

CÁC DẠNG BÀI TẬP BÀI GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC**CỦA MỘT GÓC TỪ 0° ĐẾN 180°** **Dạng 1: Tính các giá trị của biểu thức lượng giác****Phương pháp:**

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN**Bài tập 1:** Không dùng bảng số hay máy tính cầm tay, tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $(2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ$

Lời giải

a) $(2\sin 30^\circ + \cos 135^\circ - 3\tan 150^\circ)(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$

$$= (2\sin 30^\circ + \cos(180^\circ - 45^\circ) - 3\tan(180^\circ - 30^\circ))(\cos 180^\circ - \cot 60^\circ)$$

$$= (2\sin 30^\circ - \cos 45^\circ + 3\tan 30^\circ)(-1 - \cot 60^\circ) = \left(2 \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \left(-1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= -\frac{(2 - \sqrt{2} + 2\sqrt{3})(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}}$$

b) $\sin^2 90^\circ + \cos^2 120^\circ + \cos^2 0^\circ - \tan^2 60^\circ + \cot^2 135^\circ$

$$= (\sin 90^\circ)^2 + (\cos 120^\circ)^2 + (\cos 0^\circ)^2 - (\tan 60^\circ)^2 + (\cot 135^\circ)^2$$

$$= 1 + (\cos(180^\circ - 60^\circ))^2 + 1 - (\sqrt{3})^2 + (\cot(180^\circ - 45^\circ))^2$$

$$= 1 + (\cos 60^\circ)^2 + 1 - (\sqrt{3})^2 + (\cot 45^\circ)^2 = \frac{1}{4}$$

c) $\cos 60^\circ \cdot \sin 30^\circ + \cos^2 30^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + (\cos 30^\circ)^2 = 1$

Bài tập 2: Tính giá trị các biểu thức sau:

a) $A = \tan 30^\circ + \cot 30^\circ$

b) $B = \sin^2 45^\circ - 2\sin^2 50^\circ + 3\cos^2 45^\circ - 2\sin^2 40^\circ + 4\tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

c) $C = \cos 0^\circ + \cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \dots + \cos 160^\circ + \cos 180^\circ$

- d) $D = \tan 5^\circ \tan 10^\circ \tan 15^\circ \dots \tan 80^\circ \tan 85^\circ$
- e) $E = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$
- f) $F = \sin^2 3^\circ + \sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ + \sin^2 87^\circ$
- g) $G = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$
- h) $H = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ$
- i) $I = \cos^2 73^\circ + \cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ + \cos^2 17^\circ$
- j) $J = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \tan 58^\circ + \frac{5 \tan^2 18^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$
- k) $K = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \cos^2 17^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$

Lời giải

$$\tan 30^\circ + \cot 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} + \sqrt{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

a) Ta có

b) $B = \sin^2 45^\circ - 2 \sin^2 50^\circ + 3 \cos^2 45^\circ - 2 \sin^2 40^\circ + 4 \tan 55^\circ \cdot \tan 35^\circ$

$$B = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 - 2 (\sin^2 50^\circ + \cos^2 40^\circ) + 4 = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2 + 4 = 4$$

c) $C = (\cos 0^\circ + \cos 180^\circ) + (\cos 20^\circ + \cos 160^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ + \cos 100^\circ)$
 $= (\cos 0^\circ - \cos 0^\circ) + (\cos 20^\circ - \cos 20^\circ) + \dots + (\cos 80^\circ - \cos 80^\circ) = 0$

d) $D = (\tan 5^\circ \tan 85^\circ) (\tan 15^\circ \tan 75^\circ) \dots (\tan 45^\circ \tan 45^\circ)$
 $= (\tan 5^\circ \cot 5^\circ) (\tan 15^\circ \cot 15^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cot 45^\circ) = 1$

e) Ta có $E = \sin^2 2^\circ + \sin^2 4^\circ + \sin^2 6^\circ + \dots + \sin^2 84^\circ + \sin^2 86^\circ + \sin^2 88^\circ$
 $= (\sin^2 2^\circ + \sin^2 88^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \sin^2 86^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \sin^2 46^\circ)$
 $= (\sin^2 2^\circ + \cos^2 2^\circ) + (\sin^2 4^\circ + \cos^2 4^\circ) + \dots + (\sin^2 44^\circ + \cos^2 44^\circ) = 22$

f) Ta có $F = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \sin^2 75^\circ)$
 $= (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ) = 1 + 1 = 2$

g) Ta có $G = 3 - \sin^2 90^\circ + 2 \cos^2 60^\circ - 3 \tan^2 45^\circ$
 $= 3 - (1)^2 + 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1$

h) $H = a^2 \sin 90^\circ + b^2 \cos 90^\circ + c^2 \cos 180^\circ = a^2 \cdot 1 + b^2 \cdot 0 + c^2 \cdot (-1) = a^2 - c^2$

$$\begin{aligned} \text{i) } I &= (\cos^2 73^\circ + \cos^2 17^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \cos^2 3^\circ) \\ &= (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) + (\cos^2 87^\circ + \sin^2 87^\circ) = 2 \end{aligned}$$

$$\text{j) Ta có: } J = 4 \tan 32^\circ \cdot \cos 0^\circ \cdot \tan 58^\circ + \frac{5 \tan^2 18^\circ}{1 + \tan^2 18^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ$$

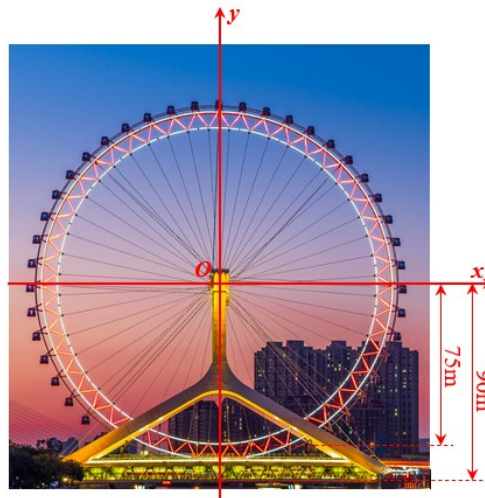
$$\begin{aligned} &= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + \frac{5 \cot^2 72^\circ}{1 + \cot^2 72^\circ} + 5 \sin^2 72^\circ \\ &= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + 5 \cot^2 72^\circ \cdot \sin^2 72^\circ + 5 \sin^2 72^\circ \\ &= 4 \tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ \cdot \cos 0^\circ + 5 \sin^2 72^\circ \cdot (\cot^2 72^\circ + 1) \\ &= 4 (\tan 32^\circ \cdot \cot 32^\circ) \cdot \cos 0^\circ + 5 \sin^2 72^\circ \cdot \frac{1}{\sin^2 72^\circ} = 4 \cdot 1 \cdot 1 + 5 = 9 \end{aligned}$$

$$\text{k) Ta có: } K = \frac{12}{1 + \tan^2 73^\circ} - 4 \tan 75^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \cos^2 17^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \tan 50^\circ$$

$$= 12 \cdot \cos^2 73^\circ - 4 \cot 15^\circ \cdot \tan 15^\circ + 12 \sin^2 73^\circ - 2 \tan 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cot 40^\circ$$

$$= 12 \cdot (\cos^2 73^\circ + \sin^2 73^\circ) - 4 \cot 15^\circ \cdot \tan 15^\circ - 2 (\tan 40^\circ \cdot \cot 40^\circ) \cdot \cos 60^\circ = 12 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = 7$$

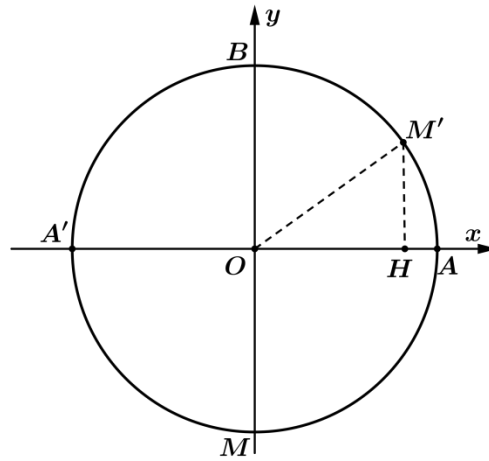
Bài tập 3: Một chiếc đu quay có bán kính 75m, tâm của vòng quay ở độ cao 90m như hình vẽ dưới đây. Thời gian thực hiện mỗi vòng quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay thì sau 20 phút quay người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Lời giải

Giả sử chiếc đu quay quay theo chiều kim đồng hồ.

Gọi M là vị trí thấp nhất của cabin, M' là vị trí của cabin sau 20 phút và các điểm A, A', B, H (như hình vẽ).



Vì đi cả vòng quay mất 30 phút nên sau 20 phút, cabin sẽ đi quãng đường bằng chu vi đường tròn.

Sau 15 phút, cabin di chuyển từ điểm M đến điểm B , đi được chu vi đường tròn.

Trong 5 phút tiếp theo, cabin di chuyển từ điểm B đến điểm M' tương ứng chu vi đường tròn hay cung tròn.

