

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN

- Câu 1.** [NB] Nếu F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ bằng
 A. $F(a) - F(b)$. B. $F(a) + F(b)$. C. $F(b) - F(a)$. D. $F(b)F(a)$.
- Câu 2.** [NB] Giá trị của $\int_a^a f(x) dx$ là
 A. 1. B. 0. C. $f(a)$. D. $F(a)$.
- Câu 3.** [NB] Với hàm số liên tục trên đoạn chứa a và b, hệ thức đúng là
 A. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$. B. $\int_a^b f(x) dx = 0$.
 C. $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$. D. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$.
- Câu 4.** [TH] Biết $\int_0^2 f(x) dx = 5$. Tính $\int_0^2 (3f(x) - 2) dx$
 A. 11. B. 13. C. 15. D. 17.
- Câu 5.** [TH] Biết $\int_0^3 f(x) dx = 4$ và $\int_0^3 (2f(x) + g(x)) dx = 11$. Giá trị $\int_0^3 g(x) dx$ bằng
 A. 7. B. 4. C. 3. D. -3.
- Câu 6.** [TH] Cho $b - a = 2$ và $\int_a^b f(x) dx = 5$. Giá trị $\int_b^a (2f(x) + 1) dx$ bằng
 A. 12. B. -12. C. -8. D. 8.
- Câu 7.** [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = -1$. Tính $\int_0^3 (3f(x) + 2) dx$
 A. 3. B. 5. C. 7. D. 9.
- Câu 8.** [TH] Biết $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tìm số thực m để $\int_0^2 (mf(x) - 2) dx = 2$.
 A. 2. B. 1. C. 3. D. 4.
- Câu 9.** [TH] Cho F là một nguyên hàm của f trên $[1; 2]$ và $F(2) - F(1) = 3$. Giá trị $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{x} \right) dx$ bằng
 A. 3. B. $2 + \ln 2$. C. $3 + \ln 2$. D. $\ln 2$.
- Câu 10.** [TH] Biết $F(x) = ax^2 + 3x$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x + 3$. Giá trị của a bằng
 A. 2. B. 1. C. $\frac{1}{2}$. D. 3.
- Câu 11.** [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Giá trị của $\int_0^1 3f(x) dx$ bằng
 A. 2. B. 3. C. 5. D. 6.
- Câu 12.** [TH] Biết $\int_0^2 f(x) dx = 4$ và $\int_0^2 g(x) dx = -1$. Tính $\int_0^2 (f(x) + g(x)) dx$
 A. 3. B. -5. C. 4. D. 5.
- Câu 13.** [TH] Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ và $\int_{-1}^1 g(x) dx = -1$. Tính $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx$
 A. 3. B. -5. C. 5. D. 4.

Câu 14. [TH]Biết $\int_0^1 f(x)dx = 2$ và $\int_1^3 f(x)dx = 5$. Tính $\int_0^3 f(x)dx$.
A. 3. **B.** 7. **C.** 5. **D.** 10.

Câu 15. [TH]Biết $\int_0^2 f(x)dx = 6$. Tính $\int_2^0 f(x)dx$.
A. 0. **B.** 6. **C.** 12. **D.** -6.

Câu 16. [TH]Đặt $S(t) = \int_0^t (x+1)dx$. Hệ thức nào sau đây đúng?
A. $S'(t) = t+1, S(0) = 0$ **B.** $S'(t) = t, S(0) = 1$ **C.** $S'(t) = t+1, S(0) = 1$ **D.** $S'(t) = 1, S(0) = 0$

Câu 17. [TH]Với $a > 0$, đặt $I(a) = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2}dx$. Công thức đúng là
A. $I(a) = \pi a^2$ **B.** $I(a) = \pi a$ **C.** $I(a) = \frac{\pi a^2}{2}$ **D.** $I(a) = \frac{a^2}{2}$

Câu 18. [NB]Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a; b]$, thì $\int_a^b f(x)dx$ biểu thị
A. độ dài đồ thị $y=f(x)$.
B. diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$.
C. hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành.
D. giá trị lớn nhất của f trên đoạn.

Câu 19. [VD]Biểu thức nào sau đây là cách tách đúng tích phân $\int_0^3 |x-1|dx$?
A. $\int_0^1 (x-1)dx + \int_1^3 (1-x)dx$ **B.** $\int_0^3 (x-1)dx$
C. $\int_0^1 (1-x)dx - \int_1^3 (x-1)dx$ **D.** $\int_0^1 (1-x)dx + \int_1^3 (x-1)dx$

Câu 20. [VD]Biểu thức nào sau đây là cách tách đúng tích phân $\int_0^2 |2x-1|dx$?
A. $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1)dx$ **B.** $\int_0^1 (1-2x)dx + \int_1^2 (2x-1)dx$
C. $\int_0^2 (2x-1)dx$ **D.** $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (1-2x)dx$

Câu 21. [TH]Giá trị trung bình của hàm số f trên đoạn $[a; b]$ bằng 3 và $b-a=4$. Khi đó $\int_a^b f(x)dx$ bằng
A. 3. **B.** 7. **C.** 12. **D.** $\frac{1}{12}$.

Câu 22. [TH]Cho F là một nguyên hàm của f trên $[1; 4]$ và $F(4) - F(1) = 9$. Giá trị trung bình của f trên đoạn này bằng
A. 9. **B.** 3. **C.** 6. **D.** 12.

