

Đề gồm 3 trang

Mã đề thi
101

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu, CBCT không giải thích gì thêm)

Họ, tên thí sinh:..... SBD:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. (Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.)**Câu 1:** Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ tại điểm x_0 . Giá trị của $T = mx_0$ bằng:

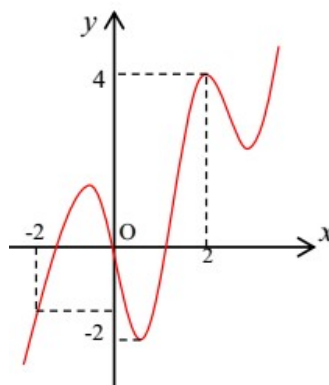
- A. $T = 25$. B. $T = \frac{4}{3}$. C. $T = 2$. D. $T = 12$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$
y	1	0	$\frac{1}{2}$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

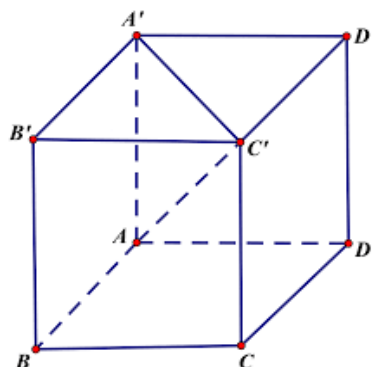
Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3]$.

- A. 21. B. 5. C. 6. D. 4.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA})$ bằng

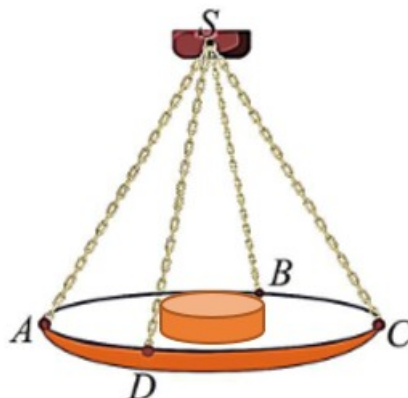
- A. $\frac{a^2}{2}$. B. $-a^2$. C. $2a^2$. D. $-\frac{1}{2}a^2$.

- Câu 5:** Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với $\angle DAB = 120^\circ$. Biết độ dài các cạnh $AB = 25 \text{ cm}$, $AD = 12 \text{ cm}$ và $AA' = 12 \text{ cm}$. Tính $|\vec{AB} + \vec{A'D'} + \vec{CC'}|^2$.



- A. 613 cm² B. $\sqrt{469}$ cm² C. $\sqrt{613}$ cm² D. 205 cm²

- Câu 6:** Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m = 4 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có $\angle ASC = 60^\circ$. Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (N). Biết trọng lượng của vật nặng được tính theo công thức $P = mg$, lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Khi đó giá trị của a bằng:

- A. 35 B. 20 C. 12 D. 25

- Câu 7:** Trong một căn phòng, người ta trang trí một bóng đèn LED có thể di chuyển trên một thanh sắt. Một đầu được treo cách trần nhà $0,7 \text{ m}$ và cách từng bức tường vuông góc với nhau lần lượt là $0,2 \text{ m}$ và $1,5 \text{ m}$. Đầu còn lại treo cách trần nhà $0,6 \text{ m}$, cách hai bức tường là $1,8 \text{ m}$ và $1,3 \text{ m}$. Hãy tính độ dài của thanh sắt đó. (Làm tròn đến chữ số hàng phần trăm).

- A. 1,62 B. 1,58 C. 1,65 D. 1,52

- Câu 8:** Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -3)$, $B(4; 0; 5)$, $C(2; 0; 1)$. Gọi M là điểm bất kì sao cho biểu thức $P = 2MA^2 + 3MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất đó bằng

- A. 90 B. 35 C. 60 D. 120

- Câu 9:** Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(2; -1; 3)$, $C(0; 1; 2)$. Gọi $H(a; b; c)$ là chân đường hạ xuống từ A xuống cạnh BC . Giá trị của $3a + 2b + c$ bằng:

- A. 2 B. -2 C. 4 D. 3

- Câu 10:** Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau:

Cân nặng (kg)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)
Số quả mít	6	x	19	9	4

Tìm tần số x biết phương sai là $s^2 = 4,8016$.

- A. 15. B. 14. C. 12. D. 16.

Câu 11: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau.

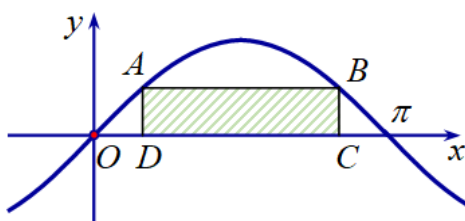
Tuổi thọ	[2;3;5)	[3;5;5)	[5;6;5)	[6;5;8)
Số bóng đèn	8	22	35	15

Số trung bình của mẫu số liệu này là (làm tròn đến hàng phần chục)

- A. 5,2. B. 5,3. C. 5,8. D. 6,3.

Câu 12: Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$. Các điểm C, D thuộc trục

Ox sao cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$.



Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng

- A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2}{3}\pi^2$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13: Cho $\tan \alpha = \frac{2b}{a-c}$. Giá trị của biểu thức $A = a \cos^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha$ là

- A. b . B. a . C. $-a$. D. $-b$.

Câu 14: Cho a, b là hai số nguyên dương lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1} = b^x$ có hai nghiệm phân

biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn

$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$ bằng

- A. 40. B. 41. C. 44. D. 46.

Câu 15: Gọi S là tập các số thực $(x; y)$ sao cho $x \in (0; +\infty)$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y = \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$. Biết rằng giá

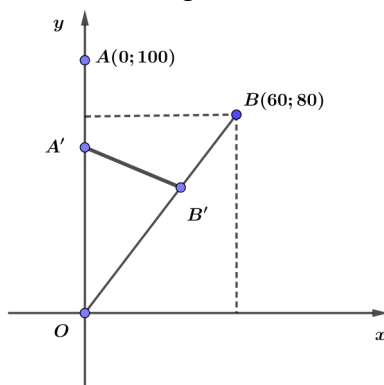
trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^y + \cos y - 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$ với $(x; y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. $x_0 \in (0; 1)$. B. $x_0 = 1$. C. $x_0 \in [1; 2)$. D. $x_0 = 2$.

Câu 16: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0; 100)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 5 m/s. Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60; 80)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 10 m/s như hình vẽ minh họa. Đặt $f(t)$ là khoảng cách mà hai con chuồn chuồn bay được sau thời gian t

(giây), $t \in [0; 10]$. Biết $\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - 5\sqrt{85}}{t^2 - 25} = -\frac{a\sqrt{b}}{c}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$ và phân số $\frac{a}{c}$ tối giản.

Giá trị của biểu thức $P = 4a^2 - b + c$ bằng?



A. 125.

B. 121.

C. 120.

D. 85.

Câu 17: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)}$ bằng

A. 10.

B. $\frac{5}{3}$.

C. 1.

D. 2.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 4, AD = 2$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Lấy các điểm M và N thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NS} + 4\overrightarrow{ND} = \vec{0}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) . Giá trị của $\cos^2 \alpha$ là

A. $\frac{514}{1465}$.

B. $\frac{516}{1465}$.

C. $\frac{506}{1465}$.

D. $\frac{504}{1465}$.

Câu 19: Cho đa giác đều có 2024 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 100°

A. $2024C_{899}^2$.

B. C_{2024}^3 .

C. $2024C_{899}^3$.

D. $2024C_{900}^2$.

Câu 20: Cho một đa giác đều gồm $2n$ đỉnh ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$). Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là $\frac{1}{5}$. Tìm n

A. $n = 5$.

B. $n = 4$.

C. $n = 10$.

D. $n = 8$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng (Đ) hoặc sai (S).

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \log x$.

a) Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $(0; +\infty)$.

b) Tập nghiệm của bất phương trình $\log x < 2$ là $(-\infty; 100)$.

c) Hàm số $y = f(-x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

$$M = f\left(\frac{A}{A_0}\right)$$

d) Cường độ một trận động đất (*richter*) được cho bởi công thức $M = f\left(\frac{A}{A_0}\right)$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ rung chấn mạnh hơn gấp 4 lần. Khi đó, cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ xấp xỉ bằng 8,9 độ richter (làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 2: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (hình ảnh bên dưới)



Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h , trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vector $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a)** Véc-tơ biểu diễn lực nâng và trọng lực cùng phương.
b) Véc-tơ biểu diễn lực cản của không khí và lực đẩy không cùng phương.
c) Có $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ (k là một số thực dương nào đó)

d) Khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h thì $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với $k = \frac{2025}{2116}$.

Câu 3. Thầy giáo thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp $^{12}C_1$ và $^{12}C_2$ ở bảng sau:

Điểm trung bình	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$
11A	1	0	11	22	6
11B	0	6	8	14	12

- a)** Điểm trung bình của lớp 11 C_1 là $8,3$ (làm tròn đến hàng phần chục).
b) Điểm trung bình của lớp 11 C_1 nhỏ hơn lớp 11 C_2 .
c) Phương sai của mẫu số liệu lớp 11B là $1,05$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
d) So sánh theo độ lệch chuẩn thì các học sinh lớp 11 C_1 học đồng đều hơn lớp 11 C_2 .

Câu 4. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. B là tập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A có dạng $\overline{abcd}$. C là tập tất cả các số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A .

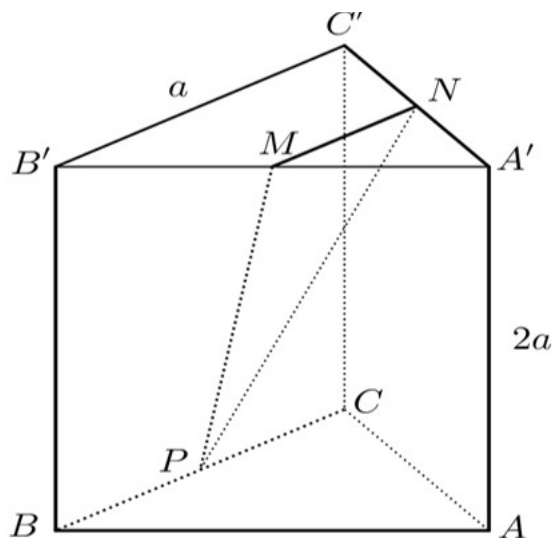
- a)** Chọn ngẫu nhiên một số thuộc B . Có tất cả 30 số lấy ra là số lẻ và thoả mãn $a < b < c < d$.

b) Chọn thứ tự 2 số thuộc B . Xác suất để trong hai số đó có đúng một số có mặt chữ số 3 là $\frac{420}{1679}$.

c) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc B . Xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng $\frac{1}{2}$.

d) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc C . Xác suất để chọn được số chia hết cho 1111 là $\frac{1}{105}$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = 2a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề dưới đây?

a) Thể tích khối tứ diện $ACA'B'$ bằng $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

b) Khoảng cách giữa BB' và $A'C'$ là a .

c) Tan của góc giữa đường thẳng NP và mặt phẳng (ABC) là $\frac{1}{4}$.

d) Cosin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) bằng $\frac{\sqrt{201}}{67}$.

