

BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ sau:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f'(x)$			+	-
$f(x)$			$0 \nearrow +\infty$	$1 \searrow -\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x)-1}$ có a đường tiệm cận đứng và b đường tiệm cận ngang. Tính $a^2 + b^2$

Lời giải

Đáp số: 5

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)-1} = 0$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

Do đó đồ thị hàm số có 1 đường TCN là $y = 0$

Dựa vào bảng biến thiên là có tồn tại $x_1 \in (-2; 0)$ sao cho $f(x_1) = 1$ và $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$

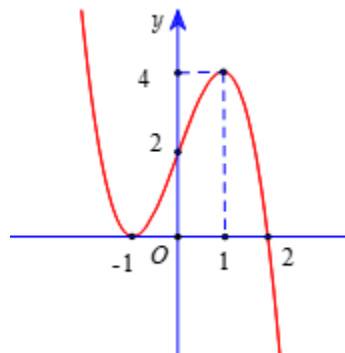
$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_1^+} \frac{1}{f(x)-1} = +\infty; \lim_{x \rightarrow x_1^-} \frac{1}{f(x)-1} = -\infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{f(x)-1} = -\infty \Rightarrow$$

Đồ thị hàm số có 2 đường TCD là

$$x = x_1, x = 0$$

$$\text{Do đó } a = 2, b = 1 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$. Hàm số $y = f'(x)$ liên tục trên tập số thực và có đồ thị như hình vẽ.



Biết $f(-1) = \frac{13}{4}, f(2) = 6$. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $g(x) = |f^3(x) + 3f(x)|$ trên $[-1; 2]$ bằng

Lời giải

Đáp số: 24,6.

Từ đồ thị hàm biến thiên

số $y = f'(x)$ ta có bảng

x	-1	2
$f'(x)$	0	0
$f(x)$	$\frac{13}{4}$	6

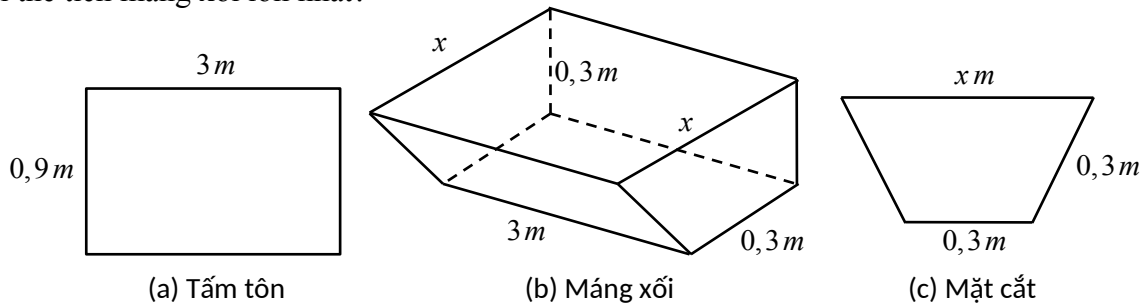
Xét hàm số $y = h(x) = -f^3(x) + 3f(x) \Rightarrow y' = h'(x) = -3f^2(x) \cdot f'(x) + 3f'(x)$

Xét trên đoạn $[-1; 2]$ ta có $y' = h'(x) = 0 \Leftrightarrow -3f'(x)[f^2(x) - 1] = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f^2(x) = 1(VN) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 2 \end{cases}$

$$h(-1) = -\frac{1573}{64}, \quad h(2) = -198 \Rightarrow g(-1) = \frac{1573}{64}, \quad g(2) = 198$$

Từ đó suy ra $\min_{[-1; 2]} g(x) = \frac{1573}{64} \approx 24,6$ khi $x = -1$.

Câu 3: Để làm một máng xối nước có dạng hình lăng trụ, từ một tấm tôn kích thước $0,9m \times 3m$ người ta gấp tấm tôn đó như hình vẽ dưới. Biết mặt cắt của máng xối là một hình thang cân. Hỏi $x(m)$ bằng bao nhiêu thì thể tích máng xối lớn nhất?



Lời giải

Đáp số: $0,6$

Gọi h là chiều cao của hình thang

Vì chiều cao lăng trụ bằng chiều dài tấm tôn nên thể tích máng xối lớn nhất khi diện tích hình thang cân lớn nhất

$$S = \frac{h}{2}(x + 0,3)$$

Ta có

$$BC = \frac{x - 0,3}{2} (x > 0,3)$$

$$\Rightarrow h = \sqrt{(0,3)^2 - \frac{(x - 0,3)^2}{4}}$$

$$(0,3)^2 - \frac{(x - 0,3)^2}{4} > 0; (0,3 < x < 0,9)$$

ĐK:

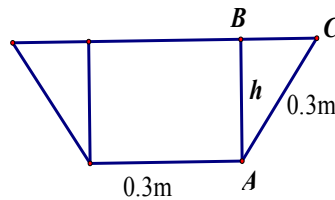
Khi đó:

$$S = \frac{1}{4}(x + 0,3)\sqrt{4.(0,3)^2 - (x - 0,3)^2}$$

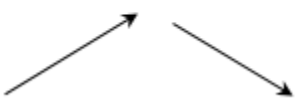
Xét hàm số $f(x) = (x + 0,3)\sqrt{4.(0,3)^2 - (x - 0,3)^2}; (0,3 < x < 0,9)$

$$\Rightarrow f'(x) = \sqrt{4.(0,3)^2 - (x - 0,3)^2} + (x + 0,3) \frac{-(x - 0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x - 0,3)^2}}$$

$$= \frac{4.(0,3)^2 - (x - 0,3)^2 - (x + 0,3)(x - 0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x - 0,3)^2}} = \frac{0,36 - 2x(x - 0,3)}{\sqrt{4.(0,3)^2 - (x - 0,3)^2}}$$



$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 0,3x + 0,18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -0,3 \\ x = 0,6 \end{cases}$$

x	0,3	0,6	0,9
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ lớn nhất khi $x = 0,6$

Vậy thể tích máng xối lớn nhất khi $x = 0,6m$.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm là $f'(x) = (x-1)^2(x+1)(x-5), \forall x \in \mathbb{R}$. Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(x^2 + 3x + 1)$ là bao nhiêu?

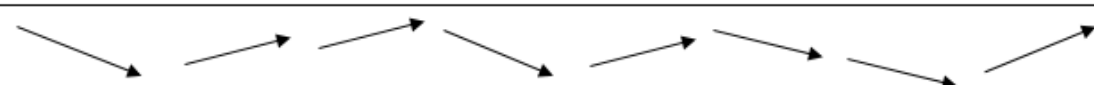
Lời giải

Đáp số: 5.

$$g'(x) = (2x+3)f'(x^2+3x+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3=0 \\ x^2+3x+1=1, (n \text{ kép}) \\ x^2+3x+1=-1 \\ x^2+3x+1=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{2} \\ x = 0 \vee x = -3, (n \text{ kép}) \\ x = -1 \\ x = -2 \\ x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$$

Hàm số

Bảng xét dấu:

x	$-\infty$	-4	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	0	1	$+\infty$			
$g'(x)$		-	0	+	0	+	0	-	0	-	0	+
$g(x)$												

Vậy hàm số $g(x)$ có 5 điểm cực trị.

Câu 5: Người ta muốn sản xuất một bể nước theo dạng khối lăng trụ tứ giác đều, không có nắp trên, làm bằng kính và có thể tích là $16m^3$. Biết giá của mỗi mét vuông kính là 500 000 đồng. Tìm số tiền tối thiểu phải trả để làm bể nước trên.

Lời giải

Trả lời: 15

Gọi cạnh đáy của bể nước có độ dài là $x(m)$ và chiều cao của bể nước là $h(m)$. Điều kiện $x, h > 0$.

Khi đó thể tích của bể nước là $16m^3$ nên $x^2h = 16 \Leftrightarrow h = \frac{16}{x^2}$.

Diện tích cần để xây bể nước là

$$S = 4xh + x^2 = 4x \cdot \frac{16}{x^2} + x^2 = \frac{64}{x} + x^2$$

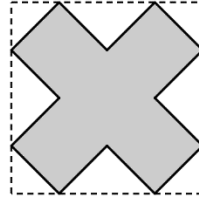
Để tìm số tiền tối thiểu, ta tìm giá trị nhỏ nhất của hàm $y = S(x)$ với $x > 0$.

Ta có $S'(x) = -\frac{64}{x^2} + 2x$. Cho $S'(x) = 0 \Rightarrow 2x^3 - 64 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{32}$.

Lập bảng biến thiên, ta dễ thấy $\min_{(0; +\infty)} S(x) = S(\sqrt[3]{32})$.

Vậy số tiền tối thiểu phải trả là $500\,000 \cdot S(\sqrt[3]{32}) \approx 15$.