Do đó $\widehat{BOM'} = \frac{1}{3} \cdot 180^\circ = 60^\circ \Rightarrow \widehat{AOM'} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$

Ta có: $M'H = \sin 30^\circ \cdot OM' = \frac{1}{2} \cdot 75 = 37,5$ (mét)

Do đó độ cao của người đó là: $37,5 + 90 = 127,5$ (m)

Vậy sau 20 phút quay người đó ở độ cao 127,5 m.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây **sai**?

A. $\sin 45^\circ + \sin 45^\circ = \sqrt{2}$

B. $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ = 1$

C. $\sin 60^\circ + \cos 150^\circ = 0$

D. $\sin 120^\circ + \cos 30^\circ = 0$

Lời giải

Áp dụng bảng giá trị lượng giác của góc đặc biệt.

Câu 2: Tính giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3} \sin 150^\circ + \cos 135^\circ - \sin 120^\circ$ ta được

A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\sqrt{2}$

C. $-\sqrt{2}$

D. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

Ta có $P = \sqrt{3} \sin 150^\circ + \cos 135^\circ - \sin 120^\circ = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Câu 3: Giá trị của biểu thức $A = \tan 1^\circ \tan 2^\circ \tan 3^\circ \dots \tan 88^\circ \tan 89^\circ$ là

A. 0

B. 2

C. 3

D. 1

$$A = (\tan 1^\circ \cdot \tan 89^\circ) \cdot (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ) \dots (\tan 44^\circ \cdot \tan 46^\circ) \cdot \tan 45^\circ = 1$$

Câu 4: Tổng $\sin^2 3^\circ + \sin^2 5^\circ + \sin^2 7^\circ + \dots + \sin^2 83^\circ + \sin^2 85^\circ + \sin^2 87^\circ$ bằng

- A. 21. B. 23. C. 22. D. 24.

Lời giải

$$S = (\sin^2 3^\circ + \sin^2 87^\circ) + (\sin^2 5^\circ + \sin^2 85^\circ) + \dots + (\sin^2 45^\circ + \sin^2 45^\circ)$$

$$S = (\sin^2 3^\circ + \cos^2 3^\circ) + (\sin^2 5^\circ + \cos^2 5^\circ) + \dots + (\sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ) = 22$$

Câu 5: Giá trị của biểu thức $A = \sin^2 51^\circ + \sin^2 55^\circ + \sin^2 39^\circ + \sin^2 35^\circ$ là

- A. 3. B. 4. C. 1. D. 2.

Lời giải

$$A = (\sin^2 51^\circ + \sin^2 39^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \sin^2 35^\circ) = (\sin^2 51^\circ + \cos^2 51^\circ) + (\sin^2 55^\circ + \cos^2 55^\circ) = 2$$

Câu 6: Giá trị của $E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin 126^\circ \cos 84^\circ$ là

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. 1. D. -1.

Lời giải

$$E = \sin 36^\circ \cos 6^\circ \sin(90^\circ + 36^\circ) \cos(90^\circ - 6^\circ) = \sin 36^\circ \cos 6^\circ - \cos 36^\circ \sin 6^\circ = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

Câu 7: Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 x} + 3 - 2 \tan^2 x$ bằng

- A. 1. B. 3. C. 5. D. 2.

Lời giải

Ta có $P = \frac{2}{\cos^2 x} + 3 - 2 \tan^2 x = 2(1 + \tan^2 x) + 3 - 2 \tan^2 x = 5$

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0$$

Câu 9: Biểu thức: $f(x) = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$ có giá trị bằng

- A. 1. B. 2. C. -2. D. -1.

Lời giải

$$f(x) = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Câu 10: Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin x \cos x$ bằng

A. $-\frac{5}{18}$.

B. $-\frac{5}{9}$.

C. $\frac{5}{18}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$

$$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{5}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}.$$

Câu 11: Cho $\tan x - \cot x = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x + \cot^2 x$ bằng

A. 0.

B. 4.

C. 6.

D. 2.

Lời giải

Ta có $P = \tan^2 x + \cot^2 x = (\tan x - \cot x)^2 + 2 \tan x \cot x = 4 + 2 = 6$.

Câu 12: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x - \sin^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1$ bằng

A. 0.

B. 1.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Ta có $P = \tan^2 x - \sin^2 x + \sin^2 x \tan^2 x + 1 = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1$

$$= \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) - \sin^2 x \tan^2 x + 1 = \sin^2 x \tan^2 x - \sin^2 x \tan^2 x + 1 = 1$$

Câu 13: Biểu thức $\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$ không phụ thuộc vào a và có giá trị bằng

A. 6.

B. 5.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Ta có $\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a = \sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right) + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$

$$= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \sin^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a = 3 \sin^2 a + 3 \cos^2 a = 3$$

Câu 14: Cho $H = \cos(x + 60^\circ) - 5 \cos(120^\circ - x) - 6 \sin(x + 60^\circ) \cdot \cot(x + 60^\circ)$ ($0^\circ \leq x \leq 90^\circ$). Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $H = -1$.

B. $H = \frac{1}{3}$.

C. $H = \frac{\pi}{3}$.

D. $H = 0$.

Lời giải

Ta có: $H = \cos(x + 60^\circ) - 5 \cos(120^\circ - x) - 6 \sin(x + 60^\circ) \cdot \cot(x + 60^\circ)$

$$= \cos(x + 60^\circ) + 5 \cos(180^\circ - 120^\circ + x) - 6 \sin(x + 60^\circ) \cdot \cot(x + 60^\circ)$$

$$= \cos(x + 60^\circ) + 5\cos(60^\circ + x) - 6\cos(x + 60^\circ) = 0$$

Câu 15: Cho $D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

A. $D = 0$.

B. $D = 8$.

C. $D = 2022$.

D. $D = 18$.

Lời giải

Công thức áp dụng: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha \Rightarrow \cos 80^\circ = \sin 10^\circ, \cos 70^\circ = \sin 20^\circ, \cos 60^\circ = \sin 30^\circ, \cos 50^\circ = \sin 40^\circ$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha \Rightarrow \cos 170^\circ = -\cos 10^\circ, \cos 160^\circ = -\cos 20^\circ, \dots, \cos 100^\circ = -\cos 80^\circ$$

Ta có: $D = \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \dots + \cos^2 180^\circ$

$$= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 100^\circ + \dots + \cos^2 160^\circ + \cos^2 170^\circ + \cos^2 180^\circ$$

$$= \cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ + \cos^2 90^\circ + \cos^2 80^\circ + \dots + \cos^2 20^\circ + \cos^2 10^\circ + 1$$

$$= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \dots + \cos^2 80^\circ) + \cos^2 90^\circ + 1$$

$$= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \cos^2 50^\circ + \cos^2 60^\circ + \cos^2 70^\circ + \cos^2 80^\circ) + 0 + 1$$

$$= 2(\cos^2 10^\circ + \cos^2 20^\circ + \cos^2 30^\circ + \cos^2 40^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 30^\circ + \sin^2 20^\circ + \sin^2 10^\circ) + 1$$

$$= 2(\sin^2 10^\circ + \cos^2 10^\circ + \sin^2 20^\circ + \cos^2 20^\circ + \sin^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ + \sin^2 40^\circ + \cos^2 40^\circ) + 1$$

$$= 2(1 + 1 + 1 + 1) + 1 = 9$$

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $A = \tan 2^\circ \tan 3^\circ \tan 4^\circ \dots \tan 87^\circ \tan 88^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Góc có số đo 2° và góc có số đo 88° là hai góc phụ nhau.

b) Biểu thức A được đưa về dạng

$$A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$$

c) Ta có $\tan 88^\circ = \cot 2^\circ$.

d) Giá trị của biểu thức A bằng 2.

Lời giải

a) Đúng: Ta có: $2^\circ + 88^\circ = 90^\circ$ nên góc có số đo 2° và góc có số đo 88° là hai góc phụ nhau

b) Đúng: Ta có $A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$

c) Đúng: Vì $\tan 88^\circ = \tan(90^\circ - 2^\circ) = \cot 2^\circ$

d) Sai: Ta có $A = (\tan 2^\circ \cdot \tan 88^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \tan 87^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \tan 86^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \tan 45^\circ)$

$$= A = (\tan 2^\circ \cdot \cot 2^\circ)(\tan 3^\circ \cdot \cot 3^\circ)(\tan 4^\circ \cdot \cot 4^\circ) \dots (\tan 45^\circ \cdot \cot 45^\circ) = 1$$

Câu 2: Cho $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$. Xét biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi góc a, b ta luôn có $\sin^2 a + \cos^2 b = 1$.
- b) Biểu thức $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ được viết lại $2 \sin a \cos a = 1$
- c) Biểu thức $P = \sin^4 a + \cos^4 a$ được viết lại $P = 1 - 2 \sin a \cos a$
- d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

- a) Sai: Với mọi góc a ta luôn có $\sin^2 a + \cos^2 a = 1$.
- b) Đúng: Ta có $\sin a + \cos a = \sqrt{2} \Rightarrow (\sin a + \cos a)^2 = 2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin a \cos a = 2 \Leftrightarrow 2 \sin a \cos a = 1$
- c) Sai: Ta có $P = \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$
- d) Đúng: Từ $\sin a + \cos a = \sqrt{2}$ ta có $\sin a \cos a = \frac{1}{2} (1)$
 lại có $P = \sin^4 a + \cos^4 a = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x (2)$
 Từ (1), (2) ta có $P = \frac{1}{2}$

Câu 3: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = m$ và biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi góc α ta luôn có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$.
- b) Với mọi góc α ta luôn có $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = \tan^2 \alpha \cdot \cot^2 \alpha$.
- c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2$.
- d) Biểu thức $P = 7$ khi và chỉ khi $m = \pm 3$.

