C(2;2;0)$, $B'(2;0;2)$, $C'(2;2;2)$.

Ta có $\overrightarrow{AB'} = (2;0;2)$, $\overrightarrow{AC'} = (2;2;2)$ suy ra $\overrightarrow{n_{(AB'C')}} = [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AC'}] = (-4;0;4)$, $\overrightarrow{CC'} = (0;0;2)$.

$$\sin(CC', (AB'C')) = |\cos(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{n_{(AB'C')}})| = \frac{|\overrightarrow{CC'} \cdot \overrightarrow{n_{(AB'C')}}|}{|\overrightarrow{CC'}| \cdot |\overrightarrow{n_{(AB'C')}}|} = \frac{|-4 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot 2|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy $(CC', (AB'C')) = 45^\circ$

Câu 7: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi α là góc tạo bởi hai mặt phẳng $(C'AB)$ và $(BCC'B')$. Giá trị $\tan \alpha$ bằng

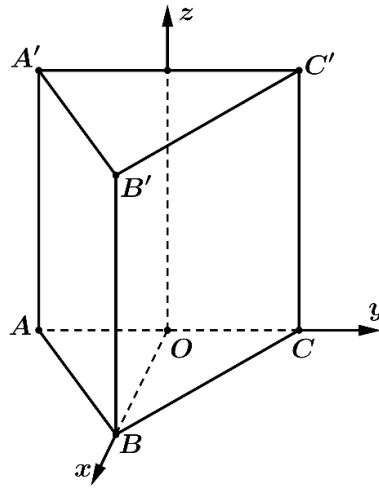
A. $\sqrt{6}$.

B. $\sqrt{2}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Giả sử lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng 1.

Chọn hệ trục $Oxyz$, với O là trung điểm AC , $B \in Ox$, $C \in Oy$.

Ta có $A\left(0; -\frac{1}{2}; 0\right)$, $B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0\right)$, $C\left(0; \frac{1}{2}; 0\right)$, $B'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 1\right)$, $C'\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$.

$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$, $\overrightarrow{BC'} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$, $\overrightarrow{CC'} = (0; 0; 1)$

Mặt phẳng $(C'B)$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC'}] = \left(\frac{1}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Mặt phẳng $(BCC'B')$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = [\overrightarrow{BC'}, \overrightarrow{CC'}] = \left(\frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right)$.

Ta có
$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{\left|\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0\right|}{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4} + 0}} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Ta có

$$\Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2} - 1} = \sqrt{6}$$

Ta lại có $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$

Câu 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm DD' . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$.

A. $\frac{2a}{3}$.

B. $\frac{4a}{3}$.

C. $\frac{3a}{4}$.

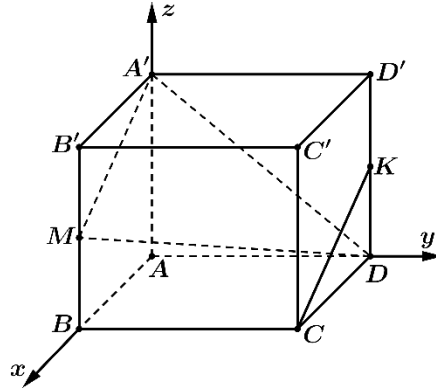
D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Gọi M là trung điểm BB' thì ta có $CK \parallel A'M \Rightarrow CK \parallel (A'MD)$

Suy ra $d(CK, A'D) = d(CK, (A'MD)) = d(C, (A'MD))$

Chọn trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có $A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a;0), A'(0;0;a), C(a;a;0), B'(a;0;a), M(a;0;\frac{a}{2})$

Khi đó $\overrightarrow{A'M} = (a;0;-\frac{a}{2}), \overrightarrow{A'D} = (0;a;-a) \Rightarrow [\overrightarrow{A'M}, \overrightarrow{A'D}] = (\frac{a^2}{2}; a^2; a^2)$.

Suy ra mặt phẳng $(A'MD)$ có một vector pháp tuyến là $(1;2;2)$

Phương trình mặt phẳng $(A'MD)$ có dạng: $x + 2y + 2z - 2a = 0$.

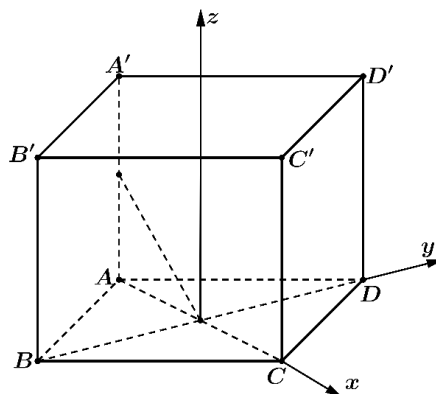
Vậy $d(C, (A'MD)) = \frac{|a + 2a - 2a|}{3} = \frac{a}{3}$.

Câu 9: Cho lăng trụ đứng $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi tâm O cạnh a , $AA' = a$ và góc $\angle ABC = 60^\circ$. Gọi M là trung điểm của cạnh AA' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng MO và $C'D$ bằng

- A. $\frac{3\sqrt{5}}{10}a$. B. $\frac{3\sqrt{5}}{5}a$. C. $\frac{2\sqrt{5}}{12}a$. D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}a$.

Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chọn $a = 1$.

Để dàng tính được $O(0;0;0)$, $M\left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $D\left(0;\frac{\sqrt{3}}{2};0\right)$ và $C'\left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Suy ra $\overrightarrow{OM} = \left(-\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{C'D} = \left(-\frac{1}{2};\frac{\sqrt{3}}{2};-1\right)$ và $\overrightarrow{OC'} = \left(\frac{1}{2};0;1\right)$.

Khi đó $[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{C'D}] = \left(-\frac{\sqrt{3}}{4}; \frac{-3}{4}; \frac{-\sqrt{3}}{4}\right)$.

$$d(OM; C'D) = \frac{|\overrightarrow{OC'} \cdot [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{C'D}]|}{|[\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{C'D}]|} = \frac{\left| \frac{-\sqrt{3}}{8} + \frac{-\sqrt{3}}{4} \right|}{\sqrt{\frac{3}{16} + \frac{9}{16} + \frac{3}{16}}} = \frac{3\sqrt{3}}{10} = \frac{3a\sqrt{5}}{10}$$

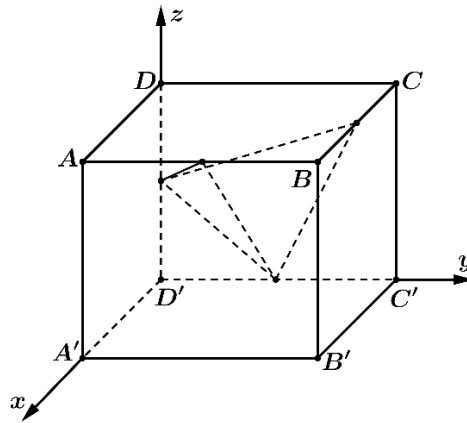
Khi đó khoảng cách :

- Câu 10:** Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q , lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Thể tích khối tứ diện $MNPQ$ là
- A.** $\frac{1}{12}$. **B.** $\frac{1}{8}$. **C.** $\frac{3}{8}$. **D.** $\frac{1}{24}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho: $D' \equiv O; Ox \equiv D'A'; Oy \equiv D'C'; Oz \equiv D'D$.

Khi đó: $A(1;0;1)$, $B(1;1;1)$, $C(0;1;1)$, $D(0;0;1)$, $A'(1;0;0)$, $B'(1;1;0)$, $C'(0;1;0)$



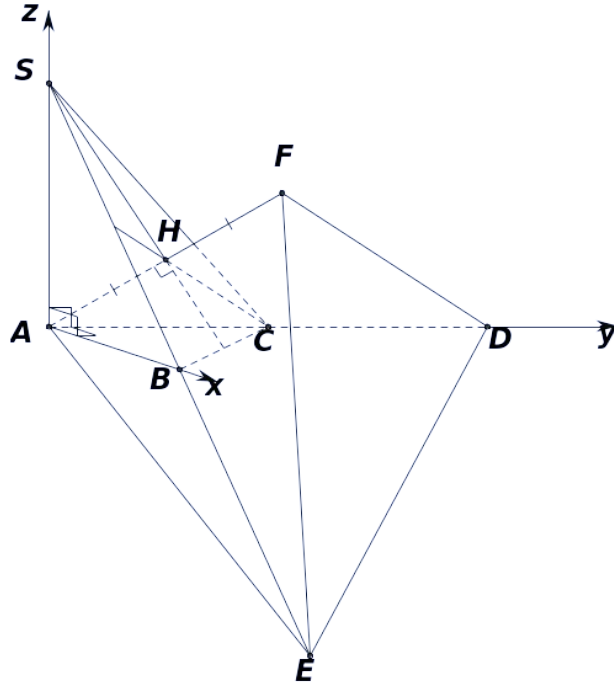
Ta có: $M\left(1;\frac{1}{2};1\right)$, $N\left(\frac{1}{2};1;1\right)$, $P\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $Q\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$.

Ta có: $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{MP} = (-1;0;-1)$, $\overrightarrow{MQ} = \left(-1;\frac{-1}{2};\frac{-1}{2}\right)$

$$|[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ}| = \left| \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \cdot |[\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}] \cdot \overrightarrow{MQ}| = \frac{1}{12}$$

- Câu 11:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a$, cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Gọi D, E, F lần lượt là điểm đối xứng của A qua C , của S qua B và của A qua mặt phẳng (SBC) . Thể tích của khối tứ diện $ADEF$ bằng
- A. $\frac{2a^3}{3}$. B. $\frac{2\sqrt{3}a^3}{3}$. C. $\frac{a^3}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}a^3}{3}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ với độ dài vector đơn vị bằng a , ta được tọa độ các điểm như sau:

$$A(0;0;0), B(1;0;0), C(0;1;0), S(0;0;1) \Rightarrow D(0;2;0), E(2;0;-1).$$

Gọi H là trọng tâm tam giác $SBC \Rightarrow H\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$. Vì tam giác SBC là tam giác đều nên H cũng là trực tâm của tam giác $SBC \Rightarrow AH \perp (SBC) \Rightarrow F$ là điểm đối xứng với A qua $H \Rightarrow F\left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Ta tính được: $\overrightarrow{AD} = (0;2;0), \overrightarrow{AE} = (2;0;-1), \overrightarrow{AF} = \left(\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow [\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] = (-2;0;-4)$

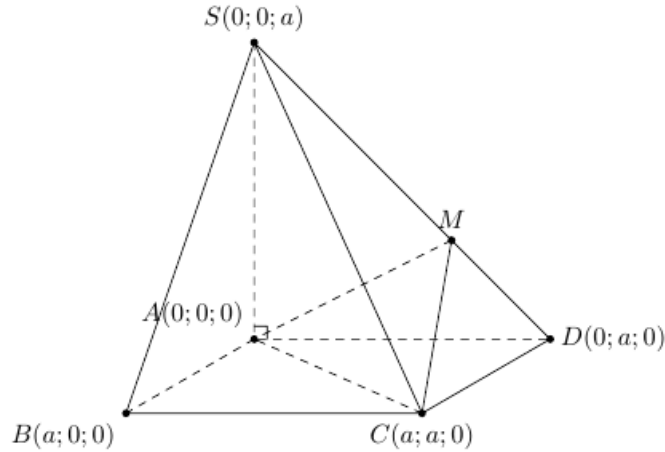
Khi đó: $V_{ADEF} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}] \cdot \overrightarrow{AF}| = \frac{1}{6} \left| -2 \cdot \frac{2}{3} + 0 \cdot \frac{2}{3} - 4 \cdot \frac{2}{3} \right| = \frac{2}{3}$.

Vì độ dài vector đơn vị trên trục bằng a nên ta được thể tích cần tính là $\frac{2a^3}{3}$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng a . Cạnh bên $SA = a$ vuông góc với đáy $(ABCD)$. Gọi M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$. Hãy tính $\cos$ của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC) và (SBC) ?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{2}{\sqrt{5}}$. D. 1.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm $A \equiv O$, các điểm B, D, S lần lượt thuộc chiều dương các trục tọa độ Ox, Oy, Oz . Suy ra tọa độ các điểm như trên hình vẽ.

Do M là điểm nằm trên cạnh SD sao cho $SM = 2MD$ suy ra

$$\begin{aligned} \overrightarrow{SM} = \frac{2}{3} \overrightarrow{SD} &\Rightarrow M\left(0; \frac{2a}{3}; \frac{a}{3}\right) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} = \left(0; \frac{2a}{3}; \frac{a}{3}\right) \\ \overrightarrow{AC} = (a; a; 0) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC}] = \begin{pmatrix} -\frac{a^2}{3}; \frac{a^2}{3}; -\frac{2a^2}{3} \end{pmatrix} \\ &= -\frac{a^2}{3}(1; -1; 2). \text{ Ta có } \begin{cases} \overrightarrow{SB} = (a; 0; -a) \\ \overrightarrow{SC} = (a; a; -a) \end{cases} \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (a^2; 0; a^2) = a^2(1; 0; 1) \end{aligned}$$

Chọn vector pháp tuyến của mặt phẳng (AMC) là $\vec{n}_1 = (1; -1; 2)$.

