

CHUYÊN ĐỀ

CỰC TRỊ TRONG KHÔNG GIAN Oxyz

I. PHƯƠNG PHÁP

Để tìm cực trị trong không gian chúng ta thường sử dụng hai cách làm:

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số.

Bài toán 1: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(x_A; y_A; z_A), B(x_B; y_B; z_B)$ và mặt phẳng $(P): ax + by + cz + d = 0$.
Tìm điểm $M \in (P)$ sao cho

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.
2. $|MA - MB|$ lớn nhất với $d(A, (P)) \neq d(B, (P))$.

Phương pháp:

- Xét vị trí tương đối của các điểm A, B so với mặt phẳng (P) .
- Nếu $(ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d) > 0$ thì hai điểm A, B cùng phía với mặt phẳng (P) .
- Nếu $(ax_A + by_A + cz_A + d)(ax_B + by_B + cz_B + d) < 0$ thì hai điểm A, B nằm khác phía với mặt phẳng (P) .

1. $MA + MB$ nhỏ nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P) .

Vì A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P) nên $MA + MB$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) .

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P) , khi đó A' và B ở khác phía (P) và $MA = MA'$ nên $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$.

Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$ khi $M = A'B \cap (P)$.

2. $|MA - MB|$ lớn nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) .

Vì A, B ở cùng phía so với mặt phẳng (P) nên $|MA - MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M = (P) \cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A, B ở khác phía so với mặt phẳng (P) .

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P) , khi đó A' và B ở cùng phía (P) và

$$MA = MA' \quad \text{nên} \quad |MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B.$$

Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất bằng $A'B$ khi $M = A'B \cap (P)$.

Bài toán 2: Lập phương trình mặt phẳng (P) biết

- (P) đi qua đường thẳng Δ và khoảng cách từ $A \notin \Delta$ đến (P) lớn nhất
- (P) đi qua Δ và tạo với mặt phẳng (Q) một góc nhỏ nhất
- (P) đi qua Δ và tạo với đường thẳng d một góc lớn nhất.

Phương pháp:

Cách 1: Dùng phương pháp đại số

$$\Delta: \frac{x-x_1}{a} = \frac{y-y_1}{b} = \frac{z-z_1}{c} \quad \text{và} \quad A(x_0; y_0; z_0)$$

1. Giả sử đường thẳng

Khi đó phương trình (P) có dạng: $A(x-x_1) + B(y-y_1) + C(z-z_1) = 0$

$$Aa + Bb + Cc = 0 \Rightarrow A = -\frac{bB + cC}{a} \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

Trong đó

$$d(A, (P)) = \frac{|A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) + C(z_0 - z_1)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Khi đó (2)

Thay (1) vào (2) và đặt $t = \frac{B}{C}$, ta được $d(A, (P)) = \sqrt{f(t)}$

Trong đó $f(t) = \frac{mt^2 + nt + p}{m't^2 + n't + p'}$, khảo sát hàm $f(t)$ ta tìm được $\max f(t)$. Từ đó suy ra được sự biến đổi của A, B qua C rồi cho C giá trị bất kì ta tìm được A, B .

2. và 3. làm tương tự

Cách 2: Dùng hình học

1. Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (P) , khi đó ta có:

$$d(A, (P)) = AH \leq AK, \quad \text{mà } AK \text{ không đổi. Do đó } d(A, (P)) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow H \equiv K$$

Hay (P) là mặt phẳng đi qua K , nhận $\overline{AK}$ làm VTPT.

2. Nếu $\Delta \perp (Q) \Rightarrow (\overline{AP}, (Q)) = 90^\circ$ nên ta xét Δ và (Q) không vuông góc với nhau.

- Gọi B là một điểm nào đó thuộc Δ , dựng đường thẳng qua B và vuông góc với (Q) . Lấy điểm C cố định trên đường thẳng đó. Hạ $CH \perp (P)$, $CK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) là $\widehat{BCH}$.

$$\sin \widehat{BCH} = \frac{BH}{BC} \geq \frac{BK}{BC}.$$

Ta có

Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên $\widehat{BCH}$ nhỏ nhất khi $H \equiv K$.

- Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK) . Suy ra

$$\vec{n}_P = [\vec{u}_\Delta, [\vec{u}_\Delta, \vec{n}_Q]] \text{ là VTPT của } (P).$$

- Gọi M là một điểm nào đó thuộc Δ , dựng đường thẳng d' qua M và song song với d . Lấy điểm A cố định trên đường thẳng đó. Hạ $AH \perp (P)$, $AK \perp d$. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' là $\widehat{AMH}$.

$$\cos \widehat{AMH} = \frac{HM}{AM} \geq \frac{KM}{AM}.$$

Ta có

Mà $\frac{KM}{AM}$ không đổi, nên $\widehat{AMH}$ lớn nhất khi $H \equiv K$.

- Mặt phẳng (P) cần tìm là mặt phẳng chứa Δ và vuông góc với mặt phẳng (d', Δ) . Suy ra

$$\vec{n}_P = [\vec{u}_\Delta, [\vec{u}_\Delta, \vec{u}_{d'}]] \text{ là VTPT của } (P).$$

II. CÁC VÍ DỤ

Ví dụ 1.8 Trong không gian với hệ tọa độ đề các vuông góc $Oxyz$ cho $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A lên d và viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

Lời giải.

- Đường thẳng d có $\vec{u}_d = (2; 1; 2)$ là VTCP.

Gọi H là hình chiếu của A lên $d \Rightarrow H(1+2t; t; 2+2t) \Rightarrow \overrightarrow{AH} = (2t-1; t-5; 2t-1)$.

Do $AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + t-5 + 2(2t-1) = 0 \Leftrightarrow t=1 \Rightarrow H(3; 1; 4)$.

- Gọi H' là hình chiếu của A lên $mp(P)$.

Khi đó, ta có: $AH' \leq AH \Rightarrow d(A, (P)) \text{ lớn nhất} \Leftrightarrow H \equiv H' \Leftrightarrow (P) \perp AH$

Suy ra $\overrightarrow{AH} = (1; -4; 1)$ là VTPT của (P) và (P) đi qua H .

$$(P) : x - 4y + z - 3 = 0$$

Vậy phương trình

Ví dụ 2.8 Trong không gian với hệ tọa độ đề các vuông góc $Oxyz$ cho bốn điểm

$A(1; 0; 0), B(1; 1; 0), C(0; 1; 0), D(0; 0; m)$ với $m \neq 0$ là tham số.

1. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AC và BD khi $m = 2$;
2. Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên BD . Tìm các giá trị của tham số m để diện tích tam giác OBH đạt giá trị lớn nhất.

Lời giải.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (0; 1; 0), \overrightarrow{CD} = (0; -1; m)$

1. Với $m = 2$ ta có: $\overrightarrow{CD} = (0; -1; 2)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 1; 0)$

Do đó $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] = (2; 0; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] \cdot \overrightarrow{AC} = -2$

$$d(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}] \cdot \overrightarrow{AC}}{[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}]} = \frac{-2}{2} = -1$$

Vậy

2. Đặt $x = OH \Rightarrow BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{2 - x^2}$

Suy ra $S_{\Delta OBH} = \frac{1}{2} x \sqrt{2 - x^2} = \frac{1}{2} \sqrt{x^2(2 - x^2)} \leq \frac{1}{4} (x^2 + 2 - x^2) = \frac{1}{2}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow OH = 1 \Leftrightarrow d(O, BD) = 1$

Ta có: $\overrightarrow{BD} = (-1; -1; m), \overrightarrow{OB} = (1; 1; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OB}] = (-m; m; 0)$

$$d(O, BD) = \frac{[\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{OB}]}{|\overrightarrow{BD}|} = \frac{m\sqrt{2}}{\sqrt{2 + m^2}} = 1 \Leftrightarrow 2m^2 = 2 + m^2$$

Do đó

$$\Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

Ví dụ 3.8 Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 9; 4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho:

1. M là trọng tâm của tam giác ABC ;
2. Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (α) là lớn nhất;
3. $OA = OB = OC$;
4. $8OA = 12OB + 16 = 37OC$ và $x_A > 0, z_C < 0$.

Lời giải.

Giả sử mặt phẳng (α) cắt các trục tọa độ tại các điểm khác gốc tọa độ là $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) có dạng $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 9; 4)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1$ (1).

1. Ta có: $\overrightarrow{AM}(1 - a; 9; 4), \overrightarrow{BC}(0; -b; c), \overrightarrow{BM}(1; 9 - b; 4), \overrightarrow{CA}(a; 0; -c)$.

Điểm M là trực tâm tam giác ABC khi và chỉ khi
$$\begin{cases} M \in (\alpha) \\ \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CA} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1 \\ 9b = 4c \\ a = 4c \end{cases} \Rightarrow a = 98; b = \frac{98}{9}; c = \frac{49}{2}$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x + 9y + 4z - 98 = 0$.
2.

$$d(O, (\alpha)) = \frac{|-1|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Cách 1: Ta có:

$$T = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

Bài toán trở thành, tìm giá trị nhỏ nhất của T với các số thực

$a, b, c \neq 0$ thỏa mãn $\frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1$ (1).

Ap dụng bất Bunhiacopski ta có:
$$\left(1 \cdot \frac{1}{a} + 9 \cdot \frac{1}{b} + 4 \cdot \frac{1}{c}\right)^2 \leq (1^2 + 9^2 + 4^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right).$$

Nên suy ra $T \geq \frac{1}{98}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi
$$\begin{cases} 1 : \frac{1}{a} = 9 : \frac{1}{b} = 4 : \frac{1}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{9}{b} + \frac{4}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 9b = 4c = 98.$$

Phương trình mặt phẳng (α) cần tìm là $x + 9y + 4z - 98 = 0$.

Cách 2: Gọi H là hình chiếu của O trên mặt phẳng (α) .

Vì mặt phẳng (α) luôn đi qua điểm cố định M nên $d(O, (\alpha)) = OH \leq OM = \sqrt{98}$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $H \equiv M$, khi đó (α) là mặt phẳng đi qua M và có véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}(1; 9; 4)$ nên phương trình (α) là

$$1 \cdot (x - 1) + 9 \cdot (y - 9) + 4 \cdot (z - 4) = 0 \Leftrightarrow x + 9y + 4z - 98 = 0.$$

3. Vì $OA = OB = OC$ nên $|a| = |b| = |c|$, do đó xảy ra bốn trường hợp sau:

• Trường hợp 1: $a = b = c$.

Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} + \frac{9}{a} + \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 14$, nên phương trình (α) là: $x + y + z - 14 = 0$.

• Trường hợp 2: $a = b = -c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} + \frac{9}{a} - \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = 6$, nên phương trình (α) là $x + y - z - 6 = 0$.

• Trường hợp 3: $a = -b = c$. Từ (1) suy ra $\frac{1}{a} - \frac{9}{a} + \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -4$, nên phương trình (α) là $x - y + z + 4 = 0$.

• Trường hợp 4: $a = -b = -c$. Từ (1) có $\frac{1}{a} - \frac{9}{a} - \frac{4}{a} = 1 \Leftrightarrow a = -12$, nên phương trình (α) là $x - y - z + 12 = 0$.

Vậy có bốn mặt phẳng thỏa mãn là $x + y + z - 14 = 0$, và các mặt phẳng
 $x + y - z - 6 = 0, x - y + z + 4 = 0, x - y - z + 12 = 0$.

4. Vì $x_A > 0, z_C < 0$ nên $a > 0, c < 0$, do đó

$$8OA = 12OB + 16 = 37OC \Leftrightarrow 8a = 12|b| + 16 = -37c.$$

• Nếu $b > 0 \Rightarrow c = -\frac{8}{37}a, b = \frac{2a-4}{3}, a > 2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{27}{2a-4} - \frac{37}{2a} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -7 \end{cases}$$

Vì $a > 2$ nên $a = 5 \Rightarrow b = 2; c = -\frac{40}{37}$, phương trình mặt phẳng cần tìm là
 $(\alpha): 8x + 20y - 37z - 40 = 0$.

• Nếu $b < 0 \Rightarrow c = -\frac{8}{37}a, b = \frac{4-2a}{3}, a > 2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a} + \frac{27}{4-2a} - \frac{37}{2a} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 29a - 35 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-29 \pm 3\sqrt{109}}{2}$$

Vì $a > 2$ nên không có giá trị thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 8x + 20y - 37z - 40 = 0$.