Lời giải

- a) Đúng: Ta có $\tan \alpha \cdot \cot \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \cdot \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 1$
- b) Sai: Với mọi góc α ta luôn có $\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha \neq \tan^2 \alpha \cot^2 \alpha$.
- c) Đúng: $P = \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha \cot \alpha + \cot^2 \alpha - 2 = (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2$
- d) Đúng: Khi $P = 7 \Rightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 - 2 = 7 \Rightarrow m^2 = 9 \Leftrightarrow m = \pm 3$.

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = \sin x \cdot \cos x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$
- b) $2M = (\sin x + \cos x)^2 - 1$
- c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$.
- d) Khi $M = \frac{1}{4}$ thì $m = \frac{3}{4}$.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

b) Đúng: Ta có $2M = 2\sin x \cdot \cos x \Leftrightarrow 2M = 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha - 1 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$

c) Sai: Từ $\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2$

d) Sai: Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2\sin \alpha \cos \alpha = m^2 \Rightarrow m^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Tính giá trị của biểu thức: $P = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x$

Lời giải

Ta có $P = \cos^4 x + \cos^2 x \sin^2 x + \sin^2 x = \cos^2 x (\cos^2 x + \sin^2 x) + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$

Câu 2: Giá trị của biểu thức $P = 5(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4\sin^2 x \cos^2 x$ bằng

Lời giải

Ta có $P = 5(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x) + 4\sin^2 x \cos^2 x$
 $= 5[1^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x] - 2[1^3 - 3\sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)] + 4\sin^2 x \cos^2 x$
 $= 5(1 - 2\sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3\sin^2 x \cos^2 x) + 4\sin^2 x \cos^2 x = 5 - 2 = 3$

Câu 3: Cho $\tan \alpha - \cot \alpha = 2$. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha} + (\tan \alpha + \cot \alpha)^2$

Lời giải

$P = \frac{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}{\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$
 $= 1 + \tan^2 \alpha + 1 + \cot^2 \alpha + \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2 = 4 + 2(\tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha)$
 $= 4 + 2[(\tan \alpha - \cot \alpha)^2 + 2] = 16$

Câu 4: Cho các góc α, β thỏa mãn $0^\circ < \alpha, \beta < 180^\circ$ và $\alpha + \beta = 90^\circ$. Tính giá trị của biểu thức $T = \sin^6 \alpha + \sin^6 \beta + 3\sin^2 \alpha \sin^2 \beta$

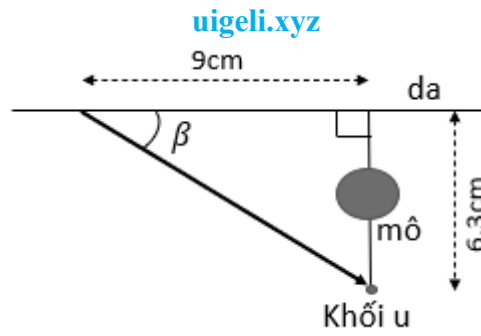
Lời giải

Ta có: $\alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \sin \beta = \cos \alpha$. Mà $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$ nên
 $= \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha)^3 + (\cos^2 \alpha)^3 + 3\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)$
 $= (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 = 1$. Vậy $T = 1$.

Câu 5: Xạ phẫu Gamma Knife là phương pháp điều trị u não (không cần mở hộp sọ) bằng cách sử dụng bức xạ gamma tập trung, hội tụ chính xác vào tổn thương, không làm hại mô lành. Nếu khối u của bệnh nhân cách mặt da $6,3$ cm, bác sĩ đặt nguồn tia cách khối u 9 cm để tránh làm tổn thương mô thì góc tạo bởi chùm tia với mặt da là β . Tính giá trị của biểu thức $P = \tan \beta$

Lời giải

Từ đề bài ta có hình vẽ sau:



Gọi β là góc tạo bởi chùm tia với mặt da. Ta có: $\tan \beta = \frac{6,3}{9} = \frac{7}{10}$.

Câu 6: Cho $\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \tan^n x$ và $\sin x + \cos x = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức $P = \sin^n x + \cos^n x$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

$$\frac{\tan^2 x - \sin^2 x}{\cot^2 x - \cos^2 x} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right)}{\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} \right)}{\cos^2 x \left(\frac{1 - \sin^2 x}{\sin^2 x} \right)} = \frac{\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}}{\frac{\cos^4 x}{\sin^2 x}}$$

Ta có

$$= \frac{\sin^4 x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \tan^6 x \Rightarrow \tan^n x = \tan^6 x \Rightarrow n = 6$$

$$\text{Với } n = 6 \Rightarrow P = \sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$\Leftrightarrow P = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \sin x + \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \sin x \cos x = -\frac{4}{9} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) ta có } P = 1 - 3 \cdot \frac{16}{81} = \frac{11}{27} \approx 0,41$$

Câu 7: Giồng nước (cồn nước) được biết đến là một công cụ đặc lực trong sản xuất nông nghiệp của bà con dân tộc Thái ở nước ta.

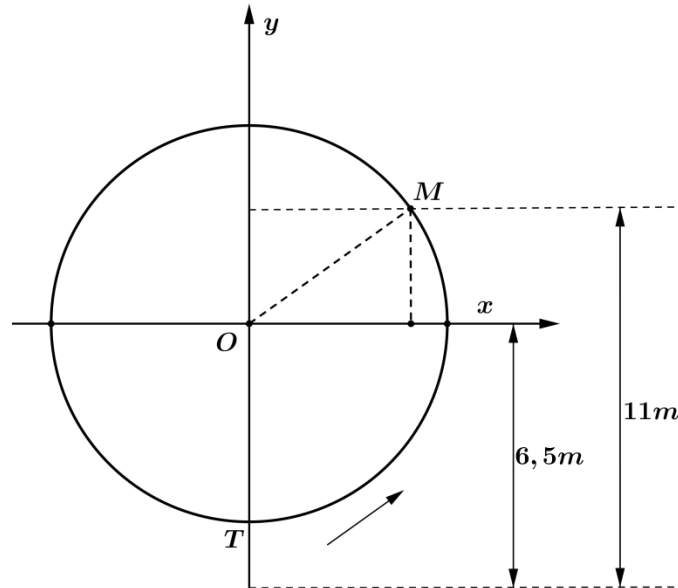


Chiếc giồng được cấu tạo giống như bánh xe đạp, có đường kính 10 m. Tâm quay ở độ cao 6,5 m. Nan hoa làm bằng loại tre già, có sức chịu đựng trong môi trường ẩm ướt. Vành giồng rộng

50cm, được đặt các phen nửa để cân nước, tạo lực đẩy guồng quay và có gắn các ống bương (lùng) buộc chéo khoảng 30° để mức đầy nước khi chìm xuống. Lực đẩy của nước khiến guồng quay liên tục, đến tầm cao nhất định, thì các ống bương bắt đầu đổ nước vào các máng dài. Biết thời gian cọn nước thực hiện 1 vòng quay là 3 phút. Máng nước cao 11m. Nếu một ống bương đang ở vị trí thấp nhất thì thời gian nó di chuyển đến vị trí máng nước là

Lời giải

Gọi vị trí thấp nhất của ống bương là T , M là vị trí của máng nước (như hình vẽ)



Tung độ của điểm M là $y_M = 11 - 6,5 = 4,5 \Rightarrow \sin \angle xOM = \frac{y_M}{OM} = \frac{4,5}{5} = 0,9 \Rightarrow \angle xOM \approx 64^\circ$

Ta có: $\angle TOM = \angle TOx + \angle xOM = 90^\circ + 64^\circ = 154^\circ$.

Vì thời gian cọn nước thực hiện 1 vòng quay là 3 phút nên thời gian ống bương di chuyển từ T đến M là $\frac{3 \cdot 154}{360} = \frac{77}{60}$ (phút).

Dạng 2: Cho một giá trị lượng giác. Tính các giá trị còn lại

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

- a) Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Tính $\cos \alpha$

b) Cho biết $\cos \alpha = -\frac{2}{3}$. Tính $\tan \alpha$

c) Cho α là góc tù và $\sin \alpha = \frac{5}{13}$. Tính giá trị của biểu thức $3\sin \alpha + 2\cos \alpha$

Lời giải

a) Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2 = \frac{8}{9}$ mà $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ nên $\cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

b) Ta có: $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{144}{169} \Rightarrow \cos \alpha = \pm \frac{12}{13}$

Do α là góc tù nên $\cos \alpha < 0$, từ đó $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$

Như vậy $3\sin \alpha + 2\cos \alpha = 3 \cdot \frac{5}{13} + 2 \left(-\frac{12}{13}\right) = -\frac{9}{13}$.

c) Do $\cos \alpha < 0 \Rightarrow \tan \alpha < 0$.