Câu 6. Một công ty chuyên về mua bán xe ô tô đã qua sử dụng, sau khi khảo sát thị trường trong thời gian 06 tháng đã đưa ra công thức chung về giá trị còn lại của ô tô 4 chỗ kể từ khi đưa vào sử dụng

$$P(t) = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$$

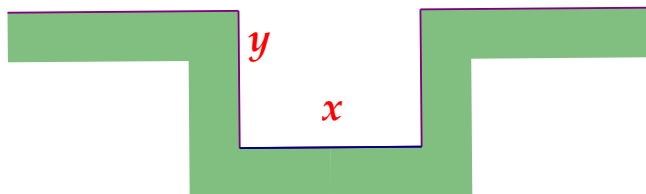
(các loại xe 4 chỗ không sử dụng mục đích kinh doanh) được tính. Trong đó A là giá tiền ban đầu mua xe (triệu đồng), t là số năm kể từ khi đưa vào sử dụng. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Anh An mua chiếc xe 4 chỗ với giá 520 triệu, anh sử dụng được một năm thì bán với giá 484 triệu. Theo cách tính của công ty trên anh An đã bán lỗ.

- b) Anh Bình mua chiếc xe 4 chỗ với giá 700 triệu, anh sử dụng được 30 tháng rồi bán với giá 584 triệu. Còn anh Cường mua chiếc xe 4 chỗ với giá 630 triệu, anh sử dụng được 2 năm rồi bán với giá 530 triệu. Anh Bình bán xe được giá hơn anh Cường bán xe.
- c) Theo cách tính của công ty trên, sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc xe giảm đi 7% so với giá trị ban đầu của xe.
- d) Công ty mua một chiếc xe đã được sử dụng 4 năm với giá 500 triệu đồng. Một người dự tính giá trị của chiếc xe lúc xuất xưởng là 700 triệu đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

- Câu 1.** Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 + y^2 + 5) + \log_2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \left(\frac{xy}{2} - 2 \right)^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 9y$.
- Câu 2.** Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S , ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất).



Gọi x, y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương. Khi mương dẫn nước đủ điều kiện dạng "Thủy động học" (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật). Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

- Câu 3.** Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang $AB \parallel CD, AB = 2CD$. Gọi (P) là một mặt phẳng tùy ý không đi qua S và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P, Q thỏa mãn $\overline{SA} = 2\overline{SM}, \overline{SC} = 5\overline{SP}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = 2 \left(\frac{SB}{SN} \right)^2 + \left(\frac{SD}{SQ} \right)^2$.

- Câu 4.** Hai cầu thủ Công Phượng và Quang Hải sút phạt độc lập nhau, mỗi người sút phạt 1 lần với xác suất thành công của Công Phượng và Quang Hải lần lượt là x, y ($0 < x, y < 1$). Biết xác suất để có ít nhất một cầu thủ sút phạt thành công gấp hai lần xác suất cả hai cầu thủ cùng sút phạt thành công. Xác suất để cả hai cầu thủ sút phạt thành công có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu (kết quả lấy gần đúng đến hàng phần trăm)?

- Câu 5:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{a}{b}$, a và b nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + 2b$.

- Câu 6.** Tìm tất cả các số nguyên $n \neq 0$ để hàm số $y = f(x) = \cos(nx + 2024\pi) \cdot \cos\left(\frac{10x - 2025n\pi}{2n}\right)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ 3π .

----- Hết -----
ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

SỞ GD&ĐT THANH HÓA
TRƯỜNG THPT THIỆU HÓA

ĐỀ KHẢO SÁT CHẤT LƯỢNG HSG
NĂM HỌC 2024 - 2025
MÔN: TOÁN 12

Thời gian làm bài: 90 phút; không tính thời gian phát đề

Đề gồm 3 trang

Mã đề thi 101

(Thí sinh không được sử dụng tài liệu, CBCT không giải thích gì thêm)

Họ, tên thí sinh:..... SBD:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm với nhiều phương án lựa chọn. (Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn một phương án.)

Câu 1: Gọi m là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = x - 1 + \frac{4}{x-1}$ trên khoảng $(1; +\infty)$ tại điểm x_0 . Giá trị của $T = mx_0$ bằng:

- A. $T = 25$. B. $T = \frac{4}{3}$. C. $T = 2$. D. $T = 12$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$y' = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}, y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y				$+\infty$	4	$+\infty$

$$\Rightarrow m = \min_{(1; +\infty)} y = 4 \text{ khi } x = 3.$$

$$\text{Vậy } T = mx_0 = 12.$$

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình dưới đây.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
y'	-	0	+
y	1	0	$\frac{1}{2}$

Tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2f(x)-1) = 0 \\ 2f(x)-1 < 0, \forall x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2f(x)-1} = -\infty$$

Suy ra hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có một đường tiệm cận ngang $y = 1$.

Mặt khác số tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ đúng bằng số nghiệm thực của

phương trình $2f(x)-1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}$.

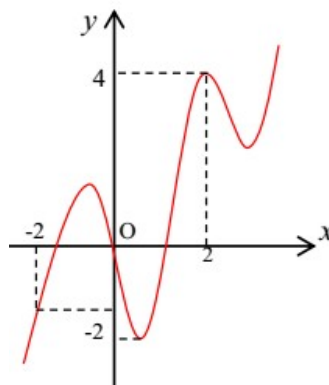
Mà số nghiệm thực của phương trình $f(x) = \frac{1}{2}$ bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với đường thẳng $y = \frac{1}{2}$.

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đường thẳng $y = \frac{1}{2}$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ có 1 tiệm cận đứng.

Vậy tổng số tiệm cận ngang và tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{1}{2f(x)-1}$ là 2.

Câu 3: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m$ có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3]$



A. 21.

B. 5.

C. 6.

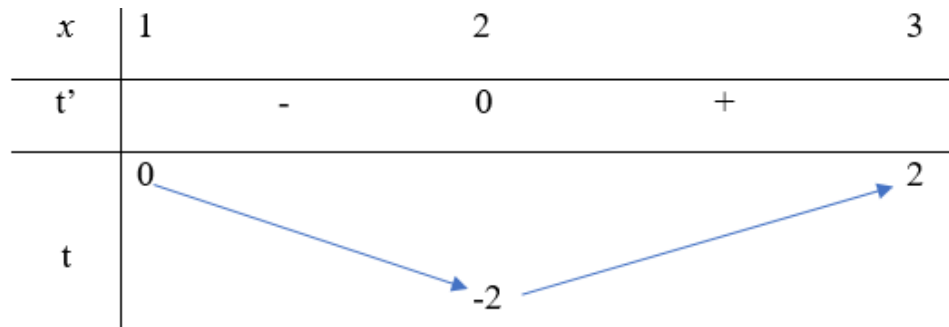
D. 4.

Lời giải

Chọn C

Đặt $t = x^3 - 3x^2 + 2, t' = 3x^2 - 6x$.

$t' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$. Ta có bảng biến thiên của hàm số t :



Vậy với $1 \leq x \leq 3 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2$.

Phương trình $f(x^3 - 3x^2 + 2) = m^2 - 3m \Leftrightarrow f(t) = m^2 - 3m$ với $t \in [-2; 2]$.

Phương trình có nghiệm thuộc đoạn $[1; 3] \Leftrightarrow -2 \leq m^2 - 3m \leq 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 3m + 2 \geq 0 \\ m^2 - 3m - 4 \leq 0 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq m \leq 1 \\ 2 \leq m \leq 4 \end{cases}$

Vì $m \in \mathbf{Z} \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

Vậy có 6 giá trị nguyên thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 4: Cho tứ diện đều $ABCD$ có cạnh bằng a . Giá trị tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA})$ bằng
A. $\frac{a^2}{2}$ **B.** $-a^2$ **C.** $2a^2$ **D.** $-\frac{1}{2}a^2$

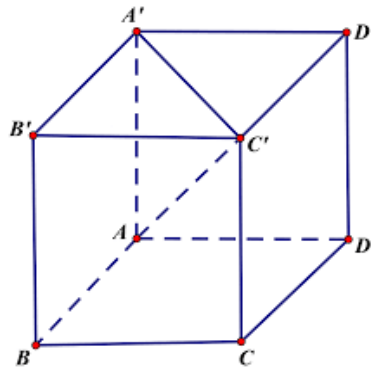
Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CB} = AB \cdot CB \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}) = a \cdot a \cdot \cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}$

Câu 5: Cho hình hộp đứng $ABCD.A'B'C'D'$, trong đó mặt đáy là hình bình hành với $\angle DAB = 120^\circ$.

Biết độ dài các cạnh $AB = 25 \text{ cm}$, $AD = 12 \text{ cm}$ và $AA' = 12 \text{ cm}$. Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'}|^2$.



A. 613 cm **B.** $\sqrt{469}$ cm **C.** $\sqrt{613}$ cm **D.** 205 cm

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$

Theo quy tắc hình hộp, ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC'}$, vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}|^2 = |\overrightarrow{AC'}|^2 = AC'^2$

Với $AC' = \sqrt{AC^2 + AA'^2}$

Trong đó: $AA' = 12 \text{ cm}$

Do tổng hai góc kề của một hình bình hành là 180° nên ta có góc $\angle ABC = 60^\circ$

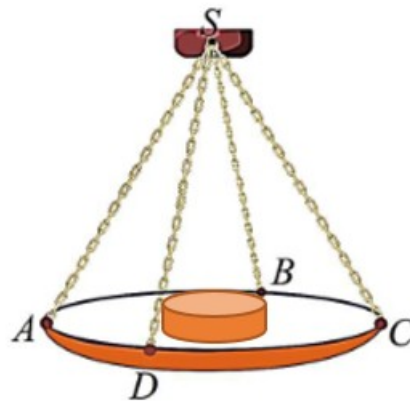
Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC , ta có:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \angle ABC = 25^2 + 12^2 - 2 \cdot 25 \cdot 12 \cdot \cos 60^\circ = 469$$

Vậy $AC'^2 = AC^2 + AA'^2 = 469 + 144 = 613 \text{ cm}$

Câu 6: Một chiếc cân đòn tay đang cân một vật có khối lượng $m = 4 \text{ kg}$ được thiết kế với đĩa cân được giữ bởi bốn đoạn xích SA, SB, SC, SD sao cho $SABCD$ là hình chóp tứ giác đều có

$\angle ASC = 60^\circ$. Độ lớn của lực căng cho mỗi sợi xích bằng $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ (N). Biết trọng lượng của vật nặng được tính theo công thức $P = mg$, lấy $g = 10 \text{ m/s}^2$.



Khi đó giá trị của a bằng:

A. 35.

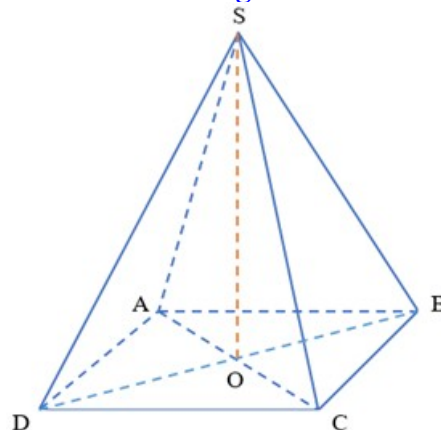
B. 20.