Chọn vector pháp tuyến của mặt phẳng (SBC) là $\vec{n}_2 = (1; 0; 1)$.

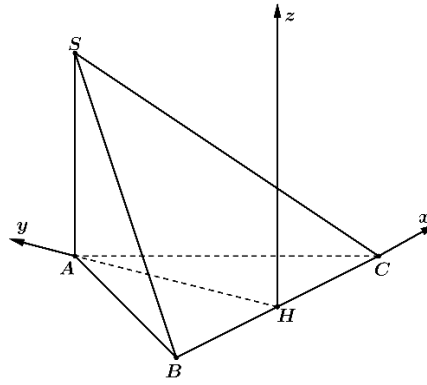
$$\cos((AMC), (SBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Khi đó:

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a và độ dài cạnh $SA = a$ và vuông góc với (ABC) . Góc giữa mặt phẳng (SAB) và mặt phẳng (SBC) là α . Khi đó $\tan \alpha$ bằng:

- A. 1. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{6}$. D. $\frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Lời giải



Gắn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ:

Ta có: $H(0;0;0)$, $C\left(\frac{a}{2};0;0\right)$, $B\left(-\frac{a}{2};0;0\right)$, $A\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$, $S\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right)$

Suy ra $\vec{n}_{(SAB)} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}] = \left(-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}; \frac{a^2}{2}; 0\right)$, $\vec{n}_{(SBC)} = [\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{BC}] = \left(0; a^2; -\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_{(SAB)} \cdot \vec{n}_{(SBC)}|}{|\vec{n}_{(SAB)}| |\vec{n}_{(SBC)}|} = \frac{\frac{a^4}{2}}{\sqrt{\frac{3a^4}{4} + \frac{a^4}{4}} \sqrt{a^4 + \frac{3a^4}{4}}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

Vậy $\tan \alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1} = \sqrt{6}$

Câu 14: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $BC = a\sqrt{2}$, $AA' = a\sqrt{3}$. Trên BB' lấy điểm N sao cho $BN = \frac{a}{\sqrt{3}}$. Khoảng cách từ B' đến mặt phẳng $(AC'N)$ bằng

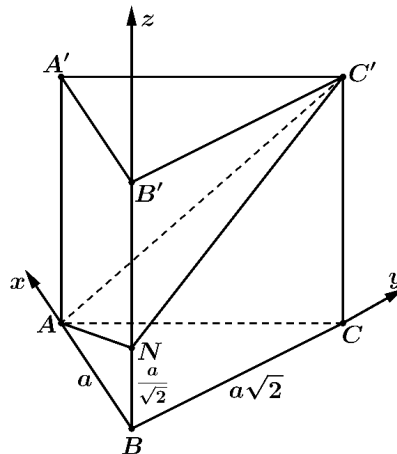
A. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$.

B. $a\sqrt{6}$.

C. $\frac{a\sqrt{6}}{6}$.

D. $\frac{a\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, khi đó ta có: $A(a;0;0)$, $N\left(0;0;\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $C'(0;a\sqrt{2};a\sqrt{3})$,
 $B'(0;0;a\sqrt{3})$, $\overrightarrow{AN} = \left(-a;0;\frac{a}{\sqrt{3}}\right)$, $\overrightarrow{AC'} = (-a;a\sqrt{2};a\sqrt{3})$.

Mặt phẳng $(AC'N)$ đi qua $A(a;0;0)$ có vptpt $\vec{n} = [\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AC'}] = \left(-\frac{\sqrt{6}}{3}a; \frac{4a}{\sqrt{3}}; -a\sqrt{2}\right)$ có phương
 trình là: $(AC'N): \frac{-\sqrt{6}}{3}(x-a) + \frac{4}{\sqrt{3}}y - \sqrt{2}z = 0$

$$d(B', (AC'N)) = \frac{\left|\frac{\sqrt{6}a}{3} - \sqrt{6}a\right|}{\sqrt{\frac{6}{9} + \frac{16}{3} + 2}} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

Khoảng cách:

Câu 15: Cho lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và $AB = a$, $AD = a\sqrt{3}$. Hình chiếu vuông góc của điểm A lên mặt phẳng $(A'B'C'D')$ trùng với giao điểm của $A'C'$ và $B'D'$. Khoảng cách từ điểm B đến $(A'B'D')$ bằng

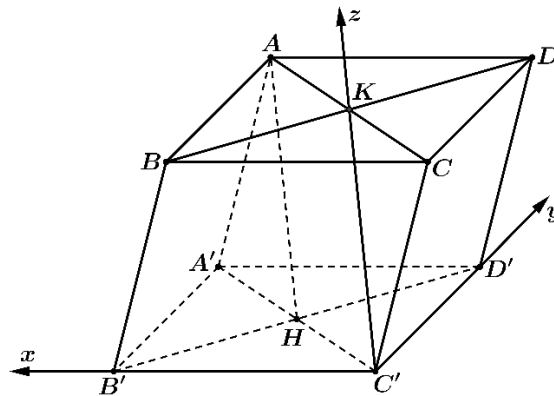
A. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

B. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$

C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{6}$

Lời giải



Gọi $H = A'C' \cap B'D'$ và $K = AC \cap BD$.

Chọn hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ với $C' \equiv O, B' \in Ox, D' \in Oy, K \in Oz$.

Đặt $AH = m > 0$.

Khi đó $B'(a\sqrt{3};0;0), D'(0;a;0), A'(a\sqrt{3};a;0), H\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right), A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; m\right)$.

Ta có $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{A'A} \Rightarrow B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; m\right)$.

Mặt khác $\overrightarrow{B'D'} = (-a\sqrt{3}; a; 0), \overrightarrow{B'A} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; m\right)$ nên $(AB'D')$ có véctơ pháp tuyến là $[\overrightarrow{B'D'}, \overrightarrow{B'A}] = (am; \sqrt{3}am; 0)$ nên $(AB'D')$ có phương trình $x + \sqrt{3}y - a\sqrt{3} = 0$.

Vậy $d(B; (AB'D')) = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Câu 16: Trong không gian $Oxyz$, cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O . Biết $A(2; 0; 0), B(0; 1; 0), S(0; 0; 2\sqrt{2})$. Gọi M là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng (ABM) cắt đường thẳng SD tại điểm N . Tính thể tích khối chóp $S.ABMN$.

- A. $V = \sqrt{2}$. B. $V = 2\sqrt{3}$. C. $V = 3\sqrt{2}$. D. $V = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Lời giải

Điểm O là trung điểm của $AC, BD \Rightarrow C(-2; 0; 0), D(0; -1; 0)$.

Điểm M là trung điểm của $SC \Rightarrow M(-1; 0; \sqrt{2})$.

Phương trình mặt phẳng (ABM) là $\sqrt{2}x + 2\sqrt{2}y + 3z - 2\sqrt{2} = 0$.

Phương trình đường thẳng SD là $\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 + t \\ z = 2\sqrt{2}t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$.

Điểm N là giao điểm của (ABM) và $SD \Rightarrow N\left(0; -\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$.

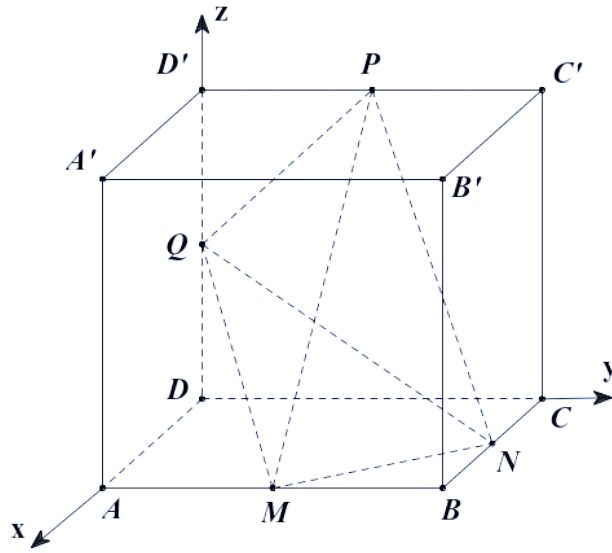
Vậy thể tích khối chóp $S.ABMN$ là:

$$V = V_{S.ABM} + V_{S.AMN} = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SB}] \cdot \overrightarrow{SM} \right| + \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{SA}, \overrightarrow{SM}] \cdot \overrightarrow{SN} \right| = \frac{4\sqrt{2}}{6} + \frac{2\sqrt{2}}{6} = \sqrt{2}.$$

Câu 17: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có độ dài cạnh bằng 1. Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' . Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$.

- A. $\frac{1}{12}$. B. $\frac{1}{8}$. C. $\frac{3}{8}$. D. $\frac{1}{24}$.

Lời giải



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có $D(0;0;0), A(1;0;0), B(1;1;0), C(0;1;0), A'(1;0;1), B'(1;1;1), C'(0;1;1), D'(0;0;1)$.

Vì M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của các cạnh $AB, BC, C'D'$ và DD' nên:

$$M\left(1; \frac{1}{2}; 0\right), N\left(\frac{1}{2}; 1; 0\right), P\left(0; \frac{1}{2}; 1\right), Q\left(0; 0; \frac{1}{2}\right).$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), \overrightarrow{MP} = (-1; 0; 1), \overrightarrow{MQ} = \left(-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right] = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), \Rightarrow \left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right] \cdot \overrightarrow{MQ} = -\frac{1}{2}.$

Vậy $V_{MNPQ} = \frac{1}{6} \left| \left[\overrightarrow{MN}; \overrightarrow{MP}\right] \cdot \overrightarrow{MQ} \right| = \frac{1}{6} \left| -\frac{1}{2} \right| = \frac{1}{12}.$

Câu 18: Cho tứ diện $O.ABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau $OA = a$ và $OB = OC = 2a$. Gọi P là trung điểm của BC (minh họa như hình vẽ). Khoảng cách giữa hai đường thẳng OP và AB bằng:

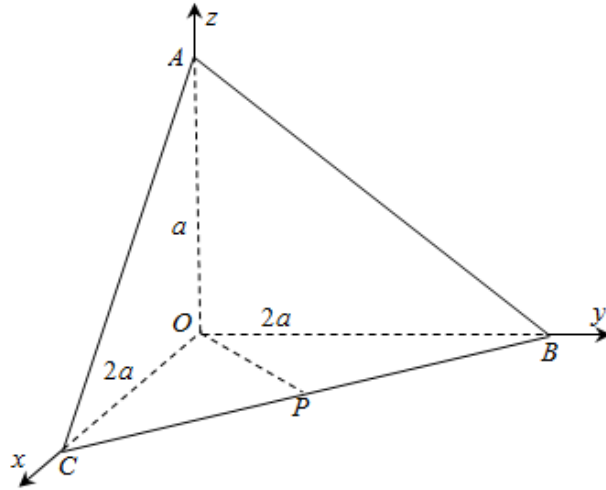
A. $\frac{\sqrt{2}a}{2}.$

B. $\frac{\sqrt{6}a}{3}.$

C. $a.$

D. $\frac{2\sqrt{5}a}{5}.$

Lời giải



Đặt khối tứ diện $O.ABC$ vào hệ trục tọa độ gốc $Oxyz$: các điểm A, B, C lần lượt thuộc các trục tọa độ Oz, Oy, Ox .

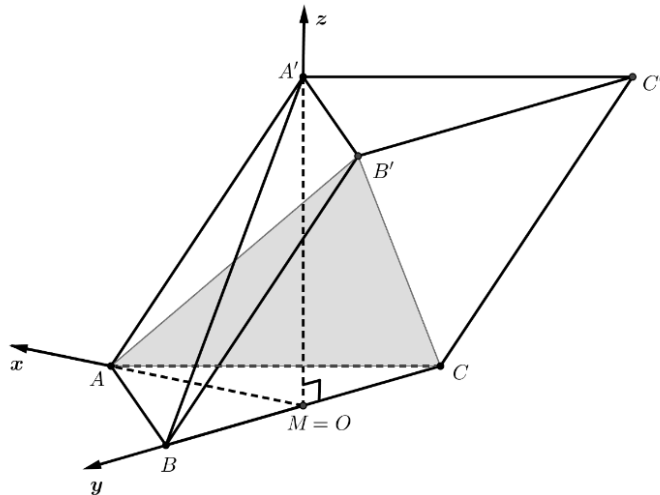
Ta có: $O(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;2;0)$, $C(2;0;0)$, $P(1;1;0)$, $\overrightarrow{AB} = (0;2;-1)$.

$$d(OP;AB) = \frac{\left| \left[\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{AB} \right] \cdot \overrightarrow{OB} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{OP}; \overrightarrow{AB} \right] \right|} = \frac{\sqrt{6}}{3}(a)$$

Khi đó:

- Câu 19:** Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có tam giác ABC đều cạnh bằng $2a$. Hình chiếu vuông góc của A' lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm M của BC . Biết góc tạo bởi $A'B$ và mặt đáy bằng 60° . Khoảng cách từ B đến mặt phẳng $(A'B'C)$ là
- A. $\frac{a\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{2a\sqrt{7}}{7}$. C. $\frac{2a\sqrt{39}}{13}$. D. $\frac{a\sqrt{39}}{13}$.