Ta có: $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \tan^2 \alpha = \frac{5}{4} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

Bài tập 2: Thực hiện các yêu cầu trong các trường hợp sau:

a) Biết $\cot \alpha = -a$, $a > 0$. Tính $\cos \alpha$

b) Cho $\cos x = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x$

c) Cho $\cot \alpha = 5$. Tính giá trị của $P = 2\cos^2 \alpha + 5\sin \alpha \cos \alpha + 1$

d) Cho $\sin x + \cos x = \frac{1}{5}$. Tính $\sin x$, $\cos x$, $\tan x$, $\cot x$.

Lời giải

a) Do $\cot \alpha = -a$, $a > 0$ nên $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ suy ra $\cos \alpha < 0$.

Mặt khác, $\tan \alpha = \frac{1}{\cot \alpha} \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{-1}{a}$.

Mà ta lại có $1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{a^2}{1 + a^2}$.

Khi đó $\cos \alpha = -\frac{|a|}{\sqrt{1 + a^2}}$ và do $a > 0$ nên $\cos \alpha = -\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$.

b) Ta có: $P = 3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 3(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 3 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{13}{4}$.

$$P = \sin^2 \alpha \left(2 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + \frac{1}{\sin^2 \alpha} \right) = \frac{1}{1 + \cot^2 \alpha} (3 \cot^2 \alpha + 5 \cot \alpha + 1) = \frac{101}{26}$$

c) Ta có

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} - \cos x.$$

Ta có Thay vào phương trình $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ta được:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{5} - \cos x \right)^2 + \cos^2 x = 1 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x - \frac{2}{5} \cos x - \frac{24}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{4}{5} \\ \cos x = -\frac{3}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } \cos x = \frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}, \quad \text{Khi đó } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-3}{4}; \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Với } \cos x = -\frac{3}{5} \Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4}{5}, \quad \text{Khi đó } \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = -\frac{4}{3}; \cot x = \frac{1}{\tan x} = -\frac{3}{4}$$

Bài tập 3: Cho $\tan \alpha = 3$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

Lời giải

$$B = \frac{\frac{\sin \alpha}{\cos^3 \alpha} - \frac{\cos \alpha}{\cos^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{3 \cos^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{2 \sin \alpha}{\cos^3 \alpha}} = \frac{\tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1) - (\tan^2 \alpha + 1)}{\tan^3 \alpha + 3 + 2 \tan \alpha (\tan^2 \alpha + 1)}$$

Ta có:

$$B = \frac{3(9+1) - (9+1)}{27+3+2 \cdot 3(9+1)} = \frac{2}{9}$$

Suy ra

Bài tập 4: Cho $\tan a = -3$ ($0^\circ \leq a \leq 180^\circ$). Tính giá trị biểu thức $B = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 2 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + 4 \cos^2 a}$

Lời giải

$$B = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 2 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + 4 \cos^2 a}$$

$$= \frac{\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 2 \frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a} - 2 \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}}{2 \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - 3 \frac{\sin a \cdot \cos a}{\cos^2 a} + 4 \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}} = \frac{\tan^2 a + 2 \tan a - 2}{2 \tan^2 a - 3 \tan a + 4} = \frac{9 + 2 \cdot (-3) - 2}{2 \cdot 9 - 3 \cdot (-3) + 4} = \frac{1}{31}$$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho biết $\tan \alpha = \frac{1}{2}$. Tính $\cot \alpha$.

- A. $\cot \alpha = 2$. B. $\cot \alpha = \sqrt{2}$. C. $\cot \alpha = \frac{1}{4}$. D. $\cot \alpha = \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} = 2$$

- Câu 2:** Cho $\sin \alpha = \frac{1}{3}$, $90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = 3 \cot \alpha + 4 \tan \alpha$ là
A. 7. B. $-7\sqrt{2}$. C. $7\sqrt{2}$. D. -7.

Lời giải

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \end{cases}$$

Ta có

$$\sin \alpha = \frac{1}{3}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}, \cot \alpha = -2\sqrt{2}$$

Vì

$$\text{Vậy } P = 3 \cot \alpha + 4 \tan \alpha = -7\sqrt{2}$$

- Câu 3:** $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu nếu $\cot \alpha = -\frac{1}{2}$?
A. $\pm \frac{\sqrt{5}}{5}$. B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$. D. $-\frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\cot \alpha = -\frac{1}{2} \Rightarrow \tan \alpha = -2$$

Ta có

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + (-2)^2} = \frac{1}{5} \quad \text{suy ra } \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

- Câu 4:** Nếu $\tan \alpha = 3$ thì $\cos \alpha$ bằng bao nhiêu?
A. $-\frac{\sqrt{10}}{10}$. B. $\frac{1}{3}$. C. $\pm \frac{\sqrt{10}}{10}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{10}$.

Lời giải

$$\text{Ta có } 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + 3^2} = \frac{1}{10}$$

Ta có

$$\text{Suy ra } \cos \alpha = \pm \frac{\sqrt{10}}{10}$$

- Câu 5:** Cho $\sin \alpha = \frac{2}{5}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của biểu thức $A = |\sin \alpha - \cos \alpha|$ là

- A. $\frac{\sqrt{21}+2}{25}$. B. $\frac{\sqrt{21}-2}{5}$. C. $\frac{\sqrt{21}+2}{5}$. D. $\frac{\sqrt{21}-2}{25}$.

Lời giải

Ta có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{21}{25} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} (\cos \alpha > 0)$

Lại có $A^2 = 1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{25 - 4\sqrt{21}}{25} = \frac{(\sqrt{21} - 2)^2}{25} \Rightarrow A = \frac{\sqrt{21} - 2}{5}$

Câu 6: Cho $\cos \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của $E = \tan \alpha + \cot \alpha$ là

- A. $\frac{9\sqrt{2}}{4}$. B. $\frac{9\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{9}{2}$. D. $\frac{9}{4}$.

Lời giải

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha \Rightarrow \tan^2 \alpha = 8 \Rightarrow \tan \alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow E = 2\sqrt{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Câu 7: Cho $\cot \alpha = 2$. Giá trị của biểu thức $P = \frac{2}{\cos^2 \alpha} + 3 + \tan^2 \alpha$ bằng

- A. $\frac{23}{2}$. B. $\frac{23}{4}$. C. $\frac{23}{8}$. D. 23.

Lời giải

Ta có $P = 2(1 + \tan^2 \alpha) + 3 + \tan^2 \alpha = 5 + \frac{3}{\cot^2 \alpha} = 5 + \frac{3}{4} = \frac{23}{4}$.

Câu 8: Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x$ bằng

- A. -1. B. 0. C. 2. D. 1.

Lời giải

$$\tan^2 x \sin^2 x - \tan^2 x + \sin^2 x = \tan^2 x (\sin^2 x - 1) + \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} (-\cos^2 x) + \sin^2 x = 0$$

Câu 9: Cho $\sin \alpha = \frac{1}{4}$, $0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Biểu thức: $P = \frac{\cos \alpha}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{15}{16}$. B. $\frac{15}{4}$. C. $\frac{15}{64}$. D. $\frac{15}{8}$.

Lời giải

$$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{15}}{4} (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}, \cot \alpha = \sqrt{15} \Rightarrow P = \frac{\frac{\sqrt{15}}{4}}{\frac{1}{\sqrt{15}} + \sqrt{15}} = \frac{15}{64}$$

- Câu 10:** Biết rằng $\sin x + \cos x = \frac{2}{3}$. Giá trị của biểu thức $P = \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos x$ bằng
- A. $-\frac{31}{34}$. B. $\frac{31}{34}$. C. $\frac{31}{18}$. D. $-\frac{31}{18}$.

Lời giải

Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \frac{4}{9} \Leftrightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = \frac{4}{9}$

$\Leftrightarrow 2 \sin x \cos x = -\frac{5}{9} \Rightarrow \sin x \cos x = -\frac{5}{18}$.

Lại có $P = (\sin x + \cos x)^3 - 3 \sin x \cos x (\sin x + \cos x) + \sin x \cos x = \frac{23}{27} - \frac{5}{18} = \frac{31}{54}$

- Câu 11:** Cho $\tan x = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \cot^2 x + \cos^2 x$ bằng
- A. $\frac{1}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $\frac{5}{4}$. D. 5.

Lời giải

Ta có $\cot^2 x = \frac{1}{\tan^2 x} = 4, \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{5}{4} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{4}{5}$.

- Câu 12:** Cho $8 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1 = 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$. Giá trị của biểu thức $P = \tan^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ bằng
- A. $\frac{113}{120}$. B. $\frac{113}{60}$. C. $\frac{120}{113}$. D. $\frac{60}{113}$.

Lời giải

Ta có $8 \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{4} \\ \cos \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$

Vì $0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{15}{16} \Rightarrow \tan^2 \alpha = \frac{1}{15}$

Vậy $P = \tan^2 \alpha + \sin^2 \alpha = \frac{1}{15} + \frac{15}{16} = \frac{113}{120}$.

- Câu 13:** Biết α là một góc từ 0° đến 180° thỏa mãn $\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{5}{2}$ và $\sin \alpha > \cos \alpha$. Tính $\sin \alpha$.
- A. $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$. B. $\sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$. C. $\sin \alpha = \frac{2}{3}$. D. $\sin \alpha = \frac{1}{3}$.