Câu 23. [VD]Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = t^2 - t - 6$ trên $[1; 4]$. Biểu thức đúng để tính tổng quãng đường vật đi được là
A. $\int_1^4 v(t)dt$ **B.** $-\int_1^4 v(t)dt$ **C.** $\int_1^3 v(t)dt - \int_3^4 v(t)dt$ **D.** $-\int_1^3 v(t)dt + \int_3^4 v(t)dt$

Câu 24. [VD] Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 4 - t^2$ trên $[0; 3]$. Biểu thức đúng để tính tổng quãng đường vật đi được là

A. $\int_0^2 (4 - t^2) dt + \int_2^3 (t^2 - 4) dt$

B. $\int_0^3 (4 - t^2) dt$

C. $-\int_0^2 (4 - t^2) dt + \int_2^3 (t^2 - 4) dt$

D. $\int_0^2 (t^2 - 4) dt + \int_2^3 (4 - t^2) dt$

Câu 25. [VD] Một ô tô bắt đầu phanh với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), $t \geq 0$. Biểu thức nào biểu thị quãng đường xe đi thêm từ lúc phanh đến khi dừng hẳn?

A. $\int_0^1 (-40t + 20) dt$

B. $\int_0^2 (-40t + 20) dt$

C. $\int_0^{\frac{1}{2}} (-40t + 20) dt$

D. $\int_{\frac{1}{2}}^1 (-40t + 20) dt$

Câu 26. [VD] Lợi nhuận biên của một sản phẩm là $P'(x) = -0,0005x + 12,2$. Biểu thức biểu thị đúng sự thay đổi lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị là

A. $P'(101) - P'(100)$

B. $\int_{100}^{101} P'(x) dx$

C. $P'(101)$

D. $P'(100)$

Câu 27. [VD] Một doanh nghiệp biết $\int_{100}^{105} P'(x) dx = 60$ và $\int_{105}^{110} P'(x) dx = 59,5$. Sự thay đổi lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị bằng

A. 0,5

B. 60

C. 59,5

D. 119,5

Câu 28. [VD] Vận tốc dòng máu được mô hình hóa bởi $v = k(R^2 - r^2)$ trên $0 \leq r \leq R$. Tỉ số giữa vận tốc trung bình theo r và vận tốc lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

Câu 29. [TH] Tìm số thực m để $\int_0^1 ((x+1)^2 - m) dx = 0$.

A. 2

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{7}{3}$

D. 3

Câu 30. [TH] Tìm số thực λ để $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\lambda}{\cos x^2} - 2 \right) dx = 0$.

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. 1

D. 2

II. CÂU ĐÚNG - SAI

Câu 1. [NB] Xét định nghĩa và quy ước của tích phân.

a) Nếu F là một nguyên hàm của f trên $[a; b]$, thì $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

b) $\int_a^a f(x) dx = 0$

c) $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$

d) Giá trị tích phân phụ thuộc vào chữ dùng làm biến lấy tích phân.

Câu 2. [TH] Cho F là một nguyên hàm của f trên $[-1; 2]$ với $F(-1) = 2$ và $F(2) = 5$.

a) $\int_{-1}^2 f(x) dx = 3$

b) $\int_2^{-1} f(x) dx = -3$

c) $\int_{-1}^2 2f(x) dx = 6$

d) $\int_{-1}^2 f(x) dx = 7$

Câu 3. [TH] Xét hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

a) Hàm số $2x + 1$ không âm trên $[0; 2]$.

- b) Diện tích hình phẳng bằng $\int_0^2 (2x+1) dx$.
 c) Diện tích hình phẳng bằng 6.
 d) Diện tích hình phẳng bằng 4.

Câu 4. [TH] Xét nửa đường tròn phía trên trục hoành có phương trình $y = \sqrt{9-x^2}$.
 a) Bán kính đường tròn bằng 3.

- b) $\int_{-3}^3 \sqrt{9-x^2} dx$ bằng diện tích nửa hình tròn.

c) Giá trị tích phân bằng $\frac{9\pi}{2}$.

d) Giá trị tích phân bằng 9π .

Câu 5. [TH] Xét tích phân $\int_0^4 |x-2| dx$.

a) Cần tách khoảng tại $x=2$.

b) Trên $[0; 2]$, ta có $|x-2| = 2-x$.

c) $\int_0^4 |x-2| dx = \int_0^2 (2-x) dx + \int_2^4 (x-2) dx$.

d) $\int_0^4 |x-2| dx = \int_0^4 (x-2) dx$.

Câu 6. [TH] Nhiệt độ được mô hình hóa bởi $T(t) = 20 + 1,5(t-6)$ trong khoảng $6 \leq t \leq 12$.

a) Nhiệt độ tại thời điểm 6 giờ là 20.

b) Nhiệt độ tại thời điểm 12 giờ là 29.

c) Nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian này là 24,5.

d) Nhiệt độ trung bình bằng 29.

Câu 7. [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_1^4 f(x) dx = 7$.

a) $\int_0^4 f(x) dx = 9$

b) $\int_4^0 f(x) dx = -9$

c) $\int_0^4 2f(x) dx = 18$

d) $\int_0^4 f(x) dx = 5$

Câu 8. [VD] Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = t-2$ trên $0 \leq t \leq 4$.

a) Vận tốc đổi dấu tại $t=2$.

b) Độ dịch chuyển trong 4 giây bằng 0.

c) Tổng quãng đường đi được bằng 4.

d) Tổng quãng đường bằng độ dịch chuyển.