C. 12.

D. 25.

Chọn B

Lời giải



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{OS} + \vec{SA} + \vec{OS} + \vec{SB} + \vec{OS} + \vec{SC} + \vec{OS} + \vec{SD} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD} = -4\vec{OS} = 4\vec{SO} \\ &\Rightarrow |\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC} + \vec{SD}| = |4\vec{SO}| = 4SO \end{aligned}$$

Trọng lượng của vật nặng là $P = mg = 4 \cdot 10 = 40 \text{ (N)}$.

Suy ra $4|\vec{SO}| = P = 40 \text{ (N)} \Rightarrow SO = 10$.

Lại có tam giác ASC vuông cân tại S nên

$$SO = SA \cdot \sin \angle SAC \Rightarrow SA = \frac{SO}{\sin \angle SAC} \Leftrightarrow \frac{a\sqrt{3}}{3} = \frac{10}{\sin 60^\circ} \Rightarrow a = 20.$$

Câu 7: Trong một căn phòng, người ta trang trí một bóng đèn LED có thể di chuyển trên một thanh sắt. Một đầu được treo cách trần nhà $0,7\text{ m}$ và cách từng bức tường vuông góc với nhau lần lượt là $0,2\text{ m}$ và $1,5\text{ m}$. Đầu còn lại treo cách trần nhà $0,6\text{ m}$, cách hai bức tường là $1,8\text{ m}$ và $1,3\text{ m}$. Hãy tính độ dài của thanh sắt đó. (Làm tròn đến chữ số hàng phần trăm).

A. 1,62.

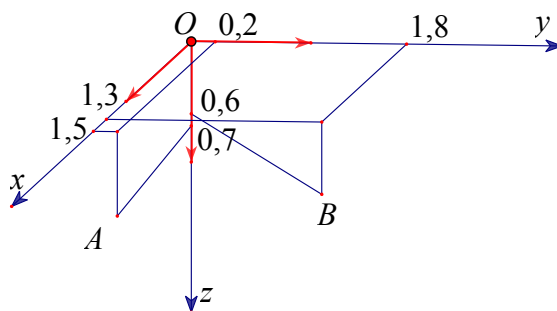
B. 1,58.

C. 1,65.

D. 1,52.

Lời giải

Chọn A



Gọi hai đầu thanh sắt lần lượt là A và B . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (như hình vẽ).

Ta có $A(1,5;0,2;0,7)$, $B(1,3;1,8;0,6)$.

Độ dài thanh sắt là $AB = \sqrt{(1,3-1,5)^2 + (1,8-0,2)^2 + (0,6-0,7)^2} \approx 1,62\text{ m}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-3)$, $B(4;0;5)$, $C(2;0;1)$. Gọi M là điểm bất kì sao cho biểu thức $P = 2MA^2 + 3MB^2 - MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó giá trị nhỏ nhất đó bằng

A. 90.

B. 35.

C. 60.

D. 120.

Lời giải

Chọn A

Gọi $H(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC} = \vec{0}$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(1-x) + 3(4-x) - (2-x) = 0 \\ 2(2-y) + 3(-y) - (-y) = 0 \\ 2(-3-z) + 3(5-z) - (1-z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(3;1;2)$$

Khi đó

$$\begin{aligned} P &= 2MA^2 + 3MB^2 - MC^2 = 2(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})^2 + 3(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HB})^2 - (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HC})^2 \\ &= 4MH^2 + 2HA^2 + 3HB^2 - HC^2 + 2\overrightarrow{MH}(2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{HC}) \\ &= 4MH^2 + 2HA^2 + 3HB^2 - HC^2. \end{aligned}$$

Biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất khi $M \equiv H \Rightarrow M(3;1;2)$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P bằng 90.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(1;2;-1)$, $B(2;-1;3)$, $C(0;1;2)$. Gọi $H(a;b;c)$ là chân đường hạ xuống từ A xuống cạnh BC . Giá trị của $3a + 2b + c$ bằng:

A. 2.

B. -2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{BC} = (-2; 2; -1)$; $\overrightarrow{BH} = (a-2; b+1; c-3)$

$$H \in BC \Rightarrow \overrightarrow{BH} = k \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2 = -2k \\ b+1 = 2k \\ c-3 = -k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2-2k \\ b = -1+2k \\ c = 3-k \end{cases}$$

Ta có $\overrightarrow{AH} = (a-1; b-2; c+1) = (1-2k; -3+2k; 4-k)$.

$$AH \perp BC \Leftrightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow -2(1-2k) + 2(-3+2k) - (4-k) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{4}{3}.$$

Suy ra $H = \left(-\frac{2}{3}; \frac{5}{3}; \frac{5}{3}\right)$. Vậy $3a+2b+c=3$.

Câu 10: Cân nặng của một số quả mít trong một khu vườn được thống kê ở bảng sau:

Cân nặng (kg)	[4;6)	[6;8)	[8;10)	[10;12)	[12;14)
Số quả mít	6	x	19	9	4

Tìm tần số x biết phương sai là $s^2 = 4,8016$.

A. 15.

B. 14.

C. 12.

D. 16.

Lời giải

Chọn C

Ta có bảng thống kê cân nặng của các quả mít theo giá trị đại diện:

Cân nặng đại diện (kg)	5	7	9	11	13
Số quả mít	6	x	19	9	4

Cỡ mẫu $n = 6 + x + 19 + 9 + 4 = x + 38$.

$$\bar{x} = \frac{6 \cdot 5 + x \cdot 7 + 19 \cdot 9 + 9 \cdot 11 + 4 \cdot 13}{x + 38} = \frac{7x + 252}{x + 38}$$

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$s^2 = \frac{1}{x+38} (6 \cdot 5^2 + x \cdot 7^2 + 19 \cdot 9^2 + 9 \cdot 11^2 + 4 \cdot 13^2) - \left(\frac{7x+252}{x+38} \right)^2 = 4,8016$$

$$\Leftrightarrow \frac{3454 + 49x}{x+38} - \left(\frac{7x+252}{x+38} \right)^2 - 4,8 = 0 \Rightarrow x = 12.$$

. Vậy $x = 12$.

Câu 11: Cho mẫu số liệu ghép nhóm về tuổi thọ (đơn vị tính là năm) của một loại bóng đèn mới như sau.

Tuổi thọ	[2;3,5)	[3,5;5)	[5;6,5)	[6,5;8)
Số bóng đèn	8	22	35	15

Số trung bình của mẫu số liệu này là (làm tròn đến hàng phần chục)

A. 5,2.

B. 5,3.

C. 5,8.

D. 6,3.

Lời giải

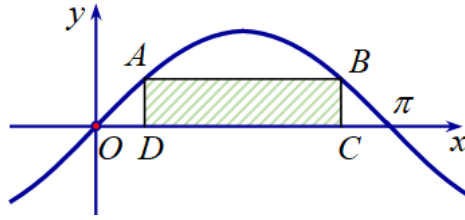
Chọn B

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{8 \cdot 2,75 + 22 \cdot 4,25 + 35 \cdot 5,75 + 15 \cdot 7,25}{80} = 5,31875$$

. Vậy $\bar{x} \approx 5,3$.

Câu 12: Cho hai điểm A, B thuộc đồ thị hàm số $y = \sin x$ trên đoạn $[0; \pi]$. Các điểm C, D thuộc trục Ox sao cho tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật và $CD = \frac{2\pi}{3}$.



Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng

- A. $\frac{\pi\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{2}{3}\pi^2$. C. $\frac{\pi}{3}$. D. $\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$. Ta có:
$$\begin{cases} x_B - x_A = \frac{2\pi}{3} \\ y_B = y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = x_A + \frac{2\pi}{3} \quad (1) \\ \sin x_B = \sin x_A \quad (2) \end{cases}$$

Thay (1) vào (2), ta được:

$$\sin\left(x_A + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin x_A \Leftrightarrow x_A + \frac{2\pi}{3} = \pi - x_A + k2\pi \Leftrightarrow x_A = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Do $x \in [0; \pi]$ nên $x_A = \frac{\pi}{6} \Rightarrow BC = AD = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Vậy diện tích: $S_{ABCD} = AD \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{3}$.

Câu 13: Cho $\tan \alpha = \frac{2b}{a-c}$. Giá trị của biểu thức $A = a \cos^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha$ là

A. b . B. a . C. $-a$. D. $-b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có:
$$\frac{A}{\cos^2 \alpha} = \frac{a \cos^2 \alpha + 2b \sin \alpha \cos \alpha + c \sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow A(1 + \tan^2 \alpha) = a + 2b \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} + c \frac{\sin^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}$$

$$\Leftrightarrow A(1 + \tan^2 \alpha) = a + 2b \tan \alpha + c \tan^2 \alpha$$

$$\Leftrightarrow A \left[1 + \left(\frac{2b}{a-c} \right)^2 \right] = a + 2b \cdot \frac{2b}{a-c} + c \cdot \left(\frac{2b}{a-c} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \frac{(a-c)^2 + (2b)^2}{(a-c)^2} = \frac{a(a-c)^2 + 4b^2(a-c) + c \cdot 4b^2}{(a-c)^2}$$

$$\Leftrightarrow A \cdot \frac{(a-c)^2 + (2b)^2}{(a-c)^2} = \frac{a[(a-c)^2 + 4b^2]}{(a-c)^2}$$

$$\Leftrightarrow A = a$$

- Câu 14:** Cho a, b là hai số nguyên dương lớn hơn 1. Biết phương trình $a^{x^2+1} = b^x$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 và phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ có hai nghiệm phân biệt x_3, x_4 thỏa mãn $(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) < 3$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = 3a + 2b$ bằng
- A.** 40. **B.** 41. **C.** 44. **D.** 46.

Lời giải

Chọn D

Ta có $a^{x^2+1} = b^x \Leftrightarrow x^2 + 1 = x \log_a b \Leftrightarrow x^2 - x \log_a b + 1 = 0$. Phương trình này có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = (\log_a b)^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \log_a b > 2 \Leftrightarrow b > a^2$.

Tương tự từ phương trình $b^{x^2-1} = (9a)^x$ ta có $(\log_b(9a))^2 + 4 > 0$: luôn đúng.