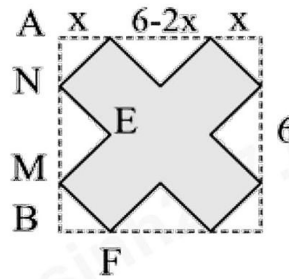
Câu 6: Từ hình vuông có cạnh bằng 6 người ta cắt bỏ các tam giác vuông cân tạo thành hình tô đậm như hình vẽ. Sau đó người ta gấp thành hình hộp chữ nhật không nắp. Thể tích lớn nhất của khối hộp bằng



Lời giải

Trả lời: 11,3

Gọi cạnh hình tam giác cân bị cắt bỏ có độ dài x ($0 < x < 3$)



$$\Rightarrow AN = BM = x \Rightarrow MN = 6 - 2x$$

$$\Rightarrow EM = EN = \frac{6 - 2x}{\sqrt{2}}$$

Hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông cạnh $MF = x\sqrt{2}$,

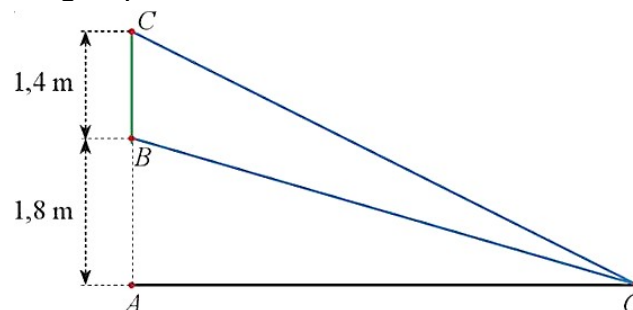
$$\text{Có chiều cao } EN = \frac{6 - 2x}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow V = MF^2 \cdot EN = 2x^2 \cdot \frac{6 - 2x}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x^2(6 - 2x) = -2\sqrt{2}x^3 + 6\sqrt{2}x^2$$

$$\Rightarrow V' = -6\sqrt{2}x^2 + 12\sqrt{2}x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow V_{\max} = V(2) = -2\sqrt{2} \cdot 2^3 + 6\sqrt{2} \cdot 2^2 = 8\sqrt{2}$$

Câu 7: Một màn hình BC có chiều cao $1,4\text{ m}$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA = 1,8\text{ m}$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Hãy xác định khoảng cách AO sao cho góc quan sát BOC là lớn nhất.



Đáp số: 2,4.

Đặt $OA = x$ (m) với $x > 0$

$$\tan \angle BOC = \tan(\angle AOC - \angle AOB) = \frac{\tan \angle AOC - \tan \angle AOB}{1 + \tan \angle AOC \cdot \tan \angle AOB}$$

Ta có:

$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Để góc quan sát $\angle BOC$ lớn nhất thì $\tan \angle BOC$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$ với $x > 0$.

Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thì ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2,4$.
Vậy $AO = 2,4$ m thì góc quan sát $\angle BOC$ lớn nhất.

Câu 8: Một ông nông dân có 240 m hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là.....

Lời giải

Đáp số: 7200

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y , với $2x + y = 240$ ($0 < x < 120; 0 < y < 240$).

Suy ra $y = 240 - 2x$

Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là:

$$S = xy = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2, 0 < x < 120$$

$$S' = 240 - 4x, S' = 0 \Leftrightarrow x = 60 \in (0; 120)$$

Bảng biến thiên

x	0	60	120
S'	+	0	-
S	0	7200	26400

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{(0;120)} S = 7200 \Leftrightarrow x = 60$

Vậy ông nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là 7200 m².

Câu 9: Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đáy thể tích 10 m³. Chi phí làm mỗi m² đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m² nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m² mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là.....

Đáp số: 2,34

Gọi bán kính đáy của hình trụ là $R, R > 0$. Ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{10}{\pi R^2}$$

Suy ra chi phí làm thùng

$$C = \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300$$

$$= 600 \left(\pi R^2 + \frac{10}{R} \right)$$

$$C' = 600 \left(2\pi R - \frac{10}{R^2} \right), \quad C' = 0 \Leftrightarrow 2\pi R - \frac{10}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{5}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$	$+\infty$
C'	—	0	+
C	$+\infty$	$1800\sqrt[3]{25\pi}$	$+\infty$

Dẫn đến

$$\min_{(0; +\infty)} C = 1800\sqrt[3]{25\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

$$h = \frac{10}{\sqrt[3]{25\pi}} \approx 2,34 \text{ m}$$

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là

Câu 10: Biết đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x + 1$ là $ax + by + 4 = 0$. Tính $a + 2b$.

Lời giải

Trả lời: 6

Tập xác định $\mathbb{R}$

Ta có: $y' = -3x^2 + 6x + 9$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow -3x^2 + 6x + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

BBT:

x	$-\infty$	-1	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$			28		$-\infty$
			-4			

Do đó đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(-1; -4)$ và $B(3; 28)$.

Suy ra đường thẳng AB có phương trình $8x - y + 4 = 0 \rightarrow a = 8; b = -1$.

Câu 11: Biết đồ thị hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có hai điểm cực trị $A(1; -7)$, $B(2; -8)$. Tính $y(-1)$.

Lời giải

Trả lời: -35

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ a + b + c + d = -7 \\ 8a + 4b + 2c + d = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 2b + c = 0 \\ 12a + 4b + c = 0 \\ 7a + 3b + c = -1 \\ d = -7 - a - b - c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -9 \\ c = 12 \\ d = -12 \end{cases}$$

Theo bài cho ta có:

Suy ra: $y = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 12$. Do đó, $y(-1) = -35$.

Câu 12: Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + 2$, ($a; b; c \in \mathbb{R}$) có bảng xét dấu như sau:

x	$-\infty$	x_1	x_2	0	$+\infty$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$

Có bao nhiêu số dương trong các số $a; b; c$?

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có $y' = 3ax^2 + 2bx + c$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} < 0 \quad (1) \\ x_1 x_2 = \frac{c}{3a} > 0 \quad (2) \end{cases}$$

Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm $x_1 < x_2 < 0$ nên từ (1); (2) suy ra $a; b; c$ cùng dấu. Hơn nữa $y'(0) = c > 0$ nên $a > 0; b > 0; c > 0$.

Câu 13: Xét một chất điểm chuyển động trên một trục số nằm ngang, chiều dương từ trái sang phải. Giả sử vị trí $s(t)$ của chất điểm trên trục số đã chọn tại thời điểm t được cho bởi công thức $s(t) = t^3 - 9t^2 + 15t, t \geq 0$. Hỏi có bao nhiêu giá trị t nguyên để chất điểm chuyển động sang trái?



Hình 1

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có: Vận tốc $v(t) = s'(t) = (t^3 - 9t^2 + 15t)' = 3t^2 - 18t + 15$

Chất điểm chuyển động theo chiều âm khi

$$v(t) < 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 18t + 15 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-5) < 0 \Leftrightarrow 1 < t < 5$$

Do $t \in \mathbb{Q}$ nên $t \in \{2, 3, 4\}$

Câu 14: Máng trượt của một cầu trượt cho trẻ em được uốn từ một tấm kim loại có bề rộng 80 cm, mặt cắt được mô tả ở Hình 2. Nhà thiết kế khuyến cáo, diện tích của mặt cắt càng lớn thì càng đảm bảo an toàn cho trẻ em.



Hình 2

Gọi S là diện tích mặt cắt. Với x đạt giá trị bằng bao nhiêu thì cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em?

Lời giải

Trả lời: 20

Do tấm kim loại có bề rộng 80 cm nên ta có: $2x + y = 80 \Leftrightarrow y = 80 - 2x$.

Để có thể thiết kế được máng trượt thì $y > 0 \Leftrightarrow 80 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 40$. Suy ra $0 < x < 40$.

Diện tích của mặt cắt máng trượt là: $S = xy = x(80 - 2x) = -2x^2 + 80x$.

Ta có: $S(x) = -2x^2 + 80x$ với $x \in (0; 40)$;

$$S'(x) = -4x + 80;$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow -4x + 80 = 0 \Leftrightarrow x = 20$$

Bảng biến thiên của hàm số $S(x)$ như sau:

x	0	20	40
$S'(x)$	+	0	-
$S(x)$	0	800	0

Do đó, hàm số $S(x)$ đạt cực đại tại $x = 20$ và $S_{CD} = 800$.

Vậy để cầu trượt đảm bảo an toàn nhất cho trẻ em thì $x = 20$ (cm).

Câu 15: Giả sử doanh số của một sản phẩm mới tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm

$$f(t) = \frac{5000}{1 + 5e^{-t}}, t \geq 0$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ là biểu thị tốc độ bán hàng. Hỏi sau khi phát hành bao nhiêu năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất?