Câu 9. [VD] Lợi nhuận biên được cho bởi $P'(x) = 10 - 0,1x$ và xét sự thay đổi lợi nhuận khi x tăng từ 0 đến 20.

a) Sự thay đổi lợi nhuận được tính bởi $\int_0^{20} (10 - 0,1x) dx$.

b) Sự thay đổi lợi nhuận bằng 180.

c) Hàm lợi nhuận tăng trên đoạn đang xét vì $P'(x) > 0$ với $0 \leq x \leq 20$.

d) Sự thay đổi lợi nhuận bằng 200.

Câu 10. [VD] Một ô tô có vận tốc $v(t) = 12 - 3t$ kể từ lúc bắt đầu phanh, với $0 \leq t \leq 4$.

a) Ô tô dừng lại tại $t=4$.

b) Quãng đường đi thêm đến khi dừng bằng 24.

c) Vận tốc trung bình trên khoảng $[0; 4]$ bằng 6.

d) Quãng đường đi thêm bằng 48.

III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. [NB]Biết $\int_0^2 f(x) dx = 5$. Tính $\int_2^0 f(x) dx$.

Câu 2. [TH]Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 (f(x) + g(x)) dx = 5$. Tính $\int_0^1 g(x) dx$.

Câu 3. [TH]Cho F là một nguyên hàm của f và $F(3) - F(1) = 7$. Tính $\int_1^3 f(x) dx$.

Câu 4. [TH]Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tìm a để $\int_0^1 (af(x) + 1) dx = 7$.

Câu 5. [TH]Giá trị trung bình của hàm số f trên đoạn $[2; 6]$ bằng 5. Tính $\int_2^6 f(x) dx$.

Câu 6. [TH]Để tính $\int_0^3 |2x-1| dx$, cần tách khoảng tại $x = a$. Tìm a .

Câu 7. [TH]Với $R > 0$, biết $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 8\pi$. Tìm R .

Câu 8. [VD]Một vật có vận tốc đổi dấu tại $t = 2$. Biết $\int_0^2 v(t) dt = -3$ và $\int_2^5 v(t) dt = 7$. Tính tổng quãng đường vật đi được trên $[0; 5]$.

Câu 9. [VD]Lợi nhuận biên trung bình trên đoạn doanh số từ 10 đến 20 đơn vị bằng 17. Tính sự thay đổi lợi nhuận trên đoạn doanh số đó.

Câu 10. [VD]Vận tốc dòng máu có dạng $v = k(R^2 - r^2)$. Nếu vận tốc lớn nhất bằng 12 thì vận tốc trung bình theo r trên $[0; R]$ bằng bao nhiêu?

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu	ĐA	Câu	ĐA	Câu	ĐA
1	C	11	D	21	C
2	B	12	A	22	B
3	D	13	C	23	D
4	A	14	B	24	A
5	C	15	D	25	C
6	B	16	A	26	B
7	D	17	C	27	D
8	A	18	B	28	A
9	C	19	D	29	C
10	B	20	A	30	B

Câu	a	b	c	d
31	Đ	Đ	Đ	S
32	Đ	Đ	Đ	S
33	Đ	Đ	Đ	S
34	Đ	Đ	Đ	S
35	Đ	Đ	Đ	S
36	Đ	Đ	Đ	S
37	Đ	Đ	Đ	S
38	Đ	Đ	Đ	S
39	Đ	Đ	Đ	S
40	Đ	Đ	Đ	S

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
-----	--------	-----	--------

41	-5	46	0,5
42	3	47	4
43	7	48	10
44	3	49	170
45	20	50	8

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. [NB] Nếu F là một nguyên hàm của f trên đoạn $[a; b]$ thì $\int_a^b f(x) dx$ bằng

- A. $F(a) - F(b)$
- B. $F(a) + F(b)$
- C. $F(b) - F(a)$
- D. $F(b)F(a)$

Lời giải

Đáp án C.

Theo công thức Newton-Leibniz:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Vậy chọn C.

Câu 2. [NB] Giá trị của $\int_a^a f(x) dx$ là

- A. 1
- B. 0
- C. $f(a)$
- D. $F(a)$

Lời giải

Đáp án B.

Hai cận bằng nhau nên tích phân bằng 0.

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

Vậy chọn B.

Câu 3. [NB] Với hàm số liên tục trên đoạn chứa a và b, hệ thức đúng là

- A. $\int_a^b f(x) dx = \int_b^a f(x) dx$
- B. $\int_a^b f(x) dx = 0$
- C. $\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a)$
- D. $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$

Lời giải

Đáp án D.

Đổi thứ tự hai cận thì tích phân đổi dấu:

$$\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$$

Vậy chọn D.

Câu 4. [TH] Biết $\int_0^2 f(x) dx = 5$. Tính $\int_0^2 (3f(x) - 2) dx$.

- A. 11
- B. 13
- C. 15
- D. 17

Lời giải

Đáp án A.

Dùng tính tuyến tính của tích phân:

$$\begin{aligned}\int_0^2 (3f(x) - 2) dx &= 3 \int_0^2 f(x) dx - \int_0^2 2 dx \\ &= 3 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = 11\end{aligned}$$

Vậy chọn A.