Lời giải



Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là góc $\angle A'BM = 60^\circ$.

Ta có $A'M = BM \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{3}$; $AM = AB \cdot \sin 60^\circ = 2a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Coi $a=1$ khi đó $A(\sqrt{3};0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;-1;0)$,

$$A'(0;0;\sqrt{3}). \text{ Gọi } B'(x_0; y_0; z_0), \overline{A'B'} = (x_0; y_0; z_0 - \sqrt{3}), \overline{AB} = (-\sqrt{3}; 1; 0).$$

$$\text{Vì } \overline{A'B'} = \overline{AB} \text{ nên } \begin{cases} x_0 = -\sqrt{3} \\ y_0 = 1 \\ z_0 = \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow B'(-\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}).$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} \overline{AC} = (-\sqrt{3}; -1; 0) \\ \overline{AB'} = (-2\sqrt{3}; 1; \sqrt{3}) \end{cases} \Rightarrow [\overline{AC}, \overline{AB'}] = (-\sqrt{3}; 3; -3\sqrt{3}) \Rightarrow \vec{n} = (1; -\sqrt{3}; 3) \text{ là vector pháp tuyến của mp } (ACB'). \text{ Phương trình mặt phẳng } (ACB') \text{ là: } x - \sqrt{3}y + 3z - \sqrt{3} = 0.$$

$$\Rightarrow d(B, (ACB')) = \frac{|-\sqrt{3} - \sqrt{3}|}{\sqrt{1+3+9}} = \frac{2\sqrt{39}}{13}. \text{ Vậy khoảng cách từ } B \text{ đến } (AB'C) \text{ là } \frac{2a\sqrt{39}}{13}.$$

- Câu 20:** Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x=0 \\ y=2+t \\ z=-t \end{cases}$ và $d: \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=1+t' \\ z=-1+t' \end{cases}$. Biết rằng có một hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ thỏa mãn A, C cùng thuộc Ox , B, C' cùng thuộc Δ và D, B' cùng thuộc d . Thể tích của khối hộp $ABCD.A'B'C'D'$ là
- A.** $9\sqrt{2}$. **B.** $18\sqrt{2}$. **C.** 9. **D.** 18.

Lời giải

Nhận xét rằng các đường thẳng Δ, d, Ox đôi một vuông góc với nhau nên $\begin{cases} AC \perp BC' \\ BC' \perp B'D \\ B'D \perp AC \end{cases}$.

Gọi I là tâm của hình bình hành $ABCD$ và M là giao của $D'I$ và $B'D$.

$$\text{Ta có } \frac{IM}{MD'} = \frac{ID}{B'D'} = \frac{1}{2} \Rightarrow IM = \frac{1}{3}ID'. \text{ Mặt khác } \begin{cases} B'D \perp AC \\ B'D \perp BC' \Rightarrow B'D \perp AD' \Rightarrow B'D \perp (AD'C) \end{cases}.$$

Kẻ $MH \parallel AD'$ ($H \in AC$) $\Rightarrow MH \perp AC$ suy ra MH là đoạn vuông góc chung của $AC, B'D \Rightarrow MH = d(AC, B'D) = d(Ox; d) = \sqrt{2}$.

$$\text{Vì } \frac{MH}{AD'} = \frac{IM}{ID'} = \frac{1}{3} \Rightarrow AD' = 3\sqrt{2}.$$

Kẻ $MK \parallel AC$ ($K \in AD'$) $\Rightarrow MK \perp AD'$ suy ra MK là đoạn vuông góc chung của $AD', B'D$.

$$\Rightarrow MK = d(AD', B'D) = d(\Delta; d) = \sqrt{2}$$

$$\text{Vì } \frac{MK}{AI} = \frac{D'M}{ID'} = \frac{2}{3} \Rightarrow AI = \frac{3\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AC = 3\sqrt{2}.$$

Ta lại có $BC' \parallel (AD'C) \Rightarrow d(BC'; AC) = d(BC'; (AD'C)) = d(B; (AD'C)) = d(D; (AD'C))$

$$\Rightarrow d(D; (AD'C)) = d(Ox; \Delta) = \sqrt{2}$$

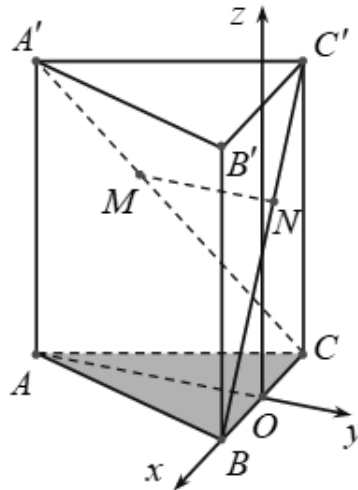
$$\Rightarrow V_{D,AD'C} = \frac{1}{3} \cdot d(D; (AD'C)) \cdot S_{AD'C} = \frac{1}{3} \cdot d(D; (AD'C)) \cdot \frac{1}{2} AD'AC = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow V_{ABCD, A'B'C'D'} = 6V_{D,AD'C} = 18\sqrt{2}$$

- Câu 21:** Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy. Đường thẳng MN ($M \in A'C$; $N \in BC'$) là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' . Tỷ số $\frac{NB}{NC'}$ bằng
- A. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. $\frac{2}{3}$. D. 1.

Lời giải

Kết quả bài toán sẽ không thay đổi nếu ta xét lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh bên bằng cạnh đáy bằng 2.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (O là trung điểm của BC) thì ta có: $A'(0; -\sqrt{3}; 2)$, $B(1; 0; 0)$, $C(-1; 0; 0)$, $C'(-1; 0; 2)$, $\overrightarrow{CA'} = (1; -\sqrt{3}; 2)$, $\overrightarrow{BC'} = (-2; 0; 2)$.

Do $\begin{cases} \overrightarrow{CM} = m\overrightarrow{CA'} \\ \overrightarrow{BN} = n\overrightarrow{BC'} \end{cases}$ nên ta có $M(-1+m; -\sqrt{3}m; 2m)$, $N(1-2n; 0; 2n)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-m-2n+2; \sqrt{3}m; 2n-2m)$$

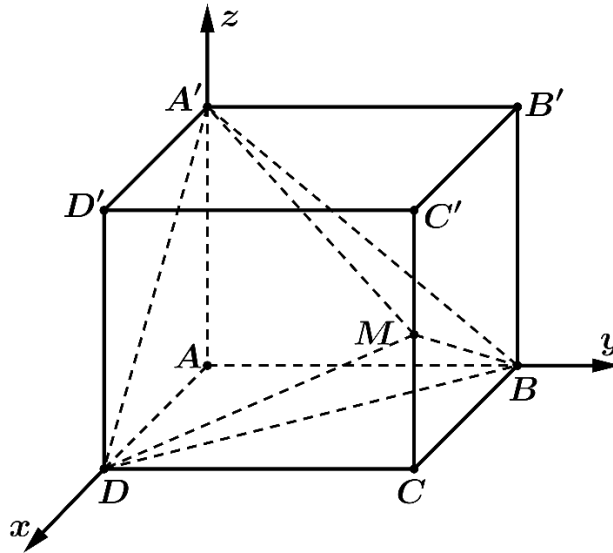
Đường thẳng MN là đường vuông góc chung của $A'C$ và BC' nên:

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CA'} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4m+2n=-1 \\ -m+4n=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=\frac{2}{5} \\ n=\frac{3}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{BN}{BC'} = n = \frac{3}{5} \Rightarrow \frac{NB}{NC'} = \frac{3}{2}$$

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ O . Biết rằng $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$ với m, n là các số dương và $m+n=4$. Gọi M là trung điểm của cạnh CC' . Thể tích lớn nhất của khối tứ diện $BDA'M$ bằng

- A. $\frac{64}{27}$. B. $d(M;(P)) = \frac{11\sqrt{2}}{6}$. C. $\frac{9}{4}$. D. $\frac{75}{32}$.

Lời giải



Ta có $A(0;0;0)$, $B(m;0;0)$, $D(0;m;0)$, $A'(0;0;n)$.

Suy ra $C(m;m;0)$, $B'(m;0;n)$, $C'(m;m;n)$, $D'(0;m;n)$, $M\left(m;m;\frac{n}{2}\right)$.

Và $\overrightarrow{BD} = (-m;m;0)$, $\overrightarrow{BA'} = (-m;0;n)$, $\overrightarrow{BM} = \left(0;m;\frac{n}{2}\right)$.

$$[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] = (mn; mn; m^2), [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \cdot \overrightarrow{BM} = \frac{3}{2}m^2n$$

Ta được $V_{BDA'M} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA'}] \cdot \overrightarrow{BM}| = \frac{1}{4} |m^2 \cdot n| = \frac{1}{4} |m^2 \cdot (4-m)| = \frac{1}{8} |m \cdot m \cdot (8-2m)|$

$$\Rightarrow V_{BDA'M} \leq \frac{1}{8} \left(\frac{m+m+8-2m}{3} \right)^3 = \frac{64}{27}$$

Câu 23: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có các điểm $A(1;2;0)$, $B(4;6;0)$, $D(-3;5;0)$. Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$. Tính khoảng cách từ đường vuông góc chung của đường thẳng SI và BC đến đường thẳng AB .

- A. $\frac{15}{2}$. B. $\frac{3}{2}$. C. 5 . D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Vì I là tâm hình vuông $ABCD$ nên I là trung điểm của BD .

Tọa độ $I\left(\frac{1}{2}; \frac{11}{2}; 0\right)$. Suy ra tọa độ điểm $C(0;9;0)$.

Gọi H là trung điểm BC khi đó tọa độ $H\left(2; \frac{15}{2}; 0\right)$ và $IH \perp BC$ (1).

Vì hình chóp $S.ABCD$ là hình chóp đều nên $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp IH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra đường vuông góc chung của SI và BC là đường thẳng IH .

Vì $IH \parallel AB$ nên khoảng cách từ IH đến AB bằng $\frac{AB}{2} = \frac{5}{2}$.

Câu 24: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng 1, cạnh bên bằng 3. Gọi I là

điểm trên cạnh BB' sao cho $BI = \frac{1}{3}BB'$, điểm M di động trên cạnh AA' . Biết diện tích của tam giác MIC' nhỏ nhất khi tỷ số $\frac{AM}{AA'} = \frac{a}{b}$ ($a \in \mathbb{Q}; b \in \mathbb{Q}^*, (a, b) = 1$). $P = a + b$ là

A. 4. B. 3. C. 7. D. 5.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ $Axyz$ sao cho: $A(0; 0; 0), B(0; 1; 0), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 0\right), A'(0; 0; 3).$

Khi đó $B'(0; 1; 3); C'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}; 3\right); I(0; 1; 1)$

Gọi tọa độ điểm $M(0; 0; x) \in AA' (0 \leq x \leq 3)$; $\overrightarrow{IC'} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 2\right); \overrightarrow{IM} = (0; -1; x-1)$

Diện tích của tam giác MIC' là: $S = \frac{1}{2} \left| \left[\overrightarrow{IC'}, \overrightarrow{IM} \right] \right| = \frac{1}{4} \sqrt{4x^2 - 16x + 31} = \frac{1}{4} \sqrt{4(x-2)^2 + 15}$

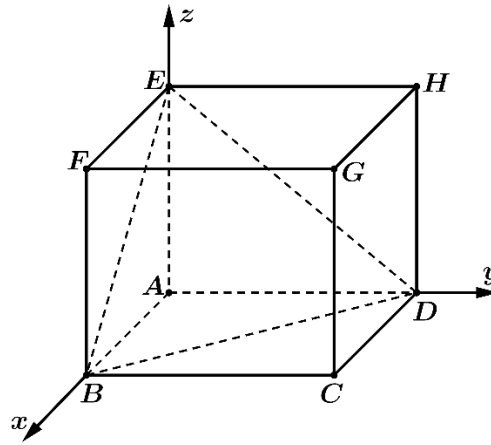
Do đó S nhỏ nhất khi $x = 2$. Khi đó tỷ số $\frac{AM}{AA'} = \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \Rightarrow a + b = 5$.

Câu 25: Cho hình lập phương $ABCD.EFGH$ có cạnh bằng 4. Gọi d là đường thẳng đi qua trọng tâm của tứ diện $EABD$, cắt đường thẳng AE tại M và song song với mặt phẳng (EBD) . Tính AM .