Theo Vi-ét $\begin{cases} x_1 + x_2 = \log_a b \\ x_3 + x_4 = \log_b(9a) \end{cases} \Rightarrow \log_a b \cdot \log_b(9a) < 3$

$$\Leftrightarrow \log_a(9a) < 3 \Leftrightarrow 9a < a^3 \Rightarrow a > 3 \xrightarrow{a \in \mathbb{N}^+} a \geq 4.$$

Suy ra $b > a^2 \geq 16 \xrightarrow{b \in \mathbb{N}^+} b \geq 17$. Khi đó $S = 3a + 2b \geq 3 \cdot 4 + 2 \cdot 17 = 46$. **Chọn D.**

- Câu 15:** Gọi S là tập các số thực $(x; y)$ sao cho $x \in (0; +\infty)$ và $\left(2^x + \frac{1}{2^x}\right)^y = \left(2^y + \frac{1}{2^y}\right)^x$. Biết rằng giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = e^y + \cos y - 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$ với $(x; y) \in S$ đạt được tại $(x_0; y_0)$. Mệnh đề nào sau đây đúng?
- A.** $x_0 \in (0; 1)$. **B.** $x_0 = 1$. **C.** $x_0 \in [1; 2)$. **D.** $x_0 = 2$.

Lời giải

Chọn A

$$\text{Giả thiết} \Leftrightarrow \left(\frac{4^x + 1}{2^x}\right)^y = \left(\frac{4^y + 1}{2^y}\right)^x \Leftrightarrow (4^x + 1)^y = (4^y + 1)^x$$

$$\Leftrightarrow y \cdot \ln(4^x + 1) = x \cdot \ln(4^y + 1) \Leftrightarrow \frac{\ln(1 + 4^x)}{x} = \frac{\ln(1 + 4^y)}{y}. \quad (1)$$

Xét hàm $f(t) = \frac{\ln(1 + 4^t)}{t}$ trên $(0; +\infty)$.

$$f'(t) = \frac{t \cdot 4^t \cdot \ln 4 - (1 + 4^t) \cdot \ln(1 + 4^t)}{(1 + 4^t)^2} < 0$$

Ta có với mọi $t > 0$.

Do đó $f(t)$ nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

Nhận thấy (1) có dạng $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$. Khi đó $P = e^x + \cos x - 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$.

Xét hàm số $g(x) = e^x + \cos x - 2 - 2x + \frac{x^2}{2}$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Đạo hàm $g'(x) = e^x - \sin x - 2 + x$;

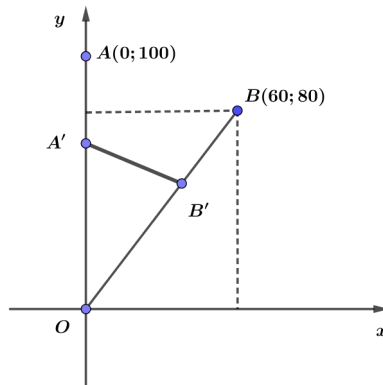
$g''(x) = e^x + 1 - \cos x > 0$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $g'(x)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Ta có $\begin{cases} g'(0) = -1 < 0 \\ g'(1) = e - 1 - \sin 1 > 0 \end{cases} \Rightarrow \exists x_0 \in (0; 1)$ sao cho $g'(x_0) = 0$.

Lập bảng biến thiên ta thấy $g(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $x_0 \in (0; 1)$. **Chọn A.**

Câu 16: Hai con chuồn chuồn bay trên hai quỹ đạo khác nhau, xuất phát cùng thời điểm. Một con bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ điểm $A(0; 100)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 5 m/s . Con còn lại bay trên quỹ đạo là đường thẳng từ $B(60; 80)$ đến điểm $O(0; 0)$ với vận tốc 10 m/s như hình vẽ minh họa. Đặt $f(t)$ là khoảng cách mà hai con chuồn chuồn bay được sau thời gian t (giây), $t \in [0; 10]$. Biết $\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - 5\sqrt{85}}{t^2 - 25} = -\frac{a\sqrt{b}}{c}$, trong đó $a, b, c \in \mathbb{Q}^+$ và phân số $\frac{a}{c}$ tối giản.

Giá trị của biểu thức $P = 4a^2 - b + c$ bằng?



A. 125.

B. 121.

C. 120.

D. 85.

Lời giải

Chọn B

Xét tại thời điểm t (giây), $t \in [0; 10]$, con chuồn chuồn bay từ A về O có tọa độ là $A'(0; 100 - 5t)$.

Con chuồn chuồn bay từ $B(60; 80)$ về $O(0; 0)$ trên quỹ đạo là đường thẳng có hệ số góc là $k = \tan \alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3}{5}, \sin \alpha = \frac{4}{5}$.

Do đó tại thời điểm t , nó có tọa độ là $\begin{cases} x = 60 - 10t \cdot \cos \alpha \\ y = 80 - 10t \cdot \sin \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 60 - 6t \\ y = 80 - 8t \end{cases} \Rightarrow B'(60 - 6t; 80 - 8t)$.

Ta có: $\overrightarrow{A'B'} = (60 - 6t; -20 - 3t)$.

Khoảng cách giữa hai con chuồn chuồn bay được sau thời gian t (giây):

$$f(t) = A'B' = \sqrt{(60 - 6t)^2 + (20 + 3t)^2} = \sqrt{45t^2 - 600t + 4000}$$

$$\lim_{t \rightarrow 5} \frac{f(t) - 5\sqrt{85}}{t^2 - 25} = \lim_{t \rightarrow 5} \left(\frac{\sqrt{45t^2 - 600t + 4000} - 5\sqrt{85}}{t^2 - 25} \right)$$

Vậy

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t \rightarrow 5} \left(\frac{45t^2 - 600t + 4000 - 2125}{(t-5)(t+5)(\sqrt{45t^2 - 600t + 4000} + 5\sqrt{85})} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 5} \left(\frac{(t-5)(45t-375)}{(t-5)(t+5)(\sqrt{45t^2 - 600t + 4000} + 5\sqrt{85})} \right) \\
&= \lim_{t \rightarrow 5} \left(\frac{(45t-375)}{(t+5)(\sqrt{45t^2 - 600t + 4000} + 5\sqrt{85})} \right) = -\frac{3}{2\sqrt{85}} = -\frac{3\sqrt{85}}{170}
\end{aligned}$$

suy ra $a = 3, b = 85, c = 170$. Do đó, $P = 4a^2 - b + c = 4 \cdot 3^2 - 85 + 170 = 121$.

Câu 17: Cho $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$. Giới hạn $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)}$ bằng

A. 10. **B.** $\frac{5}{3}$. **C.** 1. **D.** 2.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} = 5$ suy ra được giới hạn có dạng vô định 0/0.

Khi đó ta có $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - 10) = 0 \Rightarrow f(1) = 10$.

$$\begin{aligned}
\text{Khi đó} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{4f(x) + 9} + 3)} &= \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x) - 10}{x - 1} \cdot \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{4f(x) + 9} + 3} \right] \\
&= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 10}{x - 1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{4f(x) + 9} + 3} = 5 \cdot \frac{2}{\sqrt{4f(1) + 9} + 3} = 1.
\end{aligned}$$

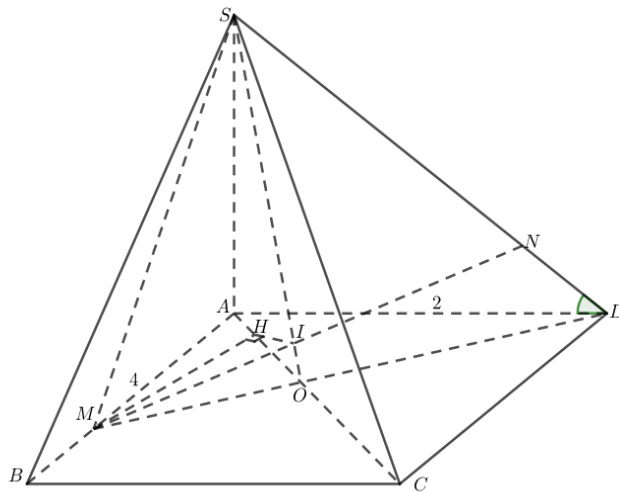
Câu 18: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 4, AD = 2$. Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy, góc giữa mặt phẳng (SCD) và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng 45° . Lấy các điểm M và N thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{NS} + 4\overrightarrow{ND} = \vec{0}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng MN và mặt phẳng (SAC) . Giá trị của $\cos^2 \alpha$ là

A. $\frac{514}{1465}$. **B.** $\frac{516}{1465}$. **C.** $\frac{506}{1465}$. **D.** $\frac{504}{1465}$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:



♦) Ta có $\begin{cases} CD \perp AD \\ CD \perp SA \end{cases} \Rightarrow CD \perp (SAD) \Rightarrow CD \perp SD$

Mặt khác $\begin{cases} (SCD) \cap (ABCD) = CD \\ (SAD) \supset SD \perp CD \Rightarrow ((SCD), (ABCD)) = \angle SDA = 45^\circ \\ (ABCD) \supset AD \perp CD \end{cases}$

Tam giác SAD vuông tại A : $SA = AD \cdot \tan 45^\circ = 2 \cdot 1 = 2$.

♦) Gọi $MD \cap AC = \{O\}$. Trong mặt phẳng (SMD) : $SO \cap MN = \{I\}$.

Suy ra $MN \cap (SAC) = \{I\}$ (1)

Trong mặt phẳng $(ABCD)$ kẻ $MH \perp AC$, ta lại có $MH \perp SA$ suy ra $MH \perp (SAC)$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $(MN, (SAC)) = \angle MIH = \alpha$.

♦) Ta tính được $SM = \sqrt{MA^2 + SA^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$, $SD = \sqrt{SA^2 + AD^2} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$.
 $MD = \sqrt{AM^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$.

Trong tam giác SMD ta có $\cos MSD = \frac{SM^2 + SD^2 - MD^2}{2 \cdot SM \cdot SD} = \frac{(\sqrt{13})^2 + (2\sqrt{2})^2 - (\sqrt{13})^2}{2 \cdot \sqrt{13} \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{26}}{13}$

Theo bài ra $SN = \frac{4}{5} SD = \frac{4}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{5}$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác SMN có

$$MN = \sqrt{SM^2 + SN^2 - 2 \cdot SM \cdot SN \cdot \cos MSN} = \frac{\sqrt{293}}{5}$$

Áp dụng định lý Menelaus trong tam giác MND với bộ 3 điểm O, I, S thẳng hàng

$$\frac{OM}{OD} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{SD}{SN} = 1 \Rightarrow \frac{3}{4} \cdot \frac{IN}{IM} \cdot \frac{5}{4} = 1 \Rightarrow \frac{IN}{IM} = \frac{16}{15}$$

Mà $MN = \frac{\sqrt{293}}{5}$ nên $IM = \frac{3\sqrt{293}}{31}$.