Câu 5. [TH] Biết $\int_0^3 f(x) dx = 4$ và $\int_0^3 (2f(x) + g(x)) dx = 11$. Giá trị $\int_0^3 g(x) dx$ bằng

- A. 7
- B. 4
- C. 3
- D. -3

Lời giải

Đáp án C.

Ta có

$$\int_0^3 (2f(x) + g(x)) dx = 2 \int_0^3 f(x) dx + \int_0^3 g(x) dx$$

Suy ra

$$11 = 2 \cdot 4 + \int_0^3 g(x) dx$$

$$\int_0^3 g(x) dx = 3$$

Vậy chọn C.

Câu 6. [TH] Cho $b - a = 2$ và $\int_a^b f(x) dx = 5$. Giá trị $\int_b^a (2f(x) + 1) dx$ bằng

- A. 12
- B. -12
- C. -8
- D. 8

Lời giải

Đáp án B.

Trước hết:

$$\int_a^b (2f(x) + 1) dx = 2 \cdot 5 + (b - a) = 12$$

Đổi cận:

$$\int_b^a (2f(x) + 1) dx = -12$$

Vậy chọn B.

Câu 7. [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = -1$. Tính $\int_0^3 (3f(x) + 2) dx$.

- A. 3
- B. 5
- C. 7
- D. 9

Lời giải

Đáp án D.

Theo tính chất cộng trên các khoảng: $\int_0^3 f(x) dx = 2 + (-1) = 1$

Do đó $\int_0^3 (3f(x) + 2) dx = 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 9$

Vậy chọn D.

Câu 8. [TH] Biết $\int_0^2 f(x) dx = 3$. Tìm số thực m để $\int_0^2 (mf(x) - 2) dx = 2$.

- A. 2
- B. 1
- C. 3
- D. 4

Lời giải

Đáp án A.

Theo tính tuyến tính: $\int_0^2 (mf(x) - 2) dx = 3m - 4$

Điều kiện đề bài cho: $3m - 4 = 2 \Rightarrow m = 2$

Vậy chọn A.

Câu 9. [TH] Cho F là một nguyên hàm của f trên $[1; 2]$ và $F(2) - F(1) = 3$. Giá trị $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{x} \right) dx$ bằng

- A. 3
- B. $2 + \ln 2$
- C. $3 + \ln 2$
- D. $\ln 2$

Lời giải

Đáp án C.

Theo Newton-Leibniz:

$$\int_1^2 f(x) dx = F(2) - F(1) = 3$$

Ngoài ra: $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln 2$

$$\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{x} \right) dx = 3 + \ln 2$$

Vì thế

Vậy chọn C.

Câu 10. [TH] Biết $F(x) = ax^2 + 3x$ là một nguyên hàm của $f(x) = 2x + 3$. Giá trị của a bằng

- A. 2
- B. 1
- C. $\frac{1}{2}$
- D. 3

Lời giải

Đáp án B.

Vì F là một nguyên hàm của f nên

$$F'(x) = f(x)$$

Ta có

$$2ax + 3 = 2x + 3$$

So sánh hệ số của x:

$$2a = 2 \Rightarrow a = 1$$

Vậy chọn B.

Câu 11. [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Giá trị của $\int_0^1 3f(x) dx$ bằng

- A. 2
- B. 3
- C. 5
- D. 6

Lời giải

Đáp án D.

Đưa hằng số ra ngoài dấu tích phân:

$$\int_0^1 3f(x) dx = 3 \cdot 2 = 6$$

Vậy chọn D.

Câu 12. [TH] Biết $\int_0^2 f(x) dx = 4$ và $\int_0^2 g(x) dx = -1$. Tính $\int_0^2 (f(x) + g(x)) dx$.

- A. 3
- B. -5
- C. 4
- D. 5

Lời giải

Đáp án A.

Dùng tính chất tích phân của tổng:

$$\int_0^2 (f(x) + g(x)) dx = 4 + (-1) = 3$$

Vậy chọn A.

Câu 13. [TH] Biết $\int_{-1}^1 f(x) dx = 4$ và $\int_{-1}^1 g(x) dx = -1$. Tính $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx$.

- A. 3
- B. -5
- C. 5
- D. 4

Lời giải

Đáp án C.

Dùng tính chất tích phân của hiệu: $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x)) dx = 4 - (-1) = 5$
 Vậy chọn C.

Câu 14. [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_1^3 f(x) dx = 5$. Tính $\int_0^3 f(x) dx$.

- A. 3
- B. 7
- C. 5
- D. 10

Lời giải

Đáp án B.

Theo tính chất cộng khoảng: $\int_0^3 f(x) dx = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^3 f(x) dx = 2 + 5 = 7$
 Vậy chọn B.

Câu 15. [TH] Biết $\int_0^2 f(x) dx = 6$. Tính $\int_2^0 f(x) dx$.

- A. 0
- B. 6
- C. 12
- D. -6

Lời giải

Đáp án D.

Đổi cận làm đổi dấu: $\int_2^0 f(x) dx = -\int_0^2 f(x) dx = -6$
 Vậy chọn D.