A. $AM = 1$. B. $AM = 2$. C. $AM = 3$. D. $AM = 4$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Ta có: $A(0;0;0); B(4;0;0); D(0;4;0); E(0;0;4)$.

Gọi T là trọng tâm của tứ diện $EABD$ suy ra $T(1;1;1)$.

Phương trình mặt phẳng (EBD) : $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{4} = 1 \Leftrightarrow x + y + z - 4 = 0$.

Đường thẳng d cắt đường thẳng AE tại M suy ra $M(0;0;m)$.

Khi đó, $\overrightarrow{MT} = (1;1;1-m)$ và vector pháp tuyến của mặt phẳng (EBD) là $\vec{n} = (1;1;1)$.

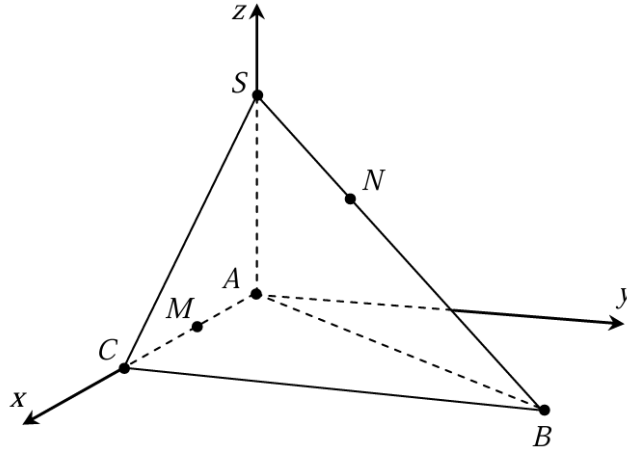
Do $d \parallel (EBD)$ nên $\overrightarrow{MT} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 + 1 + 1 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$.

Suy ra $M(0;0;3)$ nên $AM = 3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

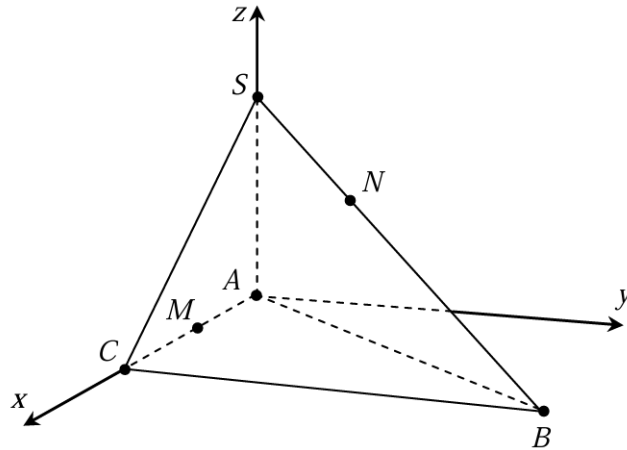
Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có đường cao $SA = h$ và có đáy là tam giác ABC vuông tại C . Biết rằng

$AC = b, BC = a$. Gọi M là trung điểm của AC và N là điểm sao cho $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SB}$ và được gắn vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ (với $A \equiv O$) như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



- a) $A(0;0;0), C(b;0;0), B(b;a;0), S(0;0;h), M\left(\frac{b}{2};0;0\right)$
- b) $\overrightarrow{SB} = (a; b; -h)$
- c) $MN = \frac{1}{2} \sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$
- b) Khi $4h^2 = 2a^2 - b^2$ thì hai đường thẳng MN và SB vuông góc với nhau.

Lời giải



Ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ có gốc O trùng với A , tia Ox trùng với tia AC , tia Oz trùng với tia AS sao cho điểm B nằm trong góc xOy .

- a) Đúng: Khi đó $A(0;0;0), C(b;0;0), B(b;a;0), S(0;0;h), M\left(\frac{b}{2};0;0\right)$
- b) Đúng: $\overrightarrow{SB} = (b; a; -h)$
- c) Sai: Gọi $N(x; y; z)$ thì $\overrightarrow{SN} = (x; y; z - h)$

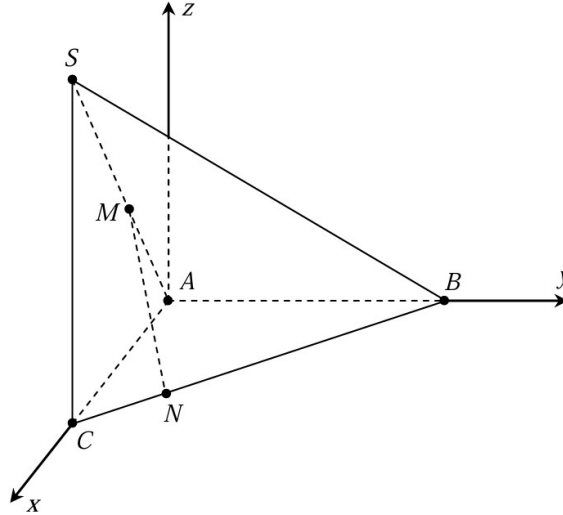
Từ điều kiện $\overrightarrow{SN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{SB}$ nên $x = \frac{b}{3}; y = \frac{a}{3}; z - h = \frac{-h}{3} \Rightarrow z = \frac{2h}{3} \Rightarrow N\left(\frac{b}{3}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3}\right)$

Ta có $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{b}{3} - \frac{b}{2}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3} \right) = \left(-\frac{b}{6}; \frac{a}{3}; \frac{2h}{3} \right)$ nên $MN = \sqrt{\frac{b^2}{36} + \frac{a^2}{9} + \frac{4h^2}{9}} = \frac{1}{6} \sqrt{b^2 + 4a^2 + 16h^2}$

d) Sai: Hai đường thẳng MN và SB vuông góc với nhau khi và chỉ khi:

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SB} = 0 \Leftrightarrow \frac{-b^2}{6} + \frac{a^2}{3} + \frac{-2h^2}{3} = 0 \Leftrightarrow 4h^2 = 2a^2 - b^2$$

Câu 2: Cho tứ diện $S.ABC$ có $SC = CA = AB = a\sqrt{2}$ và $SC \perp (ABC)$. Biết rằng tam giác ABC là tam giác vuông tại A . Các điểm $M \in SA, N \in BC$ sao cho $AM = CN = t$ ($0 < t < 2a$). Gắn tứ diện vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $A \equiv O$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



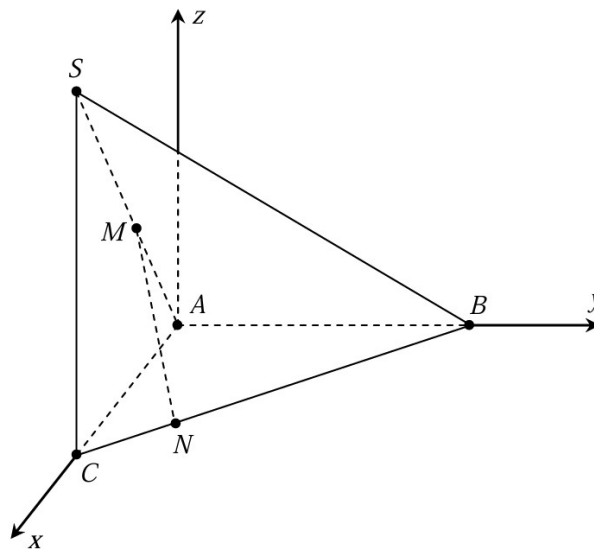
a) $A(0;0;0), B(0;a\sqrt{2};0), C(a\sqrt{2};0;0), S(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2})$

b) Tọa độ điểm $M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{t\sqrt{2}}{2}\right)$

c) Đoạn thẳng MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

d) Khi MN ngắn nhất thì MN là đường vuông góc chung của BC và SA

Lời giải



a) Đúng: Ta chọn hệ trục $Oxyz$ sao cho gốc tọa độ $O \equiv A$. Trục Ox chứa AC , trục Oy chứa AB và trục $Oz \perp (ABC)$. Khi đó cạnh SC song song với trục Oz và ta có:

$$A(0;0;0), B(0;a\sqrt{2};0), C(a\sqrt{2};0;0), S(a\sqrt{2};0;a\sqrt{2})$$

$$M\left(\frac{t\sqrt{2}}{2};0;\frac{t\sqrt{2}}{2}\right); N\left(a\sqrt{2}-\frac{t\sqrt{2}}{2};\frac{t\sqrt{2}}{2};0\right)$$

b) Đúng: Ta có

$$MN = \sqrt{2(a^2 - 2at + t^2) + \frac{t^2}{2} + \frac{t^2}{2}} = \sqrt{3t^2 - 4at + 2a^2} = \sqrt{3\left(t - \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{2a^2}{3}} \geq \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

c) Sai:

Vậy MN ngắn nhất bằng $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ khi $t = \frac{2a}{3}$

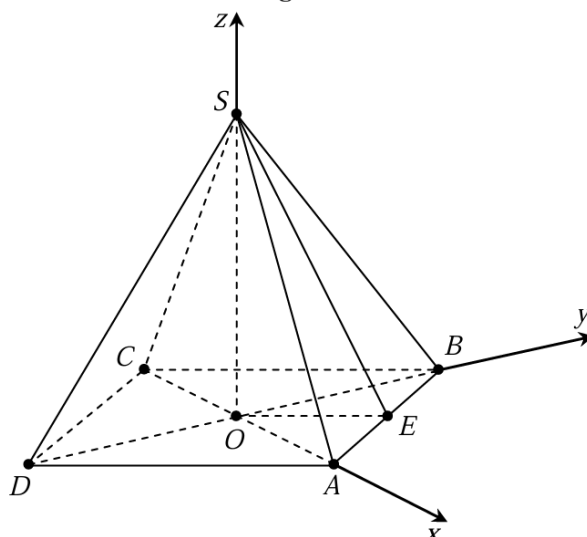
d) Đúng: Khi MN ngắn nhất thì:

$$M\left(\frac{a\sqrt{2}}{3};0;\frac{a\sqrt{2}}{3}\right), N\left(\frac{2a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};0\right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{3};\frac{a\sqrt{2}}{3};-\frac{a\sqrt{2}}{3}\right)$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{SA} = 0 \\ \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \end{cases}$$

Ta có MN nên MN là đường vuông góc chung.

Câu 3: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ cạnh đáy a và mặt bên tạo với đáy góc α . Chọn hệ trục $Oxyz$ có O là tâm đáy $ABCD$, tia Ox chứa A , tia Oy chứa B , tia Oz chứa S . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



$$a) A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a}{2}\tan\alpha\right)$$

$$b) \vec{SA} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \vec{SB} = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$$

$$c) \vec{SC} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \vec{SD} = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$$

d) Để hai đường thẳng $SA \perp SC$ vuông góc với nhau thì $\tan\alpha = \sqrt{3}$

Lời giải

$$A\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), B\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), C\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right), D\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), S\left(0; 0; \frac{a}{2}\tan\alpha\right)$$

a) Đúng: Ta có:

$$\vec{SA} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \vec{SB} = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$$

b) Đúng:

$$\vec{SC} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{a}{2}\tan\alpha\right), \vec{SD} = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; -\frac{a}{2}\tan\alpha\right)$$

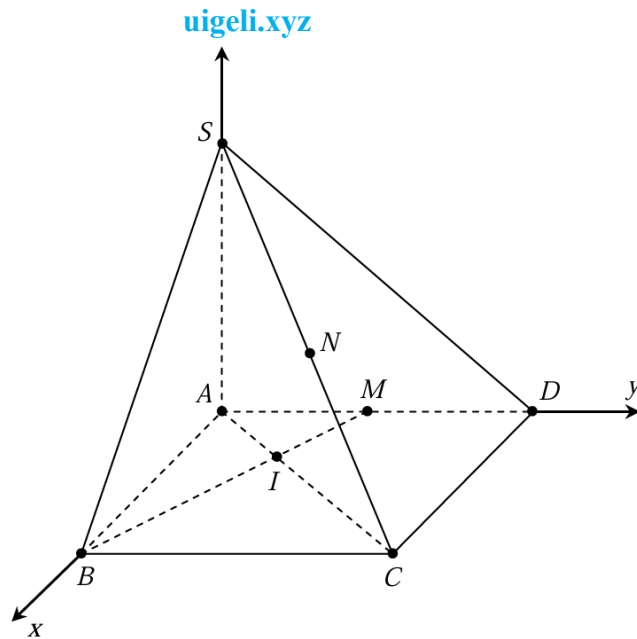
c) Đúng:

$$SA \perp SC$$

d) Sai: Ta có

$$\Leftrightarrow \vec{SA} \cdot \vec{SC} = 0 \Leftrightarrow -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{4}\tan^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{2}\tan^2\alpha - 1\right) = 0 \Leftrightarrow \tan^2\alpha = 2 \Rightarrow \tan\alpha = \sqrt{2}$$

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật $AB = a, AD = a\sqrt{2}, SA = a$ và SA vuông góc $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, SC . Gọi I là giao điểm BM và AC . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới đây. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) $S(0;0;a), A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a\sqrt{2};0)$

b) $I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right), \overrightarrow{BM}\left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), \overrightarrow{BS}(-a;0;a)$

c) Một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (SAC) là $(-a^2\sqrt{2}; a; 0)$

d) Thể tích tứ diện $ANIB$ bằng $\frac{a^3\sqrt{2}}{18}$ (đvtt)

Lời giải

$S(0;0;a), A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a\sqrt{2};0)$

a) Đúng: Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:

$D(0;a\sqrt{2};0), M\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), N\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}\right)$

Khi đó:

$\frac{IA}{IC} = \frac{IM}{IB} = \frac{AM}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow IA = \frac{1}{3} AC \Rightarrow I\left(\frac{a}{3}; \frac{a\sqrt{2}}{3}; 0\right), \overrightarrow{BM}\left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right), \overrightarrow{BS}(-a;0;a)$

b) Đúng:

$(SMB) \quad \vec{n}_1 = [\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BA}] = \left(\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}\right)$

c) Sai: Mặt phẳng có vectơ pháp tuyến

$(SCA) \quad \vec{n}_2 = [\overrightarrow{AS}, \overrightarrow{AC}] = (-a^2\sqrt{2}; a^2; 0)$

Mặt phẳng có vectơ pháp tuyến

$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (SAC), (SMB)$

d) Sai: Vì nên 2 mặt phẳng vuông góc

$$[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}] = \left(-\frac{a^2}{3\sqrt{2}}; \frac{a^2}{6}; 0 \right), \overrightarrow{AB} = (a; 0; 0), V_{ANB} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AN}] \cdot \overrightarrow{AB}| = \frac{a^3 \sqrt{2}}{36} (dvt)$$

Ta có

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; -2; 1)$ với tốc độ $4,5$ m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét).