Lời giải

$$\tan \alpha + \cot \alpha = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \tan \alpha + \frac{1}{\tan \alpha} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2\tan^2 \alpha - 5\tan \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 2 \\ \tan \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có

Rõ ràng trong cả 2 trường hợp ta đều có $\tan \alpha > 0$ nên $\cos \alpha > 0$, vậy giả thiết

$$\sin \alpha > \cos \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha > 1. \text{ Từ đó ta có } \tan \alpha = 2 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Ta lại có } \frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \cot^2 \alpha = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Câu 14: Biết α là một góc từ 0° đến 180° thỏa mãn $\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{5}$ và $\tan \alpha < 1$. Tính $\tan \alpha$.

A. $\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$

B. $\tan \alpha = \frac{1}{2}$

C. $\tan \alpha = 2$

D. $\tan \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$

Lời giải

$$\text{Từ giả thiết } \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{2}{5} \text{ suy ra } \sin^2 \alpha \cdot \cos^2 \alpha = \frac{4}{25} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \frac{4}{25}$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 \alpha - \sin^2 \alpha + \frac{4}{25} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1}{5} \\ \sin^2 \alpha = \frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

$$\text{Với } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ ta có } \tan \alpha = \frac{1}{2} \text{ (tm)}$$

$$\text{Với } \sin \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}, \text{ ta có } \tan \alpha = 2 \text{ (loại)}.$$

Câu 15: Cho α là góc nhọn và thỏa mãn $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Giá trị của biểu thức $M = \frac{\tan \alpha - 3 \cot \alpha + 2}{\tan \alpha + \cot \alpha}$ là

A. $\frac{2\sqrt{2} - 23}{9}$

B. $\frac{4\sqrt{2} + 23}{9}$

C. $\frac{4\sqrt{2} + 25}{9}$

D. $\frac{4\sqrt{2} - 23}{9}$

Lời giải

$$\text{Ta có } \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}, \text{ suy ra } \cos \alpha = \pm \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{theo giả thiết: } \alpha \text{ là góc nhọn nên } \cos \alpha > 0, \text{ suy ra } \cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\text{Khi đó } \tan \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}; \cot \alpha = 2\sqrt{2}. \text{ Vậy } M = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4} - 3 \cdot 2\sqrt{2} + 2}{\frac{\sqrt{2}}{4} + 2\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 23}{9}$$

Câu 16: Cho α là góc tù và $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{4}{5}$. Giá trị của $M = \sin \alpha - 2 \cos \alpha$ là

- A. $M = \frac{12 - \sqrt{34}}{10}$. B. $M = \frac{4 - 3\sqrt{34}}{10}$. C. $M = \frac{12 + \sqrt{34}}{10}$. D. $M = -\frac{4 + 3\sqrt{34}}{10}$.

Lời giải

Theo giả thiết ta có: $\sin \alpha = \frac{4}{5} + \cos \alpha$, và $\cos \alpha < 0$

Mặt khác: $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4}{5} + \cos \alpha\right)^2 + \cos^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{-4 \pm \sqrt{34}}{10}$

suy ra $\cos \alpha = \frac{-4 - \sqrt{34}}{10}; \sin \alpha = \frac{4 - \sqrt{34}}{10}$. Vậy $M = \frac{12 + \sqrt{34}}{10}$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $\sin \alpha = \frac{2}{3}, 90^\circ < \alpha < 180^\circ$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $0 < \cos \alpha < 1$ với $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

b) $\sin \alpha$ được đưa về dạng $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$.

c) Giá trị của $\cot \alpha$ bằng $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

d) Giá trị của biểu thức $A = \frac{1}{\sin^2 \alpha} + \tan^2 \alpha$ bằng 2.

Lời giải

a) Sai: Ta có: $90^\circ < \alpha < 180^\circ \Rightarrow \cos \alpha < 0$.

b) Đúng: Ta có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$

c) Đúng: Vì $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \cot \alpha = -\frac{\sqrt{5}}{2}$.

d) Sai: Ta có $A = 1 + \cot^2 \alpha + \frac{1}{\cot^2 \alpha} = 1 + \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = \frac{61}{20}$.

Câu 2: Cho $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$. Xét biểu thức $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha = 4$

b) Biểu thức $\tan \alpha + \cot \alpha = 2$ được đưa về dạng $\frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.

c) Biểu thức P được viết lại $P = 1 + 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{1}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 4$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$$

b) Đúng: Ta có

c) Sai:

$$P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

$$\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$$

d) Đúng: Từ

$$P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha)^3 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha = 1 - 3 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

Ta lại có

$$P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

Vậy

Câu 3: Cho $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0, 0^\circ < \alpha < 90^\circ$ và biểu thức $P = \frac{1}{\cos^2 \alpha} + \frac{1}{\sin^2 \alpha}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Với mọi góc α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\tan \alpha > 0$.

b) $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0$ được viết lại $(\tan \alpha - 2)(\tan \alpha - 3) = 0$

c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$.

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{91}{9}$.

Lời giải

a) Đúng: Với α thỏa mãn $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ thì $\tan \alpha > 0$.

b) Sai: Ta có $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow (\tan \alpha + 2)(\tan \alpha - 3) = 0$

c) Đúng: $P = 1 + \tan^2 \alpha + 1 + \cot^2 \alpha = \tan^2 \alpha + \cot^2 \alpha + 2$

d) Đúng: Ta có $\tan^2 \alpha - \tan \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow (\tan \alpha + 2)(\tan \alpha - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = -2 \\ \tan \alpha = 3 \end{cases}$

$$0^\circ < \alpha < 90^\circ \Rightarrow \tan \alpha = 3 \Rightarrow \cot \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow P = \frac{91}{9}$$

Do

Câu 4: Cho $\sin x + \cos x = m$ và biểu thức $M = |\sin \alpha - \cos \alpha|$.

a) Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

b) $M^2 = (\sin x + \cos x)^2 - 4 \sin \alpha \cos \alpha$

c) Biểu thức $\sin x + \cos x = m$ được đưa về dạng $1 - 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$.

d) Giá trị của biểu thức M bằng $-m^2 - 1$.

Lời giải

a) Đúng: Với mọi α ta luôn có $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$

b) Đúng: Ta có $2M = 2 \sin x \cos x \Leftrightarrow 2M = 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha - 1 = (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 - 1$

c) Sai: Từ $\sin x + \cos x = m \Rightarrow (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2$

d) Sai: Ta có $(\sin \alpha + \cos \alpha)^2 = m^2 \Leftrightarrow 1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha = m^2 \Rightarrow m^2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Cho $\tan \alpha = \frac{1}{3}$. Tính giá trị của biểu thức: $P = \frac{9(\sin^3 \alpha + \sin \alpha \cos^2 \alpha + \cos^3 \alpha)}{\sin^3 \alpha + \cos^3 \alpha}$.

Lời giải

$$P = 9 \cdot \frac{\cos^3 \alpha \left(\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + 1 \right)}{\cos^3 \alpha \left(\frac{\sin^3 \alpha}{\cos^3 \alpha} + 1 \right)} = 9 \cdot \frac{\tan^3 \alpha + \tan \alpha + 1}{\tan^3 \alpha + 1} = 9 \cdot \frac{8 + 2 + 1}{8 + 1} = 11$$

Ta có
 $= \cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Câu 2: Biết $\sin^3 \alpha - 3 \sin \alpha + 2 = 0, (0^\circ < \alpha < 90^\circ)$. Giá trị của biểu thức $P = \sqrt{3} \tan \alpha + \sqrt{3} \cot \alpha$ bằng

Lời giải

Ta có $2 \sin^3 \alpha + \sin^2 \alpha + 5 \sin \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (2 \sin \alpha - 1)(\sin^2 \alpha + \sin \alpha + 3) = 0 \Leftrightarrow 2 \sin \alpha - 1 = 0$
 $(\sin^2 \alpha + \sin \alpha + 3 \neq 0)$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}, \cot \alpha = \sqrt{3} \quad \text{nên} \quad P = \sqrt{3} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \right) = 4$$

Câu 3: Góc nghiêng của Mặt Trời tại một vị trí trên Trái Đất là góc nghiêng giữa tia nắng lúc giữa trưa với mặt đất. Trong thực tế, để đo trực tiếp góc này, vào giữa trưa (khoảng 12 giờ), em có thể dựng một thước thẳng vuông góc với mặt đất, đo độ dài của bóng thước trên mặt đất. Khi đó, tang của góc nghiêng Mặt Trời tại vị trí đặt thước bằng tỉ số giữa độ dài của thước với độ dài của bóng thước. Góc nghiêng của Mặt Trời phụ thuộc vào vĩ độ của vị trí đo và phụ thuộc thời gian đo trong năm (ngày thứ mấy trong năm). Tại vị trí có vĩ độ ϕ và ngày thứ N trong năm, góc nghiêng của Mặt Trời α còn được tính theo công thức sau:

$$\alpha = 90^\circ - \phi - \left| \cos \left(\left(\frac{2(N+10)}{365} - m \right) 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ$$

trong đó $m = 0$ nếu $1 \leq N \leq 172, m = 1$ nếu $173 \leq N \leq 355, m = 2$ nếu $356 \leq N \leq 365$.