♦) Xét tam giác ABC vuông tại B có $\sin BAC = \frac{BC}{AC} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

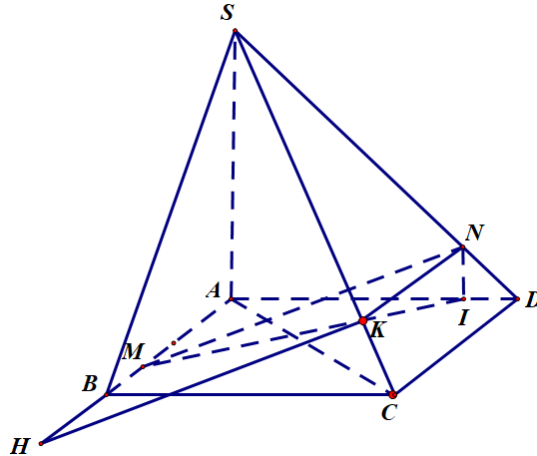
$$MH = AM \sin MAH = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

Xét tam giác AMH vuông tại H ta có

♦ Do $MH \perp (SAC)$ (chứng minh trên) nên $MH \perp HI$ hay tam giác MHI vuông tại H suy ra

$$\cos^2 \alpha = \cos^2 MIH = \frac{HI^2}{MI^2} = \frac{MI^2 - MH^2}{MI^2} = \frac{\left(\frac{3\sqrt{293}}{31}\right)^2 - \left(\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)^2}{\frac{3\sqrt{293}}{31}} = \frac{504}{1465}$$

Cách 2:



Do $CD \perp (SAD) \Rightarrow \left(\overline{SCD}, (ABCD) \right) = \widehat{SDA} = 45^\circ \Rightarrow SA = 2$

Gọi I là hình chiếu của N xuống AD .

Khi đó $IN = \frac{1}{5}SA = \frac{2}{5}$, $IM = \sqrt{AI^2 + AM^2} = \frac{17}{5} \Rightarrow MN = \sqrt{IN^2 + IM^2} = \frac{\sqrt{293}}{5}$

Dựng hình bình hành $MNKH$, $K \in SC$, $NK \parallel CD$ thì $NK = \frac{16}{5} \Rightarrow HB = \frac{11}{5}$

Ta có
$$\sin \alpha = \sin \left(\overline{HK}, (SAC) \right) = \frac{d(H, (SAC))}{HK} = \frac{HA}{AB} \cdot \frac{d(AB, AC)}{HK} = \frac{31}{20} \cdot \frac{d(AB, AC)}{HK} = \frac{31}{\sqrt{1465}}$$

Vậy $\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha = \frac{504}{1465}$

Cho đa giác đều có 2024 đỉnh. Hỏi có bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của đa giác và có một góc lớn hơn 100°

A. $2024C_{899}^2$.

B. C_{2024}^3 .

C. $2024C_{899}^3$.

D. $2024C_{900}^2$.

Lời giải

Chọn A

Gọi $A_1, A_2, \dots, A_{2024}$ là các đỉnh của đa giác đều 2024 đỉnh.

Gọi (C) là đường tròn ngoại tiếp đa giác đều $A_1, A_2, \dots, A_{2024}$

Các đỉnh của đa giác đều chia (C) thành 2024 cung tròn bằng nhau, mỗi cung tròn có số đo

$\left(\frac{360}{2024}\right)^0$. Vì tam giác cần đếm có đỉnh là đỉnh của đa giác nên các góc của tam giác là các góc nội tiếp của (C) suy ra góc lớn hơn 100^0 sẽ chắn cung có số đo lớn hơn 200^0

Có định 1 đỉnh A_i ($1 \leq i \leq 2024$) khi đó sẽ có 2024 cách chọn đỉnh A_i
 Gọi A_i, A_j, A_k ($1 \leq i, j, k \leq 2024$) là các đỉnh sắp thứ tự theo chiều kim đồng hồ sao cho số đo của cung nhỏ $A_i A_k < 160^\circ$ thì số đo của cung lớn $A_i A_k > 360^\circ - 160^\circ = 200^\circ \Rightarrow \overline{A_i A_k} > 100^\circ$ và tam giác $\triangle A_i A_j A_k$ là tam giác cân đếm. Khi đó cung $A_i A_k$ là hợp liên tiếp của nhiều nhất $\left\lfloor \frac{160}{360} \right\rfloor = 899$ cung tròn nói trên. 899 cung tròn thì có 900 đỉnh trừ đi đỉnh A_i thì còn 899
 Do đó có C_{899}^2 cách chọn hai đỉnh A_j, A_k . Vậy có tất cả $2024 C_{899}^2$ tam giác thỏa mãn bài toán.

Câu 20: Cho một đa giác đều gồm $2n$ đỉnh ($n \geq 2, n \in \mathbb{N}$). Chọn ngẫu nhiên ba đỉnh trong số $2n$ đỉnh của đa giác, xác suất ba đỉnh được chọn tạo thành một tam giác vuông là $\frac{1}{5}$. Tìm n
A. $n = 5$. **B.** $n = 4$. **C.** $n = 10$. **D.** $n = 8$.

Lời giải

Chọn D

Ta có một đa giác đều $2n$ cạnh có n đường chéo đi qua tâm. Ta lấy hai đường chéo thì tạo thành một hình chữ nhật. Mỗi một hình chữ nhật sẽ có bốn tam giác vuông. Vậy số tam giác

vuông tạo thành từ đa giác đều $2n$ đỉnh là $4 \cdot C_n^2 = \frac{4n!}{2!(n-2)!} = 2n(n-1)$,

Không gian mẫu là: $C_{2n}^3 = \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} = \frac{2n \cdot (2n-1)(2n-2)}{6}$,

Xác suất là: $P = \frac{12n(n-1)}{2n(2n-1)(2n-2)} = \frac{3}{(2n-1)}$,

Theo bài ra thì $P = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{3}{2n-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 15 = 2n-1 \Leftrightarrow n = 8$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng (Đ) hoặc sai (S).

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x) = \log x$.

- a)** Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $(0; +\infty)$.
b) Tập nghiệm của bất phương trình $\log x < 2$ là $(-\infty; 100)$.
c) Hàm số $y = f(-x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

d) Cường độ một trận động đất (*richter*) được cho bởi công thức $M = f\left(\frac{A}{A_0}\right)$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ 8,3 độ richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác Nam Mỹ có biên độ rung chấn mạnh hơn gấp 4 lần. Khi đó, cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ xấp xỉ bằng 8,9 độ richter (làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

a) $y = f(x) = \log x$. Điều kiện: $x > 0$. Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là $(0; +\infty)$.

Chọn **đúng**.

b) $\log x < 2$.

Điều kiện: $x > 0$.

$\log x < 2 \Leftrightarrow x < 100$. Kết hợp điều kiện ta có nghiệm của bất phương trình là $(0; 100)$.

Chọn **sai**.

c) Ta có $y = f(-x) = \log(-x)$.

Tập xác định: $(-\infty; 0)$

$$y' = \frac{(-x)'}{(-x)} = \frac{1}{x} < 0, \forall x \in (-\infty; 0)$$

Ta có . Suy ra hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 0)$.

Chọn **đúng**.

$$M = \log A - \log A_0 = \log \frac{A}{A_0}$$

d) Ta có:

$$M_1 = 8,3 = \log \frac{A_1}{A_0}$$

Trận động đất ở San Francisco:

Biên độ ở Nam Mỹ gấp 4 lần ở San Francisco nên $A_2 = 4A_1$.

$$M_2 = \log \frac{A_2}{A_0} = \log A_2 - \log A_0 = \log 4A_1 - \log A_0$$

Trận động đất ở Nam Mỹ:

$$\Rightarrow M_2 = \log 4 + \log A_1 - \log A_0 = \log 4 + M_1 = \log 4 + 8,3 \approx 8,9.$$

Vậy cường độ của trận động đất ở Nam Mỹ khoảng 8,9 độ richter.

Chọn **đúng**.

Câu 2: Khi chuyển động trong không gian, máy bay luôn chịu tác động của bốn lực chính: lực đẩy của động cơ, lực cản của không khí, trọng lực và lực nâng khí động học (hình ảnh bên dưới)



Lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với bình phương vận tốc máy bay. Một chiếc máy bay tăng vận tốc từ 900 km/h lên 920 km/h , trong quá trình tăng tốc máy bay giữ nguyên hướng bay. Lực cản của không khí khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h lần lượt được biểu diễn bởi hai vectơ $\vec{F}_1, \vec{F}_2$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Véc-tơ biểu diễn lực nâng và trọng lực cùng phương.

b) Véc-tơ biểu diễn lực cản của không khí và lực đẩy không cùng phương.

c) Có $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ (k là một số thực dương nào đó)

d) Khi máy bay đạt vận tốc 900 km/h và 920 km/h thì $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với $k = \frac{2025}{2116}$.

Lời giải

- a) Vectơ biểu diễn lực nâng và trọng lực có giá song song hoặc trùng nhau nên chúng cùng phương, suy ra mệnh đề **đúng**
 b) Vectơ biểu diễn lực cản của không khí và lực đẩy có giá song song hoặc trùng nhau nên chúng cùng phương, suy ra mệnh đề **sai**
 c) Lực cản ngược hướng với lực đẩy của động cơ (lực này có hướng không đổi vì máy bay giữ nguyên hướng bay) nên $\vec{F}_1; \vec{F}_2$ cùng hướng, suy ra $\vec{F}_1 = k\vec{F}_2$ với $k > 0$ và k là tỉ số độ dài của hai vectơ $\vec{F}_1; \vec{F}_2$ (1), suy ra mệnh đề **đúng**
 d) Vì lực cản của không khí ngược hướng với lực đẩy của động cơ và có độ lớn tỉ lệ thuận với

bình phương vận tốc máy bay nên ta có:
$$\frac{|\vec{F}_1|}{|\vec{F}_2|} = \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \left(\frac{900}{920}\right)^2 = \frac{2025}{2116} \Rightarrow |\vec{F}_1| = \frac{2025}{2116} |\vec{F}_2| \quad (2)$$

Từ (1)&(2) ta có $\vec{F}_1 = \frac{2025}{2116} \vec{F}_2$, vậy $k = \frac{2025}{2116}$ suy ra mệnh đề **đúng**

Câu 3. Thầy giáo thống kê lại điểm trung bình cuối năm của các học sinh lớp $^{12}C_1$ và $^{12}C_2$ ở bảng sau:

Điểm trung bình	$[5;6)$	$[6;7)$	$[7;8)$	$[8;9)$	$[9;10)$
11A	1	0	11	22	6
11B	0	6	8	14	12

- a)** Điểm trung bình của lớp 11 C_1 là $8,3$ (làm tròn đến hàng phần chục).
b) Điểm trung bình của lớp 11 C_1 nhỏ hơn lớp 11 C_2 .
c) Phương sai của mẫu số liệu lớp 11B là $1,05$ (làm tròn đến hàng phần trăm).
d) So sánh theo độ lệch chuẩn thì các học sinh lớp 11 C_1 học đồng đều hơn lớp 11 C_2 .

Lời giải

a) Ta có bảng thống kê điểm trung bình theo giá trị đại diện:

Giá trị đại diện	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5
11A	1	0	11	22	6
11B	0	6	8	14	12

Xét mẫu số liệu của lớp 11A:

Cỡ mẫu là $n_1 = 1 + 11 + 22 + 6 = 40$

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_1 = \frac{1 \cdot 5,5 + 11 \cdot 7,5 + 22 \cdot 8,5 + 6 \cdot 9,5}{40} = 8,3.$$

Chọn đúng.

b) Xét mẫu số liệu của lớp $^{12}C_2$:

Cỡ mẫu là $n_2 = 6 + 8 + 14 + 12 = 40$

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{6 \cdot 6,5 + 8 \cdot 7,5 + 14 \cdot 8,5 + 12 \cdot 9,5}{40} = 8,3.$$

Hai lớp 11A và 11B có điểm trung bình bằng nhau.