$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a) Phương trình tham số của đường cáp là:

b) Giả sử sau thời gian t (s) kể từ lúc xuất phát ($t \geq 0$) thì cabin đến điểm M . Khi đó tọa độ điểm M là $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$.

c) Cabin dừng ở điểm B có hoành độ $x_B = 550$, khi đó quãng đường AB dài 800 m.

d) Đường cáp AB tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc 30° .

Lời giải

$$\begin{cases} x = 10 + 2t \\ y = 3 - 2t \\ z = t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

a) Đúng: Phương trình tham số của đường cáp là:

b) Đúng: Ta có $AM = vt = 4,5t$ và ta gọi $M(10 + 2m; 3 - 2m; m)$ thuộc đường thẳng d . Khi đó: $\overrightarrow{AM} = (2m; -2m; m)$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng hướng với vector $\vec{u}$ nên m dương

Suy ra $AM = \sqrt{4m^2 + 4m^2 + m^2} = 3|m| \xrightarrow{m > 0} m = 1,5t$ nên $M\left(3t + 10; -3t + 3; \frac{3t}{2}\right)$

c) Sai: Từ câu trên suy ra $M \equiv B \Leftrightarrow 10 + 3t = 550 \Leftrightarrow t = 180$

Khi đó: $AB = vt = 4,5 \cdot t = 4,5 \cdot 180 = 810$ mét

d) Sai: Ta có $\vec{u}_{AB} = (2; -2; 1)$ và mặt phẳng (Oxy) là $z = 0$ nên ta có $\vec{n} = (0; 0; 1)$

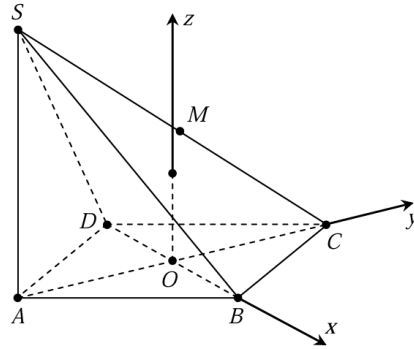
$$\sin \alpha = \frac{\left| \frac{\vec{u} \cdot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} \right|}{1} = \frac{1}{3}$$

Từ đó: nên $\alpha \neq 30^\circ$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh có cạnh bằng a và SA vuông góc với đáy. Khi $a = 2$, hãy tính độ dài cạnh SA để góc tạo bởi (SBC) và (SCD) bằng 60° .

Lời giải



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ, M là trung điểm của SC và đặt $SA = 2m(m > 0)$

Khi đó $B\left(\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right), D\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}; 0; 0\right), C\left(0; \frac{a}{\sqrt{2}}; 0\right), M\left(0; 0; m\right)$

Ta có $(SBC): \frac{x}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{z}{m} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SBC} = \left(1; 1; \frac{a}{m\sqrt{2}}\right)$

$(SDC): \frac{x}{-\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{y}{\frac{a}{\sqrt{2}}} + \frac{z}{m} = 1 \Rightarrow \vec{n}_{SDC} = \left(-1; 1; \frac{a}{m\sqrt{2}}\right)$

Phương trình mặt phẳng

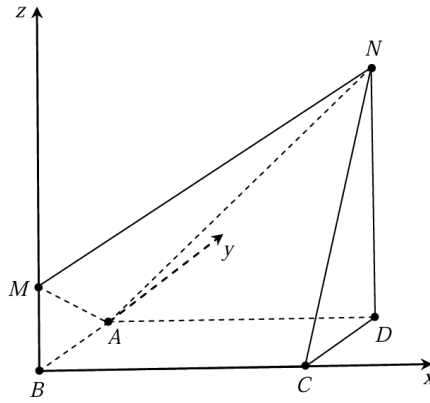
Yêu cầu bài toán tương đương với $((SBC), (SDC)) = 60^\circ \Leftrightarrow |\cos(\vec{n}_{SBC}, \vec{n}_{SDC})| = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \frac{\left|\left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^2\right|}{1+1+\left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{m\sqrt{2}}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow 2m = 2$$

Câu 2: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên hai tia Bx, Dy vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và cùng chiều lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $BM = \frac{a}{4}; DN = 2a$. Tính góc φ giữa hai mặt phẳng (AMN) và (CMN) .

Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Ta có: $B(0;0;0), A(0;a;0), C(a;0;0), M\left(0;0;\frac{a}{4}\right), N(a;a;2a)$

Ta có $\overrightarrow{AM} = \left(0; -a; \frac{a}{4}\right), \overrightarrow{AN} = (0;0;2a) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \left(-2a^2; \frac{a^2}{4}; a^2\right)$ là một vector pháp

tuyến của mặt phẳng (AMN) nên $\overrightarrow{CM} = \left(-a; 0; \frac{a}{4}\right), \overrightarrow{CN} = (0; a; 2a)$

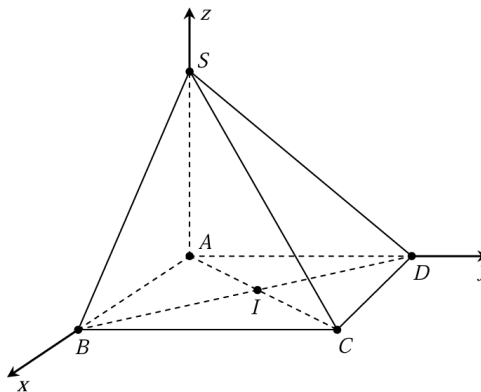
Khi đó $[\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CN}] = \left(\frac{-a^2}{4}; 2a^2; -a^2\right)$ là một vector pháp tuyến của mặt phẳng (CMN)

$$\cos \varphi = \frac{\left| \frac{a^4}{2} + \frac{a^4}{2} - a^4 \right|}{\sqrt{4a^4 + \frac{a^4}{16} + a^4} \cdot \sqrt{4a^4 + \frac{a^4}{16} + a^4}} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

Do đó:

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ và SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$. Nếu $\tan \alpha = \sqrt{2}$ thì góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (SBC) bằng bao nhiêu?

Lời giải



Gọi $I = AC \cap BD$.

Hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo bằng $a\sqrt{2}$ suy ra hình vuông đó có cạnh bằng a .

$$\begin{cases} (SBD) \cap (ABCD) = BD \\ SI \perp BD \\ AI \perp BD \end{cases} \Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (SI; AI) = SIA$$

Ta có

Ta có $\tan \alpha = \tan \angle SIA = \frac{SA}{AI} \Leftrightarrow SA = a$

Chọn hệ trục tọa độ Oxyz như hình vẽ. Ta có $A(0;0;0), B(a;0;0), C(a;a;0), S(0;0;a)$

Khi đó $\overrightarrow{SA} = (0;0;-a); \overrightarrow{SC} = (a;a;-a); \overrightarrow{SB} = (a;0;-a)$

Mặt phẳng (SAC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (-1;1;0)$

Mặt phẳng (SBC) có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (1;0;1)$

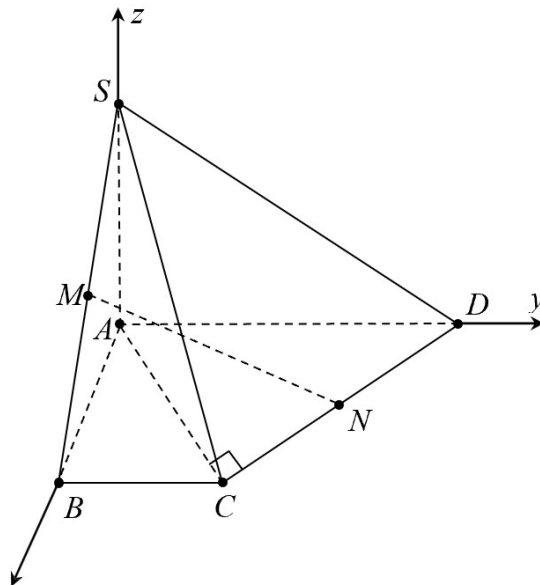
$$\cos((SAC);(SBC)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow ((SAC);(SBC)) = 60^\circ$$

Suy ra

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B , thỏa mãn điều kiện, $AB = BC = a, AD = 2a, SA$ vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$, $SA = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD . Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) . (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Chọn đơn vị là a

Có $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1), M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right), N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$

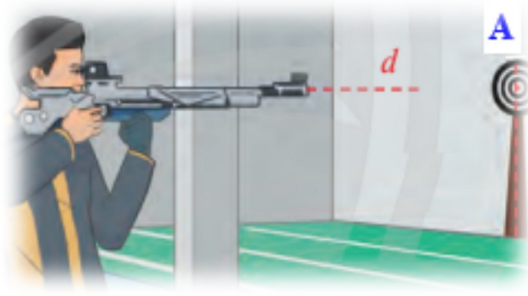
Vecto chỉ phương của $\overrightarrow{MN}$ là $\overrightarrow{MN} = \left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = (0;3;-1)$

Vecto pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AS}] = (1;-1;0)$

Vậy $\sin(MN, (SAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{9+1} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ nên $\cos(MN, (SAC)) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10} \approx 0,74$

Câu 5: Một phần mềm mô phỏng vận động viên đang tập bắn súng trong không gian $Oxyz$. Cho biết

trục d của nòng súng có phương trình: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5}$ và hồng tâm $A(8;-19;6m+4)$.
Hỏi m bằng bao nhiêu vận động viên có bắn trúng hồng tâm.

**Lời giải**

Để vận động viên có bắn trúng hồng tâm thì trục d phải đi qua hồng tâm.

Ta thay điểm $A(8; -19; 6m + 4)$ vào phương trình trục d :

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{-5} \Leftrightarrow \frac{8-1}{1} = \frac{-19-2}{-3} = \frac{6m+4-3}{-5} = 7 \Leftrightarrow 6m = -36 \Leftrightarrow m = -6$$

Vậy $m = -6$ thì vận động viên bắn trúng hồng tâm.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, một cabin cáp treo ở Bà Nà Hill xuất phát từ điểm $A(-2; 1; 5)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vector chỉ phương là $\vec{u} = (0; -2; 6)$ với tốc độ là 4 m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Giả sử sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M . Gọi tọa độ $M(a; b; c)$. Tính $a + 3b + c$.

**Lời giải**

$$d : \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 - 2k \\ z = 5 + 6k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

Phương trình tham số của đường cáp là:

Do tốc độ chuyển động của cabin là 4 m/s nên độ dài $AM = 4t$ (m).

Vì vậy sau 5 (s) kể từ lúc xuất phát, cabin đến điểm M thì $AM = 4 \cdot 5 = 20$ (m).

Vì $M \in d \Rightarrow M(-2; 1 - 2k; 5 + 6k)$ nên suy ra $\overrightarrow{AM}(0; -2k; 6k)$.

Do 2 vec tơ $\overrightarrow{AM}; \vec{u}$ cùng hướng $k > 0$

$$AM = 20 \Leftrightarrow \sqrt{0^2 + 4k^2 + 36k^2} = 20 \Leftrightarrow 40k^2 = 400 \Leftrightarrow k = \pm\sqrt{10}$$

Vì $k > 0 \Rightarrow k = \sqrt{10}$.