Hãy áp dụng công thức trên để tính góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày 10/10 trong năm không nhuận (năm mà tháng 2 có 28 ngày) tại vị trí có vĩ độ $\phi = 20^\circ$ là a° (Công thức tính toán nói trên chính xác tới $\pm 0,5^\circ$). Tính giá trị của biểu thức $P = \tan a + \cot a$ (kết quả làm tròn đến hai chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ngày 10/10 là ngày thứ 283 của năm không nhuận. Do đó, góc nghiêng của Mặt Trời vào ngày này tại vĩ độ $\phi = 20^\circ$ bằng

$$\alpha = 90^\circ - 20^\circ - \left| \cos \left(\left(\frac{2(283+10)}{365} - 1 \right) \cdot 180^\circ \right) \right| \cdot 23,5^\circ = 70^\circ - \left| \cos \frac{221}{365} \cdot 180^\circ \right| \cdot 23,5^\circ \approx 62,6^\circ$$

Vậy $a = 62,6^\circ \Rightarrow P = \tan 62,6^\circ + \cot 62,6^\circ \approx 2,45$

Câu 4: Một quả bóng Golf kể từ lúc được đánh đến lúc chạm mặt đất đã di chuyển được một khoảng

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$$

cách d (mét) theo phương nằm ngang. Biết rằng trong đó $v_0 (m/s)$ là vận tốc ban đầu của quả bóng, g là gia tốc trọng trường và φ là góc đánh quả bóng so với phương nằm ngang. Tính giá trị của $\cos 2\varphi$, khi $v_0 = 15 (m/s)$, $g = 10 (m/s^2)$, $d = 18 (m)$.

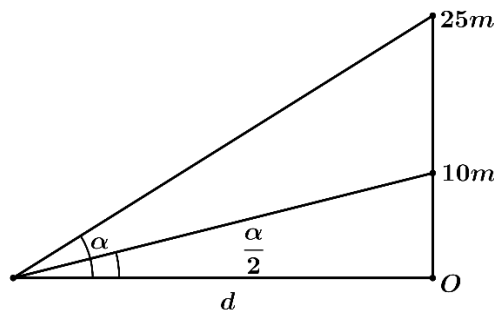
Lời giải

Ta có $d = \frac{v_0^2 \cdot \sin 2\varphi}{g}$ nên $18 = \frac{(15)^2 \cdot \sin 2\varphi}{10} \Leftrightarrow \sin 2\varphi = \frac{180}{225} = \frac{4}{5}$.

$$0^\circ < \varphi < 45^\circ \Rightarrow 0^\circ < 2\varphi < 90^\circ \Rightarrow \cos 2\varphi > 0 \text{ nên } \cos 2\varphi = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

Câu 5: Một vận động viên bắn súng nằm trên mặt đất để ngắm bắn các mục tiêu khác nhau trên một bức tường thẳng đứng. Vận động viên bắn trúng một mục tiêu cách mặt đất $25(m)$ tại một góc ngắm α (góc hợp bởi phương ngắm với phương ngang). Nếu giảm góc ngắm đi một nửa thì vận động viên bắn trúng mục tiêu cách mặt đất $10(m)$ thì khoảng cách từ vận động viên đến bức tường bằng $10\sqrt{5}(m)$. Tính giá trị của $P = 3 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$.

Lời giải



Gọi α là góc ngắm lúc đầu của vận động viên. Ta có $\tan \frac{\alpha}{2} = \frac{10}{10\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Ta lại có: $\frac{1}{\cos^2 \frac{\alpha}{2}} = 1 + \tan^2 \frac{\alpha}{2} = 1 + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \Rightarrow \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow P = 2,5$

Câu 6: Cho b, c là các số nguyên khác 0, $c \neq 2025$ và $\tan x = \frac{2b}{2025 - c}$. Tính giá trị của biểu thức $A = 2025 \cos^2 x + 2b \sin x \cdot \cos x + c \sin^2 x$.

Lời giải

Ta có: $A = 2025 \cos^2 x + 2b \sin x \cdot \cos x + c \sin^2 x \Leftrightarrow \frac{A}{\cos^2 x} = 2025 + 2b \tan x + c \tan^2 x$
 $\Leftrightarrow A(1 + \tan^2 x) = 2025 + 2b \tan x + c \tan^2 x$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow A \left(1 + \left(\frac{2b}{2025-c} \right)^2 \right) = 2025 + 2b \cdot \frac{2b}{2025-c} + c \cdot \left(\frac{2b}{2025-c} \right)^2 \\
&\Leftrightarrow A \frac{(2025-c)^2 + (2b)^2}{(2025-c)^2} = \frac{2025(2025-c)^2 + 4b^2(2025-c) + c \cdot 4b^2}{(2025-c)^2} \\
&\Leftrightarrow A \frac{(2025-c)^2 + (2b)^2}{(2025-c)^2} = \frac{2025(2025-c)^2 + 4b^2 \cdot 2025}{(2025-c)^2} \\
&\Leftrightarrow A \frac{(2025-c)^2 + 4b^2}{(a-c)^2} = \frac{2025((2025-c)^2 + 4b^2)}{(2025-c)^2} \Leftrightarrow A = 2025
\end{aligned}$$

Dạng 3: Rút gọn các biểu thức lượng giác

Phương pháp:

- Sử dụng định nghĩa giá trị lượng giác của một góc
- Sử dụng tính chất và bảng giá trị lượng giác đặc biệt
- Sử dụng các hệ thức lượng giác cơ bản

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Rút gọn các biểu thức sau:

- a) $A = (\tan x + \cot x)^2 - (\tan x - \cot x)^2$
- b) $B = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x}$
- c) $C = \sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$
- d) $D = \frac{\sin^2 a + 2 \sin a \cdot \cos a - 3 \cos^2 a}{2 \sin^2 a - 3 \sin a \cdot \cos a + \cos^2 a}$
- e) $E = \sin^4 x + \sin^2 x \cos^2 x + \cos^2 x$

Lời giải

a) Ta có: $A = (\tan^2 x + 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) - (\tan^2 x - 2 \tan x \cdot \cot x + \cot^2 x) = 4$

b) $A = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \frac{\cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cdot \cos x}{\cot x} = 1 - \sin^2 x + \sin^2 x = 1$

c) Ta có

$$\sin^2 a \cdot \tan^2 a + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a = \sin^2 a \left(\frac{1}{\cos^2 a} - 1 \right) + 4 \sin^2 a - \tan^2 a + 3 \cos^2 a$$

$$= \frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - \sin^2 a + 4\sin^2 a - \tan^2 a + 3\cos^2 a = 3\sin^2 a + 3\cos^2 a = 3$$

$$D = \frac{\sin^2 a + 2\sin a \cos a - 3\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a \cos a + \cos^2 a} = \frac{\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + 2\frac{\sin a \cos a}{\cos^2 a} - 3\frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}}{2\frac{\sin^2 a}{\cos^2 a} - 3\frac{\sin a \cos a}{\cos^2 a} + \frac{\cos^2 a}{\cos^2 a}}$$

$$\text{d) Ta có: } = \frac{\tan^2 a + 2 \cdot \tan a - 3}{2 \cdot \tan^2 a - 3 \cdot \tan a + 1} = \frac{(\tan x - 1)(\tan x + 3)}{(\tan x - 1)(2 \tan x - 1)} = \frac{\tan x + 3}{2 \tan x - 1}$$

$$\text{e) Ta có } P = \sin^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Bài tập 2: Rút gọn các biểu thức lượng giác sau:

$$A = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan x + \cot x}$$

a)

$$B = \frac{2}{\cos^2 x} - \frac{1}{\sin^2 x} + (\tan x - \cot x)^2 + 1$$

b)

$$C = (1 - \sin^2 x) \cot^2 x + 1 - \cot^2 x$$

c)

$$D = \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x} + \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x}$$

d)

$$E = \frac{\cos^3 x + 2\cos^2 x \sin x - \sin^2 x \cos x - 2\sin^3 x}{(\tan x - \cot x)(\cos x + 2\sin x)}$$

e)

Lời giải

$$A = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x - 1}{\sin x \cos x} = \frac{2\sin x \cos x}{\sin x \cos x} = 2\sin^2 x \cos^2 x$$

a) Ta có

$$\text{b) Ta có: } B = 2(1 + \tan^2 x) - (1 + \cot^2 x) + \tan^2 x + \cot^2 x - 2 + 1 = 3\tan^2 x$$

b)

$$\text{c) } C = [(1 - \sin^2 x) - 1] \cot^2 x + 1 = -\sin^2 x \cdot \cot^2 x + 1 = 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$$

c)

$$\text{d) Ta có } D = \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)} + \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)}$$

$$= \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} = 2 - \cos^2 x + 2 - \sin^2 x = 4 - (\cos^2 x + \sin^2 x) = 3$$

$$E = \frac{(\cos^3 x - \sin^2 x \cos x) + (2 \cos^2 x \sin x - 2 \sin^3 x)}{\left(\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)(\cos x + 2 \sin x)}$$

e) Ta có

$$\begin{aligned} &= \frac{\cos x (\cos^2 x - \sin^2 x) + 2 \sin x (\cos^2 x - \sin^2 x)}{\left(\frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cos x}\right)(\cos x + 2 \sin x)} \\ &= \frac{(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + 2 \sin x) \sin x \cos x}{-(\cos^2 x - \sin^2 x)(\cos x + 2 \sin x)} = -\sin x \cos x \end{aligned}$$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đẳng thức nào sau đây là sai?

