

Câu I. (4 điểm)

1) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn: $ab + bc + ca = 1$

Chứng minh rằng $A = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$ là số chính phương

2) Các số x, y, z khác 0 thỏa mãn $x + y + z = 1$ và $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) = -2$.

Tính giá trị của biểu thức: $P = x^{2023} + y^{2023} + z^{2023}$.

Câu II. (4 điểm)

1) Tìm x , biết: $\frac{2x+5}{x^2+5x+4} - \frac{2x+2}{x^2+2x-8} = \frac{3}{2}$ (với $x \neq -4; x \neq -1; x \neq 2$)

2) Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Tìm a, b, c, d biết rằng khi chia đa thức $f(x)$ lần lượt cho các đa thức $x-1; x-2; x-3$ đều có số dư là 6 và tại $x = -1$ thì đa thức $f(x)$ đó nhận giá trị bằng -18 .

Câu III. (4 điểm)

1) Tìm các số tự nhiên n để $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố.

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$.

Chứng minh rằng: $a + b + c + d$ chia hết 6

Câu IV. (6 điểm)

Cho hình vuông ABCD. Gọi E, K lần lượt là trung điểm của AB và CD; O là giao điểm của AK và DE. Kẻ DM vuông góc với CE tại M.

1) Chứng minh rằng tam giác AKM vuông.

2) Gọi N là giao điểm của AK và BM. Chứng minh $\triangle ADM$ cân và tính $\angle ANB$.

3) Tia phân giác của $\angle DCE$ cắt AD tại F. Chứng minh rằng: $CF \leq 2EF$.

Câu V. (2 điểm)

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn: $ab + bc + ca = abc$.

$$\frac{a}{bc(a+1)} + \frac{b}{ca(b+1)} + \frac{c}{ab(c+1)}$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

..... Hết

Họ tên học sinh:; Số báo danh:

HƯỚNG DẪN CHẤM

Môn thi: TOÁN 8

Câu	Nội dung cần đạt	Điểm
Câu I 4 điểm	<p>1. Ta có: $ab + bc + ca = 1$</p> <p>$\Rightarrow 1 + a^2 = ab + bc + ca + a^2 = a(a + b) + c(a + b) = (a + b)(a + c)$;</p> <p>$1 + b^2 = ab + bc + ca + b^2 = b(a + b) + c(a + b) = (a + b)(b + c)$;</p> <p>$1 + c^2 = ab + bc + ca + c^2 = b(a + c) + c(a + c) = (a + c)(b + c)$</p> <p>$\Rightarrow A = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2) = (a + b)^2(b + c)^2(a + c)^2 = [(a + b)(b + c)(a + c)]^2$</p> <p>Vì a, b, c là các số nguyên nên $(a + b)(b + c)(c + a) \in \mathbb{Z}$</p> <p>Suy ra $A = (1 + a^2)(1 + b^2)(1 + c^2)$ là số chính phương.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>2) $\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) + \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z}\right) = -2$</p> <p>$x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = -2$</p> <p>$\left[x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) + 1\right] + \left[y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + 1\right] + \left[z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + 1\right] = 1$</p> <p>$x\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x}\right) + y\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) + z\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$</p> <p>$(x + y + z)\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}\right) = 1$</p> <p>$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z}$</p> <p>$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{x + y + z} - \frac{1}{x}$</p> <p>$\frac{y + z}{yz} = \frac{x - (x + y + z)}{x(x + y + z)}$</p> <p>$\frac{y + z}{yz} = \frac{-(y + z)}{x(x + y + z)}$</p> <p>$\frac{y + z}{yz} + \frac{y + z}{x(x + y + z)} = 0$</p> <p>$(y + z)\left(\frac{1}{yz} + \frac{1}{x(x + y + z)}\right) = 0$</p>	<p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p>