Vậy tọa độ $M(-2; 1 - 2\sqrt{10}; 5 + 6\sqrt{10})$. Khi đó $a + 3b + c = -2 + 3(1 - 2\sqrt{10}) + 5 + 6\sqrt{10} = 6$.

Câu 7: Trong một khu du lịch, người ta cho du khách trải nghiệm thiên nhiên bằng cách đu theo đường trượt zipline từ vị trí A cao 15 m của tháp 1 này sang vị trí B cao 10 m của tháp 2 trong khung cảnh tuyệt đẹp xung quanh. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị: mét), tọa độ của A và B lần lượt là $(3; 2,5; 15)$ và $(21; 27,5; 10)$. Khi du khách khi ở độ cao 12 mét thì tọa độ của du khách lúc đó là $M(a; b; c)$. Tính giá trị biểu thức $T = a + b + c$



Lời giải

Ta có: $A(3; 2,5; 15)$, $B(21; 27,5; 10) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (18; 15; -5)$

Phương trình tham số đường thẳng AB là:
$$\begin{cases} x = 3 + 18t \\ y = 2,5 + 15t \\ z = 15 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa đường trượt zipline là
$$\begin{cases} x = 3 + 18t \\ y = 2,5 + 15t \\ z = 15 - 5t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

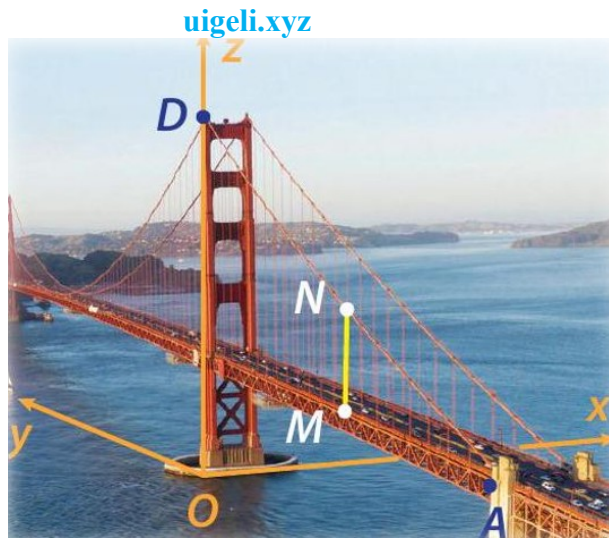
Xác định tọa độ của du khách khi ở độ cao 12 mét.

Khi du khách khi ở độ cao 12 mét $\Rightarrow z = 12 \Rightarrow 15 - 5t = 12 \Rightarrow t = \frac{3}{5}$

Thay $t = \frac{3}{5}$ vào phương trình đường thẳng AB ta được
$$\begin{cases} x = 13,8 \\ y = 11,5 \\ z = 12 \end{cases} \Rightarrow C(13,8; 11,5; 12)$$

Vậy $T = a + b + c = 13,8 + 11,5 + 12 = 37,3$

Câu 8: Cầu Cổng Vàng (*The Golden Gate Bridge*) ở Mỹ. Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với O là bộ của chân cột trụ tại mặt nước, trục Oz trùng với cột trụ, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước và xem như trục Oy cùng phương với cầu như hình vẽ. Dây cáp AD (xem như là một đoạn thẳng) đi qua đỉnh D thuộc trục Oz và điểm A thuộc mặt phẳng Oyz , trong đó điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m, điểm A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m. Giả sử ta dùng một đoạn dây nối điểm N trên dây cáp AD và điểm M trên thành cầu, biết M cách mặt nước 75 m và MN song song với cột trụ.



(Nguồn ảnh: <https://www.goldengate.org/assets/1/6/ggb-exhibit-chapter-statistics.pdf>).

Tính độ dài MN , biết điểm M cách trục Oz một khoảng bằng 230 m (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

Lời giải

Ta có $A \in Oyz$ và A cách mặt nước 75 m và cách trục Oz 343 m $\Rightarrow A(0; 343; 75)$

Điểm D là đỉnh cột trụ cách mặt nước 227 m $\Rightarrow D(0; 0; 227) \Rightarrow \overrightarrow{AD} = (0; -343; 152)$

Phương trình đường thẳng AD là

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -343t \\ z = 227 + 152t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Phương trình đường thẳng AD là

Vì $N \in AD \Rightarrow N(0; -343t; 227 + 152t)$

Điểm M trên thành cầu, M cách mặt nước 75 m và cách trục Oz một khoảng bằng 230 m

nên tọa độ điểm M là $M(0; 230; 75)$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; -343t - 230; 152 + 152t)$

MN song song với cột trụ $\Rightarrow MN \perp Oy \Rightarrow \overrightarrow{MN} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow -343t - 230 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{230}{343}$

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left(0; 0; \frac{17176}{343}\right) \Rightarrow MN = \frac{17176}{343} \approx 50,08$ m.

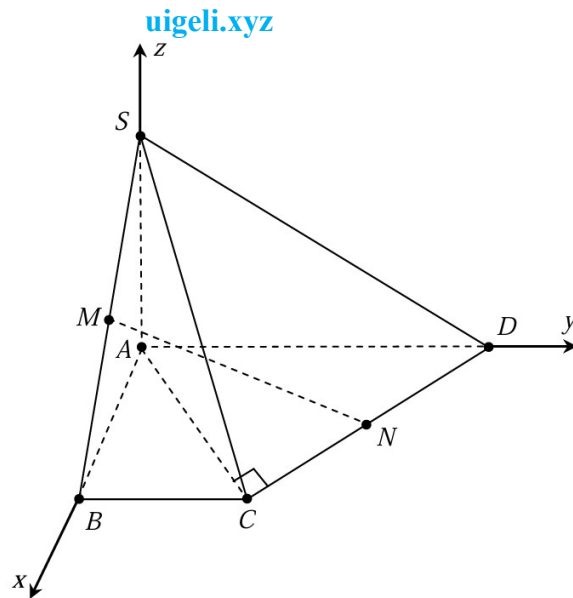
B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A và B biết $AB = BC = a, AD = 2a$.

Biết rằng $SA = a$ và vuông góc với mặt đáy $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB, CD .

Tính cosin của góc giữa MN và (SAC) .

Lời giải



Chọn hệ trục như hình vẽ, chọn đơn vị là a .

Có $A(0;0;0), B(1;0;0), C(1;1;0), D(0;2;0), S(0;0;1); M\left(\frac{1}{2};0;\frac{1}{2}\right); N\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2};0\right)$

Vector chỉ phương của MN là $2\overrightarrow{MN} = 2\left(0; \frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right) = (0; 3; -1)$

Vector pháp tuyến của (SAC) là $\vec{n} = [\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AS}] = (1; -1; 0)$

Vậy $\sin(MN; (SAC)) = \frac{|3|}{\sqrt{9+1}\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$ nên $\cos(MN; (SAC)) = \sqrt{1 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)^2} = \frac{\sqrt{55}}{10}$

Bài tập 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang cân, $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$. Hai mặt phẳng (SAB) và (SAD) cùng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SB và CD . Tính cosin góc giữa MN và (SAC) , biết thể tích khối chóp $S.ABCD$ bằng bao nhiêu?

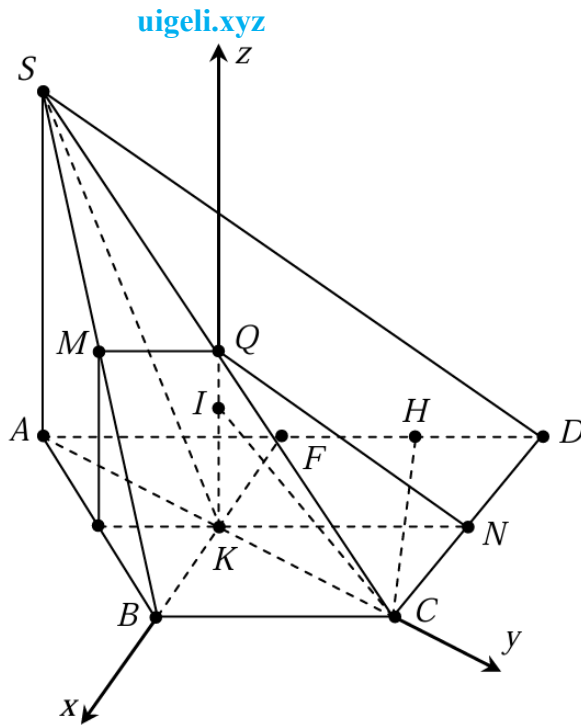
Lời giải

Vì $ABCD$ là hình thang cân có $AD = 2AB = 2BC = 2CD = 2a$

Suy ra $AD = 2a; AB = BC = CD = a \Rightarrow CH = \frac{a\sqrt{3}}{2}; S_{ABCD} = \frac{a+2a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$.

Nên $V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}a^2}{4} \cdot SA = \frac{a^3\sqrt{3}}{4} \Rightarrow SA = a$

Gắn hình chóp vào hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây:



Ta có $K(0;0;0), B\left(\frac{a}{2};0;0\right), C\left(0;\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), A\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right)$,

$N\left(\frac{-a}{2};\frac{a\sqrt{3}}{2};0\right), S\left(0;-\frac{a\sqrt{3}}{2};a\right), M\left(\frac{a}{4};-\frac{a\sqrt{3}}{4};\frac{a}{2}\right)$

Vector $\overrightarrow{MN} = \left(\frac{-3a}{4}; \frac{3a\sqrt{3}}{4}; \frac{-a}{2}\right)$. Chọn $\vec{u}_1 = (-3; 3\sqrt{3}; -2)$ cùng phương với $\overrightarrow{MN}$

Nhận xét $\begin{cases} BK \perp SA \\ BK \perp AC \end{cases} \Rightarrow BK \perp (SAC)$

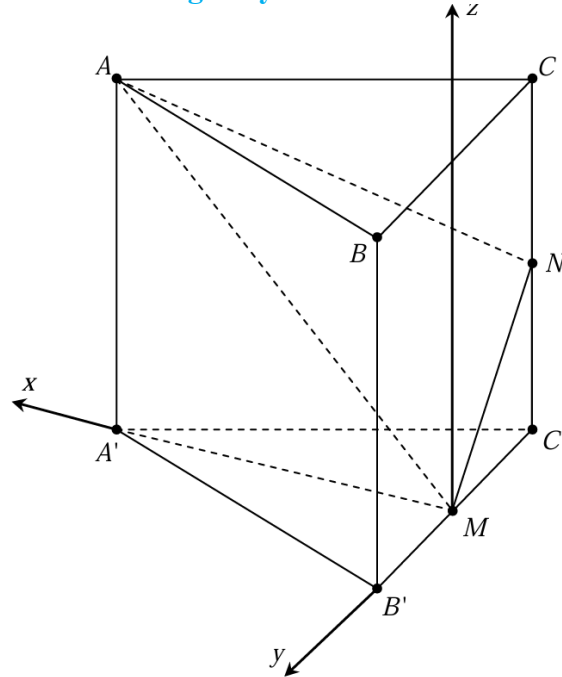
Vector $\overrightarrow{BK} = \left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$ là VTPT của (SAC) nên ta chọn $\vec{n}_1 = (1; 0; 0)$ cùng phương với $\overrightarrow{BK}$

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1|}{|\vec{u}_1| |\vec{n}_1|} = \frac{3\sqrt{10}}{20} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{310}}{20}$$

Gọi α là góc giữa MN và (SAC) khi đó

Bài tập 3: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AC = a, BAC = 120^\circ, AA' = a$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $B'C'$ và CC' . Số đo góc giữa mặt phẳng (AMN) và mặt phẳng (ABC) bằng

Lời giải



Thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ trong không gian như hình vẽ, gốc tọa độ O trùng M .