Câu 16. [TH] Đặt $S(t) = \int_0^t (x+1) dx$. Hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $S'(t) = t+1, S(0) = 0$
- B. $S'(t) = t, S(0) = 1$
- C. $S'(t) = t+1, S(0) = 1$
- D. $S'(t) = 1, S(0) = 0$

Lời giải

Đáp án A.

Theo định lý cơ bản của giải tích: $S'(t) = t+1$

Mặt khác: $S(0) = \int_0^0 (x+1) dx = 0$

Vậy chọn A.

Câu 17. [TH] Với $a > 0$, đặt $I(a) = \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$. Công thức đúng là

A. $I(a) = \pi a^2$

B. $I(a) = \pi a$

C. $I(a) = \frac{\pi a^2}{2}$

D. $I(a) = \frac{a^2}{2}$

Lời giải

Đáp án C.

Đồ thị $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ trên $[-a; a]$ là nửa đường tròn bán kính a phía trên trục hoành. Do đó tích phân bằng diện tích nửa hình tròn:

$$I(a) = \frac{\pi a^2}{2}$$

Vậy chọn C.

Câu 18. [NB] Nếu $f(x) \geq 0$ trên $[a; b]$, thì $\int_a^b f(x) dx$ biểu thị

A. độ dài đồ thị $y=f(x)$.

B. diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị, trục hoành và hai đường thẳng $x=a, x=b$.

C. hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành.

D. giá trị lớn nhất của f trên đoạn.

Lời giải

Đáp án B.

Khi $f(x) \geq 0$ trên $[a; b]$, tích phân biểu thị diện tích hình thang cong giới hạn bởi đồ thị, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$.

Vậy chọn B.

Câu 19. [VD] Biểu thức nào sau đây là cách tách đúng tích phân $\int_0^3 |x-1| dx$?

A. $\int_0^1 (x-1) dx + \int_1^3 (1-x) dx$

B. $\int_0^3 (x-1) dx$

C. $\int_0^1 (1-x) dx - \int_1^3 (x-1) dx$

D. $\int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$

Lời giải

Đáp án D.

Biểu thức $x-1$ đổi dấu tại $x=1$.

Trên $[0; 1]$: $|x-1| = 1-x$; trên $[1; 3]$: $|x-1| = x-1$.

Vì vậy

$$\int_0^3 |x-1| dx = \int_0^1 (1-x) dx + \int_1^3 (x-1) dx$$

Chọn D.

Câu 20. [VD] Biểu thức nào sau đây là cách tách đúng tích phân $\int_0^2 |2x-1| dx$?

A. $\int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1) dx$

B. $\int_0^1 (1-2x) dx + \int_1^2 (2x-1) dx$

C. $\int_0^2 (2x-1) dx$

D. $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (1-2x) dx$

Lời giải

Đáp án A.

Biểu thức $2x-1$ đổi dấu tại $x = \frac{1}{2}$.
Do đó

$$\int_0^2 |2x-1| dx = \int_0^{\frac{1}{2}} (1-2x) dx + \int_{\frac{1}{2}}^2 (2x-1) dx$$

Vậy chọn A.

Câu 21. [TH] Giá trị trung bình của hàm số f trên đoạn $[a; b]$ bằng 3 và $b-a=4$. Khi đó $\int_a^b f(x) dx$ bằng

A. 3

B. 7

C. 12

D. $\frac{1}{12}$

Lời giải

Đáp án C.

Giá trị trung bình của f trên $[a; b]$ là

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = 3$$

Vì $b-a=4$, nên

$$\int_a^b f(x) dx = 12$$

Vậy chọn C.

Câu 22. [TH] Cho F là một nguyên hàm của f trên $[1; 4]$ và $F(4) - F(1) = 9$. Giá trị trung bình của f trên đoạn này bằng

A. 9

B. 3

C. 6

D. 12

Lời giải

Đáp án B.

Ta có

$$\int_1^4 f(x) dx = F(4) - F(1) = 9$$

$$\frac{9}{3} = 3$$

Độ dài đoạn là 3, nên giá trị trung bình bằng

Vậy chọn B.

Câu 23. [VD] Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = t^2 - t - 6$ trên $[1; 4]$. Biểu thức đúng để tính tổng quãng đường vật đi được là

- A. $\int_1^4 v(t) dt$
- B. $-\int_1^4 v(t) dt$
- C. $\int_1^3 v(t) dt - \int_3^4 v(t) dt$
- D. $-\int_1^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt$

Lời giải

Đáp án D.

Ta có $v(t) = t^2 - t - 6 = (t - 3)(t + 2)$

Trên $[1; 3]$, v âm; trên $[3; 4]$, v dương.

Tổng quãng đường là $-\int_1^3 v(t) dt + \int_3^4 v(t) dt$

Vậy chọn D.

Câu 24. [VD] Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = 4 - t^2$ trên $[0; 3]$. Biểu thức đúng để tính tổng quãng đường vật đi được là

- A. $\int_0^2 (4 - t^2) dt + \int_2^3 (t^2 - 4) dt$
- B. $\int_0^3 (4 - t^2) dt$
- C. $-\int_0^2 (4 - t^2) dt + \int_2^3 (t^2 - 4) dt$
- D. $\int_0^2 (t^2 - 4) dt + \int_2^3 (4 - t^2) dt$

Lời giải

Đáp án A.

Vận tốc $v(t) = 4 - t^2$ đổi dấu tại $t = 2$ trên đoạn xét.