Chọn sai.

c) Xét mẫu số liệu của lớp $^{12}C_2$:

Cỡ mẫu là $n_2 = 6 + 8 + 14 + 12 = 40$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{6 \cdot 6,5 + 8 \cdot 7,5 + 14 \cdot 8,5 + 12 \cdot 9,5}{40} = 8,3.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = \frac{1}{40} (6 \cdot 6,5^2 + 8 \cdot 7,5^2 + 14 \cdot 8,5^2 + 12 \cdot 9,5^2) - 8,3^2 = 1,06.$$

Chọn sai.

d) **Xét mẫu số liệu của lớp** $^{12}C_1$:

Cỡ mẫu là $n_1 = 1 + 11 + 22 + 6 = 40$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_1 = \frac{1 \cdot 5,5 + 11 \cdot 7,5 + 22 \cdot 8,5 + 6 \cdot 9,5}{40} = 8,3.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1^2 = \frac{1}{40} (1 \cdot 5,5^2 + 11 \cdot 7,5^2 + 22 \cdot 8,5^2 + 6 \cdot 9,5^2) - 8,3^2 = 0,61.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_1 = \sqrt{0,61}$.

Xét mẫu số liệu của lớp $^{12}C_2$:

Cỡ mẫu là $n_2 = 6 + 8 + 14 + 12 = 40$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{6 \cdot 6,5 + 8 \cdot 7,5 + 14 \cdot 8,5 + 12 \cdot 9,5}{40} = 8,3.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = \frac{1}{40} (6 \cdot 6,5^2 + 8 \cdot 7,5^2 + 14 \cdot 8,5^2 + 12 \cdot 9,5^2) - 8,3^2 = 1,06.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_2 = \sqrt{1,06}$.

Do $S_1 < S_2$ nên nếu so sánh theo **độ lệch chuẩn** thì học sinh lớp $^{12}C_1$ có điểm trung bình ít phân tán hơn học sinh lớp $^{12}C_2$. Nghĩa là lớp $^{12}C_1$ học đồng đều hơn lớp $^{12}C_2$.

Chọn đúng.

Câu 4. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. B là tập tất cả các số tự nhiên gồm 4 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A có dạng $\overline{abcd}$. C là tập tất cả các số tự nhiên gồm 8 chữ số đôi một khác nhau lấy từ A .

a) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc B . Có tất cả 30 số lấy ra là số lẻ và thỏa mãn $a < b < c < d$.

b) Chọn thứ tự 2 số thuộc B . Xác suất để trong hai số đó có đúng một số có mặt chữ số 3 là $\frac{420}{1679}$.

c) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc B . Xác suất để số đó không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn bằng $\frac{1}{2}$.

d) Chọn ngẫu nhiên một số thuộc C . Xác suất để chọn được số chia hết cho 1111 là $\frac{1}{105}$.

Lời giải

$$n(B) = A_8^4 = 1680$$

$$n(C) = 8! = 40320$$

a) X : “Số lấy ra là số lẻ và thoả mãn $a < b < c < d$ ”.

Ta có $d \in \{5; 7\}$.

Trường hợp 1: $d = 5$. Khi đó số lấy ra có dạng $\overline{abc5}$ (*).

Chọn 3 trong 4 chữ số từ A và nhỏ hơn 5 có $C_4^3 = 4$. Mỗi cách chọn có duy nhất 1 số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Do đó có 4 số thoả mãn (*).

Trường hợp 2: $d = 7$. Khi đó số lấy ra có dạng $\overline{abc7}$ (**).

Chọn 3 trong 6 chữ số từ A và nhỏ hơn 7 có $C_6^3 = 20$. Mỗi cách chọn có duy nhất 1 số thoả mãn yêu cầu bài toán.

Do đó có 20 số thoả mãn (**).

Suy ra $n(X) = 4 + 20 = 24$

$\Rightarrow$ **a sai.**

b) Y : “Trong hai số đó có đúng một số có mặt chữ số 3”.

$$n(\Omega) = A_{1680}^2 = 2820720$$

Trong tập hợp B ta thấy:

Có tất cả $4 \cdot A_7^3 = 840$ số có mặt chữ số 3.

Có $A_7^4 = 840$ số không có mặt chữ số 3.

Gọi C là biến cố “trong 2 số vừa chọn có đúng một số có mặt chữ số 3”

Khi đó $n(Y) = 840 \cdot 840 \cdot 2 = 1411200$

$$P(Y) = \frac{n(Y)}{n(\Omega)} = \frac{1411200}{2820720} = \frac{840}{1679}$$

Vậy xác suất cần tìm là

Vậy **b sai.**

c) E : “Số được chọn không có hai chữ số liên tiếp nào cùng chẵn”.

$$n(\Omega) = 1680$$

Nhận thấy rằng không thể có 3 chữ số chẵn hoặc 4 chữ số chẵn vì lúc đó luôn tồn tại hai chữ số chẵn nằm cạnh nhau. Do đó,

Trường hợp 1: Cả 4 chữ số đều lẻ có $4! = 24$ số.

Trường hợp 2. Có 3 chữ số lẻ, 1 chữ số chẵn. Khi đó có $C_4^1 \cdot C_4^3 \cdot 4! = 384$

Trường hợp 3. Có 2 chữ số chẵn, 2 chữ số lẻ.

Chọn 2 chữ số lẻ, 2 chữ số chẵn từ X có $C_5^2 \cdot C_4^2$ cách.

Xếp thứ tự 2 chữ số lẻ có $2!$ cách.

Hai chữ số lẻ tạo thành 3 khoảng trống, xếp hai chữ số chẵn vào 3 khoảng trống và sắp thứ tự có $A_3^2 = 6$ cách.

$\Rightarrow$ trường hợp này có $C_4^2 \cdot C_4^2 \cdot 2 \cdot 6 = 432$ số.

Do đó, $n(E) = 24 + 384 + 432 = 840$

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)} = \frac{840}{1680} = \frac{1}{2}$$

Vậy

Vậy **c đúng**.

d) F : “Số được chọn chia hết cho 1111”.

Không gian mẫu: $n(W) = 8!$

Gọi số cần lập có dạng $P = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7 a_8}$, $a_i \in A, a_i \neq a_j$ với $i \neq j$.

Nhận xét A có 8 phần tử và tổng các phần tử là 36 nên P chia hết cho 9, do $(9, 11) = 1$ nên P chia hết cho 9999.

$$\begin{aligned} P &= \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} \cdot 10^4 + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} = \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} \cdot (9999 + 1) + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} \\ &= \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} \cdot 9999 + \overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} \end{aligned}$$

Do P chia hết cho 9999 nên $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8}$ chia hết cho 9999.

$a_i \in A$ nên $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} < 2 \cdot 9999$, từ đó $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4} + \overline{a_5 a_6 a_7 a_8} = 9999$

Với mỗi cách chọn a_i sẽ có duy nhất cách chọn a_{i+4} sao cho $a_i + a_{i+4} = 9$ với $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.

Chọn a_1 có 8 cách, chọn a_2 có 6 cách, chọn a_3 có 4 cách, chọn a_4 có 2 cách.

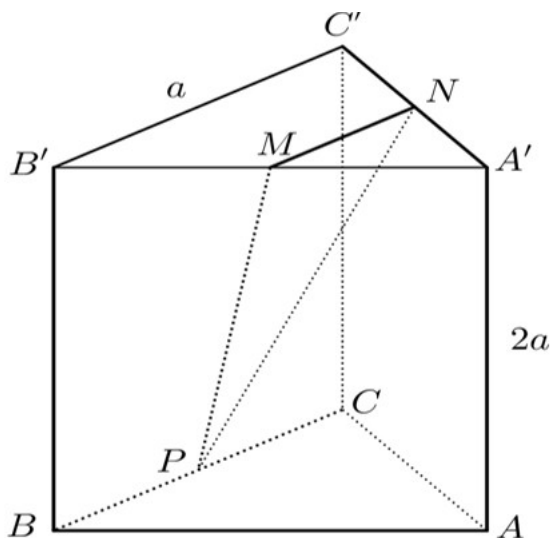
Suy ra $n(F) = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2 = 384$

$$P(F) = \frac{384}{8!} = \frac{1}{105}$$

Vậy

Vậy **d đúng**.

Câu 5: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = a$ và $AA' = 2a$. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh $A'B', A'C'$ và BC (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Xét tính đúng, sai của các mệnh đề dưới đây?

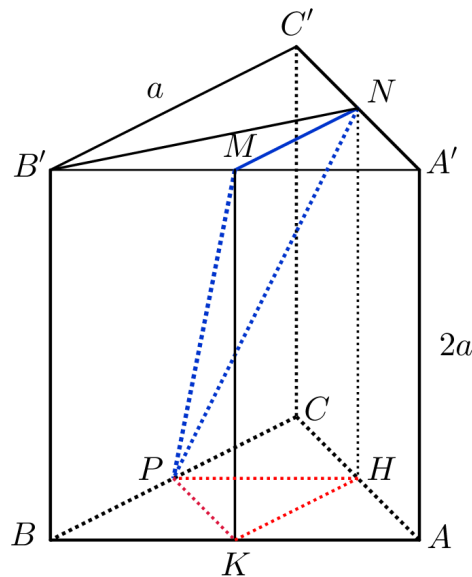
a) Thể tích khối tứ diện $ACA'B'$ bằng $\frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

b) Khoảng cách giữa BB' và $A'C'$ là a .

c) Tan của góc giữa đường thẳng NP và mặt phẳng (ABC) là $\frac{1}{4}$.

d) Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) bằng $\frac{\sqrt{201}}{67}$

Lời giải



a) Mệnh đề đúng

Thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ là $V = S_{ABC} \cdot AA' = \frac{\sqrt{3}a^3}{2}$

Thể tích khối tứ diện $ACA'B'$ là $V_{ACA'B'} = \frac{1}{3}V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}a^3}{2} = \frac{\sqrt{3}a^3}{6}$.

b) Mệnh đề sai

Ta có $B'N \perp A'C'$ tại N và $B'N \perp BB'$ tại B' .

Suy ra $B'N$ là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau BB' và $A'C'$.

Vậy khoảng cách giữa BB' và $A'C'$ là $d(BB'; A'C') = B'N = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

c) Mệnh đề sai

Gọi H là trung điểm của AC . Suy ra $NH \perp (ABC)$.

Vậy NP có hình chiếu vuông góc là HP lên mặt phẳng (ABC) .

Suy ra góc giữa đường thẳng NP và mặt phẳng (ABC) là $\sphericalangle NPH$.

$$\tan \angle NPH = \frac{NH}{PH} = \frac{2a}{\frac{1}{2}a} = 4$$

Xét tam giác NPH vuông tại H có:

d) Mệnh đề đúng

Gọi K là trung điểm của AB . Suy ra $MK \perp (ABC)$.

Ta đã có $NH \perp (ABC)$ và $P \in (ABC)$.