Ví dụ 4.8 Cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 25$ và mặt phẳng (α) có phương trình
 $2x + 2y + z + 7 = 0$

1. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và tìm bán kính của đường tròn đó;

2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1; -1; 2), B(3; 5; -2)$ và (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 1; 1)$, bán kính $R = 5$.

$$d(I, (\alpha)) = \frac{|2 + 2 + 1 + 7|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = 4 < R$$

1. Ta có , suy ra (α) cắt mặt cầu (S) theo đường tròn tâm H bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (\alpha))} = 3$$

H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α) , suy ra phương trình của HI là:

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + 2t \\ z = 1 + t \\ 2x + 2y + z + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = -\frac{5}{3} \\ z = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

Tọa độ điểm H là nghiệm của hệ

$$H\left(-\frac{5}{3}; -\frac{5}{3}; -\frac{1}{3}\right).$$

Vậy tâm

$$AB: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases}$$

2. Ta có $\overline{AB} = (2; 6; -4)$ nên phương trình đường thẳng

Vì $IA < R$ nên mặt phẳng (P) đi qua AB luôn cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính

$$r = \sqrt{25 - d^2(I, (P))}$$

Do đó r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I, (P))$ lớn nhất.

Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của I lên AB và (P) , ta luôn có

$IH \leq IK$ nên suy ra $d(I, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Do $H \in AB \Rightarrow H(1+t; -1+3t; 2-2t) \Rightarrow \overline{IH} = (t; 3t-2; 1-2t)$

$$IH \perp AB \Rightarrow \overline{IH} \cdot \overline{AB} = 0 \Leftrightarrow t + 3(3t-2) - 2(1-2t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{4}{7} \Rightarrow \overline{IH} = \left(\frac{4}{7}; -\frac{2}{7}; -\frac{1}{7}\right)$$

Vậy phương trình $(\alpha): 4x - 2y - z - 4 = 0$.

Ví dụ 5.8 Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $(P): 2x - y + 2z - 14 = 0$ và mặt cầu

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$$

- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa trục Ox và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính bằng 3;
- Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt cầu (S) sao cho khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) lớn nhất.

Lời giải.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -1)$ và bán kính $R = 3$.

1. Trục Ox có phương trình: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow$ phương trình $(Q): ay + bz = 0$.

Mặt cầu (S) cắt (Q) theo một đường tròn có bán kính $r = 3 = R$

$$\Rightarrow I \in (Q) \Rightarrow a - 2b = 0 \quad b = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$2x + y = 0$$

Vậy phương trình mp(Q):

2. Gọi Δ là đường thẳng đi qua I và vuông góc với mp(P). Suy ra phương trình của

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}$$

Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm A, B .

Khi đó nếu $d(A, (P)) > d(B, (P)) \Rightarrow d(M, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M \equiv A$.

Tọa độ giao điểm của Δ và mặt cầu (S) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0 \\ \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \end{cases}$$

Giải hệ này ta được hai giao điểm $A(-1; -1; -3), B(3; -3; 1)$

Ta có: $d(A, (P)) = 7 > d(B, (P)) = 1$

Vậy $d(M, (P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow M(-1; -1; -3)$.

Ví dụ 6.8 Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$ và hai điểm $A(5; -2; 6)$, $B(3; -2; 1)$. Tìm điểm M thuộc (P) sao cho:

- $MA + MB$ nhỏ nhất
- $|MA - MB|$ lớn nhất

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}_P = (2; -1; 2)$ là VTPT

Thay tọa độ hai điểm A, B vào vế trái phương trình của (P) ta được 18 và 4 nên hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với (P) .

1. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P) , khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và với mọi điểm $M \in (P)$, ta có $MA = MA'$.

Do đó $\forall M \in (P): MA + MB = A'M + MB \geq A'B$, mà $A'B$ không đổi và đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (P)$, suy ra $MA + MB$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$.

$$AA' \perp (P) \Rightarrow AA': \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$$

Ta có:

Tọa độ giao điểm H của AA' và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow H(1; -1; 2)$$

$$AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -3 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3; 2; -2)$$

H là trung điểm của

$$A'B: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Suy ra $\overline{A'B} = (6; -4; 3)$, phương trình

$$\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{11} \\ y = -\frac{14}{11} \\ z = \frac{5}{11} \end{cases}$$

Tọa độ M là nghiệm của hệ

$$M\left(\frac{21}{11}; -\frac{14}{11}; \frac{5}{11}\right)$$

Vậy là điểm cần tìm.

2. Vì A, B nằm về cùng một phía so với (P) nên với mọi $M \in (P)$ ta luôn có

$$|AM - MB| \leq AB, \text{ đẳng thức xảy ra khi } M = AB \cap (P).$$

$$AB : \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \end{cases}$$

Phương trình

$$M : \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{17}{7} \\ y = -2 \\ z = -\frac{3}{7} \end{cases} \quad M\left(\frac{17}{7}; -2; -\frac{3}{7}\right)$$

Tọa độ

. Vậy

Ví dụ 7.8 Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1; -1; 1)$, đường thẳng Δ có phương trình

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-1} \text{ và mặt phẳng } (P) : 2x - y + 2z - 1 = 0$$

- Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất;
- Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất;
- Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1; 1; 1), N(-1; 2; -1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (P) có $\vec{n}_P = (2; -1; 2)$ là VTPT

Đường thẳng Δ đi qua $B(1; 0; -1)$ và có $\vec{u} = (2; 1; -1)$ là VTCP.

1. **Cách 1:** Giả sử $\vec{n} = (a; b; c)$ là VTPT của (Q) , suy ra phương trình của (Q) có dạng:
 $a(x-1) + by + c(z+1) = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz - a + c = 0$ (1)

Do $\Delta \subset (Q)$ nên $2a + b - c = 0 \Rightarrow c = 2a + b$.

$$d(A, (Q)) = \frac{|2c - b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|4a + b|}{\sqrt{5a^2 + 4ab + 2b^2}} = \sqrt{\frac{16a^2 + 8ab + b^2}{5a^2 + 4ab + 2b^2}}$$

Do đó:

$$b = 0 \Rightarrow d(A, (Q)) = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

Nếu

Nếu $b \neq 0$ thì ta đặt $t = \frac{a}{b}$, ta có: $\frac{16a^2 + 8ab + b^2}{5a^2 + 4ab + 2b^2} = \frac{16t^2 + 8t + 1}{5t^2 + 4t + 2} = f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t \in \mathbb{R}$ ta có:

$$f'(t) = \frac{24t^2 + 54t + 12}{(5t^2 + 4t + 2)^2}, f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2, t = -\frac{1}{4}$$

Suy ra $\max f(t) = f(-2) = \frac{7}{2}$, do đó $\max d(A, (Q)) = \frac{\sqrt{14}}{2}$, đạt được khi $a = -2b$

Chọn $b = -1$ ta tìm được $a = 2, c = 3$.