Do đó tổng quãng đường là $\int_0^2 (4 - t^2) dt + \int_2^3 (t^2 - 4) dt$

Vậy chọn A.

Câu 25. [VD] Một ô tô bắt đầu phanh với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), $t \geq 0$. Biểu thức nào biểu thị quãng đường xe đi thêm từ lúc phanh đến khi dừng hẳn?

- A. $\int_0^1 (-40t + 20) dt$
- B. $\int_0^2 (-40t + 20) dt$
- C. $\int_0^{\frac{1}{2}} (-40t + 20) dt$
- D. $\int_{\frac{1}{2}}^1 (-40t + 20) dt$

Lời giải**Đáp án C.**

Xe dừng khi $v(t) = 0$: $-40t + 20 = 0 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

Trước thời điểm đó vận tốc không âm, nên quãng đường đi thêm là $\int_0^{\frac{1}{2}} (-40t + 20) dt$

Vậy chọn C.

Câu 26. [VD] Lợi nhuận biên của một sản phẩm là $P'(x) = -0,0005x + 12,2$. Biểu thức biểu thị đúng sự thay đổi lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 101 đơn vị là

A. $P'(101) - P'(100)$

B. $\int_{100}^{101} P'(x) dx$

C. $P'(101)$

D. $P'(100)$

Lời giải**Đáp án B.**

Sự thay đổi lợi nhuận từ $x=100$ đến $x=101$ được tính bởi tích phân của lợi nhuận biên:

$$P(101) - P(100) = \int_{100}^{101} P'(x) dx$$

Vậy chọn B.

Câu 27. [VD] Một doanh nghiệp biết $\int_{100}^{105} P'(x) dx = 60$ và $\int_{105}^{110} P'(x) dx = 59,5$. Sự thay đổi lợi nhuận khi doanh số tăng từ 100 lên 110 đơn vị bằng

A. 0,5

B. 60

C. 59,5

D. 119,5

Lời giải**Đáp án D.**

Theo tính chất cộng khoảng: $\int_{100}^{110} P'(x) dx = 60 + 59,5 = 119,5$

Vậy chọn D.

Câu 28. [VD] Vận tốc dòng máu được mô hình hóa bởi $v = k(R^2 - r^2)$ trên $0 \leq r \leq R$. Tỉ số giữa vận tốc trung bình theo r và vận tốc lớn nhất bằng

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{3}{4}$

Lời giải**Đáp án A.**

Vận tốc lớn nhất tại $r = 0$: $v_{max} = kR^2$

Vận tốc trung bình theo r trên $[0; R]$ là $v_{tb} = \frac{1}{R} \int_0^R k(R^2 - r^2) dr = \frac{2}{3} kR^2$

$$\frac{v_{tb}}{v_{max}} = \frac{2}{3}$$

Do đó

Vậy chọn A.

Câu 29. [TH] Tìm số thực m để $\int_0^1 ((x+1)^2 - m) dx = 0$.

A. 2

B. $\frac{5}{3}$

C. $\frac{7}{3}$

D. 3

Lời giải

Đáp án C.

Ta có

Thay hai cận vào nguyên hàm, ta được $\frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} - m = \frac{7}{3} - m$

Điều kiện bằng 0 cho $m = \frac{7}{3}$

Vậy chọn C.

Câu 30. [TH] Tìm số thực λ để $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{\lambda}{\cos^2 x} - 2 \right) dx = 0$.

A. $\frac{\pi}{4}$

B. $\frac{\pi}{2}$

C. 1

D. 2

Lời giải

Đáp án B.

Ta hiểu biểu thức dưới dấu tích phân là $\frac{\lambda}{\cos^2 x} - 2$.

Phân tích phân chứa λ có giá trị $\lambda \left(\tan \frac{\pi}{4} - \tan 0 \right) = \lambda$
Còn

Phần còn lại có giá trị $\frac{\pi}{2}$

Điều kiện tích phân bằng 0 cho

$$\lambda = \frac{\pi}{2}$$

Vậy chọn B.

II. CÂU ĐÚNG - SAI

Câu 31. [NB] Xét định nghĩa và quy ước của tích phân.

- a) Nếu F là một nguyên hàm của f trên $[a; b]$, thì $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.
- b) $\int_a^a f(x) dx = 0$.
- c) $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.
- d) Giá trị tích phân phụ thuộc vào chữ dùng làm biến lấy tích phân.

Lời giải

- a) Đúng. Đây là công thức Newton-Leibniz.
- b) Đúng. Tích phân có hai cận trùng nhau bằng 0.
- c) Đúng. Đổi thứ tự hai cận thì tích phân đổi dấu.
- d) Sai. Giá trị tích phân không phụ thuộc vào tên biến lấy tích phân.

Câu 32. [TH] Cho F là một nguyên hàm của f trên $[-1; 2]$ với $F(-1) = 2$ và $F(2) = 5$.

- a) $\int_{-1}^2 f(x) dx = 3$.
- b) $\int_2^{-1} f(x) dx = -3$.
- c) $\int_{-1}^2 2f(x) dx = 6$.
- d) $\int_{-1}^2 f(x) dx = 7$.

Lời giải

- a) Đúng. $\int_{-1}^2 f(x) dx = F(2) - F(-1) = 5 - 2 = 3$.
- b) Đúng. Đổi cận được giá trị -3.
- c) Đúng. $\int_{-1}^2 2f(x) dx = 2 \cdot 3 = 6$.
- d) Sai. Giá trị tích phân là 3, không phải 7.