Lời giải:

Trả lời: 1,61

$$f'(t) = \frac{-5000(1 + 5e^{-t})'}{(1 + 5e^{-t})^2} = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}$$

Ta có:

Tốc độ bán hàng là lớn nhất khi $f'(t)$ lớn nhất.

$$h(t) = \frac{25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^2}$$

Đặt

$$h'(t) = \frac{-25000e^{-t}(1 + 5e^{-t})^2 - 2 \cdot (-5e^{-t}) \cdot (1 + 5e^{-t}) \cdot 25000e^{-t}}{(1 + 5e^{-t})^4}$$

$$= \frac{-25000e^{-t}(1 + 5e^{-t})(1 + 5e^{-t} - 10e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^4} = \frac{-25000e^{-t}(1 - 5e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^3}$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-25000e^{-t}(1 - 5e^{-t})}{(1 + 5e^{-t})^3} = 0 \Leftrightarrow 1 - 5e^{-t} = 0 \Leftrightarrow e^{-t} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow t = \ln 5 (\text{tm})$$

Ta có bảng biến thiên với $t \in [0; +\infty)$:

t	0	$\ln 5$	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$		1250	0
	$\frac{6250}{9}$		

Vậy sau khi phát hành khoảng $\ln 5 \approx 1,61$ năm thì tốc độ bán hàng là lớn nhất.

Câu 16: Gọi S là tập hợp chứa các tham số m để đồ thị hàm số $y = \frac{mx - 1}{x + m}$ có tiệm cận đứng và tiệm cận ngang tạo với các trục tọa độ hình chữ nhật có diện tích bằng 4. Số phần tử của S là

Lời giải

Đáp án: 2.

$$y = m$$

Phương trình tiệm cận ngang là

$$x = -m$$

Phương trình tiệm cận đứng là

$$\text{Theo đề bài ta có: } |m| \cdot |-m| = 4 \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy S có 2 phần tử.

Câu 17: Người ta cần xây một bể chứa nước sản xuất dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200m^3$. Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chi phí để xây bể là 350 nghìn đồng/ m^2 . Hãy xác định chi phí thấp nhất để xây bể.

Lời giải

Trả lời: 59.

Gọi chiều rộng của hình chữ nhật đáy bể là $x(m)$ suy ra chiều dài của hình chữ nhật là $2x$. Gọi h là chiều cao của bể ta có

$$V = Sh = 2x^2 h = 200 \Rightarrow h = \frac{100}{x^2}.$$

Diện tích của bể là

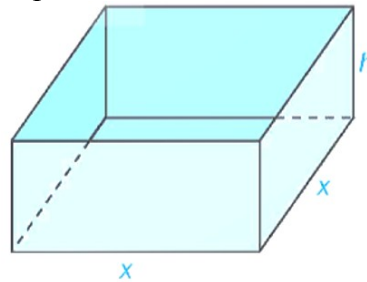
$$S' = 4x - \frac{600}{x^2}$$

$$S' = 0 \Leftrightarrow 4x = \frac{600}{x^2} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150}$$

x	0	$\sqrt[3]{150}$	$+\infty$
S'		0	
S		$S(\sqrt[3]{150})$	

Suy ra chi phí thấp nhất để xây bể là $S(\sqrt[3]{150}) \cdot 350000 \approx 59$ triệu đồng.

Câu 18: Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông cạnh $x(cm)$, chiều cao $h(cm)$ và diện tích bề mặt bằng $108cm^2$ như hình dưới đây. Tìm chiều cao $h(cm)$ sao cho thể tích của hộp là lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: 3.

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(cm, x > 0)$ và chiều cao là $h(cm, h > 0)$.

Diện tích bề mặt của hình hộp là $108cm^2$ nên

$$x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}$$

Thể tích của hình hộp là

$$V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}$$

$$V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$$

x	0	6	$+\infty$	
V'		+	0	-
V	0	108	$-\infty$	

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6 (cm)$.

$$h = \frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3 (cm)$$

Khi đó, chiều cao của hình hộp là

Câu 19: Ông A muốn mua một mảnh đất hình chữ nhật có diện tích bằng $100 m^2$ để làm khu vườn. Để chi phí xây dựng bờ rào xung quanh khu vườn là ít tốn kém nhất thì ông A đã mua mảnh đất có kích thước $a(m) \times b(m)$. Khi đó kết quả của $a + 2b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 30.

Để chi phí xây dựng bờ rào là ít tốn kém nhất thì chu vi mảnh đất phải bé nhất.

Gọi x là chiều dài của mảnh đất hình chữ nhật ($x > 0$)

Suy ra chiều rộng là $\frac{100}{x}$

Chu vi của mảnh đất hình chữ nhật là $C(x) = 2x + \frac{200}{x}$

$$C'(x) = 2 - \frac{200}{x^2} = \frac{2x^2 - 200}{x^2}$$

Ta có:

$$C'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (vì } x > 0)$$

Bảng biến thiên

x	0	10	$+\infty$	
$C'(x)$		-	0	+
$C(x)$	$+\infty$			$+\infty$

$\swarrow \quad \searrow$

40

$$\min C(x) = C(10) = 40$$

Từ bảng biến thiên ta thấy $(0; +\infty)$

Suy ra chu vi mảnh đất hình chữ nhật bé nhất khi chiều dài bằng $10 m$, chiều rộng bằng $10 m$

Vậy $a + 2b = 30$.

Câu 20: Một doanh nghiệp tư nhân chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 30 triệu đồng và bán ra với giá 35 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 400 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe X đang bán, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 100 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Lời giải

Trả lời: 34,5.

Gọi giá bán mới là x với $x \in [30; 35]$.

Khi đó số xe bán ra là $400 + (35 - x)100$.

Lợi nhuận thu được là

$$\begin{aligned} f(x) &= [400 + (35 - x)100] \cdot (x - 30) \\ &= -100x^2 + 6900x - 117000 \\ &= -100 \left(x - \frac{69}{2} \right)^2 + 2025 \leq 2025 \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{69}{2}$.

Vậy giá bán mới là 34,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất.

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 3}{x - 1}$. Gọi M là điểm trên đồ thị có hoành độ $x = 2$. Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ tại M là $y = ax + b$. Giá trị của biểu thức $\frac{a}{b - 17}$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: 0,75.

Ta có: $x = 2 \Rightarrow y = \frac{2^2 + 3}{2 - 1} = 7 \Rightarrow M(2; 7)$

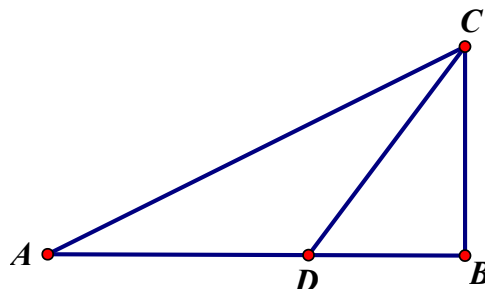
$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x - 1)^2} \Rightarrow f'(2) = -3$$

Phương trình tiếp tuyến: $y = f'(x_0)(x - x_0) + y_0$

$$y = -3(x - 2) + 7 \Leftrightarrow y = -3x + 13 \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 13 \end{cases}$$

Hay
$$\frac{a}{b - 17} = \frac{-3}{13 - 17} = 0,75$$

Câu 22: Một người cần đi từ khách sạn A bên bờ biển đến hòn đảo C . Biết rằng khoảng cách từ đảo C đến bờ biển là 10km, khoảng cách từ khách sạn A đến điểm B trên bờ gần đảo C nhất là 40km. Người đó có thể đi đường thủy hoặc đi đường bộ rồi đi đường thủy. Biết kinh phí đi đường thủy là 5 USD/km, đi đường bộ là 3 USD/km. Hỏi người đó phải đi đường bộ một khoảng bao nhiêu để kinh phí nhỏ nhất? ($AB = 40$ km, $BC = 10$ km)



Lời giải

Đáp số: 32,5.

Đặt $AD = x \text{ km}$, $x \in [0; 40] \Rightarrow BD = 40 - x \Rightarrow CD = \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2}$.

Tổng kinh phí đi từ A đến C là $f(x) = x \cdot 3 + \sqrt{(40 - x)^2 + 10^2} \cdot 5$.

$$f(x) = 3x + 5\sqrt{x^2 - 80x + 1700}$$

$$f'(x) = 3 + 5 \frac{2x - 80}{2\sqrt{x^2 - 80x + 1700}} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} + 5x - 200}{\sqrt{x^2 - 80x + 1700}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 - 80x + 1700} = 200 - 5x \Leftrightarrow x = \frac{65}{2}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{65}{2}$	40
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$			

Vậy để kinh phí nhỏ nhất $\min_{[0,40]} f(x) = 160$ thì người đó đi bộ quãng đường $x = \frac{65}{2}$.

Câu 23: Kính viễn vọng không gian Hubble được đưa vào vũ trụ ngày 24/4/1990 bằng tàu con thoi Discovery. Vận tốc của tàu con thoi trong sứ mệnh này, từ lúc cất cánh tại thời điểm $t = 0(s)$ cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi tại thời điểm $t = 126(s)$, cho bởi hàm số sau:
 $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, (v được tính bằng ft/s, $1 \text{ foot} = 0,3048 \text{ m}$)



Biết rằng gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian từ a giây đến b giây tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi. Khi đó tính giá trị $b - a$.