Vậy phương trình $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Cách 2: Gọi K, H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (Q) , khi đó

$d(A, (Q)) = AH \leq AK$, mà AK không đổi nên $d(A, (Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Dẫn tới (Q) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overline{AK}$ làm VTPT.

$K \in \Delta \Rightarrow K(1 + 2t; t; -1 - t) \Rightarrow \overline{AK} = (2t; t + 1; -t - 2)$
 Vì

$AK \perp \Delta \Rightarrow \overline{AK} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 4t + t + 1 + t + 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow K\left(0; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right), \overline{AK} = \left(-1; \frac{1}{2}; -\frac{3}{2}\right)$

Vậy phương trình $(Q): 2x - y + 3z + 1 = 0$.

2. Cách 1: Tương tự như trên ta có $(Q): ax + by + (2a + b)z + a + b = 0$

Gọi $\alpha = \angle((P), (R))$ $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

$$\cos \alpha = \frac{|2a - b + 2(2a + b)|}{3\sqrt{a^2 + b^2 + (2a + b)^2}} = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{b^2 + 12ba + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2}}$$

Ta có:

$$a = 0 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$$

Nếu

Nếu $a \neq 0$, đặt $t = \frac{b}{a}$ thì ta có: $\frac{b^2 + 12ba + 36a^2}{2b^2 + 4ab + 5a^2} = \frac{t^2 + 12t + 36}{2t^2 + 4t + 5} = f(t)$

Khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được $\max f(t) = f\left(-\frac{7}{10}\right) = \frac{53}{6}$

Suy ra $\max \{\cos \alpha\}$ đạt được khi $\frac{b}{a} = -\frac{7}{10}$, chọn $b = -7 \Rightarrow a = 10$

Vậy phương trình $(R): 10x - 7y + 13z + 3 = 0$.

Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P)

$$\sin \alpha = \sin \angle BCH = \frac{BH}{BC} \geq \frac{BK}{BC}$$

Trang 11

Nếu $a = 0 \Rightarrow \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, với $a \neq 0$, đặt $t = \frac{b}{a}, t \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + 12t + 36}{5t^2 - 4t + 8}$ ta tìm được $\max f(t) = f\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{53}{9}$.

Do đó $\varphi_{\max} \Leftrightarrow \sin \varphi_{\max} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{5}{8}$, chọn $b = 5, a = 8$

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x + 10y - 11z - 15 = 0$.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{NM} = (2; -1; 2)$ là VTCP của MN , suy ra phương trình đường thẳng

$$MN: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

. Gọi d là đường thẳng đi qua M , song song với Δ . Suy ra phương trình

$$d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Trên d ta lấy điểm $A(3; 2; 0)$. Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và MN , khi đó $(\alpha, \Delta) = \angle ABH$.

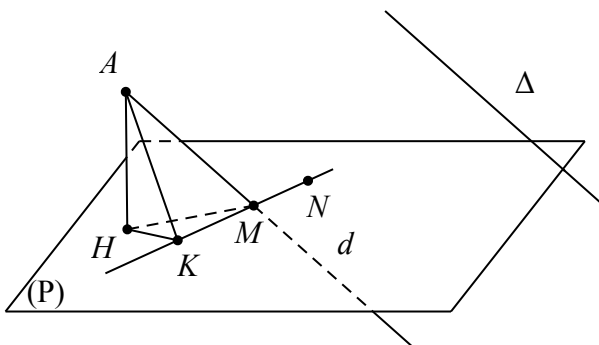
Ta có: $\cos \angle ABH = \frac{BH}{BA} \geq \frac{BK}{BA}$, mà $\frac{BK}{BA}$ không đổi nên $\angle ABH$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv K$

Hay (α) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\beta) \equiv (MN, d)$

Ta có: $\overrightarrow{n_\beta} = [\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{u}] = (-1; 6; 4)$ là VTPT của (β)

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha} = [\overrightarrow{NM}, \overrightarrow{n_\beta}] = (-16; -10; 11)$ là VTPT của (α)

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x + 10y - 11z - 15 = 0$.



Ví dụ 8.8 Trong không gian $Oxyz$ cho mặt phẳng $(\alpha) : x + y + z - 3 = 0$ và điểm $A(1; 2; 3)$. Lập phương trình đường thẳng Δ nằm trong (α) và

1. Δ đi qua $M(1; 1; 1)$ và khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất, nhỏ nhất;

2. Δ đi qua M và khoảng cách giữa Δ và $d : \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$ lớn nhất.

Lời giải.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (1; 1; 1)$ là VTPT

Gọi $\vec{u} = (a; b; c)$ là VTCP của Δ , do $\Delta \subset (P) \Rightarrow a + b + c = 0 \Rightarrow c = -a - b$ (1)

$$\overrightarrow{AM} = (0; -1; -2) \Rightarrow [\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = (c + 2b; 2a; -a)$$

1. Ta có:

$$d(A, \Delta) = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{|c + 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|b - a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (a + b)^2}}$$

Do đó:

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{b^2 - 2ab + a^2}{b^2 + 2ab + a^2}}$$

Nếu $a = 0 \Rightarrow d(A, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, với $a \neq 0$ đặt $t = \frac{b}{a}, t \in \mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 - 2t + 1}{t^2 + t + 1}$, khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được

$$\max f(t) = f(-\frac{2}{3}) = 10, \min f(t) = f(4) = \frac{2}{3}$$

• Khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất khi $t = -\frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = -\frac{2}{3}$, chọn $b = -2 \Rightarrow a = 3, c = -1$, suy ra

$$\Delta : \frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$$

phương trình đường thẳng :

• Khoảng cách từ A đến Δ nhỏ nhất khi $t = 4 \Leftrightarrow \frac{b}{a} = 4$, chọn $b = 4 \Rightarrow a = 1, c = -5$, suy ra phương

$$\Delta : \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{-5}$$

trình đường thẳng :

2. Đường thẳng d đi qua $N(2; 0; 0)$ và có $\vec{u}_1 = (1; 2; -1)$ là VTCP

$$\overrightarrow{MN} = (1; -1; -1), [\vec{u}, \vec{u}_1] = (2a + b; -b; 2a - b) \Rightarrow [\vec{u}, \vec{u}_1] \cdot \overrightarrow{MN} = 3b$$

$$d(\Delta, d) = \frac{\left| \left[\begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{u}_1 \end{matrix} \right] \cdot \overrightarrow{MN} \right|}{\left| \left[\begin{matrix} \vec{u} \\ \vec{u}_1 \end{matrix} \right] \right|} = \frac{3|b|}{\sqrt{(2a+b)^2 + b^2 + (2a-b)^2}} = 3\sqrt{\frac{b^2}{4a^2 + 3b^2}} \leq \sqrt{3}$$

Do đó

Đẳng thức xảy ra khi $a = 0 \Rightarrow c = -b \Rightarrow \vec{u} = b(0; 1; -1)$

$$\Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + t \\ z = 1 - t \end{cases}$$

Vậy phương trình

Ví dụ 9.8 Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(0; -1; 2)$ và cắt đường thẳng $d' : \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$ sao cho:

1. Khoảng cách từ $B(2; 1; 1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất;

2. Khoảng cách giữa d và $\Delta : \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ là lớn nhất.

Lời giải.