- A. $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2 = 2, \forall x$ B. $\tan^2 x - \sin^2 x = \tan^2 x \sin^2 x, \forall x \neq 90^\circ$
 C. $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$ D. $\sin^6 x - \cos^6 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x, \forall x$

Lời giải

$$\sin^6 x - \cos^6 x = (\sin^2 x - \cos^2 x)(1 - \sin^2 x \cos^2 x)$$

Câu 2: Biểu thức $(\cot a + \tan a)^2$ bằng

- A. $\frac{1}{\sin^2 a} - \frac{1}{\cos^2 a}$ B. $\cot^2 a + \tan^2 a$ C. $\frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$ D. $\cot^2 a \tan^2 a + 2$

Lời giải

$$(\cot a + \tan a)^2 = \cot^2 a + 2 \cot a \tan a + \tan^2 a = (\cot^2 a + 1) + (\tan^2 a + 1) = \frac{1}{\sin^2 a} + \frac{1}{\cos^2 a}$$

Câu 3: Đơn giản biểu thức $E = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$ ta được

- A. $\sin x$ B. $\frac{1}{\cos x}$ C. $\frac{1}{\sin x}$ D. $\cos x$

Lời giải

$$\begin{aligned} E &= \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + \sin x \sin x}{\sin x(1 + \cos x)} \\ &= \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 - \cos^2 x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{\cos x(1 + \cos x) + (1 + \cos x)(1 - \cos x)}{\sin x(1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

Câu 4: Rút gọn biểu thức $P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x}$ ta được

- A. $P = \frac{1}{2} \tan x$ B. $P = \frac{1}{2} \cot x$ C. $P = 2 \cot x$ D. $P = 2 \tan x$

Lời giải

$$P = \frac{1 - \sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cos^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{\cos x}{2 \sin x} = \frac{1}{2} \cot x$$

Câu 5: Rút gọn biểu thức $A = \sin^4 x + \cos^4 x - \sin^6 x - \cos^6 x$ ta được

- A.** $\sin x \cos x$ **B.** $\sin^2 x \cos^2 x$ **C.** $-\sin x \cos x$ **D.** $-\sin^2 x \cos^2 x$

Lời giải

Ta có

$$A = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \right]$$

$$A = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 1 + 3 \sin^2 x \cos^2 x = \sin^2 x \cos^2 x$$

Câu 6: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1}$ ta được

- A.** 1. **B.** 2. **C.** -1. **D.** -2.

Lời giải

$$P = \frac{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = \frac{\sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = \frac{\sin^2 x \tan^2 x + 1}{\sin^2 x \tan^2 x + 1} = 1$$

Câu 7: Rút gọn biểu thức $P = \sqrt{-\sin^2 x + 4 \cos x + 5} - 2$ ta được

- A.** $\cos x$ **B.** $-\cos x$ **C.** $4 + \cos x$ **D.** $\cos x + 2$

Lời giải

Ta có
$$P = \sqrt{-(1 - \cos^2 x) + 4 \cos x + 5} - 2 = \sqrt{(\cos x + 2)^2} - 2 = \cos x + 2 - 2 = \cos x$$

Câu 8: Đơn giản biểu thức $P = \frac{1}{\tan x} + \frac{1}{\cot x} + \frac{3(\sin^4 x + \cos^4 x) - 2(\sin^6 x + \cos^6 x)}{(\sin x - \cos x)^2 - 1}$ ta được

- A.** $\frac{1}{\sin x \cos x}$ **B.** $\frac{1}{2 \sin x \cos x}$ **C.** $-\frac{1}{\sin x \cos x}$ **D.** $-\frac{1}{2 \sin x \cos x}$

Lời giải

$$P = \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{3 \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x \right] - 2 \left[(\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 x + \cos^2 x) \right]}{\sin^2 x + \cos^2 x - 2 \sin x \cos x - 1}$$

$$= \frac{1}{\sin x \cos x} + \frac{3(1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x) - 2(1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x)}{-2 \sin x \cos x}$$

$$= \frac{1}{\sin x \cos x} - \frac{1}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2 \sin x \cos x}$$

Câu 9: Rút gọn biểu thức $P = \frac{\cos x}{\tan x + \cot x} + \cos x \sin^2 x$ ta được

- A.** $\sin x$ **B.** $\cos x$ **C.** $\tan x$ **D.** $\cot x$

Lời giải

$$P = \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} + \sin^3 x = \frac{\cos x}{\frac{1}{\sin x \cos x}} + \sin^3 x$$

$$= \sin x \cos^2 x + \sin^3 x = \sin x (\cos^2 x + \sin^2 x) = \sin x$$

Câu 10: Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{2 \sin(180^\circ - x) \sin(90^\circ - x)}{\tan x + \cot x} + \sin^4 x + \cos^4 x$$

ta được

- A.** 1. **B.** 2. **C.** -2. **D.** 3.

Lời giải

$$P = \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x}} + (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$$

Ta có

$$= \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{1}{\sin x \cos x}} + 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 2 \sin^2 x \cos^2 x + 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1$$

Câu 11: Rút gọn biểu thức

$$P = \frac{\cot^2 x - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\cot x}$$

ta được

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** 1. **C.** $\frac{3}{2}$. **D.** 2.

Lời giải

$$P = \frac{\frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \cos^2 x}{\cot^2 x} + \frac{\sin x \cos x}{\frac{\cos x}{\sin x}} = \frac{\cos^2 x \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right)}{\cot^2 x} + \sin^2 x$$

Ta có

$$= \frac{\cos^2 x \cot^2 x}{\cot^2 x} + \sin^2 x = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Câu 12: Đơn giản biểu thức

$$P = \cot x + \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

ta được

- A.** $\frac{1}{\cos x}$. **B.** $\tan x$. **C.** $\frac{1}{\sin x}$. **D.** $\cot x$.

Lời giải

$$P = \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{\cos x + \cos^2 x + \sin^2 x}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{\cos x + 1}{\sin x (1 + \cos x)} = \frac{1}{\sin x}$$

Ta có

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho biểu thức $P = \frac{\sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x}{\tan x - 1}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1$

b) Biểu thức $A = \sin^2 x + 3 \sin x \cos x - 4 \cos^2 x$ được viết lại $A = \frac{\tan^2 x + 3 \tan x - 4}{1 + \tan^2 x}$.

c) Rút gọn biểu thức P ta được $P = \frac{\tan x + 4}{1 + \tan^2 x}$.

d) Giá trị của biểu thức P bằng $\frac{\sqrt{3}}{4}$ khi $\cos x = \frac{1}{2}$.

a) Đúng: Ta có: $\frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

$$A = \cos^2 x \left(\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + 3 \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - 4 \right) = \frac{\tan^2 x + 3 \tan x - 4}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \frac{\tan^2 x + 3 \tan x - 4}{1 + \tan^2 x}$$

b) Đúng: Ta có

$$P = \frac{A}{\tan x - 1} = \frac{\tan^2 x + 3 \tan x - 4}{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)} = \frac{(\tan x - 1)(\tan x + 4)}{(\tan x - 1)(1 + \tan^2 x)} = \frac{\tan x + 4}{1 + \tan^2 x}$$

c) Đúng: Vì

d) Sai: Ta có $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \Rightarrow \tan^2 x = 4 - 1 = 3 \Rightarrow \tan x = \sqrt{3} \Rightarrow P = \frac{\sqrt{3} + 4}{4}$.

Câu 2: Cho biểu thức $P = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x \cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Biểu thức $\sin^4 x + \cos^4 x$ được viết lại $(\sin^2 x + \cos^2 x)^2$.

b) Biểu thức $\sin^8 x + \cos^8 x$ được đưa về dạng $1 - 4 \sin^2 x \cos^2 x + 2 \sin^4 x \cos^4 x$.

c) Biểu thức P được đưa về dạng $P = 2(1 - \sin^2 x \cos^2 x)^2 - 1 + 4 \sin^2 x \cos^2 x - 2 \sin^4 x \cos^4 x$.

d) Rút gọn P ta được $P = 1$.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow (\tan \alpha + \cot \alpha)^2 = 4$

b) Đúng: Ta có $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2$.

c) Đúng: Ta có

$$P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$$

d) Đúng: Từ $\tan \alpha + \cot \alpha = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sin \alpha \cos \alpha} = 2 \Leftrightarrow \sin \alpha \cos \alpha = \frac{1}{2}$

lại có $P = \sin^6 \alpha + \cos^6 \alpha = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3 \sin^2 x \cos^2 x$

Vậy $P = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

$$A = \frac{\tan^2 x - \sin^2 x + (\sin x + \cos x)^2 - 1}{\tan^2 x \sin^2 x}$$

Câu 3: Cho và biểu thức $B = 1 + 2 \cot^3 x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Biểu thức $(\sin x + \cos x)^2$ bằng $1 - 2 \sin x \cos x$.

b) $\tan^2 x - \sin^2 x$ được viết lại $\tan^2 x \sin^2 x$

c) Biểu thức A được đưa về dạng $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x}$.

d) Biểu thức A bằng B .