Lời giải

Xét hàm số vận tốc của tàu con thoi $v(t) = 0,001302t^3 - 0,09029t^2 + 23$, với $t \in [0; 126]$.

Gia tốc của tàu con thoi là $a(t) = v'(t) = 0,003906t^2 - 0,18058t$.

Ta có $a'(t) = 0,007812t - 0,18058$. Cho $a'(t) = 0 \Leftrightarrow t \approx 23$.

Bảng biến thiên của hàm số $a(t)$ như sau:

t	0	23	126		
a'(t)		-	0	+	
a(t)	0		-2,087		39,259

Vậy gia tốc của tàu con thoi sẽ tăng trong khoảng thời gian từ 23 giây đến 126 giây tính từ thời điểm cất cánh cho đến khi tên lửa đẩy được phóng đi.

Khi đó $b - a = 126 - 23 = 103$.

Đáp số: 0103.

Câu 24: Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ

được tính theo công thức $g(t) = \frac{-t^2 + 5t - 3}{t+1}$. Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Lời giải

Với $g(t) = \frac{-t^2 + 5t - 3}{t+1}$, $t > 0$ ta có $g'(t) = \frac{-t^2 - 2t + 8}{(t+1)^2}$.

Cho $g'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{-t^2 - 2t + 8}{(t+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = -4 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

x	0	2	$+\infty$	
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$			1	

Suy ra $\max_{(0;+\infty)} g(t) = 1$ khi $t = 2$.

Vậy sau khi tiêm thuốc 0002 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Đáp số: 0002

Câu 25: Biết rằng tất cả các khoảng nghịch biến của hàm số $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1}$ là hai khoảng $(a;b), (b;c)$ với $a < b < c$. Tính $T = a + b + c$

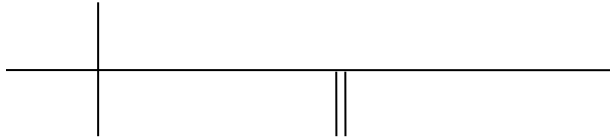
Lời giải

Trả lời: -3

Tập xác định: $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

Ta có: $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$.

Bảng xét dấu của y' :



Vậy hàm số nghịch biến trên mỗi khoảng $(-2; -1)$ và $(-1; 0)$.

Câu 26: Biết rằng đồ thị hàm số $y = x^4 - 2ax^2 + b$ có một điểm cực trị là $(1; 2)$. Tính khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho.

Lời giải

Trả lời: 1,41

Ta có $y' = 4x^3 - 4ax$.

Do đồ thị hàm số đã cho có một điểm cực trị là $(1; 2)$ nên ta có

$$\begin{cases} 4 \cdot 1^3 - 4a \cdot 1 = 0 \\ 1^4 - 2a \cdot 1^2 + b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$y' = 4x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Khi đó

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1		0		1		$+\infty$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$+\infty$				3			$+\infty$

$\nearrow 2 \quad \nwarrow 2 \quad \nearrow 2$

Đồ thị hàm số có hai điểm cực tiểu $A(-1; 2)$, $B(1; 2)$ và một điểm cực đại $C(0; 3)$.

Vậy khoảng cách giữa điểm cực đại và điểm cực tiểu của đồ thị hàm số đã cho là

$$AC = BC = \sqrt{(0-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Câu 27: Biết rằng hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 + 1}$ cùng với điểm $I(-\sqrt{5}; -\sqrt{5})$ tạo thành một tam giác. Diện tích tam giác đó bằng

Lời giải

Trả lời: 6,71

Tập xác định $\mathbb{R}$

$$y' = \frac{(2x+2)(x^2+1) - 2x(x^2+2x-3)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+8x+2}{(x^2+1)^2}$$

+

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{5} \\ x = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

uigeli.xyz

x	$-\infty$	$2 - \sqrt{5}$		$2 + \sqrt{5}$	$+\infty$	
y'		$-$	0	$+$	0	$-$
y	1		$-1 - \sqrt{5}$		$-1 + \sqrt{5}$	1

```
graph LR; y1[1] --> x1["(-∞, 2 - √5)"]; y2["-1 - √5"] --> x2["(2 - √5, 2 + √5)"]; y3["-1 + √5"] --> x3["(2 + √5, +∞)"];
```

Vậy đồ thị hàm số có hai điểm cực trị là $A(2 - \sqrt{5}; -1 - \sqrt{5})$ và $B(2 + \sqrt{5}; -1 + \sqrt{5})$

Khi đó $\overline{AB} = (2\sqrt{5}; 2\sqrt{5}) \Rightarrow AB = 2\sqrt{10}$; $\overline{AI} = (2; -1) \Rightarrow AI = \sqrt{5}$; $\overline{IB} = (2 + 2\sqrt{5}; -1 + 2\sqrt{5}) \Rightarrow IB = \sqrt{45 + 4\sqrt{5}}$.

Trong tam giác $\cos A = \frac{AB^2 + AI^2 - BI^2}{2AB \cdot AI} = \frac{40 + 5 - 45 - 4\sqrt{5}}{2 \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \sin A = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

Diện tích tam giác ABI là: $S_{ABI} = \frac{1}{2} AB \cdot AI \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}} = 3\sqrt{5} \approx 6,71$.

Cách 2: Áp dụng công thức tính nhanh: Với $\overline{AB} = (a; b)$, $\overline{AI} = (c; d)$ thì diện tích tam giác ABI là: $S_{ABI} = \frac{1}{2} |ad - bc|$

Vậy diện tích tam giác ABI là $S_{ABI} = \frac{1}{2} |-2\sqrt{5} - 4\sqrt{5}| = 3\sqrt{5}$.

Câu 28: Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Lời giải

Trả lời: 52

Xét hàm số:

$$f(x) = TR - TC = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000)$$

$$f(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000$$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$.

$$f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 (N) \\ x = -2 (L) \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên:

x	0	52	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$	-4000	74416	$-\infty$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD} = 74416$ tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x = 52$.

Câu 29: Hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; a)$ có độ dài lớn nhất. Khi đó a bằng?

Lời giải

Trả lời: 0

Hàm số $y = \log_3(x^2 - 2x)$ có tập xác định $D = (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$.

Ta có $y' = \frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 3}$. Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

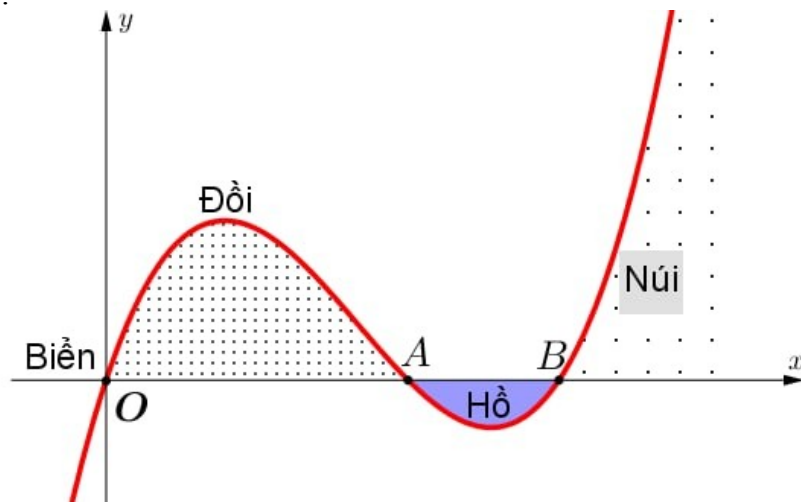
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
y'		-	+	
y	$+\infty$			$+\infty$

Diagram showing a sign chart for the derivative. The x-axis has points $-\infty, 0, 2, +\infty$. The y' row has signs $-, +$ between these points. The y row shows $+\infty$ at $-\infty$ and $+\infty$ at $+\infty$, with arrows indicating the function's behavior. A shaded region is present between $x=0$ and $x=2$.

Dựa vào bảng biến thiên ta có hàm số y nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Vậy $a = 0$.

Câu 30: Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OA = 2$ km, độ rộng của hồ $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m. Tìm độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất.

Lời giải

Trả lời : 158

Theo đề bài ta có : $OA = 2$ km, $OB = 3$ km và $528 \text{ m} = 0,528 \text{ km}$.

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $O(0; 0)$, $A(2; 0)$, $C(3; 0)$ suy ra $y = f(x) = ax(x-2)(x-3) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$ với $a > 0$.

Ta có : $y' = a(3x^2 - 10x + 6)$, $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5-\sqrt{7}}{3} \end{cases}$.