Vậy $\triangle PMN$ có hình chiếu vuông góc lên mặt phẳng (ABC) là $\triangle PKH$.

Gọi góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (MNP) là α .

$$S_{\Delta PKH} = \cos \alpha \cdot S_{\Delta PMN} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{S_{\Delta PKH}}{S_{\Delta PMN}}$$

Ta có

$$\text{Tam giác } PMN \text{ có: } \begin{cases} MN = \frac{1}{2}a \\ MP = \sqrt{MK^2 + PK^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2} \\ PN = \sqrt{NH^2 + PH^2} = \sqrt{(2a)^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \frac{a\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

$$\text{Đặt } p = \frac{MN + PN + MP}{2} = \frac{\frac{1}{2}a + \frac{\sqrt{17}}{2}a + \frac{\sqrt{17}}{2}a}{2} = \frac{1 + 2\sqrt{17}}{4}a \text{ là nửa chu vi tam giác } PMN$$

$$\text{Suy ra } S_{\Delta PMN} = \sqrt{p \cdot \left(p - \frac{1}{2}a\right) \cdot \left(p - \frac{\sqrt{17}}{2}a\right) \cdot \left(p - \frac{\sqrt{17}}{2}a\right)} = \frac{\sqrt{67}}{16}a^2$$

$$\text{Lại có: } S_{\Delta PKH} = \frac{1}{4}S_{\Delta ABC} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{16}a^2$$

$$\cos \alpha = \frac{\frac{\sqrt{3}}{16}a^2}{\frac{\sqrt{67}}{16}a^2} = \frac{\sqrt{201}}{67}$$

Vậy

Câu 6. Một công ty chuyên về mua bán xe ô tô đã qua sử dụng, sau khi khảo sát thị trường trong thời gian 06 tháng đã đưa ra công thức chung về giá trị còn lại của ô tô 4 chỗ kể từ khi đưa vào sử dụng

$$P(t) = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$$

(các loại xe 4 chỗ không sử dụng mục đích kinh doanh) được tính. Trong đó A là giá tiền ban đầu mua xe (triệu đồng), t là số năm kể từ khi đưa vào sử dụng. Các khẳng định sau đúng hay sai?

- a) Anh An mua chiếc xe 4 chỗ với giá 520 triệu, anh sử dụng được một năm thì bán với giá 484 triệu. Theo cách tính của công ty trên anh An đã bán lỗ.
- b) Anh Bình mua chiếc xe 4 chỗ với giá 700 triệu, anh sử dụng được 30 tháng rồi bán với giá 584 triệu. Còn anh Cường mua chiếc xe 4 chỗ với giá 630 triệu, anh sử dụng được 2 năm rồi bán với giá 530 triệu. Anh Bình bán xe được giá hơn anh Cường bán xe.
- c) Theo cách tính của công ty trên, sau mỗi năm sử dụng, giá trị của chiếc xe giảm đi 7% so với giá trị ban đầu của xe.
- d) Công ty mua một chiếc xe đã được sử dụng 4 năm với giá 500 triệu đồng. Một người dự tính giá trị của chiếc xe lúc xuất xưởng là 700 triệu đồng.

Lời giải

a) Sai.

Theo công thức $P(t) = A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{t}{4}}$, giá trị còn lại của chiếc xe sau một năm sử dụng là

$$P(1) = 520 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}} \approx 484 \quad (\text{triệu đồng}).$$

b) Đúng.

Giá trị xe anh Bình còn lại là $700 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{30}{12} \cdot \frac{1}{4}} \approx 584,8$ (triệu đồng).

Giá trị xe anh Cường còn lại là $630 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{24}{12} \cdot \frac{1}{4}} \approx 545,6$ (triệu đồng).

Như vậy anh Bình bán xe thấp hơn giá trị của xe $0,8$ triệu còn anh Cường bán xe thấp hơn giá trị $15,6$ triệu.

c) Sai.

Sau một năm giá trị của xe còn lại $\frac{A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{4}}}{A} \cdot 100\% = 93,06\%$, suy ra giá trị xe giảm $100\% - 93,06\% = 6,94\%$.

Sau hai năm giá trị của xe còn lại $\frac{A \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{2}{4}}}{A} \cdot 100\% = 86,6\%$, suy ra giá trị xe giảm $100\% - 86,6\% = 13,4\%$.

d) Sai.

Giá trị ban đầu của xe là $A = \frac{500}{\frac{3}{4}} \approx 667$ triệu đồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho các số thực dương x, y thỏa mãn điều kiện $(x^2 + y^2 + 5) + \log_2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \left(\frac{xy}{2} - 2 \right)^2$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x + 9y$.

Lời giải

Đáp án: 32.

Ta có

$$(x^2 + y^2 + 5) + \log_2 \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \left(\frac{xy}{2} - 2 \right)^2 \Leftrightarrow (x^2 + y^2 + 5) + \log_2 \frac{x+y}{xy} = \left(\frac{xy}{2} \right)^2 - 2xy + 4$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2 + \log_2(x+y) - \log_2 xy = \left(\frac{xy}{2}\right)^2 - 1 \Leftrightarrow (x+y)^2 + \log_2(x+y) = \left(\frac{xy}{2}\right)^2 + \log_2 \frac{xy}{2} \quad (1). \quad \text{X}$$

ét hàm số $f(t) = t^2 + \log_2 t$, $t > 0$ có $f'(t) = 2t + \frac{1}{t \ln 2} > 0$, $\forall t > 0$. Do đó $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$.

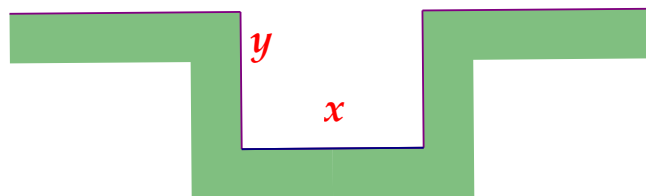
Khi đó $(1) \Leftrightarrow f(x+y) = f\left(\frac{xy}{2}\right) \Leftrightarrow x+y = \frac{xy}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2y}{y-2}$ (do $y=2$ không thoả mãn).

Vì $x > 0$ nên $\frac{2y}{y-2} > 0 \Leftrightarrow y > 2$.

Khi đó $x+9y = \frac{2y}{y-2} + 9y = \frac{4}{y-2} + 9(y-2) + 20 \geq 2\sqrt{4 \cdot 9} + 20 = 32$ (AM-GM).

Vậy $P_{\min} = 32$.

Câu 2. Trong lĩnh vực thủy lợi, cần phải xây dựng nhiều mương dẫn nước dạng "Thủy động học" (Ký hiệu diện tích tiết diện ngang của mương là S , ℓ là độ dài đường biên giới hạn của tiết diện này, ℓ - đặc trưng cho khả năng thấm nước của mương; mương được gọi là có dạng thủy động học nếu với S xác định, ℓ là nhỏ nhất).



Gọi x , y lần lượt là chiều rộng, chiều cao của mương. Khi mương dẫn nước đủ điều kiện dạng "Thủy động học" (nếu mương dẫn nước có tiết diện ngang là hình chữ nhật). Tính tỉ số $\frac{x}{y}$?

Lời giải

Đáp án: 2.

Theo bài ra ta có: $S = xy$; $\ell = 2y + x = \frac{2S}{x} + x$.

Xét hàm số $\ell(x) = \frac{2S}{x} + x$.

Ta có $\ell'(x) = \frac{-2S}{x^2} + 1 = \frac{x^2 - 2S}{x^2}$.

$\ell'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2S = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2S}$.

x	0	$\sqrt{2S}$	$+\infty$
$\ell'(x)$	-	0	+
$\ell(x)$			

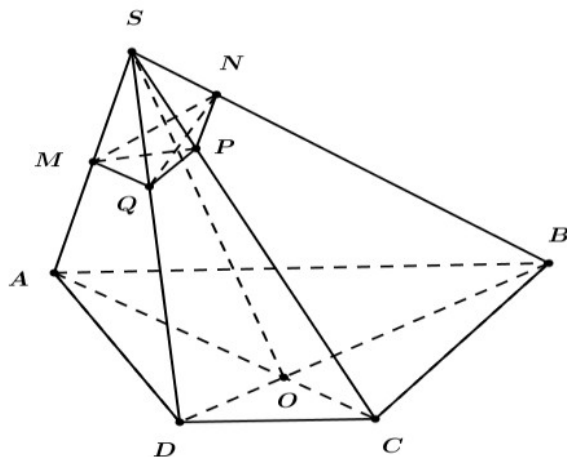
Suy ra $x = \sqrt{2S}$, $y = \sqrt{\frac{S}{2}}$ thì mương có dạng thủy động học, vậy $\frac{x}{y} = 2$.

Câu 3. Cho hình chóp $S.ABCD$, có đáy $ABCD$ là hình thang $AB \parallel CD, AB = 2CD$. Gọi (P) là một mặt phẳng tùy ý không đi qua S và cắt các cạnh SA, SB, SC, SD lần lượt tại các điểm M, N, P, Q thỏa mãn $\overrightarrow{SA} = 2\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{SC} = 5\overrightarrow{SP}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = 2\left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + \left(\frac{SD}{SQ}\right)^2.$$

Lời giải

Đáp án: 32.



Đặt $\overrightarrow{SB} = x\overrightarrow{SN}; \overrightarrow{SD} = y\overrightarrow{SQ}$ với $(x, y \geq 1)$.

Gọi $O = AC \cap BD$.

Vì $AB \parallel CD$ nên $\frac{AB}{CD} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = 2$. Do đó $OA = 2OC; OB = 2OD$.

Xét tam giác SAC có $OA = 2OC \Rightarrow \overrightarrow{OA} = -2\overrightarrow{OC} \Rightarrow \overrightarrow{SA} - \overrightarrow{SO} = -2(\overrightarrow{SC} - \overrightarrow{SO}) \Rightarrow \overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SC}$.

Tương tự, xét tam giác SBD có $OB = 2OD$ nên $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SD}$.

Suy ra $\frac{1}{3}\overrightarrow{SA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{SB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow \overrightarrow{SA} + 2\overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + 2\overrightarrow{SD} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{SM} + 10\overrightarrow{SP} = x\overrightarrow{SN} + 2y\overrightarrow{SQ}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{SN} = \frac{2}{x}\overrightarrow{SM} + \frac{10}{x}\overrightarrow{SP} - \frac{2y}{x}\overrightarrow{SQ}$$

Do $M, N, P, Q \in (S)$ nên ta có $\frac{2}{x} + \frac{10}{x} - \frac{2y}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 12 - 2y$.

$$\text{Ta có } T = 2\left(\frac{SB}{SN}\right)^2 + \left(\frac{SD}{SQ}\right)^2 = 2x^2 + y^2$$

$$= 2(12 - 2y)^2 + y^2 = 8y^2 - 96y + 288 + y^2 = 9y^2 - 96y + 288 = (3y - 16)^2 + 32 \geq 32$$

Dấu "=" xảy ra khi $y = \frac{16}{3}$, suy ra $x = \frac{4}{3}$.