Câu 33. [TH] Xét hình phẳng giới hạn bởi $y = 2x + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

- a) Hàm số $2x + 1$ không âm trên $[0; 2]$.
- b) Diện tích hình phẳng bằng $\int_0^2 (2x + 1) dx$.
- c) Diện tích hình phẳng bằng 6.
- d) Diện tích hình phẳng bằng 4.

Lời giải

- a) Đúng. Trên $[0; 2]$, $2x + 1 \geq 1 > 0$.
- b) Đúng. Hàm không âm nên diện tích bằng tích phân của hàm trên đoạn.
- c) Đúng. $\int_0^2 (2x + 1) dx = (x^2 + x) \Big|_0^2 = 6$.
- d) Sai. Diện tích là 6, không phải 4.

Câu 34. [TH] Xét nửa đường tròn phía trên trục hoành có phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$.

a) Bán kính đường tròn bằng 3.

b) $\int_{-3}^3 \sqrt{9 - x^2} dx$ bằng diện tích nửa hình tròn.

c) Giá trị tích phân bằng $\frac{9\pi}{2}$.

d) Giá trị tích phân bằng 9π .

Lời giải

a) Đúng. Phương trình $y = \sqrt{9 - x^2}$ mô tả nửa đường tròn bán kính 3.

b) Đúng. Tích phân từ -3 đến 3 bằng diện tích nửa hình tròn phía trên trục hoành.

c) Đúng. Diện tích nửa hình tròn là $\frac{\pi \cdot 3^2}{2} = \frac{9\pi}{2}$.

d) Sai. 9π là diện tích cả hình tròn.

Câu 35. [TH] Xét tích phân $\int_0^4 |x - 2| dx$.

a) Cần tách khoảng tại $x = 2$.

b) Trên $[0; 2]$, ta có $|x - 2| = 2 - x$.

c) $\int_0^4 |x - 2| dx = \int_0^2 (2 - x) dx + \int_2^4 (x - 2) dx$.

d) $\int_0^4 |x - 2| dx = \int_0^4 (x - 2) dx$.

Lời giải

a) Đúng. Biểu thức trong giá trị tuyệt đối đổi dấu tại $x = 2$.

b) Đúng. Trên $[0; 2]$, $|x - 2| = 2 - x$.

c) Đúng. Trên $[2; 4]$, $|x - 2| = x - 2$, nên cách tách đã cho là đúng.

d) Sai. Không thể bỏ dấu giá trị tuyệt đối trên toàn đoạn vì $x - 2$ đổi dấu.

Câu 36. [TH] Nhiệt độ được mô hình hóa bởi $T(t) = 20 + 1,5(t - 6)$ trong khoảng $6 \leq t \leq 12$.

a) Nhiệt độ tại thời điểm 6 giờ là 20.

b) Nhiệt độ tại thời điểm 12 giờ là 29.

c) Nhiệt độ trung bình trong khoảng thời gian này là 24,5.

d) Nhiệt độ trung bình bằng 29.

Lời giải

a) Đúng. $T(6) = 20$.

b) Đúng. $T(12) = 20 + 1,5 \cdot 6 = 29$.

c) Đúng. Vì hàm bậc nhất, nhiệt độ trung bình trên đoạn bằng trung bình hai đầu mút: $\frac{20 + 29}{2} = 24,5$.

d) Sai. 29 là nhiệt độ lúc 12 giờ, không phải nhiệt độ trung bình.

Câu 37. [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_1^4 f(x) dx = 7$.

- a) $\int_0^4 f(x) dx = 9$
- b) $\int_{-4}^0 f(x) dx = -9$
- c) $\int_0^4 2f(x) dx = 18$
- d) $\int_0^4 f(x) dx = 5$

Lời giải

- a) Đúng. $\int_0^4 f(x) dx = 2 + 7 = 9$
- b) Đúng. Đổi cận được -9.
- c) Đúng. Đưa 2 ra ngoài được $2 \cdot 9 = 18$.
- d) Sai. Giá trị đúng là 9.

Câu 38. [VD] Một vật chuyển động với vận tốc $v(t) = t - 2$ trên $0 \leq t \leq 4$.

- a) Vận tốc đổi dấu tại $t = 2$.
- b) Độ dịch chuyển trong 4 giây bằng 0.
- c) Tổng quãng đường đi được bằng 4.
- d) Tổng quãng đường bằng độ dịch chuyển.

Lời giải

- a) Đúng. $v(t) = t - 2 = 0$ tại $t = 2$.
- b) Đúng. $\int_0^4 (t - 2) dt = 0$, nên độ dịch chuyển bằng 0.
- c) Đúng. Tổng quãng đường là $-\int_0^2 (t - 2) dt + \int_2^4 (t - 2) dt = 2 + 2 = 4$
- d) Sai. Quãng đường là 4 còn độ dịch chuyển là 0.

Câu 39. [VD] Lợi nhuận biên được cho bởi $P'(x) = 10 - 0,1x$ và xét sự thay đổi lợi nhuận khi x tăng từ 0 đến 20.