Từ độ cao của đồi ta có tại vị trí điểm cực đại $x_{CD} = \frac{5-\sqrt{7}}{3}; y_{CD} = 0,528$ suy ra

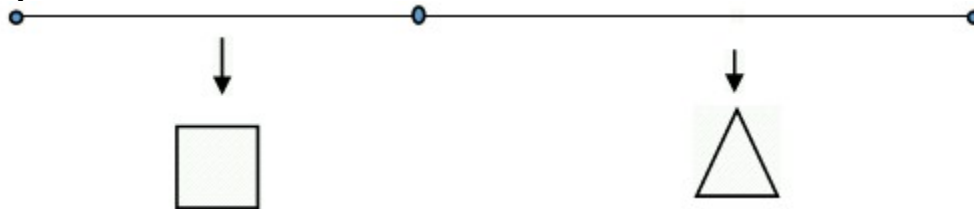
$$a = \frac{0,528}{\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)} \approx 0,25$$

Điểm sâu nhất của hồ ứng với vị trí của điểm cực tiểu $x_{CT} = \frac{5+\sqrt{7}}{3}, y_{CT} \approx 0,1578$
 Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ 0,1578 km hay xấp xỉ 158 m.

Câu 31: Một sợi dây có chiều dài là $6(m)$, được chia thành hai phần. Phần thứ nhất được uốn thành hình tam giác đều, phần thứ hai uốn thành hình vuông. Hỏi độ dài của cạnh hình tam giác đều bằng bao nhiêu để diện tích hai hình thu được là nhỏ nhất? .

Lời giải

Đáp án: 1,13



Gọi độ dài cạnh hình tam giác đều là x khi đó độ dài cạnh hình vuông là $\frac{6-3x}{4}$.

Diện tích của tam giác đều cạnh x là $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$.

Diện tích của hình vuông là $\left(\frac{6-3x}{4}\right)^2$.

Tổng diện tích của tam giác và hình vuông là: $S = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \left(\frac{6-3x}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}[(9+4\sqrt{3})x^2 - 36x + 36]$.

$S' = \frac{1}{16}[(9+4\sqrt{3})2x - 36] = \frac{1}{8}[(9+4\sqrt{3})x - 18]$

$S' = 0 \Leftrightarrow (9+4\sqrt{3})x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}} = \frac{54-24\sqrt{3}}{11}$

Lập bảng biến thiên ta được $\min S = \frac{9\sqrt{3}}{9+4\sqrt{3}} = \frac{-36+27\sqrt{3}}{11}$ khi $x = \frac{18}{9+4\sqrt{3}}$.

Vậy cạnh của tam đều bằng $1,13(m)$ để diện tích 2 hình thu được là nhỏ nhất.

Câu 32: Tìm số đường tiệm cận của đồ thị hàm số sau: $y = \frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$. Do đó đồ thị hàm số không có tiệm cận đứng.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x-1}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 2$$

nên $y=2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

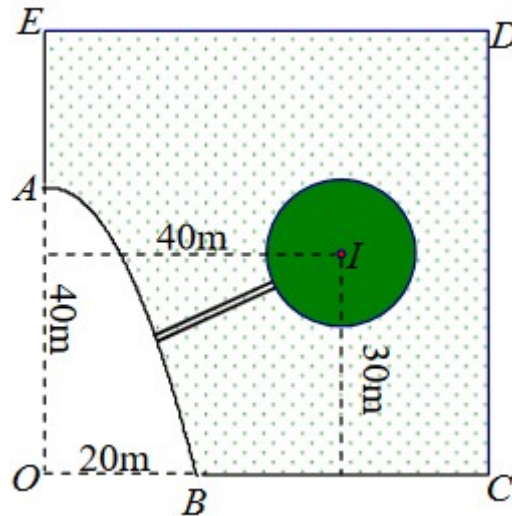
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-1}{\sqrt{x^2+x+2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x-1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -2$$

nên $y=-2$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số.

Vậy hàm số có 2 tiệm cận.

Đáp số: 2

Câu 33: Nhà bác An kinh doanh nhà hàng ăn. Trong vườn có một cái ao hình $ABCDE$.



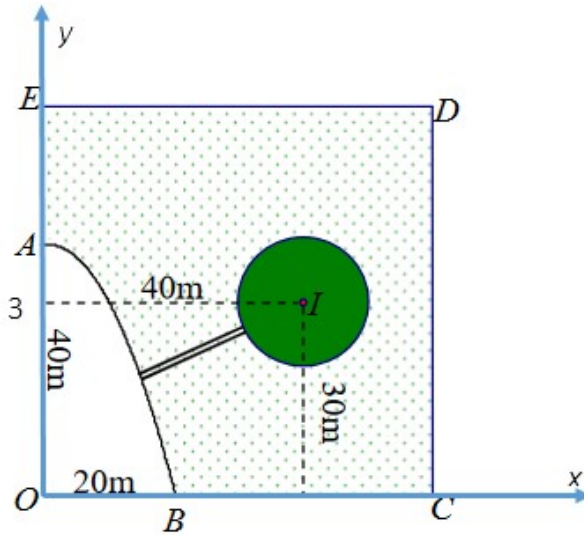
Bác muốn đổ trụ và đổ bê tông xây dựng một cái chòi ở lòng ao để phục vụ thêm đồ uống cho khách sau khi ăn. Vị trí được xác định như sau :

- Khối bê tông hình tròn bán kính 10 m , tâm I lần lượt cách đường thẳng AE và BC là 40 m và 30 m .
- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O .
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA .
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40 m và 20 m .

Công đoạn tiếp theo là bắc một cầu từ bờ AB của ao đến chòi. Tính gần đúng độ dài tối thiểu l của cây cầu.

Lời giải

Đáp số: 17,7



Gán trục tọa độ Oxy sao cho $\begin{cases} A \in Oy \\ B \in Ox \end{cases}$ cho đơn vị là 10.

Khi đó mảnh vườn hình tròn có phương trình $(C): (x-4)^2 + (y-3)^2 = 1$ có tâm $I(4;3)$

Bờ AB là một phần của Parabol $(P): y = 4 - x^2$ ứng với $x \in [0; 2]$

Vậy bài toán trở thành tìm MN nhỏ nhất với $\begin{cases} M \in (P) \\ N \in (C) \end{cases}$.

Đặt trường hợp khi đã xác định được điểm N thì $MN + MI \geq IM$, vậy MN nhỏ nhất khi $MN + MI = IM \Leftrightarrow N; M; I$ thẳng hàng.

Bây giờ, ta sẽ xác định điểm N để IN nhỏ nhất

$$N \in (P) \Leftrightarrow N(x; 4 - x^2) \quad IN = \sqrt{(4-x)^2 + (1-x^2)^2} \Leftrightarrow IN^2 = (4-x)^2 + (1-x^2)^2$$

$$\Leftrightarrow IN^2 = x^4 - x^2 - 8x + 17$$

$$\text{Xét } f(x) = x^4 - x^2 - 8x + 17 \text{ trên } [0; 2] \Leftrightarrow f'(x) = 4x^3 - 2x - 8$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \approx 1,3917 \text{ là nghiệm duy nhất và } 1,3917 \in [0; 2]$$

$$\text{Ta có } f(1,3917) = 7,68; f(0) = 17; f(2) = 13.$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[0; 2]$ gần bằng 7,68 khi $x \approx 1,3917$.

$$\text{Vậy } \min IN \approx \sqrt{7,68} \approx 2,77 \Leftrightarrow IN = 27,7 \text{ m} \Leftrightarrow MN = IN - IM = 27,7 - 10 = 17,7 \text{ m}.$$

Câu 34: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ và có đạo hàm $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$. Hàm số

$y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(a; b)$. Tính $\frac{a}{b}$.

Lời giải

Đáp án: 0,5

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^3(2-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta có

Lập bảng xét dấu của $f'(x)$ ta được:

x	$-\infty$	-1	1	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

Từ bảng xét dấu ta có hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;2)$.

Suy ra $a=1, b=2$. Vậy $\frac{a}{b} = \frac{1}{2} = 0,5$.

Câu 35: Trong 15 phút theo dõi, lưu lượng nước của một con sông được tính theo công thức:

$Q(t) = -\frac{1}{5}t^3 + 3t^2 + 100$. Trong đó Q được tính theo $m^3 / \text{phút}$, t tính theo phút, $0 \leq t \leq 15$.

Trong thời gian theo dõi, lưu lượng nước của con sông lớn nhất bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: 200.

Xét hàm số $Q(t) = -\frac{1}{5}t^3 + 3t^2 + 100$ với $t \in [0;15]$.

Ta có $Q'(t) = -\frac{3}{5}t^2 + 6t$.

$$Q'(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{3}{5}t^2 + 6t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 10 \end{cases}$$

Bảng biến thiên :

t	0	10	15
$Q'(t)$		+	0
$Q(t)$	100	200	100

Từ bảng biến thiên suy ra, lưu lượng nước con sông lớn nhất bằng $200 m^3 / \text{phút}$.

Câu 36: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 5$. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(a;b)$. Tính $\frac{a}{b}$?

Lời giải

Đáp số: -1.

Ta có: $y = x^3 - 3x + 5 \Rightarrow y' = 3x^2 - 3$.

$$y' < 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

Vậy hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;1) \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$.