Giả sử d cắt d' tại điểm $M(-1+2t; t; 2-t)$, $t \in \mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AM} = (2t-1; t+1; -t)$ là VTCP của đường thẳng d .

1. Ta có $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$ nên $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] = (1-t; 1; 4-2t)$.

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là

$$d(B, d) = \frac{\left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}] \right|}{\left| \overrightarrow{AM} \right|} = \sqrt{\frac{5t^2 - 18t + 18}{6t^2 - 2t + 2}} = \sqrt{f(t)}$$

Ta có $f(t) = \frac{5t^2 - 18t + 18}{6t^2 - 2t + 2}$ nên $f'(t) = \frac{98t(t-2)}{(6t^2 - 2t + 2)^2}$.

$$\max f(t) = f(0) = 18, \min f(t) = f(2) = \frac{1}{11}.$$

Từ đó ta tìm được

Do đó:

• $\min d(B, d) = \frac{1}{\sqrt{11}}$ đạt được khi $t = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (3; 3; -2)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm

$$d : \frac{x}{3} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{-2}.$$

• $\max d(B, d) = 3\sqrt{2}$ đạt được khi $t = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-1; 1; -1)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm

$$d : \frac{x}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-1}.$$

2. Δ đi qua $N(5; 0; 0)$ và có véc tơ chỉ phương $\vec{u}_\Delta = (2; -2; 1)$.

$$[\vec{u}_\Delta, \vec{AM}] = (t-1; 4t-1; 6t), \vec{AN} = (5; 1; -2).$$

Ta có

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là:

$$d(\Delta; d) = \frac{|[\vec{u}_\Delta, \vec{AM}] \cdot \vec{AN}|}{\|[\vec{u}_\Delta, \vec{AM}]\|} = \frac{|-6-3t|}{\sqrt{(t-1)^2 + (4t-1)^2 + (6t)^2}}$$

$$= 3 \cdot \sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}} = 3 \cdot \sqrt{f(t)}, f(t) = \frac{(2+t)^2}{53t^2 - 10t + 2}.$$

$$f'(t) = \frac{6(t+2)(4-37t)}{(53t^2 - 10t + 2)^2} \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = -2, t = \frac{4}{37}.$$

Vì $f(t)$ nên

$$\max f(t) = f\left(\frac{4}{37}\right) \quad \vec{AM} = -\frac{1}{37}(29; -41; 4).$$

Từ đó ta tìm được d , khi đó

$$d: \frac{x}{29} = \frac{y+1}{-41} = \frac{z-2}{4}.$$

Vậy đường thẳng d có phương trình là

CC BÀI TỐN ĐNH CHO HỌC SINH ÔN THI ĐẠI HỌC

Bài 1

1. Trong không gian $Oxyz$ cho 2 điểm $A(-1; 3; -2), B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$.

a) Viết phương trình mặt phẳng chứa AB và vuông góc với (P) .

b) Tìm tọa độ điểm M thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất.

2. Trong không gian với hệ tọa độ Đề Các vuông góc $Oxyz$ cho tứ diện $ABCD$ với $A(2; 3; 2), B(6; -1; -2), C(-1; -4; 3), D(1; 6; -5)$. Tính góc giữa hai đường thẳng AB và CD . Tìm tọa độ M trên CD sao cho tam giác ABM có chu vi nhỏ nhất.

3. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0; 1), B(1; -1; 3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P) , hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất.

4. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1; 4; 9)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C (khác gốc tọa độ) sao cho

a) Thể tích khối tứ diện $OABC$ có giá trị nhỏ nhất.

b) $OA + OB + OC$ đạt giá trị nhỏ nhất.

5. Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-8}{3} = \frac{z-1}{1}$ và các điểm $A(-3; 4; 1),$

$B(1; 6; -1), C(1; 10; 3)$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

a) $MA + MB$ nhỏ nhất.

b) $MA + MC$ nhỏ nhất.

Bài 2

1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hình hộp chữ nhật

$ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ, $B(a; 0; 0), D(0; a; 0), A'(0; 0; b)$ với $(a > 0, b > 0)$. Gọi M là trung điểm của CC' .

a) Tính thể tích của khối tứ diện $BDA'M$.

b) Cho $a + b = 4$. Tìm $\max V_{A'BDM}$.

2. Cho các điểm $A(3; -1; 0), B(2; 1; -1), C(3; 2; 6)$.

a) Tìm điểm D thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho $ABCD$ là tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc.

b) Tìm điểm M trên trục hoành sao cho tam giác ABM có diện tích nhỏ nhất.

3. Cho hai điểm $A(5; 2; 3), B(-1; -2; -1)$.

a) Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (Oxz) tại M . Điểm M chia đoạn AB theo tỉ số nào?

b) Tìm tọa độ điểm N trên mặt phẳng (Oxz) sao cho $NA + NB$ có giá trị nhỏ nhất.

c) Cho điểm K có các thành phần tọa độ bằng nhau. Xác định K biết rằng $2KA^2 - 3KB^2$ đạt giá trị lớn nhất

4. Cho $A(1; -1; 2)$, mặt phẳng $(P): x + y + z - 1 = 0$ và đường thẳng

$$\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-4}{-3}.$$

Lập phương trình đường thẳng d đi qua điểm A đồng thời

a) $d \parallel (P)$ và khoảng cách giữa d và Δ là lớn nhất.

b) $d \parallel (P)$ và góc giữa d và Δ là lớn nhất, bé nhất.

$$d': \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 + t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

c) d vuông góc với đường thẳng và khoảng cách từ điểm $B(-1; 1; -1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, bé nhất.