- a) Sự thay đổi lợi nhuận được tính bởi $\int_0^{20} (10 - 0,1x) dx$
- b) Sự thay đổi lợi nhuận bằng 180.
- c) Hàm lợi nhuận tăng trên đoạn đang xét vì $P'(x) > 0$ với $0 \leq x \leq 20$.
- d) Sự thay đổi lợi nhuận bằng 200.

Lời giải

- a) Đúng. Sự thay đổi lợi nhuận bằng tích phân của lợi nhuận biên.
- b) Đúng. $\int_0^{20} (10 - 0,1x) dx = (10x - 0,05x^2) \Big|_0^{20} = 180$
- c) Đúng. Trên $[0; 20]$, $10 - 0,1x \geq 8 > 0$, nên lợi nhuận tăng.
- d) Sai. Sự thay đổi lợi nhuận là 180.

Câu 40. [VD] Một ô tô có vận tốc $v(t) = 12 - 3t$ kể từ lúc bắt đầu phanh, với $0 \leq t \leq 4$.

- a) Ô tô dừng lại tại $t = 4$.
- b) Quãng đường đi thêm đến khi dừng bằng 24.
- c) Vận tốc trung bình trên khoảng $[0; 4]$ bằng 6.
- d) Quãng đường đi thêm bằng 48.

Lời giải

a) Đúng. $12 - 3t = 0 \Rightarrow t = 4$.

b) Đúng. Vận tốc không âm trên $[0; 4]$, nên quãng đường là

$$\int_0^4 (12 - 3t) dt = \left(12t - \frac{3}{2}t^2 \right) \Big|_0^4 = 24$$

$$\frac{1}{4} 24 = 6$$

c) Đúng. Vận tốc trung bình là $\frac{1}{4} 24 = 6$.

d) Sai. Quãng đường bằng 24, không phải 48.

III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 41. [NB] Biết $\int_0^2 f(x) dx = 5$. Tính $\int_2^0 f(x) dx$.

Lời giải

Đổi cận: $\int_2^0 f(x) dx = -5$

Đáp án: -5.

Câu 42. [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$ và $\int_0^1 (f(x) + g(x)) dx = 5$. Tính $\int_0^1 g(x) dx$.

Lời giải

Từ tính chất tích phân của tổng: $5 = 2 + \int_0^1 g(x) dx$

$$\Rightarrow \int_0^1 g(x) dx = 3$$

Đáp án: 3.

Câu 43. [TH] Cho F là một nguyên hàm của f và $F(3) - F(1) = 7$. Tính $\int_1^3 f(x) dx$.

Lời giải

Theo Newton-Leibniz: $\int_1^3 f(x) dx = F(3) - F(1) = 7$

Đáp án: 7.

Câu 44. [TH] Biết $\int_0^1 f(x) dx = 2$. Tìm a để $\int_0^1 (af(x) + 1) dx = 7$.

Lời giải

Ta có

$$\int_0^1 (af(x) + 1) dx = 2a + 1$$

Điều kiện đề bài: $2a + 1 = 7 \Rightarrow a = 3$

Đáp án: 3.

Câu 45. [TH] Giá trị trung bình của hàm số f trên đoạn $[2; 6]$ bằng 5. Tính $\int_2^6 f(x) dx$.

Lời giải

Giá trị trung bình trên đoạn $[2; 6]$ là $\frac{1}{6-2} \int_2^6 f(x) dx = 5$

Suy ra

$$\int_2^6 f(x) dx = 20$$

Đáp án: 20.

Câu 46. [TH] Để tính $\int_0^3 |2x-1| dx$, cần tách khoảng tại $x=a$. Tìm a.

Lời giải

Biểu thức $2x-1$ đổi dấu khi $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

Do đó $a=\frac{1}{2}$.

Đáp án: 0,5.

Câu 47. [TH] Với $R > 0$, biết $\int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx = 8\pi$. Tìm R.

Lời giải

Tích phân bằng diện tích nửa hình tròn bán kính R: $\frac{\pi R^2}{2} = 8\pi$

$$R^2 = 16 \Rightarrow R = 4$$

Đáp án: 4.

Câu 48. [VD] Một vật có vận tốc đổi dấu tại $t=2$. Biết $\int_0^2 v(t) dt = -3$ và $\int_2^5 v(t) dt = 7$. Tính tổng quãng đường vật đi được trên $[0; 5]$.

Lời giải

Vì vận tốc đổi dấu tại $t=2$, tổng quãng đường là tổng trị tuyệt đối của hai độ dịch chuyển:

$$S = |-3| + |7| = 10$$

Đáp án: 10.

Câu 49. [VD] Lợi nhuận biên trung bình trên đoạn doanh số từ 10 đến 20 đơn vị bằng 17. Tính sự thay đổi lợi nhuận trên đoạn doanh số đó.

Lời giải

Độ dài đoạn doanh số là $20-10=10$. Giá trị trung bình của lợi nhuận biên bằng 17 nên

$$\int_{10}^{20} P'(x) dx = 17 \cdot 10 = 170$$

Đáp án: 170.

Câu 50. [VD] Vận tốc dòng máu có dạng $v = k(R^2 - r^2)$. Nếu vận tốc lớn nhất bằng 12 thì vận tốc trung bình theo r trên $[0; R]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Theo kết quả tính tỉ số của mô hình này: $v_{tb} = \frac{2}{3} v_{max}$

Với $v_{max} = 12$: $v_{tb} = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$

Đáp án: 8.