Câu 37: Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ trên đoạn $\left[\frac{1}{2};2\right]$ là

Lời giải

Trả lời: 3

Hàm số $y = x^2 + \frac{2}{x}$ liên tục trên đoạn $\left[\frac{1}{2}; 2\right]$

Đặt $y = f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

Ta có $y' = 2x - \frac{2}{x^2} = \frac{2x^3 - 2}{x^2}$, $y' = 0 \Rightarrow x = 1 \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$.

Khi đó $f(1) = 3, f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{17}{4}, f(2) = 5$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $m = \min_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} f(x) = f(1) = 3$.

Câu 38: Tổng giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ trên đoạn $[1; 4]$ là...

Lời giải

Trả lời: 0,37

- Hàm số $g(x) = \frac{\ln x}{x}$ liên tục trên đoạn $[1; 4]$

Ta có: $g'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2}$. Khi đó, trên khoảng $(1; 4)$, $g'(x) = 0$ khi $x = e$.

$g(1) = 0, g(e) = \frac{1}{e}, g(4) = \frac{\ln 4}{4} = \frac{\ln 2}{2}$.

Vậy $\max_{[1; 4]} g(x) = \frac{1}{e}, \min_{[1; 4]} g(x) = 0 \Rightarrow \max_{[1; 4]} g(x) + \min_{[1; 4]} g(x) = \frac{1}{e} \approx 0,37$.

Câu 39: Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ trên $[0; \pi]$ là ...

Lời giải

Trả lời: 1,125

Hàm số $f(x) = \sin x + \cos 2x$ liên tục trên $[0; \pi]$

$f(x) = \sin x + \cos 2x = \sin x + 1 - 2\sin^2 x$

Đặt $\sin x = t$. Vì $x \in [0; \pi]$ nên $t \in [0; 1]$

Bài toán trở thành: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số $h(t) = -2t^2 + t + 1$ trên $[0; 1]$

Hàm số $h(t) = -2t^2 + t + 1$ liên tục trên $[0; 1]$

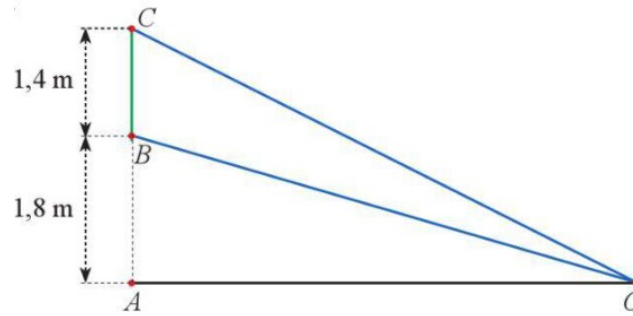
$h(t) = -2t^2 + t + 1, h'(t) = -4t + 1$

$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$

$h(0) = 1, h(1) = 0, h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{9}{8}$

Vậy $\max_{[0; 1]} h(t) = \frac{9}{8}$.

Câu 40: Một màn hình BC có chiều cao $1,4m$ được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng $BA=1,8m$. Một chiếc đèn quan sát màn hình được đặt ở vị trí O trên mặt đất. Hãy xác định khoảng cách AO sao cho góc quan sát BOC là lớn nhất.



Lời giải

Trả lời: $2,4$.

Đặt $OA = x (m)$ với $x > 0$

$$\tan \angle BOC = \tan (\angle AOC - \angle AOB) = \frac{\tan \angle AOC - \tan \angle AOB}{1 + \tan \angle AOC \cdot \tan \angle AOB}$$

Ta có:

$$= \frac{\frac{AC}{OA} - \frac{AB}{OA}}{1 + \frac{AC \cdot AB}{OA^2}} = \frac{\frac{1,4}{x}}{1 + \frac{3,2 \cdot 1,8}{x^2}} = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$$

Để góc quan sát BOC lớn nhất thì $\tan \angle BOC$ lớn nhất.

Xét hàm số $f(x) = \frac{1,4x}{x^2 + 5,76}$ với $x > 0$.

Ta có hàm số $f(x)$ liên tục trên $(0; +\infty)$ và $f'(x) = \frac{-1,4x^2 + 1,4 \cdot 5,76}{(x^2 + 5,76)^2}$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2,4$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên khoảng $(0; +\infty)$ thì ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 2,4$.

Vậy $AO = 2,4 m$ thì góc quan sát BOC lớn nhất.

Câu 41: Một ông nông dân có $240 m$ hàng rào và muốn rào lại cánh đồng hình chữ nhật tiếp giáp với một con sông. Ông không cần rào cho phía giáp bờ sông. Hỏi ông có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là

Lời giải

Trả lời: 7200

Gọi hai kích thước của hình chữ nhật là x và y , với $2x + y = 240$ ($0 < x < 120; 0 < y < 240$).

Suy ra $y = 240 - 2x$

Diện tích của mảnh vườn hình chữ nhật là:

$$S = xy = x(240 - 2x) = 240x - 2x^2, 0 < x < 120$$

$$S' = 240 - 4x, S' = 0 \Leftrightarrow x = 60 \in (0; 120)$$

Bảng biến thiên

x	0	60	120
S'	+	0	-
S	0	7200	26400

Từ bảng biến thiên ta thấy $\max_{(0;120)} S = 7200 \Leftrightarrow x = 60$

Vậy ông nông dân có thể rào được cánh đồng với diện tích lớn nhất là 7200 m^2 .

Câu 42: Anh Hà dự định làm một cái thùng đựng dầu hình trụ bằng sắt có nắp đáy thể tích 10 m^3 . Chi phí làm mỗi m^2 đáy là 400 ngàn đồng, mỗi m^2 nắp là 200 ngàn đồng, mỗi m^2 mặt xung quanh là 300 ngàn đồng. Để chi phí làm thùng là ít nhất thì anh Hà cần chọn chiều cao của thùng là. .

Lời giải

Trả lời: 2,34

Gọi bán kính đáy của hình trụ là $R, R > 0$. Ta có

$$V = \pi R^2 h \Rightarrow h = \frac{10}{\pi R^2}$$

Suy ra chi phí làm thùng

$$C = \pi R^2 \cdot 400 + \pi R^2 \cdot 200 + 2\pi R h \cdot 300$$

$$= 600 \left(\pi R^2 + \frac{10}{R} \right)$$

$$C' = 600 \left(2\pi R - \frac{10}{R^2} \right); \quad C' = 0 \Leftrightarrow 2\pi R - \frac{10}{R^2} = 0 \Leftrightarrow R^3 = \frac{5}{\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$	$+\infty$
C'	-	0	+
C	$+\infty$	$1800\sqrt[3]{25\pi}$	$+\infty$

Dẫn đến

$$\min_{(0;+\infty)} C = 1800\sqrt[3]{25\pi} \Leftrightarrow R = \sqrt[3]{\frac{5}{\pi}}$$

Vậy để chi phí nhỏ nhất thì chiều cao của hình trụ là $h = \frac{10}{\sqrt[3]{25\pi}} \approx 2,34 \text{ m}$.

Câu 43: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có BBT:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$			
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

Vậy $y_{CT} = -2$.

Câu 44: Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x = a$ và $y = b$. Tính $a + 4b$?

Lời giải**Trả lời: 7**Ta có $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5x-3}{2x+6} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5x-3}{2x+6} = +\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}.$$

Do đó đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x = -3$ và $y = \frac{5}{2}$ là các tiệm cận đứng và ngang

Như vậy, $a = -3; b = \frac{5}{2} \Rightarrow a + 4b = -3 + 4 \cdot \frac{5}{2} = 7$

Câu 45: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 9}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $C = a + 3b$ là bao nhiêu?

Lời giải**Trả lời: 13**

Ta có $f(x) = 5x - 1 + \frac{8}{x-1}$ nên đồ thị hàm số nhận hai đường thẳng $x = 1$ và $y = 5x - 1$ tương ứng là TCD và TCX. Suy ra $a = 1, b = 4 \Rightarrow C = 1 + 3 \cdot 4 = 13$.

Câu 46: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T) . Số giao điểm của (C) với (T) là?

Lời giải**Trả lời: 2**

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x + 2 = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 - \frac{x+2}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot \left((x-1)^2 - \frac{1}{x-1} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ (x-1)^3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(TM) \\ x = 2(TM) \end{cases}$$

Vậy số giao điểm của (C) với (T) là 2.