Dễ dàng tính được $MB' = MC' = \frac{a\sqrt{3}}{2}; MA' = \frac{a}{2}$ và $M(0;0;0), N \in (Oyz) \Rightarrow N\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$

Ta có: $A \in (Oxz) \Rightarrow A\left(\frac{a}{2}; 0; a\right)$ và $(ABC) \parallel (A'B'C'); (A'B'C') \equiv (Oxy)$

Suy ra mặt phẳng (ABC) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0;0;1)$

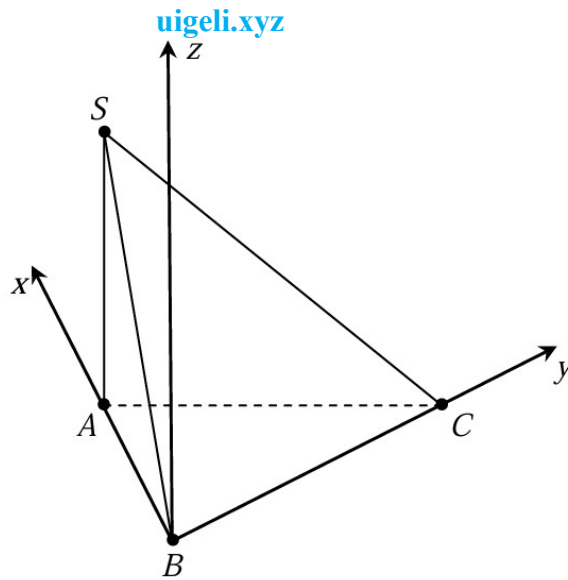
Ta có $\overrightarrow{MA}\left(\frac{a}{2}; 0; 0\right)$ cùng phương $\vec{u}_1 = (1;0;2)$; $\overrightarrow{MN}\left(0; -\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}\right)$ cùng phương $\vec{u}_2 = (0; -\sqrt{3}; 1)$

Mặt phẳng (AMN) có một vecto pháp tuyến $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = (2\sqrt{3}; -1; -\sqrt{3})$

Khi đó: $\cos((AMN), (ABC)) = \left| \cos(\vec{k}, \vec{n}) \right| = \frac{\sqrt{3}}{4}$

Bài tập 4: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại $B, BC = a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi M là trung điểm AC . Tính cot góc của hai mặt phẳng (SBM) và (SAB)

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

$$B(0;0;0); A(a;0;0); C(0;a;0); S(a;0;a\sqrt{3}); M\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0\right)$$

Khi đó ta có tọa độ các điểm như sau:

Ta có: $\vec{n}_{(SAB)} = (0; 1; 0); \vec{n}_{(SBM)} = [\vec{SB}, \vec{MB}] = (a(1; 0, \sqrt{3})) \wedge \left(\frac{a}{2}(1; 1; 0)\right) = \frac{a^2}{2}(-\sqrt{3}; \sqrt{3}; 1)$

Đặt góc (SBM) và (SAB) là α , khi đó ta có:
$$|\cos \alpha| = \frac{|\vec{n}_{(SAB)} \cdot \vec{n}_{(SBM)}|}{|\vec{n}_{(SAB)}| |\vec{n}_{(SBM)}|} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

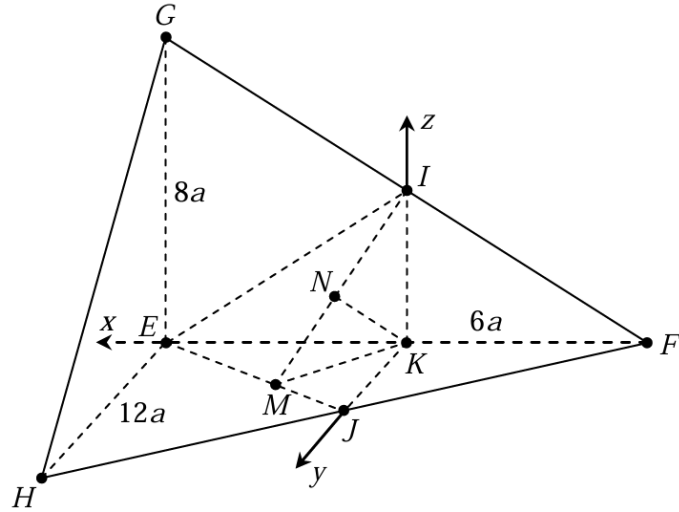
Khi đó
$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2} = \frac{2\sqrt{7}}{7} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Bài tập 5: Cho hình tứ diện $EFGH$ có EF vuông góc với EG , EG vuông góc với EH , EH vuông góc với EF . Biết $EF = 6a$, $EG = 8a$, $EH = 12a$ (với $a > 0, a \in \mathbb{R}$). Gọi I, J tương ứng là trung điểm của hai cạnh FG, FH . Tính khoảng cách d từ điểm F đến mặt phẳng (EIJ) theo a .

Lời giải

Vì EF vuông góc với EG , EG vuông góc với EH nên $EG \perp (EFH)$. Gọi K là trung điểm của EF suy ra $IK \perp (EFH)$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ

Khi đó ta có: $K(0;0;0), I(0;0;4a), E(3a;0;0), J(0;6a;0)$.



Phương trình mặt phẳng $(EIJ): \frac{x}{3a} + \frac{y}{6a} + \frac{z}{4a} = 1 \Leftrightarrow 4x + 2y + 3z - 12a = 0$

$$d = (F, (EIJ)) = 2d(K, (EIJ)) = 2 \frac{12a}{\sqrt{4+9+16}} = \frac{24a}{\sqrt{29}} = \frac{24\sqrt{29}a}{29}.$$

Vậy

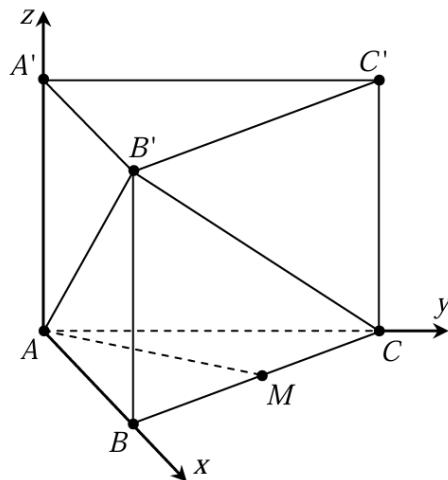
Bài tập 6: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$.

Lời giải

Gọi chiều cao của hình lăng trụ là h .

Đặt hệ trục tọa độ $Axyz$ như hình vẽ. Khi đó $A(0;0;0), B(a\sqrt{3};0;0), C(0;a\sqrt{3};0), B'(a\sqrt{3};0;h)$

Suy ra $M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ là trung điểm của BC .



Vì $AM \perp (BCC'B')$ và $\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{2}; 0\right)$ nên $\vec{n} = (1;1;0)$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng $(BCC'B')$.

Ta có: $[\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB'}] = (ah\sqrt{3}; 0; -3a^2) \Rightarrow \vec{n}_1 = (h; 0; -\sqrt{3}a)$ là vector pháp tuyến của $(AB'C)$.

Theo giả thiết góc giữa $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60°

$$\cos 60^\circ = \left| \cos(\vec{n}, \vec{n}_1) \right| \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{|h|}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{h^2 + 3a^2}} \Rightarrow h = \sqrt{3}a$$

Tức là:

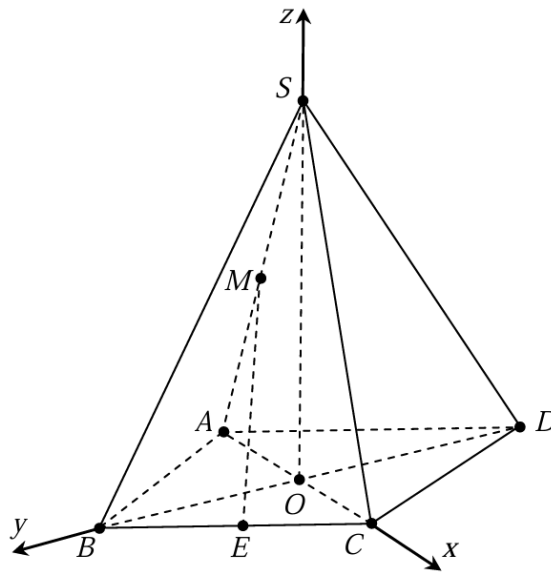
$$\text{Vậy thể tích của khối lăng trụ } ABC.A'B'C' \text{ là } V = \frac{3a^3\sqrt{3}}{2}.$$

Bài tập 7: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA và α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Tính $\tan \alpha$

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $Ox \equiv OC, Oy \equiv OB, Oz \equiv OS$. Chọn $OA = 1$

Ta có $C(1;0;0), A(-1;0;0) \Rightarrow (SBD)$ nhận $\vec{AC} = (2;0;0)$ là một vector pháp tuyến.



$$\text{Từ } SA = AB = OA\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} S(0;0;1) \\ A(-1;0;0) \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ta có } \begin{cases} C(1;0;0) \\ B(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow EM \quad \text{nhận } \vec{ME} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right) \text{ là một vector chỉ phương.}$$

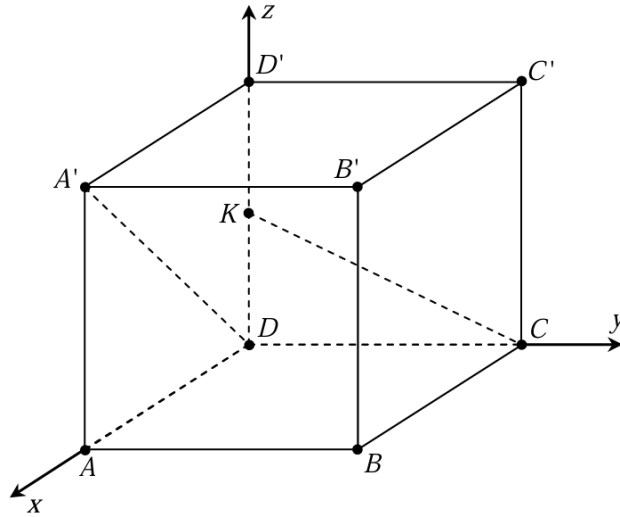
$$\sin(EM; (SBD)) = \sin \alpha = \frac{|\vec{ME} \cdot \vec{AC}|}{ME \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Suy ra:

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}$$

Bài tập 8: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng bao nhiêu?

Lời giải



Chọn $a = 1$ ta có hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $D(0;0;0), A'(1;0;1), K\left(0;0;\frac{1}{2}\right)$ và $C(0;1;0)$

Ta có $\overrightarrow{DA'} = (1;0;1); \overrightarrow{CK} = \left(0;-1;\frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{DK} = \left(0;0;\frac{1}{2}\right)$

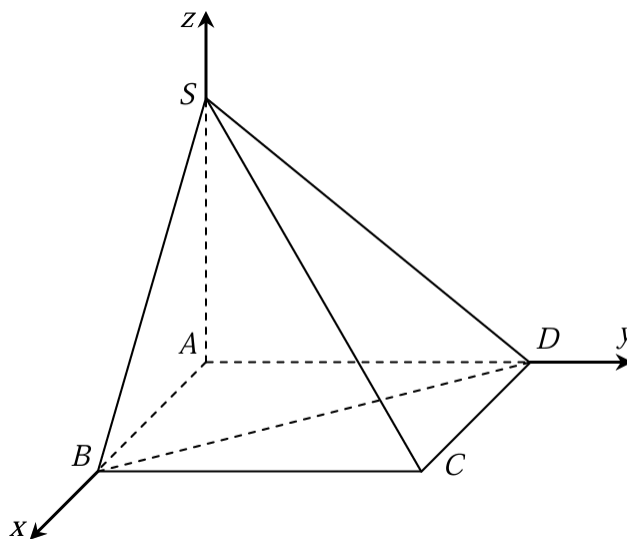
Khi đó $[\overrightarrow{DA'}; \overrightarrow{CK}] = \left(1; -\frac{1}{2}; -1\right), [\overrightarrow{DA'}; \overrightarrow{CK}] \cdot \overrightarrow{DK} = -\frac{1}{2}$

$$d(A'D; CK) = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{3}$$

Do đó:

Bài tập 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, biết rằng $AB = a, BC = a\sqrt{3}, SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Hãy tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

Lời giải



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ. Khi đó, ta có:

$$A(0;0;0), B(a;0;0), D(0;a\sqrt{3};0), S(0;0;a)$$

$$\overrightarrow{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0) = a(-1; \sqrt{3}; 0) \quad \text{BD} \quad \vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0)$$

nên đường thẳng có vector chỉ phương là

$$\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a), \overrightarrow{SC} = (0; a\sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SC}] = (a^2\sqrt{3}; 0; a^2\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}(1; 0; 1)$$

Ta có:

$$(SBC) \quad \vec{n} = (1; 0; 1)$$

Như vậy, mặt phẳng có vector pháp tuyến là

Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

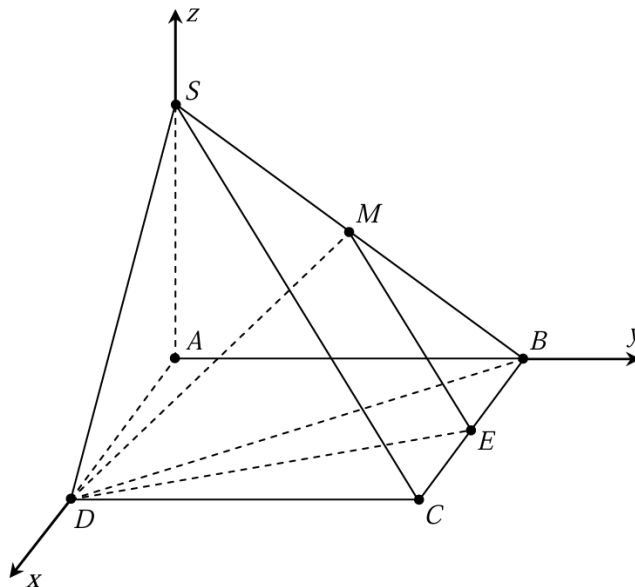
$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Bài tập 10: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Cạnh bên SA vuông góc với đáy. Góc giữa SC và mặt đáy bằng 45° . Gọi E là trung điểm BC . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng DE và SC .