Lời giải

a) Sai: Ta có $(\sin x + \cos x)^2 = \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x = 1 + 2 \sin x \cos x$

b) Đúng: Ta có $\tan^2 x - \sin^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \sin^2 x = \sin^2 x \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) = \sin^2 x \tan^2 x$

c) Đúng: $A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 1 + 2 \sin x \cos x - 1}{\tan^2 x \cos^2 x} = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x}$

$$A = \frac{\tan^2 x \sin^2 x + 2 \sin x \cos x}{\tan^2 x \sin^2 x} = 1 + \frac{2 \sin x \cos x}{\frac{\sin^4 x}{\cos^2 x}} = 1 + 2 \frac{\sin^3 x}{\cos^3 x} = 1 + 2 \cot^3 x = B$$

d) Đúng: Ta có

$$P = \frac{\sin^4 x + \cos^4 x - 4 \sin x \cos x - 3}{\sin^3 x \cos x + \cos^3 x \sin x + 1}$$

Câu 4: Cho . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Ta có $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 + 2 \sin^2 x \cos^2 x$

b) $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1$ được đưa về dạng $\sin x \cos x$

c) Biểu thức P được đưa về dạng $-2 \sin x \cos x - 2$.

d) Khi $\cos x = \frac{1}{3}$ thì giá trị của biểu thức P bằng $-\frac{4\sqrt{2}}{9} - 2$.

Lời giải

a) Sai: $\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x$

b) Sai: Ta có $\sin^3 x \cos x + \sin x \cos^3 x + 1 = \sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1 = \sin x \cos x + 1$

c) Đúng: Ta có $P = \frac{1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x - 4 \sin x \cos x - 3}{\sin x \cos x (\sin^2 x + \cos^2 x) + 1} = -2 \frac{(\sin x \cos x + 1)^2}{\sin x \cos x + 1} = -2 (\sin x \cos x + 1)$

d) Đúng: Ta có $\cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow P = -\frac{4\sqrt{2}}{9} - 2$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.

Câu 1: Biết tồn tại số thực $a = a_0$ sao cho $P = P_0$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn hệ thức:

$$(9 \sin^2 a - 6 \sin a)^2 - (11 + 2P)(9 \sin^2 a - 6 \sin a) + P^2 + 11P - 80 = 0$$

. Tính giá trị của biểu thức

$$M = (2P_0 + 8) \cdot \tan^2 a_0 + 9P_0 \cdot \cos^2 a_0$$

Lời giải

Đặt $t = 9 \sin^2 a - 6 \sin a$ ta có: $t^2 - (11 + 2P)t + P^2 + 11P - 80 = 0$

Biệt thức $\Delta = (2P + 11)^2 - 4(P^2 + 11P - 80) = 441$

$$t_1 = \frac{11 + 2P - 21}{2} = P - 5; \quad t_2 = \frac{11 + 2P + 21}{2} = P + 16$$

Với $t = P + 16 \Rightarrow 9 \sin^2 a - 6 \sin a = P + 16$

$$\Rightarrow P = 9 \sin^2 a - 6 \sin a - 16 = (3 \sin a - 1)^2 - 17 \leq 16 - 17 = -1 \quad (\text{không thỏa})$$

Với $t = P - 5 \Rightarrow 9 \sin^2 a - 6 \sin a = P - 5 \Rightarrow P = 9 \sin^2 a - 6 \sin a + 5 = (3 \sin a - 1)^2 + 4 \geq 4$

$$P_0 = P_{\min} = 4 \quad \text{khi} \quad 3 \sin a - 1 = 0 \Rightarrow \sin a = \frac{1}{3} = \sin a_0$$

Khi đó: $M = (2P_0 + 8) \cdot \tan^2 a_0 + 9P \cdot \cos^2 a_0$

$$= (2 \cdot 4 + 8) \cdot \frac{\sin^2 a_0}{1 - \sin^2 a_0} + 9 \cdot 4 \cdot (1 - \sin^2 a_0) = 16 \cdot \frac{\frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{9}} + 36 \cdot \left(1 - \frac{1}{9}\right) = 34$$

Câu 2:

Biết rằng biểu thức $P = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \frac{8}{\tan x} + 3$ đạt giá trị nhỏ nhất trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ tại $x = \alpha$. Tính giá trị biểu thức $B = \frac{7 \sin \alpha - 7 \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}$

Lời giải

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{1}{1 + \cos x} + \frac{1}{1 - \cos x}} - \frac{8}{\tan x} + 3 = \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}} - 8 \cot x + 3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sin x} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - \cos^2 x}} - 8 \cot x + 3 = \frac{2}{\sin^2 x} - 8 \cot x + 3 = 2 \cot^2 x - 8 \cot x + 5 = 2(\cot x - 2)^2 - 3 \end{aligned}$$

Ta có: $P = 2(\cot x - 2)^2 - 3 \geq -3 \Rightarrow P_{\min} = -3$ khi $\cot x = 2 = \cot \alpha$.

$$\begin{aligned} B &= 7 \cdot \frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha} = 7 \cdot \frac{\frac{\sin \alpha - \cos \alpha}{\sin^3 \alpha}}{\frac{\sin^3 \alpha + 3 \cos^3 \alpha + 2 \sin \alpha}{\sin^3 \alpha}} \\ \text{Khi đó:} \end{aligned}$$

$$= 7 \cdot \frac{\frac{1}{\sin^2 \alpha} - \cot \alpha \cdot \frac{1}{\sin^2 \alpha}}{1 + 3 \cot^3 \alpha + \frac{2}{\sin^2 \alpha}} = 7 \cdot \frac{1 + \cot^2 \alpha - \cot \alpha \cdot (1 + \cot^2 \alpha)}{1 + 3 \cot^3 \alpha + 2 \cdot (1 + \cot^2 \alpha)} = -\frac{7}{7} = -1$$

Câu 3:

Cho biểu thức $A = \frac{\sin^8 \alpha}{8} + \frac{\cos^8 \alpha}{27}$. Biết $\frac{\sin^4 \alpha}{2} + \frac{\cos^4 \alpha}{3} = \frac{1}{5}$. Tính giá trị $5A$

Lời giải

$$\cos^2 \alpha = t \Rightarrow \frac{(1-t)^2}{2} + \frac{t^2}{3} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5t^2 - 26t + 3 = \frac{6}{5} \Leftrightarrow t = \frac{3}{5}$$

Đặt

$$\cos^2 \alpha = \frac{3}{5}; \sin^2 \alpha = \frac{2}{5} \quad \text{Suy ra} \quad \frac{\sin^8 \alpha}{8} + \frac{\cos^8 \alpha}{27} = \frac{1}{125} \Rightarrow 5A = 0,04$$

Câu 4: Cho $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4}$. Tính giá trị của biểu thức $A = \sin^4 x + 3\cos^4 x$.

Lời giải

Ta có $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 3\sin^4 x + (\cos^2 x)^2 = \frac{3}{4}$.

$$\Leftrightarrow 3\sin^4 x + (1 - \sin^2 x)^2 = \frac{3}{4} \Leftrightarrow 4\sin^4 x - 2\sin^2 x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{1}{4}.$$

Mà $3\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x + 2\sin^4 x - 2\cos^4 x = \frac{3}{4}$.

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2(\cos^2 x - \sin^2 x) \Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2(1 - 2\sin^2 x)$$

$$\Leftrightarrow \sin^4 x + 3\cos^4 x = \frac{3}{4} + 2\left(1 - 2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{7}{4}.$$

Câu 5: Cho góc x thỏa mãn $\sin x + \cos x = \frac{1}{2}$. Khi đó $P = |\sin x - \cos x| = \sqrt{\frac{a}{b}}$, trong đó $a, b \in \mathbb{Q}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + b$.

Lời giải

$$\cos x + \sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\cos x + \sin x)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (\cos x)^2 + (\sin x)^2 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2\sin x \cos x = -\frac{3}{4}.$$

Ta có $P = |\sin x - \cos x|$

$$\Leftrightarrow P^2 = (\sin x - \cos x)^2 = (\sin x)^2 + (\cos x)^2 - 2\sin x \cos x = 1 - 2\sin x \cos x = 1 - \left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{7}{4}.$$

Do đó $P = \sqrt{\frac{7}{4}}$. Vậy $a + b = 7 + 4 = 11$.

Câu 6: Cho $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2}$. Tính giá trị biểu thức $A = 2\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha$

Lời giải

Ta có $3\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\sin^4 \alpha - (1 - \sin^2 \alpha)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 6\sin^4 \alpha - 2(1 - 2\sin^2 \alpha + \sin^4 \alpha) = 1$

$$\Leftrightarrow 4\sin^4 \alpha + 4\sin^2 \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow (2\sin^2 \alpha - 1)(2\sin^2 \alpha + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2 \alpha - 1 = 0 \text{ (do } 2\sin^2 \alpha + 3 > 0) \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{1}{2}.$$

Ta lại có $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Suy ra $A = 2 \left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$.