Bài 3 Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$ và ba điểm $A(3; 2; -1), B(1; -2; 1), C(2; 1; 3)$. Tìm $M \in \Delta$ sao cho:

1. $MA + MB$ nhỏ nhất

2. $MA + MC$ nhỏ nhất.

Bài 4 Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua $M(1; 4; 9)$ sao cho (α) cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại 3 điểm A, B, C thỏa:

1. M là trọng tâm tam giác ABC ;

2. Tứ diện $OABC$ có thể tích lớn nhất;

3. Khoảng cách từ O đến (ABC) lớn nhất;

4. $OA + OC = 4OB$ và $OA = OB + 9$.

Bài 5 Cho $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$

1. Tìm tâm và bán kính R mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Tìm giá trị nhỏ nhất của bán kính R .

2. Gọi r là bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{4} < r \leq \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3}+1)}$.

$A(1; 0; -1), B(2; -2; 1), C(0; -1; 0)$

Bài 6 Cho các điểm

1. Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 6 = 0$ sao cho: $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

2. Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = \frac{57}{2}$ sao cho: $|2\overline{MA} - 4\overline{MB} + 3\overline{MC}|$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 7

1. Cho mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 12y + 12z + 72 = 0$ và mặt cầu $(S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$. Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm nằm trên đường nối tâm của hai mặt cầu (S_1) và (S_2) , tiếp xúc với hai mặt cầu đó và có bán kính lớn nhất.

2. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm $A(3; -2; 1)$ và

cắt đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ sao cho

a) Khoảng cách từ $B(2; 1; -1)$ đến Δ là lớn nhất, bé nhất.

$$\Delta': \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

b) Khoảng cách giữa Δ và Δ' lớn nhất.

c) Góc giữa Δ và mặt phẳng $(P): 5x + 2y - 3z + 8 = 0$ lớn nhất.

$$d: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-1} \quad d': \frac{x+2}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}, \quad (Q): x + 2y + 2z - 3 = 0.$$

Bài 8. Cho mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và

1. Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Q) nhỏ nhất.

2. Góc giữa mặt phẳng (P) và đường thẳng d' lớn nhất.

Bài 9 Trong không gian cho hai điểm $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4)$ và đường thẳng: $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$.

1. Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất.

2. Viết phương trình (Q) chứa d vào tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc nhỏ nhất.

3. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa d và tạo với Oy một góc lớn nhất.

Bài 10

Cho các điểm $A(1; -1; 2), B(-2; 1; 0), C(2; 0; 1)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 3 = 0$.

Tìm điểm M thuộc (P) sao cho

1. $MA + MB$ có giá trị nhỏ nhất

2. $|MA - MC|$ có giá trị lớn nhất.
3. $MA + MC$ có giá trị nhỏ nhất
4. $|MA - MB|$ có giá trị lớn nhất.

Bài 11.

1. Cho $O(0; 0; 0)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$, đường thẳng $d': \frac{x}{2} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{-1}$. Lập phương trình đường thẳng d qua O , vuông góc với Δ và cách d' khoảng lớn nhất.
2. Cho các điểm $A(4; 1; 2), B(1; 4; 2), C(1; 1; 5)$ và đường tròn (C) là giao của mặt phẳng $(P): x + y + z - 7 = 0$ và mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Tìm tọa độ điểm $M \in (C)$ sao cho $MA + MB + MC$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 12. Cho các điểm A, B, C lần lượt nằm trên các trục Ox, Oy, Oz (khác gốc tọa độ). Lập phương trình mặt phẳng (ABC) biết

1. Điểm $G(-2; 3; 1)$ là trọng tâm của tam giác ABC .
2. Điểm $H(5; -3; -2)$ là trực tâm của tam giác ABC .
3. Mặt phẳng (ABC) qua $M(1; -2; 3)$ và $d(O, (ABC))$ lớn nhất.
4. Mặt phẳng (ABC) qua $N(1; 2; 3)$ và $OA = OB = OC$.
5. Mặt phẳng (ABC) qua $P(3; 2; 1)$, điểm A có hoành độ bằng -2 đồng thời $OB = 1 + 2OC$.

Bài 13. Cho mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$ và ba điểm $A(1; 1; 1), B(0; 1; 2), C(-2; 0; 1)$.

1. Tìm tọa độ điểm M có tung độ bằng 1 , nằm trong mặt phẳng (P) và thỏa mãn $MA = MB$.
2. Tìm điểm N thuộc mặt phẳng (P) sao cho $2NA^2 + NB^2 + NC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Bài 14.

1. Cho mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$ và các điểm $A(1; 0; 0), B(0; 2; -3)$. Lập phương trình đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và cách B một khoảng lớn nhất, nhỏ nhất?
2. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(1; -1; 2)$, song song với mặt phẳng $(Q): 2x - y - z + 3 = 0$, đồng thời d tạo với đường thẳng $d': \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$ một góc nhỏ nhất, lớn nhất?
3. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(-1; 0; -1)$ và cắt đường thẳng $d': \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$ sao cho góc giữa đường thẳng d và đường thẳng $\Delta: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+3}{2}$ là lớn nhất, nhỏ nhất?

Bài 15. Cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4)$. Lập phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng d và

1. Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (P) là lớn nhất.

- Góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (xOy) là nhỏ nhất.
- Góc giữa mặt phẳng (P) và trục Oy là lớn nhất.

Chú ý: Trong không gian cho n điểm $A_1, A_2, \dots, A_n$.

1. Tìm M sao cho $P = \alpha_1 MA_1^2 + \alpha_2 MA_2^2 + \dots + \alpha_n MA_n^2$

- Nhỏ nhất khi $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$
- Lớn nhất khi $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$

2. Tìm M sao cho $P = \left| \alpha_1 \overrightarrow{MA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{MA_n} \right|$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất, trong đó $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.

Phương pháp giải:

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\alpha_1 \overrightarrow{IA_1} + \alpha_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + \alpha_n \overrightarrow{IA_n} = \vec{0}$ điểm I tồn tại và duy nhất nếu $\sum_{i=1}^n \alpha_i \neq 0$.
 Khi đó:

$$P = \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1})^2 + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2})^2 + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n})^2$$

$$= (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n) MI^2 + \sum_{i=1}^n \alpha_i IA_i^2$$

Do $\sum_{i=1}^n \alpha_i IA_i^2$ không đổi nên:

- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n > 0$ thì P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất
- Nếu $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n < 0$ thì P lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất

$$P = \left| \alpha_1 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_1}) + \alpha_2 (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_2}) + \dots + \alpha_n (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA_n}) \right| = \left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \right| \cdot MI$$

2.