Câu 47: Cho hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

Lời giải

Trả lời: 3

Hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và

$$f(-x) = 2024^{-x} - 2024^x - x - \sin x = -f(x)$$

, suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mặt khác, $y' = f'(x) = 2024^x \cdot \ln 2024 + 2024^{-x} \cdot \ln 2024 + 1 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình

$$f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow f(x+3) = -f(x^3 - 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow f(x+3) = f(-x^3 + 4x - m) \Leftrightarrow x+3 = -x^3 + 4x - m$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = -m$$

$$\text{Đặt } g(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

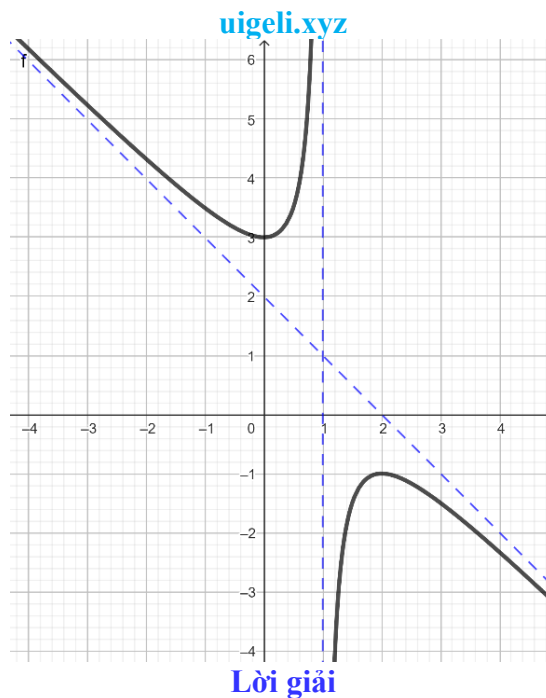
Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = -m$

cắt đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 3$ tại 3 điểm phân biệt

$$\Leftrightarrow 1 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -1$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa đề.

Câu 48: Cho hàm số hữu tỉ $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$ có đồ thị như hình bên dưới. Tính $P = a + b + c$.



Trả lời: -3

Ta có: $y = ax + 2 + \frac{b}{x+c}$.

- Nên đồ thị của hàm số có đường tiệm cận xiên là $y = ax + 2$, mà như hình vẽ đường tiệm cận xiên đi qua điểm $(1; 1)$ suy ra $1 = a \cdot 1 + 2 \Leftrightarrow a = -1$.

- Đồ thị của hàm số có đường tiệm cận đứng là $x = 1$ nên $1 + c = 0 \Leftrightarrow c = -1$.

Khi đó hàm số đã cho có dạng $y = -x + 2 + \frac{b}{x-1}$.

- Mặt khác đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 3)$ nên $-0 + 2 + \frac{b}{0-1} = 3 \Leftrightarrow 2 - b = 3 \Leftrightarrow b = -1$.

Vậy $P = a + b + c = -1 + (-1) + (-1) = -3$.

Câu 49: Giả sử chi phí cho xuất bản x cuốn tạp chí được cho bởi công thức:

$C(x) = 0,0001x^2 - 0,2x + 10000$, trong đó $C(x)$ được tính theo đơn vị là vạn đồng. Chi phí phát hành

cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng. Tỉ số $M(x) = \frac{T(x)}{x}$ được gọi là chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản x cuốn và tổng chi phí $T(x)$ cho x cuốn tạp chí. Tìm chi phí trung bình thấp nhất cho một cuốn tạp chí là bao nhiêu vạn đồng, biết rằng nhu cầu hiện tại xuất bản không quá 30000 cuốn?

Lời giải

Trả lời: 2,2

Chi phí phát hành cho mỗi cuốn là 4 nghìn đồng, tức là 0,4 vạn đồng.

Suy ra chi phí phát hành cho x cuốn là $0,4x$.

Theo đề bài, ta có tổng chi phí xuất bản và phát hành cho x cuốn tạp chí là:

$T(x) = C(x) + 0,4x = 0,0001x^2 + 0,2x + 10000$, với $x > 0$.

Ta có $f(x) = M(x) = \frac{T(x)}{x} = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$.

Xét hàm số $f(x) = 0,0001x + 0,2 + \frac{10000}{x}$, với $0 < x \leq 30000$.

$$f'(x) = 0,0001 - \frac{10000}{x^2} = \frac{0,0001x^2 - 10000}{x^2};$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10000 \text{ (do } x > 0 \text{)}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Bảng biến thiên:

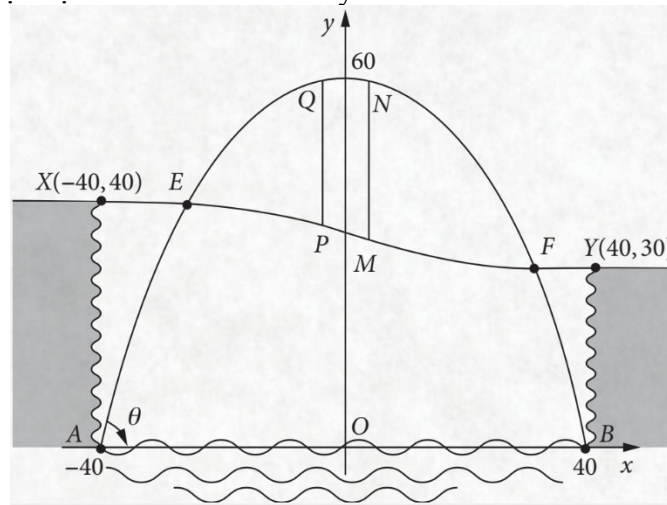
x	0	10000	30000	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(10000)$	$f(30000)$	

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $M(x)$ nhỏ nhất khi $x = 10000$.

Do đó, số lượng tạp chí cần xuất bản sao cho chi phí trung bình thấp nhất là $x = 10000$.

Vậy chi phí trung bình cho một cuốn tạp chí khi xuất bản 10000 cuốn là: $M(10000) = 2,2$.

Câu 50: Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.



Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$.

Hai cột đỡ dọc MN và PQ là đoạn nối giữa khung của Parabol và đường XY . Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất.

Lời giải

Trả lời: 49,5

Theo bài ra ta có: phương trình của Parabol là $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$$D = 60 - \frac{3}{80}x^2 - \left(\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 \right) \text{ với } x \in (-23,71; 27,99)$$

$$D' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49$$

Xét

Bảng biến thiên:

x	-23,71	2,49	27,99
D'(x)	+	0	-
D(x)	<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">0</div> <div style="text-align: center;">25,23</div> <div style="text-align: center;">0</div> </div>		

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2,49$

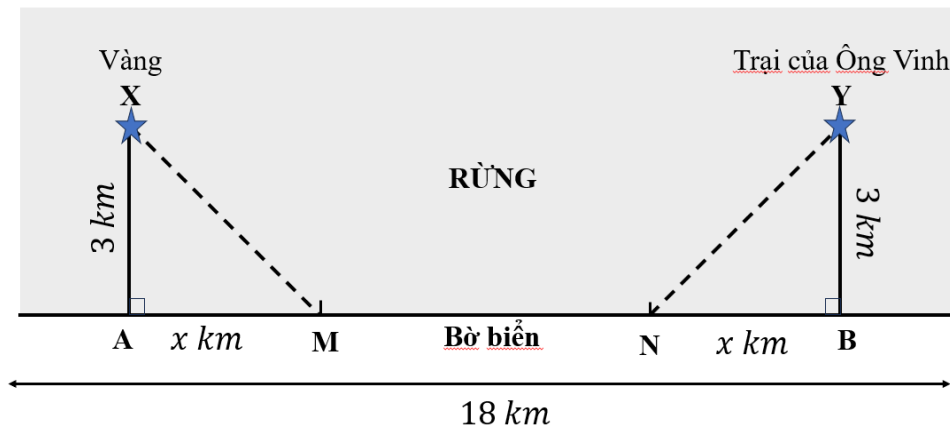
$$\Rightarrow MN = D_{MN} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot 2,49}{16} + 35 \right) \approx 25,23$$

Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua $Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49$

$$\Rightarrow PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot -2,49}{16} + 35 \right) \approx 24,3$$

Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

Câu 51: Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Anh ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A : 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển. Trại của Ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B : 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km.



Khi đang đào vàng, Ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h. Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua điểm M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại.

Lời giải

Trả lời: 32,6

Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến trại phải thấp nhất.

Vậy nên Quỹ đường ông Vinh di chuyển về đến trại phải thấp nhất.

Quỹ đường của Ông Vinh

Theo bài ra ta có: ông Vinh sẽ đi qua các quỹ đường $XM + MN + NY$.

Ta có: $XM = NY = \sqrt{9 + x^2}$; $MN = 18 - 2x$

$$T(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{5} + \frac{9-x}{13} \right) \text{ với } x \in (0;9)$$

Thời gian Ông Vinh chạy đến Trại nghỉ là:

$$T'(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9+x^2}}{5} + \frac{9-x}{13} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Xét

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{5}{4}$	9
T'(x)	-	0	+
T(x)	$\frac{168}{65}$	$\frac{162}{65}$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

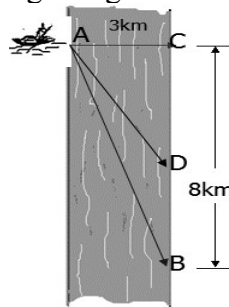
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = \frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow \min_{x \in (0,9)} T(x) = T\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$$

$$\min_{(0,+\infty)} y = 50 \log \left(\frac{162}{65} + 2 \right) \approx 32,6$$

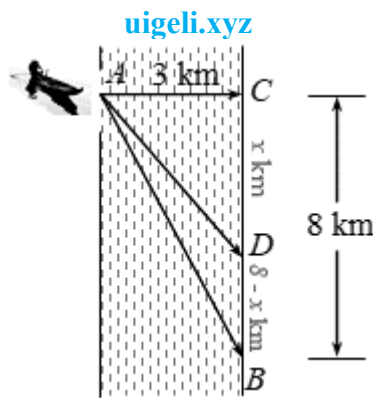
Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là

Câu 52: Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới điểm B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km . Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h , chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8 \text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất để người đàn ông đến B .