	$(y+z) \cdot \frac{x(x+y+z)+yz}{xyz(x+y+z)} = 0$ $(y+z) \cdot \frac{(x+y)(x+z)}{xyz(x+y+z)} = 0$ $(x+y)(x+z)(y+z) = 0$ <p>- Nếu $x+y=0$ thay vào $x+y+z=1$ ta được $z=1$ và $x=-y$</p> <p>Khi đó: $P = x^{2023} + y^{2023} + z^{2023} = (-y)^{2023} + y^{2023} + 1^{2023} = 1$</p> <p>Tương tự $y+z=0$ và $x+z=0$ ta có $P=1$.</p> <p>Vậy $P=1$.</p>	<p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p>
Câu II 4 điểm	<p>1) Với $x \neq -4; x \neq -1; x \neq 2$. Ta có:</p> $\frac{2x+5}{x^2+5x+4} - \frac{2x+2}{x^2+2x-8} = \frac{3}{2}$ $\frac{2x+5}{(x+1)(x+4)} - \frac{2x+2}{(x-2)(x+4)} = \frac{3}{2}$ $\left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+4} \right) - \left(\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+4} \right) = \frac{3}{2}$ $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x-2} = \frac{3}{2}$ $\frac{x-2-x-1}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{2}$ $\frac{-3}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{2}$ $(x+1)(x-2) = -2$ $x^2 - x = 0$ $x(x-1) = 0$ $x = 0 \text{ hoặc } x = 1$ <p>Vậy $x=0$ hoặc $x=1$.</p>	<p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p>
	<p>2)</p> <p>Từ đề bài ta suy ra được $f(x)-6$ chia hết cho $x-1; x-2; x-3$.</p> <p>Vì $f(x)$ là đa thức bậc 3 nên ta có:</p> $f(x)-6 = m \cdot (x-1)(x-2)(x-3), \text{ trong đó } m \text{ là hằng số khác } 0.$ <p>Lại có $f(-1) = -18$ nên $-18-6 = m \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (-4)$</p> $\Rightarrow m = 1$ <p>Vậy $f(x)-6 = (x-1)(x-2)(x-3)$</p> <p>Suy ra $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x$</p> <p>Vậy $a=1; b=-6; c=11; d=0$.</p>	<p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p>
Câu III 4 điểm	<p>1) $(n^2-8)^2 + 36 = n^4 - 16n^2 + 100 = (n^2+10)^2 - 36n^2$</p> $= (n^2-6n+10)(n^2+6n+10)$	<p>0,5 điểm</p>

	<p>Đề $(n^2 - 8)^2 + 36$ là số nguyên tố thì: $n^2 - 6n + 10 = 1$ hoặc $n^2 + 6n + 10 = 1$</p> <p>- Nếu $n^2 - 6n + 10 = 1$ thì $(n-3)^2 = 0$. Suy ra $n = 3$</p> <p>Khi đó $(n^2 - 8)^2 + 36 = 37$ là số nguyên tố (thoả mãn)</p> <p>- Nếu $n^2 + 6n + 10 = 1$ thì $(n+3)^2 = 0$. Suy ra $n = -3$ (loại do n là số tự nhiên)</p> <p>Vậy $n = 3$ thoả mãn bài toán.</p>	<p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p>
	<p>2) Ta có:</p> $5(a^3 + b^3) = 13(c^3 + d^3)$ $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 6(a^3 + b^3 - 2c^3 - 2d^3)$ <p>Do $6(a^3 + b^3 - 2c^3 - 2d^3)$ chia hết cho 6 nên $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ chia hết cho 6</p> <p>Xét hiệu</p> $(a^3 + b^3 + c^3 + d^3) - (a + b + c + d)$ $= (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (d^3 - d)$ <p>mà $(a^3 - a) = a(a-1)(a+1)$ là tích của ba số tự nhiên liên tiếp nên $(a^3 - a) : 3$</p> <p>Tương tự: $(b^3 - b) : 3$; $(c^3 - c) : 3$; $(d^3 - d) : 3$</p> <p>Mà $a^3 + b^3 + c^3 + d^3$ chia hết cho 6 nên $a + b + c + d$ chia hết cho 6.</p>	<p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p>
<p>Câu IV 6 điểm</p>		