Do đó P nhỏ nhất hoặc lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất hoặc lớn nhất.

- Nếu M thuộc đường thẳng Δ (hoặc mặt phẳng (P)) thì MI lớn nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên Δ (hoặc (P)).
- Nếu M thuộc mặt cầu (S) và đường thẳng đi qua I và tâm của (S) , cắt (S) tại hai điểm A, B ($IA > IB$) thì MI nhỏ nhất (lớn nhất) $\Leftrightarrow M \equiv B$ ($M \equiv A$).

Ví dụ 10.8 Cho $(P): x - y + z + 1 = 0$ và ba điểm $A(1; 1; 1), B(0; 1; 2), C(-2; 0; 1)$.

1. Tìm tọa độ điểm $M \in (P)$ sao cho $MA = MB$ và $y_M = 1$;
2. Tìm $N \in (P)$ sao cho $S = 2NA^2 + NB^2 + NC^2$ nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Gọi $M(x; 1; z) \in (P)$, ta có: $x - 1 + z + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -z$

Suy ra $MA = MB \Leftrightarrow (x-1)^2 + (z-1)^2 = x^2 + (z-2)^2 \Leftrightarrow -2x - 2z + 2 = -4z + 4$

$\Leftrightarrow z = \frac{1}{2}; x = -\frac{1}{2}$. Vậy $M(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$.

2. Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (*)

Ta có: $2\overrightarrow{IA} = (2-2x; 2-2y; 2-2z)$, $\overrightarrow{IB} = (-x; 1-y; 2-z)$, $\overrightarrow{IC} = (-2-x; -y; 1-z)$

Nên
$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x = 0 \\ 3-4y = 0 \\ 5-4z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0, y = \frac{3}{4}, z = \frac{5}{4} \quad I\left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$$

Khi đó: $2\overrightarrow{NA}^2 = 2(\overrightarrow{NI} + \overrightarrow{IA})^2 = 2NI^2 + 2IA^2 + 4\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{NB}^2 = NI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{NC}^2 = NI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{NI} \cdot \overrightarrow{IC}$

Do đó $S = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{NI} \cdot (2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) = 4NI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$

Do $2IA^2 + IB^2 + IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi NI nhỏ nhất hay N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) .

Gọi $N(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{IN} = \left(x; y - \frac{3}{4}; z - \frac{5}{4}\right)$, $\vec{n} = (1; -1; 1)$ là VTPT của (P)

Vì $N \in (P) \Rightarrow x - y + z + 1 = 0$ (1)

Do $IN \perp (P)$ nên $\overrightarrow{IN} = k\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x = k \\ y = \frac{3}{4} + k \\ z = \frac{5}{4} + k \end{cases}$ thay vào (1), ta có được:

$k - \left(\frac{3}{4} + k\right) + \left(\frac{5}{4} + k\right) + 1 = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2} \Rightarrow x = -\frac{3}{2}, y = -\frac{3}{4}, z = -\frac{1}{4}$

Vậy $N\left(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{4}; -\frac{1}{4}\right)$.

Ví dụ 11.8 Trong không gian cho ba điểm $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 0; -3)$, $C(2; -3; -1)$

1. Tìm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z - 1 = 0$ sao cho biểu thức sau nhỏ nhất

$S = 3MA^2 + 4MB^2 - 6MC^2$;

2. Tìm M thuộc đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-1}{-1}$ sao cho biểu thức sau lớn nhất:

$P = |\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC}|$;

3. Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36$ sao cho biểu thức

$F = MA^2 - 4MB^2 + 2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Lời giải.

1. Cách 1:

Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} - 6\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = 6\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA} = (1-x; 2-y; 3-z)$, $6\overrightarrow{AC} = (6; -30; -24)$, $4\overrightarrow{AB} = (-8; -8; -24)$

$$(*) \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x = 6+8 \\ 2-y = -30+8 \\ 3-z = -24+24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -13 \\ y = 24 \\ z = 3 \end{cases} \Rightarrow I(-13; 24; 3)$$

Do đó

$$S = 3\overrightarrow{MA}^2 + 4\overrightarrow{MB}^2 - 6\overrightarrow{MC}^2 = 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 - 6(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2$$

Khi đó:

$$= IM^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (3\overrightarrow{IA} + 4\overrightarrow{IB} - 6\overrightarrow{IC}) + 3IA^2 + 4IB^2 - 6IC^2$$

$$= IM^2 + 3IA^2 + 4IB^2 - 6IC^2$$

Do $3IA^2 + 4IB^2 - 6IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình

chiếu của I lên (α) . Ta có

$$IM \perp (\alpha) \Rightarrow IM : \begin{cases} x = -13 + 2t \\ y = 24 + t \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = -13 + 2t \\ y = 24 + t \\ z = 3 - 2t \\ 2x + y - 2z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -11 \\ y = 25 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy $M(-11; 25; 1)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $M(a; b; c) \in (\alpha) \Rightarrow 2a + b - 2c - 1 = 0$

Suy ra: $3MA^2 = 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 - 6a - 12b - 18c + 42$

$$4MB^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2 + 8a + 24c + 40$$

$$6MC^2 = 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 - 24a + 36b + 12c + 84$$

Suy ra $S = a^2 + b^2 + c^2 + 26a - 48b - 6c - 2$

$$= (a+11)^2 + (b-25)^2 + (c-1)^2 + 4a + 2b - 4c - 749$$

$$\geq 2(2a + b - 2c - 1) - 747 \geq -747$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = -11, b = 25, c = 1$ hay $M(-11; 25; 1)$ là điểm cần tìm

2. Cách 1: Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn:

$$\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} + 5\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = -7\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AC} \quad (*)$$

Mà $\overrightarrow{IA} = (1-x; 2-y; 3-z)$, $-7\overrightarrow{AB} = (14; 14; 42)$, $5\overrightarrow{AC} = (5; -25; -20)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1-x=14+5 \\ 2-y=14-25 \\ 3-z=42-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-18 \\ y=13 \\ z=-19 \end{cases} \Rightarrow I(-18; 13; -19)$$

Nên (*)

$$P = \left| \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} - 7(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 5(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) \right| = MI$$

Khi đó:

Do đó P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên Δ

$$M \in \Delta \Rightarrow M(1+2t; -1+3t; 1-t) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = (2t+19; 3t-14; -t+20)$$

$$IM \perp \Delta \Rightarrow 2(2t+19) + 3(3t-14) - (-t+20) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{12}{7}$$