Lời giải

Trả lời: 80



Gọi x (km) là độ dài quãng đường CD , $(0 \leq x \leq 8)$; $8 - x$ (km) là độ dài quãng đường DB .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2 + 9}$ là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8 - x}{8}$

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$ trên khoảng $[0; 8]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 80'$.

Câu 53: Cho hàm số $y = x + 1 + \frac{1}{x-1}$ có đồ thị là (C) . Điểm M là điểm bất kỳ trên đồ thị (C) , tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai tiệm cận của (C) một tam giác có diện tích bằng

Lời giải

Trả lời: 2

Gọi $M(x_0; y_0) \in (C) \Rightarrow y_0 = x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1}$.

$$y = \left[1 - \frac{1}{(x_0 - 1)^2} \right] (x - x_0) + x_0 + 1 + \frac{1}{x_0 - 1} \quad (*)$$

Tiếp tuyến tại M có phương trình là:

Gọi l là giao hai tiệm cận, tọa độ của $l(1; 2)$

Tiếp tuyến cắt tiệm cận đứng $x=1$ tại điểm B
 Tiếp tuyến cắt tiệm cận xiên $y=x+1$ tại điểm A .

$$\Rightarrow \left[1 - \frac{1}{(x_0-1)^2} \right] (x_A - x_0) + x_0 + 1 + \frac{1}{x_0-1} = x_A + 1 \Leftrightarrow x_A = 2x_0 - 1 \Rightarrow A(2x_0 - 1; 2x_0)$$

Diện tích tam giác AIB là $S \Rightarrow S = \frac{1}{2} IA \cdot IB \cdot \sin 45^\circ = \frac{1}{4} \sqrt{2} IA \cdot IB \quad (1)$

Ta có: $\overline{IA} = (2x_0 - 2; 2x_0 - 2) \Rightarrow IA^2 = 8(x_0 - 1)^2 \Leftrightarrow IA = |x_0 - 1| 2\sqrt{2}$

$\overline{IB} = \left(0; \frac{2}{x_0 - 1} \right) \Rightarrow IB = \frac{2}{|x_0 - 1|} \Leftrightarrow IA \cdot IB = |x_0 - 1| \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{2}{|x_0 - 1|} = 4\sqrt{2}$

$\Rightarrow S = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} = 2$

Câu 54: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 2$. Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: -2

Ta có BBT:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	
y	$-\infty$		2		-2		$+\infty$

Vậy $y_{CT} = -2$.

Câu 55: Cho hàm số $y = \frac{5x-3}{2x+6}$. Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng và ngang lần lượt là các đường thẳng $x=a$ và $y=b$. Tính $a+4b$?

Lời giải

Trả lời: 7

Ta có $\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{5x-3}{2x+6} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{5x-3}{2x+6} = +\infty$. ZS

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x-3}{2x+6} = \frac{5}{2}$.

Do đó đồ thị hàm số nhận các đường thẳng $x=-3$ và $y=\frac{5}{2}$ là các tiệm cận đứng và ngang

Như vậy, $a=-3; b=\frac{5}{2} \Rightarrow a+4b = -3 + 4 \cdot \frac{5}{2} = 7$

Câu 56: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \frac{5x^2 - 6x + 9}{x-1}$ có tâm đối xứng là $I(a;b)$. Giá trị của biểu thức $C = a+3b$ là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 13

Ta có $f(x) = 5x - 1 + \frac{8}{x-1}$ nên đồ thị hàm số nhận hai đường thẳng $x=1$ và $y=5x-1$ tương ứng là TCD và TCX. Suy ra $a=1, b=4 \Rightarrow C=1+3 \cdot 4=13$.

Câu 57: Cho hàm số $y = x^3 - 3x + 2$ có đồ thị (C) và $y = \frac{x+2}{x-1}$ có đồ thị (T) . Số giao điểm của (C) với (T) là?

Lời giải

Trả lời: 2

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3 - 3x + 2 = \frac{x+2}{x-1} \Leftrightarrow (x+2)(x-1)^2 - \frac{x+2}{x-1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \cdot \left((x-1)^2 - \frac{1}{x-1} \right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ (x-1)^3=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-2(TM) \\ x=2(TM) \end{cases}$$

Vậy số giao điểm của (C) với (T) là 2.

Câu 58: Cho hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0$ có đúng ba nghiệm phân biệt?

Lời giải

Trả lời: 3

Hàm số $y = f(x) = 2024^x - 2024^{-x} + x + \sin x$ xác định trên $\mathbb{R}$ và

$$f(-x) = 2024^{-x} - 2024^x - x - \sin x = -f(x)$$

, suy ra $f(x)$ là hàm số lẻ.

Mặt khác, $y' = f'(x) = 2024^x \cdot \ln 2024 + 2024^{-x} \cdot \ln 2024 + 1 + \cos x > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $f(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Khi đó, phương trình

$$f(x+3) + f(x^3 - 4x + m) = 0 \Leftrightarrow f(x+3) = -f(x^3 - 4x + m)$$

$$\Leftrightarrow f(x+3) = f(-x^3 + 4x - m) \Leftrightarrow x+3 = -x^3 + 4x - m$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 3x + 3 = -m$$

Đặt $g(x) = x^3 - 3x + 3 \Rightarrow g'(x) = 3x^2 - 3$.

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-1 \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	5	1	$+\infty$	

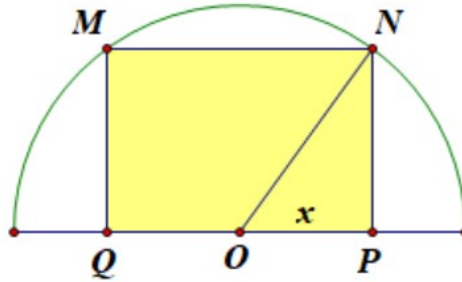
Từ bảng biến thiên suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = -m$ cắt đồ thị hàm số $g(x) = x^3 - 3x + 3$ tại 3 điểm phân biệt
 $\Leftrightarrow 1 < -m < 5 \Leftrightarrow -5 < m < -1$.

Vậy có 3 giá trị nguyên của m thỏa đề.

Câu 59: Từ một miếng tôn dạng nửa hình tròn có bán kính $R = 4$ dm, người ta muốn cắt ra một hình chữ nhật. Hỏi diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 16



Gọi hình chữ nhật cần tính diện tích là $MNPQ$ có $OP = x$ ($0 < x < 4$), $ON = 4$.

Khi đó diện tích của hình chữ nhật $MNPQ$ là: $S = MN \cdot NP = 2x\sqrt{16 - x^2}$.

Xét hàm số: $f(x) = 2x\sqrt{16 - x^2}$ trên $(0; 4)$.

Ta có: $f'(x) = 2\sqrt{16 - x^2} - \frac{2x^2}{\sqrt{16 - x^2}} = \frac{-4x^2 + 32}{\sqrt{16 - x^2}}$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\sqrt{2} \in (0; 4) \\ x = -2\sqrt{2} \notin (0; 4) \end{cases}$.

BBT:

x	0		$2\sqrt{2}$		4
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0		16		0

Ta có: $\max_{(0;4)} f(x) = f(2\sqrt{2}) = 16$.

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật có thể cắt được là $16(\text{dm}^2)$.

Câu 60: Một hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm sản xuất mỗi ngày được x mét vải lụa ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét vải lụa, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$$

Giả sử hộ làm nghề dệt này bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa. Hỏi lợi nhuận tối đa của hộ làm nghề dệt vải lụa tơ tằm trong một ngày?

Lời giải

Trả lời: 1,2

Số tiền thu về khi bán x mét vải lụa là: $220x$.

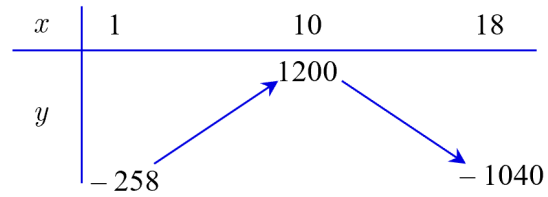
Lợi nhuận thu được khi bán x mét vải lụa là:

$$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1; 18]$

$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240; \quad L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1; 18] \\ x = -8 \notin [1; 18] \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Vậy hộ làm nghề dệt này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là ^{1,2} triệu đồng khi sản xuất ¹⁰ mét vải lụa trong một ngày.