	<p>1) Chứng minh được tứ giác $AEKD$ là hình chữ nhật. Khi đó O là trung điểm của DE. $\triangle DEM$ vuông tại M có MO là đường trung tuyến ứng với cạnh DE</p> $OM = OD = OE = \frac{1}{2}DE$ <p>nên mà $DE = AK$ (tứ giác $AEKD$ là hình chữ nhật)</p> $OM = \frac{1}{2}AK$ <p>nên</p> <p>$\triangle AMK$ có MO là đường trung tuyến ứng với cạnh AK và $OM = \frac{1}{2}AK$ Suy ra $\triangle AMK$ vuông tại M.</p>	<p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p>
	<p>2) Gọi H là giao điểm của AK và DM. Chứng minh được tứ giác $AECK$ là hình bình hành nên $AK \parallel MC$ mà $DM \perp MC$. Suy ra $AK \perp DM$ tại H. Xét $\triangle DMC$ vuông tại M có MK là đường trung tuyến ứng với cạnh huyền DC nên</p> $KM = KD = KC = \frac{1}{2}DC$ <p>Khi đó $\triangle DMK$ cân tại K có $KH \perp DM$ nên AK là đường trung trực của DM. Do AK là đường trung trực của DM nên $AD = AM$. Khi đó $\triangle ADM$ cân tại A. mà $AD = AM$ và $AM = AB$ nên $\triangle ABM$ cân tại A.</p> <p>Do $\triangle ADM$ cân tại A nên $\angle AMD = \frac{180^\circ - \angle MAD}{2}$ Do $\triangle ABM$ cân tại A nên $\angle AMB = \frac{180^\circ - \angle MAB}{2}$</p> <p>Suy ra $\angle AMD + \angle AMB = \frac{180^\circ - \angle MAD}{2} + \frac{180^\circ - \angle MAB}{2} = \frac{360^\circ - (\angle MAD + \angle MAB)}{2}$ $\angle AMD + \angle AMB = \frac{360^\circ - 90^\circ}{2} = 135^\circ$</p> <p>Khi đó $\angle HMN = 45^\circ$ nên $\triangle HMN$ vuông cân tại M Vậy $\angle ANB = 45^\circ$.</p>	<p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p>
	<p>3) Qua E kẻ đường vuông góc với CF cắt CD tại Q. Do tứ giác $AEKD$ là hình chữ nhật nên $EK \perp KD$ nên $\triangle EKQ$ vuông cân tại K. Xét $\triangle EKQ$ và $\triangle CDF$ có:</p> $EK = AD = CD; \angle EKQ = \angle CDF = 90^\circ; \angle QEK = \angle FCD \text{ (cùng phụ } \angle EQK)$	<p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p>

	<p>Suy ra $\triangle EKQ = \triangle CDF$ (cạnh góc vuông - góc nhọn kề) nên $EQ = CF$ $\triangle ECQ$ có CF vừa là đường cao vừa là đường phân giác nên $\triangle ECQ$ cân tại C. Suy ra: $CQ = CE$ Xét $\triangle CFQ$ và $\triangle CFE$ có: $CE = CQ$; $\angle ECF = \angle QCF$; FC chung Nên $\triangle CFQ = \triangle CFE$ (c-g-c) Khi đó: $FE = FQ$ nên $FE + FQ = 2EF$ Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có: $QE \leq FE + FQ = 2EF$ mà $EQ = CF$ nên $CF \leq 2EF$.</p>	<p>0,5 điểm</p> <p>0,25 điểm</p> <p>0,25 điểm</p>
<p>Câu V 2 điểm</p>	<p>Do $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ $\frac{4}{m+n} \leq \frac{1}{m} + \frac{1}{n}$ với mọi m, n dương. Dấu "=" xảy ra khi m = n. Vận dụng ta có: $\frac{a}{bc(a+1)} = \frac{a}{abc+bc} = \frac{a}{ab+bc+ca+bc} \leq \frac{a}{4} \left(\frac{1}{ab+bc} + \frac{1}{ca+bc} \right)$; dấu "=" xảy ra khi b = c Tương tự: $\frac{b}{ca(b+1)} \leq \frac{b}{4} \left(\frac{1}{ab+ca} + \frac{1}{bc+ca} \right)$ dấu "=" xảy ra khi c = a $\frac{c}{ab(c+1)} \leq \frac{c}{4} \left(\frac{1}{ab+bc} + \frac{1}{ca+ab} \right)$ dấu "=" xảy ra khi a = b Suy ra $\frac{a}{bc(a+1)} + \frac{b}{ca(b+1)} + \frac{c}{ab(c+1)}$ $\leq \frac{a}{4} \left(\frac{1}{ab+bc} + \frac{1}{ca+bc} \right) + \frac{b}{4} \left(\frac{1}{ab+ca} + \frac{1}{bc+ca} \right) + \frac{c}{4} \left(\frac{1}{ab+bc} + \frac{1}{ca+ab} \right)$ $\frac{a}{bc(a+1)} + \frac{b}{ca(b+1)} + \frac{c}{ab(c+1)}$ $\leq \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{ab+bc} (a+c) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{bc+ca} (a+b) + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{ca+ab} (b+c)$ $\frac{a}{bc(a+1)} + \frac{b}{ca(b+1)} + \frac{c}{ab(c+1)} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$ $\frac{a}{bc(a+1)} + \frac{b}{ca(b+1)} + \frac{c}{ab(c+1)} \leq \frac{1}{4}$ Vậy GTLN của biểu thức bằng $\frac{1}{4}$ khi a = b = c = 3</p>	<p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p> <p>0,5 điểm</p>

Lưu ý: - Điểm toàn bài làm tròn đến 0,25 đ;

- HS làm cách khác, nếu đúng vẫn cho điểm tối đa.