Vi

$$M\left(\frac{31}{7}; \frac{29}{7}; -\frac{5}{7}\right)$$

Vậy là điểm cần tìm.

$$M \in \Delta \Rightarrow M(1+2t; -1+3t; 1-t)$$

Cách 2: Ta có

$$\overrightarrow{MA} = (-2t; 3-3t; 2+t), \quad -7\overrightarrow{MB} = (14+14t; -7+21t; 28-7t)$$

Suy ra

$$5\overrightarrow{MC} = (5-10t; -10-15t; -10+5t)$$

$$\overrightarrow{MA} - 7\overrightarrow{MB} + 5\overrightarrow{MC} = (2t+19; 3t-14; -t+20)$$

Do đó

$$P^2 = (2t+19)^2 + (3t-14)^2 + (t-20)^2 = 14t^2 - 48t + 957$$

Nên

$$= 14\left(t - \frac{12}{7}\right)^2 + \frac{6411}{7} \geq \frac{6411}{7}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{12}{7} \quad M\left(\frac{31}{7}; \frac{29}{7}; -\frac{5}{7}\right)$$

Đẳng thức xảy ra . Vậy là điểm cần tìm.

3. Gọi $E(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA} - 4\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{EA} = 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$

$$E(10; -2; 16)$$

Ta tìm được

$$F = -EM^2 + EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$$

Khi đó

Vì $EA^2 - 4EB^2 + 2EC^2$ không đổi nên F lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi EM nhỏ nhất, lớn nhất.

$$\overline{IE} = (8; -4; 8) \Rightarrow IE : \begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 2 - 4t \\ z = 8 + 8t \end{cases}$$

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; 2; 8)$,

Tọa độ các giao điểm của IE với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x = 2 + 8t \\ y = 2 - 4t \\ z = 8 + 8t \end{cases} \Rightarrow 8^2 t^2 + 4^2 t^2 + 8^2 t^2 = 36 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{2}$$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-8)^2 = 36$$

$$\bullet \quad t = \frac{1}{2} \Rightarrow M(6; 0; 12) \Rightarrow \overline{IM} = (2; -2; 4) \Rightarrow MI = 2\sqrt{6}$$

$$\bullet \quad t = -\frac{1}{2} \Rightarrow N(-2; 4; 4) \Rightarrow \overline{IN} = (-4; 2; 4) \Rightarrow NI = 6$$

Do $NI > MI$ nên ta có được:

$$\bullet \quad F \text{ lớn nhất khi và chỉ khi } E \equiv M \Rightarrow E(6; 0; 12)$$

$$\bullet \quad F \text{ nhỏ nhất khi và chỉ khi } E \equiv N \Rightarrow E(-2; 4; 4)$$

BÀI TẬP LUYỆN TẬP

Bài 1 Trong không gian $Oxyz$ cho ba điểm $A(2; 3; 1)$, $B(-1; -2; 0)$, $C(1; 2; -2)$.

- Lập phương trình mặt phẳng (ABC) ;
- Tìm a, b để mặt phẳng $(\alpha): (2a + b)x + (3a + 2b)y - 1z + 1 = 0$ song song với (ABC) ;
- Tìm $M \in (\beta): 3x + y - z + 1 = 0$ sao cho $S = 2MA^2 + 4MB^2 - 3MC^2$ nhỏ nhất;
- Tìm $N \in (\gamma): 3x + 3y - z - 29 = 0$ sao cho $P = |3\overline{NA} - 5\overline{NB} + 7\overline{NC}|$ nhỏ nhất.

Bài 2 Cho các điểm $A(-2; 3; 1)$, $B(5; -2; 7)$, $C(1; 8; -1)$. Tìm tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn

$$1. MA^2 + MB^2 = MC^2 \quad 2. |\overline{AM} + \overline{AB}| = |\overline{BM} + \overline{CM}|$$

Bài 3 Trong không gian $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 4; 5)$, $B(0; 3; 1)$, $C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng

$$(P): 3x - 3y - 2z - 15 = 0. \text{ Tìm điểm } M \text{ thuộc mặt phẳng } (P) \text{ sao cho}$$

- $MA^2 + MB^2 + MC^2$ có giá trị nhỏ nhất.
- $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ có giá trị lớn nhất.

Bài 4 Cho $A(1; 4; 2), B(-1; 2; 4)$ và $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

- $MA^2 + MB^2$ nhỏ nhất
- $\left| 3\overrightarrow{OM} + 2\overrightarrow{AM} - 4\overrightarrow{BM} \right|$ nhỏ nhất.
- Diện tích tam giác MAB nhỏ nhất.

Bài 5 Cho tam giác ABC có $A(3; -2; 5), B(-2; 1; -3), C(5; 1; -1)$. Điểm M có các thành phần tọa độ bằng nhau.

- Chứng minh rằng tam giác ABC là tam giác nhọn.
- Tìm tọa độ điểm M sao cho $\left| \overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{BC} \right|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- Tìm điểm M sao cho $2MA^2 + MB^2 - 4MC^2$ đạt giá trị lớn nhất.

Bài 6. Cho ba điểm $A(1; 2; -3), B(2; 4; 5), C(3; 6; 7)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$.

- Tìm tọa độ hình chiếu trọng tâm G của tam giác ABC trên mặt phẳng (P) .
- Tìm tọa độ điểm G' đối xứng với điểm G qua mặt phẳng (P) .
- Tìm tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (P) sao cho biểu thức T có giá trị nhỏ nhất với $T = MA^2 + MB^2 + MC^2$.

Bài 7. Cho các điểm $A(1; 0; -1), B(0; 2; 3), C(-1; 1; 1)$ và đường thẳng

$\Delta: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z}{2}$. Tìm điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho

- $MA^2 + 2MB^2 - 4MC^2$ lớn nhất.
- $\left| \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BC} \right|$ nhỏ nhất.

$$\Delta_m: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = (1-m)t \quad (t \in \mathbb{R}), \\ z = -2 + mt \end{cases}$$

Bài 8. Cho đường thẳng Δ_m và trục Oy lớn nhất. Tìm giá trị của m sao cho

- Khoảng cách từ gốc tọa độ đến Δ_m là lớn nhất, nhỏ nhất.
- Δ_m tạo với mặt phẳng (xOy) một góc lớn nhất.
- Khoảng cách giữa Δ_m và trục Oy lớn nhất.