Vậy $T_{\min} = 32$.

Câu 4. Hai cầu thủ Công Phượng và Quang Hải sút phạt độc lập nhau, mỗi người sút phạt 1 lần với xác suất thành công của Công Phượng và Quang Hải lần lượt là x, y ($0 < x, y < 1$)

ít nhất một cầu thủ sút phạt thành công gấp hai lần xác suất cả hai cầu thủ cùng sút phạt thành công. Xác suất để cả hai cầu thủ sút phạt thành công có giá trị nhỏ nhất là bao nhiêu (kết quả lấy gần đúng đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Đáp án: 0,44.

Gọi A, B lần lượt là biến cố “Công Phượng sút phạt thành công” và “Quang Hải sút phạt thành công”.

Khi đó $P(A) = x$ và $P(\bar{A}) = 1 - x$; $P(B) = y$ và $P(\bar{B}) = 1 - y$.

Xác suất để có ít nhất một cầu thủ sút phạt thành công là

$$P(\overline{AB}) = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - P(\bar{A})P(\bar{B}) = 1 - (1-x)(1-y) = x + y - xy$$

Xác suất để cả hai cầu thủ cùng sút phạt thành công là $P(AB) = P(A)P(B) = xy$.

Theo giả thiết ta có: $x + y - xy = 2xy \Leftrightarrow x + y = 3xy$.

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có: $3xy = x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9}$.

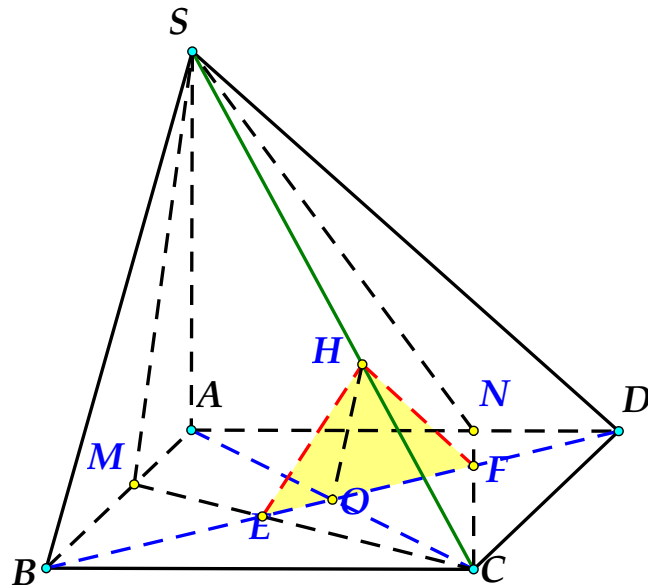
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{2}{3}$.

Vậy xác suất để cả hai cầu thủ sút phạt thành công có giá trị nhỏ nhất là $\frac{4}{9}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh bằng 2, $SA = 2$ và SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N là hai điểm thay đổi trên hai cạnh AB, AD sao cho mặt phẳng (SMC) vuông góc với mặt phẳng (SNC) . Khi thể tích khối chóp $S.AMCN$ đạt giá trị lớn nhất thì $\frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{a}{b}$, a và b nguyên dương, $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a + 2b$.

Lời giải

Đáp án: 13.



Đặt $AM = x, AN = y$ với $0 < x \leq 2, 0 < y \leq 2$.

Ta có: $S_{AMCN} = S_{ABCD} - S_{\triangle NCD} - S_{\triangle MBC} = 4 - \frac{1}{2}(2-y) \cdot 2 - \frac{1}{2}(2-x) \cdot 2 = x + y$

Do đó: $V_{S-ANCM} = \frac{1}{3} SA S_{AMCN} = \frac{2}{3}(x + y)$

Gọi $E = BD \cap (SMC)$, $F = (SNC) \cap BD$ và O là tâm hình vuông.

Dễ dàng chứng minh $BD \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp (SAC) \Rightarrow EF \perp SC$

Trong (SMC) , kẻ $EH \perp SC$ tại H (1), do $EF \perp SC$ nên $SC \perp (EHF) \Rightarrow SC \perp HF$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow [(SCM), (SNC)] = (EH, HF) = 90^\circ$ hay $\angle EHF = 90^\circ \Rightarrow EH \perp HF$

Suy ra $\triangle EHF$ vuông tại H có đường cao OH (do $EF \perp (SAC), OH \subset (SAC)$)

Suy ra $OH^2 = OE \cdot OF$.

$$OH = OC \cdot \sin \angle SCA = OC \cdot \frac{SA}{SC} = \frac{2}{\sqrt{6}} \Rightarrow OE \cdot OF = \frac{2}{3}$$

Ta dễ dàng tính được

Gọi K là trung điểm AM . Dễ dàng chứng minh $OK \parallel CM$

$$\Rightarrow \frac{BE}{OE} = \frac{BM}{MK} \Rightarrow \frac{OB - OE}{OE} = \frac{2-x}{\frac{x}{2}} = \frac{2(2-x)}{x} \Rightarrow \frac{OB}{OE} = \frac{4-x}{x} \Rightarrow OE = \frac{x\sqrt{2}}{4-x}$$

$$OF = \frac{y\sqrt{2}}{4-y}$$

Chứng minh tương tự, ta có

$$OE \cdot OF = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3xy = (4-x)(4-y) \Leftrightarrow (x+2)(y+2) = 12$$

Từ đó ta suy ra

$$\text{Suy ra } y = \frac{12}{x+2} - 2$$

Ta có: $N \in AD \Rightarrow y \leq 2 \Rightarrow \frac{12}{x+2} - 2 \leq 2 \Leftrightarrow x \geq 1 \Rightarrow x, y \in [1; 2]$

Vậy $V_{S_{AMCN}} = \frac{2}{3} \left(x - 2 + \frac{12}{x+2} \right)$

Xét $f(x) = \frac{2}{3} \left(x - 2 + \frac{12}{x+2} \right)$ với $x \in [1; 2]$

$f'(x) = \frac{2}{3} \left(1 - \frac{12}{(x+2)^2} \right)$. Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(\sqrt{3} - 1) \in [1; 2] \\ x = -2(\sqrt{3} - 1) \notin [1; 2] \end{cases}$

$f(1) = f(2) = 2$ và $f(2\sqrt{3} - 1) = \frac{8(\sqrt{3} - 1)}{3}$

Vậy $V_{\max} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$

Vậy $T = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{1^2} = \frac{5}{4} \Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow a + 2b = 5 + 2 \cdot 4 = 13$

Câu 6. Tìm tất cả các số nguyên $n \neq 0$ để hàm số $y = f(x) = \cos(nx + 2024\pi) \cdot \cos\left(\frac{10x - 2025n\pi}{2n}\right)$ là hàm số tuần hoàn chu kỳ 3π .

Lời giải

Đáp án: 4.

Ta có

$$y = f(x) = \cos(nx + 2024\pi) \cdot \cos\left(\frac{10x - 2025n\pi}{2n}\right) = \cos nx \cdot \sin \frac{5x}{n}$$

Giả sử hàm số tuần hoàn với chu kỳ 3π . Với mọi x ta có

$$\cos n(x + 3\pi) \cdot \sin \frac{5(x + 3\pi)}{n} = \cos nx \cdot \sin \frac{5x}{n}$$

Cho $x = 0$, ta được $\sin \frac{15\pi}{n} = 0 \Leftrightarrow \frac{15\pi}{n} = k\pi \Leftrightarrow 15 = kn$

Vậy n là ước của 15, do đó $n \in \{\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15\}$

Thử lại:

+ Với $n = 1$ ta được hàm số $y = \cos x \cdot \sin 5x$

Ta có: $\cos x \cdot \sin 5x = \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x) = \frac{1}{2} \sin 6x + \frac{1}{2} \sin 4x$

+ Hàm số $y = \sin 6x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$

+ Hàm số $y = \sin 4x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

Vậy chu kỳ T của hàm số đã cho là bội chung nhỏ nhất của $\frac{\pi}{3}$ và $\frac{\pi}{2}$, do đó $T = \pi$.

Vậy $n = 1$ không thoả mãn.

+ Với $n = -1$ ta được hàm số $y = \cos(-x) \cdot \sin(-5x) = -\cos x \cdot \sin 5x$.

Trường hợp này giống với khi $n = 1$.

Vậy $n = -1$ không thoả mãn.

+ Với $n = 3$ ta được hàm số $y = \cos 3x \cdot \sin \frac{5x}{3}$.

Ta có: $\cos 3x \cdot \sin \frac{5x}{3} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{14}{3}x - \sin \frac{4}{3}x \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{14}{3}x - \frac{1}{2} \sin \frac{4}{3}x$.

+ Hàm số $y = \sin \frac{14}{3}x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{14}{3}} = \frac{3\pi}{7}$.

+ Hàm số $y = \sin \frac{4}{3}x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2}$.

Vậy chu kỳ T của hàm số đã cho là bội chung nhỏ nhất của $\frac{3\pi}{7}$ và $\frac{3\pi}{2}$, do đó $T = 3\pi$.
 Vậy $n = 3$ thoả mãn.

+ Với $n = -3$ ta được hàm số $y = -\cos 3x \cdot \sin \frac{5x}{3}$.

Do đó hàm số tuần hoàn chu kỳ $T = 3\pi$.

Vậy $n = -3$ thoả mãn.

+ Với $n = 5$ ta được hàm số $y = \cos 5x \cdot \sin x$.

Ta có: $\cos 5x \cdot \sin x = \frac{1}{2} (\sin 6x - \sin 4x) = \frac{1}{2} \sin 6x - \frac{1}{2} \sin 4x$.

Đến đây giống với $n = 1$ nên không thoả mãn.

+ Với $n = -5$ ta được hàm số $y = -\cos 5x \cdot \sin x$.

Đến đây giống với $n = 1$ nên không thoả mãn.

+ Với $n = 15$ ta được hàm số $y = \cos 15x \cdot \sin \frac{x}{3}$.

Ta có: $\cos 15x \cdot \sin \frac{x}{3} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{46}{3}x - \sin \frac{44}{3}x \right) = \frac{1}{2} \sin \frac{46}{3}x - \frac{1}{2} \sin \frac{44}{3}x$.

+ Hàm số $y = \sin \frac{46}{3}x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{\frac{46}{3}} = \frac{3\pi}{23}$.

+ Hàm số $y = \sin \frac{44}{3}x$ tuần hoàn với chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\frac{44}{3}} = \frac{3\pi}{22}$.

Vậy chu kỳ T của hàm số đã cho là bội chung nhỏ nhất của $\frac{3\pi}{23}$ và $\frac{3\pi}{22}$, do đó $T = 3\pi$.
 Vậy $n = 15$ thoả mãn.

+ Với $n = -15$ ta được hàm số $y = -\cos 15x \cdot \sin \frac{x}{3}$.

Do đó hàm số tuần hoàn chu kỳ $T = 3\pi$.

Vậy $n = -15$ thoả mãn.

Vậy tất cả các số nguyên cần tìm là $n \in \{\pm 3; \pm 15\}$.
----- *Hết* -----