Lời giải

Ta có thể đưa ra các cách giải như sau:

Do SAC là tam giác vuông có góc $SCA = 45^\circ$ nên $SA = AC = a\sqrt{2}, SC = 2a, SB = SD = a\sqrt{3}$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho tia Ox, Oy, Oz lần lượt trùng với các tia AB, AD, AS .

Khi đó tọa độ điểm các điểm là $D(0; a; 0), E\left(a; \frac{a}{2}; 0\right), C(a; a; 0), S(0; 0; a\sqrt{2})$

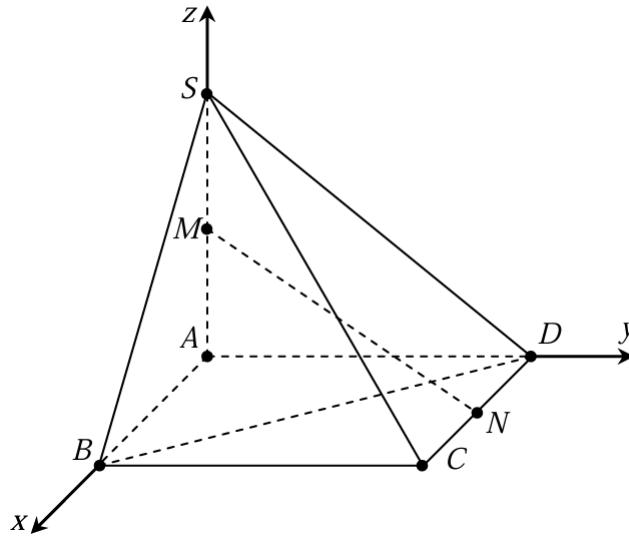
Do đó: $\overrightarrow{DE} = \left(a; -\frac{a}{2}; 0\right), \overrightarrow{SC} = (-a; -a; a\sqrt{2}), \overrightarrow{DC} = (a; 0; 0)$

$$\left[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}\right] = \left(-\frac{a^2\sqrt{2}}{2}; -a^2\sqrt{2}; -\frac{3a^2}{2}\right) \Rightarrow d(DE; SC) = \frac{\left|\left[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}\right] \cdot \overrightarrow{DC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{DE}; \overrightarrow{SC}\right]\right|} = \frac{a\sqrt{38}}{19}$$

Suy ra

Bài tập 11: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh bằng 10. Cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SC = 10\sqrt{5}$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của SA và CD . Tính khoảng cách d giữa BD và MN .

Lời giải



$$SAC \quad SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{500 - 200} = 10\sqrt{3}$$

Xét tam giác vuông có:

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ

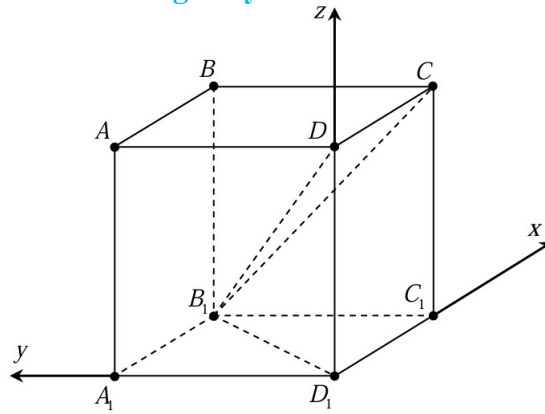
$$A(0; 0; 0), M(0; 0; 5\sqrt{3}), B(10; 0; 0), D(0; 10; 0), C(10; 10; 0), N(5; 10; 0)$$

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{MN} = (5; 10; -5\sqrt{3}) \Rightarrow \vec{u}_1 = (1; 2; -\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{BD} = (-10; 10; 0) \Rightarrow \vec{u}_2 = (-1; 1; 0) \Rightarrow d(MN, BD) = \frac{|\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \overrightarrow{ND}|}{|\vec{u}_1, \vec{u}_2|} = \sqrt{5} \\ [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (\sqrt{3}; \sqrt{3}; 3), \overrightarrow{ND} = (-5; 0; 0) \end{cases}$$

Bài tập 12: Cho lăng trụ tứ giác đều $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ cạnh đáy bằng 1 và chiều cao bằng x . Tìm x để góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $O \equiv D_1, C_1$ thuộc tia Ox, A_1 thuộc tia Oy, D thuộc tia Oz (như hình vẽ).

$$D_1(0;0;0), B_1(1;1;0), D(0;0;x), C(1;0;x)$$

Khi đó

$$(B_1D_1C) \quad \vec{n} = [\overrightarrow{D_1B_1}, \overrightarrow{D_1C}] = (x; -x; -1)$$

Mặt phẳng nhận vectơ là vectơ pháp tuyến

$$B_1D \quad \vec{u} = (1; 1; -x)$$

Đường thẳng nhận vectơ là vectơ chỉ phương.

Gọi φ là góc giữa B_1D và (B_1D_1C) , suy ra:

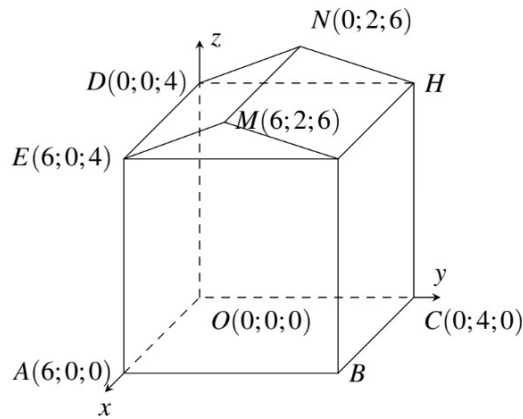
$$\sin \varphi = \frac{|x - x + x|}{\sqrt{x^2 + (-x)^2 + 1} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{(2x^2 + 1)(x^2 + 2)}} \quad (x > 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\left(2x + \frac{1}{x}\right)\left(x + \frac{2}{x}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5}} \leq \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 2\sqrt{x^2 \cdot \frac{1}{x^2}} + 5}} = \frac{1}{3}.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi $x = 1$ và góc φ lớn nhất $\Leftrightarrow \sin \varphi$ lớn nhất $\Leftrightarrow x = 1$.

Vậy góc tạo bởi đường thẳng B_1D và (B_1D_1C) đạt giá trị lớn nhất khi $x = 1$.

Bài tập 13: Một kĩ sư xây dựng thiết kế khung một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$ như hình dưới đây nhờ một phần mềm đồ họa máy tính.



- a) Viết phương trình mặt phẳng mái nhà $(DEMN)$.
- b) Tính khoảng cách từ điểm B đến mái nhà $(DEMN)$.

Lời giải

- a) Mặt phẳng $(DEMN)$ có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{DE} = (6;0;0)$, $\overrightarrow{DN} = (0;2;2)$.

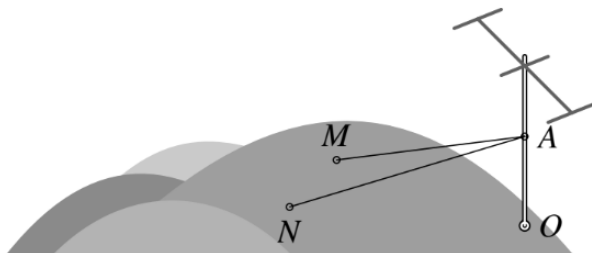
Ta có $[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DN}] = (0; -12; 12)$ nên suy ra $(DEMN)$ có vector pháp tuyến là:

$$\vec{n} = -\frac{1}{12}[\overrightarrow{DE}, \overrightarrow{DN}] = (0; 1; -1)$$

Phương trình của mặt phẳng $(DEMN)$ là: $y - z + 4 = 0$.

- b) Điểm $B(6;4;0)$ nên suy ra d
- $$(B, (DEMN)) = \frac{|4 + 4|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

Bài tập 14: Người ta muốn dựng một cột ăngten trên một sườn đồi. Ăngten được dựng thẳng đứng trong không gian $Oxyz$ với độ dài đơn vị trên mỗi trục bằng 1m. Gọi O là gốc cột, A là điểm buộc dây cáp vào cột ăngten và M, N là hai điểm neo dây cáp xuống mặt sườn đồi (hình vẽ).



Cho biết tọa độ các điểm nói trên lần lượt là $O(0;0;0)$, $A(0;0;6)$, $M(3;-4;3)$, $N(-5;-2;2)$.

- a) Tính độ dài các đoạn dây cáp MA và NA .
- b) Tính góc tạo bởi các sợi dây cáp MA, NA với mặt phẳng sườn đồi.

Lời giải

$$\overrightarrow{MA} = (-3; 4; 3), \overrightarrow{NA} = (5; 2; 4) \quad MA = \sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 3^2} = \sqrt{34} \approx 5,8 \text{ m}$$

- a) Ta có suy ra

$$NA = \sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{45} \approx 6,7 \text{ m}$$

Khi đó

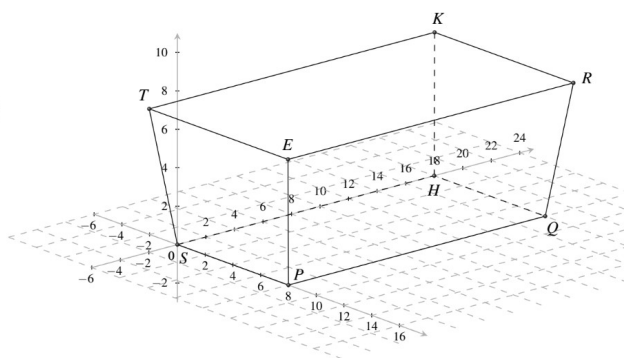
b) Mặt phẳng (OMN) có cặp vector chỉ phương là $\overrightarrow{OM} = (3; -4; 3), \overrightarrow{ON} = (-5; -2; 2)$ nên có vector pháp tuyến $\vec{n} = [\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}] = (-2; -21; -26)$.

Gọi α, β lần lượt là góc tạo bởi MA, NA với mặt phẳng (AMN) .

Ta có:
$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{MA}| |\vec{n}|} = \frac{|-3 \cdot (-2) + 4 \cdot (-21) + 3 \cdot (-26)|}{\sqrt{(-3)^2 + 4^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-21)^2 + (-26)^2}} = \frac{156}{\sqrt{38114}} \Rightarrow \alpha \approx 53^\circ$$

Khi đó:
$$\sin \beta = \frac{|\overrightarrow{NA} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{NA}| |\vec{n}|} = \frac{|5 \cdot (-2) + 2 \cdot (-21) + 4 \cdot (-26)|}{\sqrt{5^2 + 2^2 + 4^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + (-21)^2 + (-26)^2}} = \frac{156}{\sqrt{50445}} \Rightarrow \beta \approx 44^\circ$$

Bài tập 15: Một khuôn nướng bánh mì được mô phỏng trong không gian $Oxyz$ như hình minh họa dưới đây với $S(0; 0; 0), P(8; 0; 0), Q(8; 18; 0), T(-1; -1; 7), R(9; 19; 7)$. Tính góc giữa hai cạnh kề nhau, giữa cạnh bên và mặt đáy, giữa mặt bên và mặt đáy của khuôn.



Lời giải

a) Tính góc giữa hai cạnh kề nhau: $\overrightarrow{SP} = (8; 0; 0); \overrightarrow{SH} = (0; 18; 0); \overrightarrow{ST} = (-1; -1; 7)$

Ta có: $\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{SH} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{SH}) = 90^\circ$

$$\cos(\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{ST}) = \frac{|\overrightarrow{SP} \cdot \overrightarrow{ST}|}{|\overrightarrow{SP}| |\overrightarrow{ST}|} = \frac{1}{\sqrt{51}} \Rightarrow (\overrightarrow{SP}, \overrightarrow{ST}) \approx 82^\circ$$

$$\cos(\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{ST}) = \frac{|\overrightarrow{SH} \cdot \overrightarrow{ST}|}{|\overrightarrow{SH}| |\overrightarrow{ST}|} = \frac{1}{\sqrt{51}} \Rightarrow (\overrightarrow{SH}, \overrightarrow{ST}) \approx 82^\circ$$

b) Tính góc giữa cạnh bên và mặt đáy. Gọi α là góc giữa cạnh bên ST và mặt phẳng đáy.

$$\sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{ST} \cdot \vec{k}|}{|\overrightarrow{ST}| |\vec{k}|} = \frac{7}{\sqrt{51}} \Rightarrow \alpha \approx 78^\circ$$

Khi đó:

c) Tính góc giữa mặt bên và mặt đáy. Gọi β là góc giữa mặt bên và mặt phẳng đáy.

$$\vec{n} = [\overrightarrow{ST}, \overrightarrow{SP}] = (0; 56; 8) \Rightarrow \cos \beta = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{k}|}{|\vec{n}| |\vec{k}|} = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \beta \approx 82^\circ$$

Khi đó: