

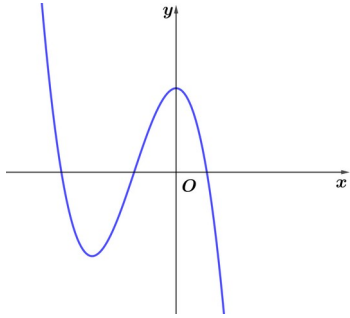
Họ và tên:

Số báo danh:

Mã đề 000

PHẦN I: Trắc nghiệm với 4 lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho đồ thị trong hình vẽ bên là của một hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D . Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^3 - 3x + 2$. B. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$. C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$. D. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$.

Câu 2. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 8]$. Tính tổng $S = 2m + 4M$.

- A. $S = -\frac{7}{2}$. B. $S = -\frac{3}{2}$. C. -3 . D. $S = 2$.

Câu 3. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2 - 6x + 2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

- A. vô số. B. 8. C. 9. D. 10.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$, lấy các điểm M, N lần lượt thuộc cạnh BC, AD sao cho $2BM = 3MC, 2AN = 3ND$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}$. B. $\overrightarrow{MN} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}$.
C. $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$. D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$.

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết: $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}$. Giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$ là:

- A. $\frac{7}{4}$. B. 3. C. 2. D. $\frac{1}{4}$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}, \overrightarrow{AC} = \vec{c}, \overrightarrow{BC} = \vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

- A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$. C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho vectơ $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, khi đó tọa độ hình chiếu của A lên (Oxy)

- A. $H(2; 1; -3)$. B. $H(2; 0; 0)$. C. $H(2; 0; -3)$. D. $H(0; -3; 0)$.

Câu 8. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2;0;0)$, $B(0;2;0)$, $C(0;0;2)$. Gọi M là điểm trong không gian thỏa mãn: $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ$ (M không trùng với các điểm A, B, C và gốc O).
Tính $x_M + 2y_M + 3z_M$

- A. 0. B. 4. C. 3. D. 12.

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;-1;2)$, $B(-2;0;3)$, $C(0;1;-2)$. Gọi $M(a;b;c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + 2\overline{MB} \cdot \overline{MC} + 3\overline{MC} \cdot \overline{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 24a + 24b + 2024c$ có giá trị là

- A. $T = 2$. B. $T = -4$. C. $T = 4$. D. $T = -2$.

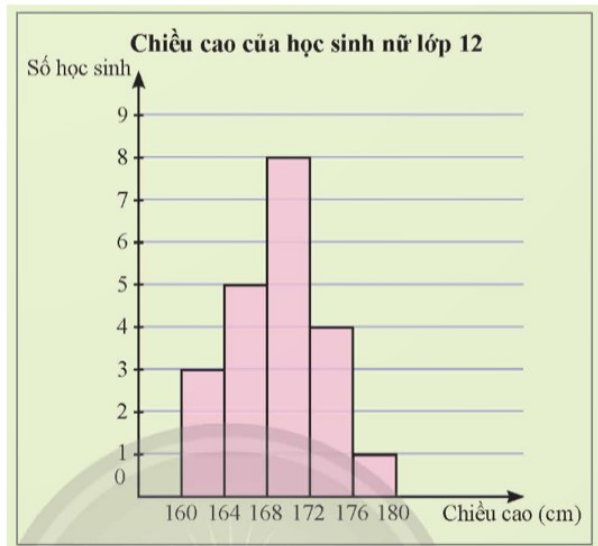
Câu 10: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con nai và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)
Số con nai	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

- A. [18; 19). B. [15; 16). C. [16; 17). D. [17; 18).

Câu 11: Biểu đồ sau biểu diễn chiều cao của một nhóm học sinh nữ lớp 12.



Từ biểu đồ trên ta tính được độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A. 4,26 B. 18,14 C. 16,02 D. 2,07

Câu 12. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2$.

- A. $[-2; \sqrt{3}]$. B. $[-4; 0]$. C. $[-\sqrt{3} - 3; \sqrt{3} - 1]$. D. $[-2; 0]$.

Câu 13. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 2x}{\cos x - 1} = 0$ trên đoạn $[0; 2024\pi]$ là

- A. 4029. B. 3036. C. 2024. D. 1013.

Câu 14. Cho ba số $a + \log_2 3$, $a + \log_4 3$, $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 15. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại đúng hai cặp số $(x; y)$ thỏa mãn các điều kiện $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$ và $y = \log_3\left(\frac{x+13-m}{2m}\right)$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A. 48. B. 60. C. 20. D. 24.

Câu 16. Người ta trồng 810 cây trong một khu vườn hình thang như sau: hàng thứ nhất có 5 cây, hàng thứ hai có 6 cây, hàng thứ ba có 7 cây,... Số hàng cây trong khu vườn là

A. 37. B. 35. C. 34. D. 36.

Câu 17. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{a^2x - 1} = \frac{2}{3}$ với $a = \frac{m + \sqrt{57}}{n} > 0$ và $m; n$ là số nguyên dương. Khi đó giá trị của biểu thức $S = m^2 + n^2$ là

A. 16. B. 21. C. 25. D. 41.

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C')$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'$.

A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Câu 19. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; 99\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A , mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91 . Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S . Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?

A. $\frac{4}{645}$. B. $\frac{2}{645}$. C. $\frac{3}{645}$. D. $\frac{1}{1290}$.

Câu 20. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên đường thẳng d_1 lấy 12 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 18 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm nói trên?

A. 3024. B. 3026. C. 3020. D. 2576.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{10}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		$\frac{7}{6}$	$-\infty$
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$
			1	

Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau?

- Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.
- Hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.
- Phương trình $f(x^3) + x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.
- Hàm số $y = |f(x^3) + x| = 0$ có 5 điểm cực trị?

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$.

- a) Tọa độ điểm $A'(0; 0; 3)$.
- b) Độ dài $AC' = 2\sqrt{3}$.
- c) Tọa độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(2; 1; -2)$.
- d) Gọi điểm $M \in (ABCD)$ sao cho $P = -4MA'^2 + MB'^2 - MC'^2 + MD'^2 + 6868$ nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất của P là 6866

Câu 3: Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu A ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $7,5216$
- b) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $115,28$.
- c) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{15,4096}$
- d) Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

Câu 4. Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao $h(m)$ của mực nước

theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức
$$h = 8 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \text{ với } 0 \leq t \leq 24.$$

- a) Có 2 thời điểm trong 1 ngày chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.
- b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.
- c) Có 3 thời điểm trong 1 ngày mực nước tại bến cảng cao $11m$.
- d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn $11m$. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 1 giờ đến 5 giờ.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$, tam giác ABC vuông cân tại B , $DA \perp (ABC)$, M là trung điểm AC ,

$AC = a\sqrt{2}$, góc giữa đường thẳng CD với mặt phẳng (BDM) bằng a biết $\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

- a) Góc giữa BD và mặt (ACD) là góc $\widehat{BDA}$
- b) Góc nhị diện $[D, BM, C]$ là $\widehat{CMD}$
- c) $(ABD) \perp (BCD)$

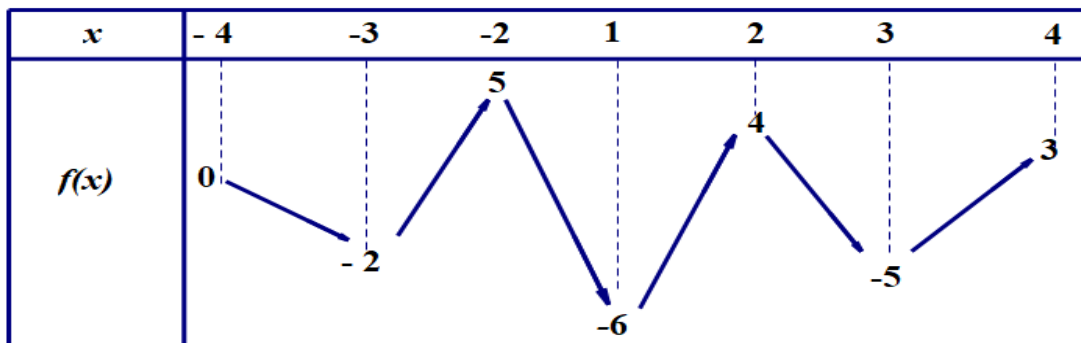
d) Thể tích khối tứ diện $CBMD$ bằng $\frac{a^3}{12}$

Câu 6: Một máy bay quân sự có 3 bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Máy bay sẽ rơi khi có hoặc 1 viên đạn trúng vào A , hoặc 2 viên trúng vào B , hoặc 3 viên trúng vào C . Giả sử các bộ phận A, B, C lần lượt chiếm 15%, 30% và 55% diện tích máy bay. Tính xác suất để máy bay rơi nếu:

- a) Xác suất máy bay không rơi khi máy bay bị trúng 1 viên đạn là $0,45$
 b) Khi máy bay trúng 2 viên đạn thì xác suất để 1 viên trúng B và 1 viên trúng C là $0,85$
 c) Xác suất để máy bay rơi khi máy bay bị trúng 2 viên đạn là $0,3675$
 d) Xác suất để máy bay rơi khi máy bay bị trúng 3 viên đạn là $0,72775$

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bản biến thiên như hình vẽ bên dưới



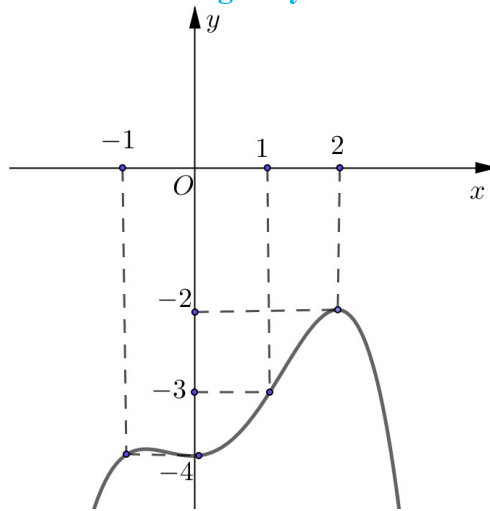
Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-4;4]$ để hàm số $g(x) = |f(x^3 + 2x) + 3f(m)|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

Câu 2. Tổng giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty;1)$?

Câu 3. Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, âm hời, thôi nôi,... Bác An tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 6$ m và $AD = 12$ m. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác An xây vị trí B thấp hơn vị trí A là 7 cm, vị trí D thấp hơn vị trí A là 9 cm. Chọn hệ trục tọa độ O_{xyz} như hình vẽ để xác định xem vị trí C thấp hơn vị trí A bao nhiêu cm? (làm tròn đến cm).



Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Tích tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình

$$9 \cdot 6^{f(x)} + (4 - f^2(x)) \cdot 9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m) \cdot 4^{f(x)} \quad \text{đúng } \forall x \in \mathbb{R} \quad \text{là}$$

Câu 5. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2$, $A'B = A'C = A'A = 3$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BC . Trên đoạn $A'A, A'B$ lấy các điểm P, Q tương ứng sao cho $A'P = 1, A'Q = 2$. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ (làm tròn đến chữ số phần trăm)

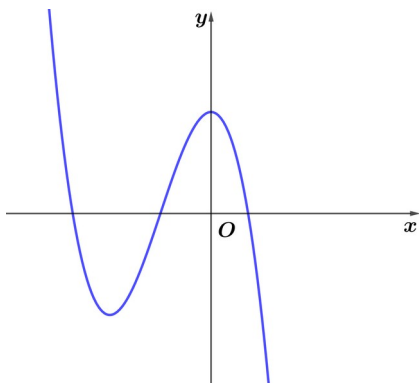
Câu 6. Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập A . Xác suất để số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 là $P(B) = \frac{a}{900000}$. Tìm a ?

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I: Trắc nghiệm với 4 lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Cho đồ thị trong hình vẽ bên là của một hàm số được liệt kê ở bốn phương án A, B, C, D . Hàm số đó là hàm số nào?



- A. $y = -x^3 - 3x + 2$ B. $y = -x^3 + 3x^2 + 2$ C. $y = x^3 - 3x^2 + 2$ D. $y = -x^3 - 3x^2 + 2$

Lời giải

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ suy ra loại phương án C.

Đồ thị hàm số đã cho có một điểm cực trị $x = 0$ và một điểm cực trị có hoành độ âm do đó loại phương án A (không có điểm cực trị), loại phương án B (có một điểm cực trị có hoành độ dương).

Câu 2. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = \frac{1}{2}x - \sqrt{x+1}$ trên đoạn $[0; 8]$. Tính tổng $S = 2m + 4M$.

A. $S = -\frac{7}{2}$.

B. $S = -\frac{3}{2}$.

C. -3 .

D. $S = 2$.

Lời giải

Ta có: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{\sqrt{x+1}-1}{2\sqrt{x+1}}$, cho $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \in [0; 8]$.

Khi đó: $f(0) = -1$, $f(8) = 1$ nên $m = -1$ và $M = 1$.

Vậy $S = 2m + 4M = 2$.

Câu 3. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên m để đồ thị hàm số $y = \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x^2-6x+2m}}$ có hai đường tiệm cận đứng. Số phần tử của S là

A. vô số.

B. 8.

C. 9.

D. 10.

Lời giải

Điều kiện xác định $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x^2-6x+2m > 0 \end{cases}$.

Để đồ thị hàm số có hai đường tiệm cận đứng thì phương trình $x^2-6x+2m=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 lớn hơn -1

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 9-2m > 0 \\ x_1+1+x_2+1 > 0 \\ (x_1+1)(x_2+1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ 8 > 0 \\ x_1x_2 + (x_1+x_2) + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < \frac{9}{2} \\ 2m+6+1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-7}{2} < m < \frac{9}{2}$$

Do đó tập $S = \{-3; -2; \dots; 4\}$ có 8 giá trị.

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$, lấy các điểm M, N lần lượt thuộc cạnh BC, AD sao cho $2BM = 3MC$, $2AN = 3ND$. Khẳng định nào sau đây đúng?

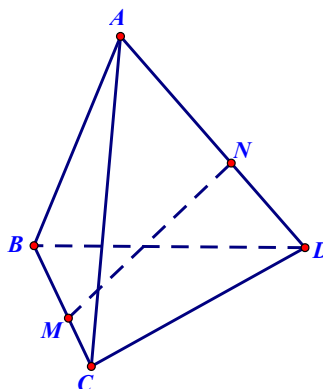
A. $\overrightarrow{MN} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}$

B. $\overrightarrow{MN} = -\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CD}$

C. $\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$

D. $\overrightarrow{MN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$

Lời giải



Vì M, N lần lượt thuộc cạnh BC, AD sao cho $2BM = 3MC$, $2AN = 3ND$ nên $2\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{MC}$, $2\overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{ND}$.

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN} \Rightarrow 3\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{CD} + 3\overrightarrow{DN}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AN}$$

$$\overrightarrow{MN} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{CD}$$

Suy ra

Câu 5. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$, biết: $\overrightarrow{AN} = -4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}$ ($k \in \mathbb{Z}$), $\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}$. Giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$ là:

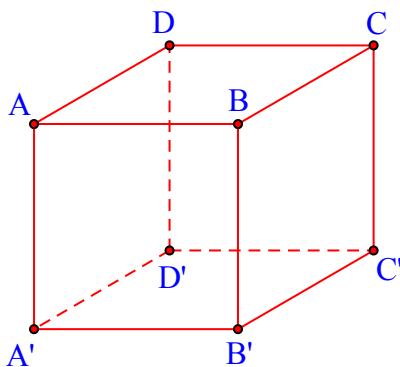
A. $\frac{7}{4}$.

B. 3.

C. 2.

D. $\frac{1}{4}$.

Lời giải



Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên:

+ $AB = AA' = AD$;

+ Các vector $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{AD}$ đôi một vuông góc với nhau. Do đó: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$.

$$\text{Đề } \overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM} \text{ thì } \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow (-4\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} - 2\overrightarrow{AD}) \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} - 4\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} + 12\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AA'} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) - 2\overrightarrow{AD} \cdot (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'} - 3\overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(\overrightarrow{AB})^2 - 0 + 0 + 2k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AA'} - 3k\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{AD} - 4\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} + 6\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$$

$$\Leftrightarrow -8(\overrightarrow{AB})^2 - 0 + 0 + 0 + k(\overrightarrow{AA'})^2 - 0 - 0 - 0 + 6(\overrightarrow{AD})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -8AB^2 + kAA'^2 + 6AD^2 = 0 \text{ (Mà } AB = AA' = AD)$$

$$\Leftrightarrow -8AB^2 + kAB^2 + 6AB^2 = 0 \Leftrightarrow (-8 + k + 6)AB^2 = 0 \Leftrightarrow -8 + k + 6 = 0 \Leftrightarrow k - 2 = 0 \Leftrightarrow k = 2$$

Vậy giá trị k thích hợp để $\overrightarrow{AN} \perp \overrightarrow{AM}$ là $k = 2$.

Câu 6. Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A_1B_1C_1$. Đặt $\overrightarrow{AA_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{d}$, trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng?

A. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

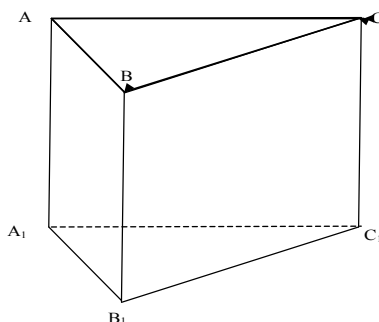
B. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \vec{d}$.

C. $\vec{b} - \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$.

D. $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$.

Lời giải

Chọn C.



+ Dễ thấy: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{b} + \vec{d} - \vec{c} = \vec{0}$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho vector $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{k}$, khi đó tọa độ hình chiếu của A lên (Oxy)

- A.** $H(2; 1; -3)$ **B.** $H(2; 0; 0)$ **C.** $H(2; 0; -3)$ **D.** $H(0; -3; 0)$

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{OA} = 2\vec{i} + 3\vec{k} = 2\vec{i} + 0\vec{j} + 3\vec{k}$ nên tọa độ hình chiếu của $A(2; 0; 3)$ lên (Oxy) là $H(2; 0; 0)$.

Câu 8. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho $A(2; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 2)$. Gọi M là điểm trong không gian thỏa mãn: $\angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ$ (M không trùng với các điểm A, B, C và gốc O).

Tính $x_M + 2y_M + 3z_M$

- A.** 0 **B.** 4 **C.** 3 **D.** 12

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} \text{Gọi } M(x; y; z). \text{ Ta có: } \angle AMB = \angle BMC = \angle CMA = 90^\circ &\Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CM} = 0 \\ \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-2) + y(y-2) + z^2 = 0 \\ x^2 + y(y-2) + z(z-2) = 0 \\ x(x-2) + y^2 + z(z-2) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2y - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y = 0 \\ x = z \\ y = z \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 4x = 0 \\ x = y = z \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} M(0; 0; 0) \\ M\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$, $C(0; 1; -2)$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho biểu thức $S = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Khi đó $T = 24a + 24b + 2024c$ có giá trị là

- A.** $T = 2$ **B.** $T = -4$ **C.** $T = 4$ **D.** $T = -2$

Lời giải

Ta có $M(a; b; c) \in (Oxy)$ nên $c = 0$. Do đó $M(a; b; 0)$.

$$\overrightarrow{MA} = (1-a; -1-b; 2), \overrightarrow{MB} = (-2-a; -b; 3), \overrightarrow{MC} = (-a; 1-b; -2)$$

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = (1-a)(-2-a) + (-1-b)(-b) + 6 = a^2 + a + b^2 + b + 4$$

$$\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = (-2-a)(-a) + (-b)(1-b) - 6 = a^2 + 2a + b^2 - b - 6$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} = (-a)(1-a) + (1-b)(-1-b) - 4 = a^2 - a + b^2 - 5$$

Suy ra

$$S = a^2 + a + b^2 + b + 4 + 2(a^2 + 2a + b^2 - b - 6) + 3(a^2 - a + b^2 - 5) = 6a^2 + 2a + 6b^2 - b - 23$$

$$S = 6\left(a + \frac{1}{6}\right)^2 + 6\left(b - \frac{1}{12}\right)^2 - \frac{557}{24} \geq -\frac{557}{24}$$

Do đó S đạt giá trị nhỏ nhất là $-\frac{557}{24}$ khi $a = -\frac{1}{6}$ và $b = \frac{1}{12}$

$$T = 24a + 24b + 2024c = 24 \cdot \left(-\frac{1}{6}\right) + 24 \cdot \frac{1}{12} + 0 = -2$$

Khi đó

Câu 10: Một vườn thú ghi lại tuổi thọ (đơn vị: năm) của 20 con nai và thu được kết quả như sau:

Tuổi thọ	[14;15)	[15;16)	[16;17)	[17;18)	[18;19)
Số con nai	1	3	8	6	2

Nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là

- A.** [18; 19). **B.** [15; 16). **C.** [16; 17). **D.** [17; 18).

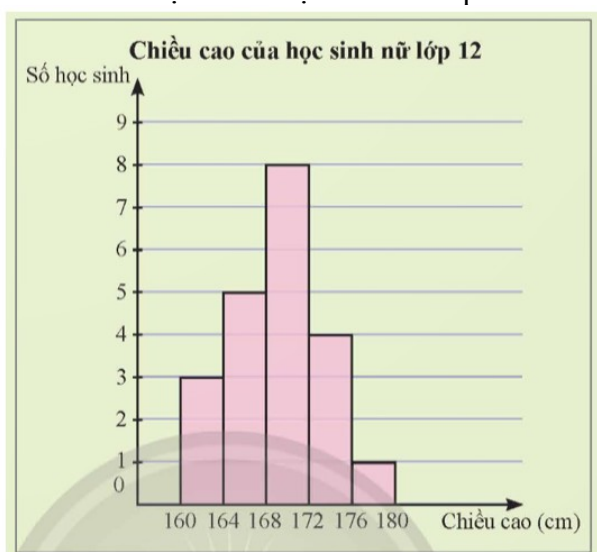
Lời giải

Cỡ mẫu là: $1 + 3 + 8 + 6 + 2 = 20$.

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{20}$ là tuổi thọ của 20 con nai được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_{15} + x_{16}}{2} \in [17; 18)$. Do đó nhóm chứa tứ phân vị thứ ba là [17; 18).

Câu 11: Biểu đồ sau biểu diễn chiều cao của một nhóm học sinh nữ lớp 12.



Từ biểu đồ trên ta tính được độ lệch chuẩn của mẫu số liệu gần nhất với giá trị nào sau đây?

- A.** 4,26 **B.** 18,14 **C.** 16,02 **D.** 2,07

Lời giải

a) Từ biểu đồ, ta lập được bảng tần số ghép nhóm và tính được giá trị đại diện của mỗi nhóm như sau:

Chiều cao (cm)	[160; 164)	[164; 168)	[168; 172)	[172; 176)	[176; 180)
Số học sinh	3	5	8	4	1
Giá trị đại diện	162	166	170	174	178

Số học sinh nữ lớp 12 tham gia khảo sát là $n = 3 + 5 + 8 + 4 + 1 = 21$.

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 162 + 5 \cdot 166 + 8 \cdot 170 + 4 \cdot 174 + 1 \cdot 178}{21} = \frac{3550}{21}$$

b) Ta có bảng thống kê mẫu số liệu mới:

Giá trị đại diện	162	166	170	174	178
Số học sinh	3	5	8	4	1

Cỡ mẫu $n = 21$.

$$\bar{x} = \frac{3550}{21}$$

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là:

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là:

$$s^2 = \frac{3\left(162 - \frac{3550}{21}\right)^2 + 5\left(166 - \frac{3550}{21}\right)^2 + 8\left(170 - \frac{3550}{21}\right)^2 + 4\left(174 - \frac{3550}{21}\right)^2 + 1\left(178 - \frac{3550}{21}\right)^2}{21} = \frac{8000}{441} \approx 18,14$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là: 18,14

Câu 12. Tìm tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2$.

- A. $[-2; \sqrt{3}]$. B. $[-4; 0]$. C. $[-\sqrt{3} - 3; \sqrt{3} - 1]$. D. $[-2; 0]$.

Câu 13. Số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 2x}{\cos x - 1} = 0$ trên đoạn $[0; 2024\pi]$ là

- A. 4029. B. 3036. C. 2024. D. 1013.

Lời giải

Chọn B

+ Điều kiện: $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$.

$$\frac{\sin 2x}{\cos x - 1} = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}$$

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \pi + k2\pi \end{cases}$$

$$\text{+ Với } x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ thì } 0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 2024\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{4047}{2}$$

Vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; \dots; 2023\}$ có 2024 nghiệm.

$$\text{+ Với } x = \pi + k2\pi \text{ thì } 0 \leq \pi + k2\pi \leq 2024\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq 1012 - \frac{1}{2}$$

Vì $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{0; \dots; 1011\}$ có 1012 nghiệm.

Vậy số nghiệm của phương trình $\frac{\sin 2x}{\cos x - 1} = 0$ trên đoạn $[0; 2024\pi]$ là $2024 + 1012 = 3036$.

Câu 14. Cho ba số $a + \log_2 3$, $a + \log_4 3$, $a + \log_8 3$ theo thứ tự lập thành một cấp số nhân. Công bội của cấp số nhân đó bằng

- A. 1. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Theo giả thiết ta có $(a + \log_4 3)^2 = (a + \log_2 3)(a + \log_8 3)$.

$$\text{Suy ra } a^2 + 2a \log_4 3 + (\log_4 3)^2 = a^2 + a(\log_2 3 + \log_8 3) + \log_2 3 \cdot \log_8 3$$

$$\Leftrightarrow a \log_2 3 + \frac{1}{4}(\log_2 3)^2 = a \frac{4}{3} \log_2 3 + \frac{1}{3}(\log_2 3)^2 \Leftrightarrow \frac{1}{3}a = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{4} \log_2 3$$

Vậy $a + \log_2 3 = \frac{3}{4} \log_2 3$; $a + \log_4 3 = \frac{1}{4} \log_2 3$. Suy ra công bội của cấp số nhân bằng $\frac{1}{3}$.

Câu 15. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của tham số m để tồn tại đúng hai cặp số $(x; y)$ thỏa mãn

các điều kiện $\log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y$ và $y = \log_3 \left(\frac{x+13-m}{2m} \right)$. Tổng các phần tử của tập S bằng

A.48.

B.60.

C.20.

D.24.

Lời giải

$$\begin{aligned} \log_3(3x+3) + x = 2y + 9^y &\Leftrightarrow \log[3(x+1)] + x = 2y + 3^{2y} \\ &\Leftrightarrow \log_3(x+1) + x+1 = 2y + 3^{2y} \Leftrightarrow \log_3(x+1) + 3^{\log_3(x+1)} = 2y + 3^{2y} (*) \end{aligned}$$

Xét hàm số $f(t) = t + 3^t, t \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t) = 1 + 3^t \ln 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$.

Suy ra hàm số f đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $(*) \Leftrightarrow f(\log_3(x+1)) = f(2y) \Leftrightarrow \log_3(x+1) = 2y \Leftrightarrow x+1 = 3^{2y} \Leftrightarrow x = 3^{2y} - 1$.

Ta

có

$$y = \log_3 \left(\frac{x+13-m}{2m} \right) \Leftrightarrow 3^y = \frac{x+13-m}{2m} \Leftrightarrow 3^y \cdot 2m = 3^{2y} + 12 - m \Leftrightarrow 3^{2y} - 2m \cdot 3^y + 12 - m = 0$$

Đặt $a = 3^y > 0$ khi đó phương trình trở thành $a^2 - 2ma + 12 - m = 0$.

Ycbt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + m - 12 > 0 \\ 2m > 0 \\ 12 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 \vee m < -4 \\ m > 0 \\ m < 12 \end{cases} \Leftrightarrow 3 < m < 12 \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11\}$$

Vậy tổng các phần tử của S là $4+5+6+7+8+9+10+11=60$.

Câu 16. Người ta trồng 810 cây trong một khu vườn hình thang như sau: hàng thứ nhất có 5 cây, hàng thứ hai có 6 cây, hàng thứ ba có 7 cây,... Số hàng cây trong khu vườn là

A. 37.

B. 35.

C. 34.

D. 36.

Lời giải

Chọn D

♦ Xét dãy số (u_n) có $u_1 = 5, u_2 = 6, u_3 = 7, \dots$ Khi đó (u_n) là cấp số cộng có $u_1 = 5; d = 1$.

♦ Ta có: $u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = 810 \Leftrightarrow u_1 \cdot n + \frac{n(n-1)d}{2} = 810 \Leftrightarrow 5n + \frac{n(n-1)}{2} = 810$

$$\Leftrightarrow n^2 + 9n - 1620 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 36 \\ n = -45 \end{cases} (l)$$

♦ Vậy số hàng cây trong khu vườn là 36 hàng.

Câu 17. Biết $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{a^2x - 1} = \frac{2}{3}$ với $a = \frac{m + \sqrt{57}}{n} > 0$ và $m; n$ là số nguyên dương. Khi đó giá trị

của biểu thức $S = m^2 + n^2$ là

A. 16.

B. 21.

C. 25.

D. 41.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - \sqrt{4x^2 - x + 1}}{a^2x - 1} = \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(a + \sqrt{4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \right)}{x \left(a^2 - \frac{1}{x} \right)} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow \frac{a+2}{a^2} = \frac{2}{3}$$

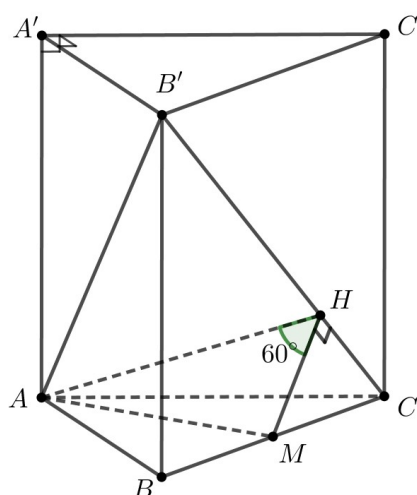
$$\Leftrightarrow 2a^2 - 3a - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{3 + \sqrt{57}}{4} \text{ (N)} \\ a = \frac{3 - \sqrt{57}}{4} \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = 4 \end{cases} \Leftrightarrow S = 25 \quad \text{Vậy } S = 25.$$

Câu 18. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy là tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$. Góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ bằng 60° . Tính thể tích V của khối đa diện $AB'CA'$.

- A. $a^3\sqrt{3}$. B. $\frac{3a^3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a^3\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải



Khối đa diện $AB'CA'C'$ là hình chóp $B'.ACC'A'$ có $A'B' \perp (ACC'A')$.

Từ giả thiết tam giác ABC vuông cân tại A , cạnh $BC = a\sqrt{6}$ ta suy ra $AB = AC = a\sqrt{3}$.

Gọi M là trung điểm của BC , suy ra $AM \perp BC$ và $AM = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Ta có $\begin{cases} AM \perp BC \\ AM \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AM \perp (BCC'B') \Rightarrow AM \perp B'C$ (1).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của M lên $B'C$, suy ra $MH \perp B'C$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $B'C \perp (AMH)$. Từ đó suy ra góc giữa mặt phẳng $(AB'C)$ và mặt phẳng $(BCC'B')$ là góc giữa AH và MH . Mà tam giác AMH vuông tại M nên $\angle AHM = 60^\circ$.

$$\Rightarrow MH = AM \cdot \cot 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$\sin \widehat{HCM} = \frac{MH}{MC} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Tam giác $B'BC$ đồng dạng với tam giác MHC nên suy ra

$$\Rightarrow 1 + \tan^2 \widehat{MCH} = \frac{1}{1 - \sin^2 \widehat{MCH}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \Rightarrow \tan \widehat{MCH} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow BB' = BC \cdot \tan \widehat{MCH} = a\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow V_{ABC.A'} = V_{B'AC.A'} = \frac{1}{6} B'A' \cdot AC \cdot AA' = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} \cdot a\sqrt{3} = \frac{a^3\sqrt{3}}{2}$$

Câu 19. Cho tập hợp $A = \{1; 2; 3; 4; \dots; 99\}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các tập con của A , mỗi tập con này gồm 3 phần tử của A và có tổng bằng 91. Chọn ngẫu nhiên một phần tử của S . Xác suất chọn được phần tử có 3 số lập thành cấp số nhân bằng?

A. $\frac{4}{645}$

B. $\frac{2}{645}$

C. $\frac{3}{645}$

D. $\frac{1}{1290}$

Lời giải

Chọn C

Giả sử tập con bất kì $\{a, b, c\} \in S$

$\Rightarrow 1 \leq a, b, c \leq 99$; a, b, c phân biệt.

Xét phương trình: $a + b + c = 91$ (1).

Ta có số nghiệm nguyên dương (a, b, c) của phương trình (1) là C_{90}^2

Tuy nhiên trong các bộ trên vẫn chứa các bộ có 2 chữ số giống nhau, số bộ có 2 chữ số giống nhau là $3.45 = 135$ (bộ).

Số bộ (a, b, c) thỏa mãn a, b, c khác nhau đôi một và $a + b + c = 91$ là $C_{90}^2 - 3.45$

Vậy $n(\Omega) = (C_{90}^2 - 3.45) : 3! = 645$

Gọi A là biến cố: "a, b, c lập thành cấp số nhân"

Gọi q là công bội của cấp số nhân theo bài ra ta có $q > 0$

$$a + aq + aq^2 = 91$$

$$\Leftrightarrow a(1 + q + q^2) = 1.91 = 13.7$$

Trường hợp 1: $\begin{cases} a = 1 \\ 1 + q + q^2 = 91 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ q = 9 \end{cases}$

Trường hợp 2: $\begin{cases} a = 91 \\ 1 + q + q^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 91 \\ q = 0 \end{cases}$ (loại)

Trường hợp 3: $\begin{cases} a = 13 \\ 1 + q + q^2 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 13 \\ q = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)

Trường hợp 3: $\begin{cases} a = 7 \\ 1 + q + q^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 7 \\ q = 3 \end{cases}$ (thỏa mãn).

Vậy $n(A) = 3$

$$P(A) = \frac{3}{645}$$

Câu 20. Cho hai đường thẳng song song d_1, d_2 . Trên đường thẳng d_1 lấy 12 điểm phân biệt, trên d_2 lấy 18 điểm phân biệt. Hỏi có bao nhiêu tam giác mà đỉnh của nó được chọn từ 25 điểm nói trên ?

A. 3024

B. 3026

C. 3020

D. 2576

Lời giải

Chọn A

Số tam giác lập được thuộc một trong hai loại sau:

Loại 1: Gồm hai đỉnh thuộc vào d_1 và một đỉnh thuộc vào d_2 .

Số cách chọn bộ 2 điểm trong 10 điểm thuộc d_1 : C_{12}^2 cách.

Số cách chọn bộ 1 điểm trong 15 điểm thuộc d_2 : C_{18}^1 cách.

$\Rightarrow$ Số tam giác loại 1: $C_{12}^2 \cdot C_{18}^1 = 1188$ tam giác.

Loại 2: Gồm một đỉnh thuộc vào d_1 và hai đỉnh thuộc vào d_2 .

Số cách chọn bộ 1 điểm trong 10 điểm thuộc d_1 : C_{12}^1 cách.

Số cách chọn bộ 2 điểm trong 15 điểm thuộc d_2 : C_{18}^2 cách.

$\Rightarrow$ Số tam giác loại 2: $C_{12}^1 \cdot C_{18}^2 = 1836$ tam giác.

Vậy có tất cả: $1188 + 1836 = 3024$ tam giác.

PHẦN II: Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Cho $f(x)$ là hàm số bậc bốn thỏa mãn $f(0) = \frac{1}{10}$. Hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên như sau.

x	$-\infty$	-2	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$		$\frac{7}{6}$	$-\infty$
		↘	↗	↘
		1		

Xét tính đúng – sai của các mệnh đề sau?

a. Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng $(-2; -1)$.

b. Hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị.

c. Phương trình $f(x^3) + x = 0$ có 3 nghiệm phân biệt.

d. Hàm số $y = |f(x^3) + x| = 0$ có 5 điểm cực trị?

Lời giải

Từ bảng biến thiên của hàm số $f'(x)$ ta suy ra bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ như sau:

x	$-\infty$	-2	-1	x_0	$+\infty$
$f'(x)$			+	0	-
$f(x)$					
				↗	↘
	$-\infty$				$-\infty$

a. Từ bảng biến thiên ta thấy trên $(-2; -1)$ hàm số $y = f(x)$ đồng biến. Vậy a) đúng

b. Từ bảng biến thiên ta có hàm số $y = f(x)$ có 1 điểm cực trị

Nếu $x_0 = 0$, thì $f(0) = \frac{1}{10}$ nên phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Nếu $x_0 \neq 0 \Rightarrow f(x_0) > f(0) > 0$, nên phương trình $f(x) = 0$ có 2 nghiệm phân biệt.

Vậy hàm số $y = |f(x)|$ có 3 điểm cực trị. Vậy **b) đúng.**

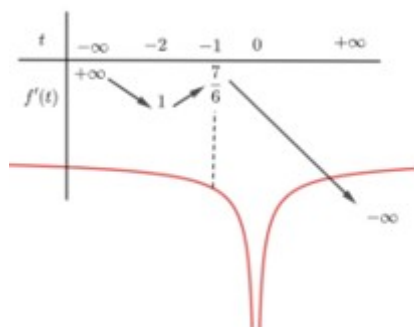
c. Xét hàm số

$$y = h(x) = f(x^3) + x \Rightarrow h'(x) = 3x^2 \cdot f'(x^3) + 1 \Rightarrow h'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(x^3) = -\frac{1}{3x^2}$$

$$t = x^3 \Rightarrow x = \sqrt[3]{t} \Rightarrow f'(t) = -\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}. \quad \text{Xét hàm số } y = -\frac{1}{3\sqrt[3]{t^2}} \Rightarrow y' = \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{t^5}}.$$

Đặt

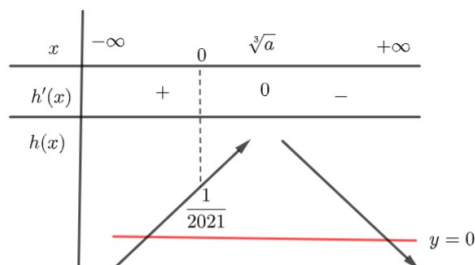
Vẽ hai đồ thị lên cùng BBT ta được:



Ta thấy hai đồ thị hàm số cắt nhau tại một điểm duy nhất $t = a > 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{a} > 0$

Suy ra hàm số $y = h(x)$ có một cực trị.

Ta có bảng biến thiên của $y = h(x)$ như sau:



Suy ra $f(x^3) + x = 0$ có hai nghiệm phân biệt.

Vậy **c) sai.**

d. Ta có $y = h(x) = f(x^3) + x$ có 1 cực trị

Phương trình $f(x^3) + x = 0$ có 2 nghiệm đơn phân biệt

Vậy hàm số $y = |f(x^3) + x|$ có 3 cực trị. Vậy **d) sai.**

Câu 2. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ có $A(0; 0; 0)$, $B(3; 0; 0)$, $D(0; 3; 0)$, $D'(0; 3; -3)$.

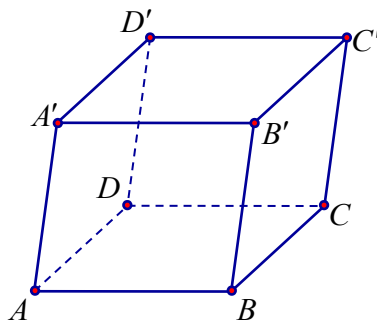
a) Toạ độ điểm $A'(0; 0; 3)$.

b) Độ dài $AC' = 2\sqrt{3}$.

c) Toạ độ trọng tâm tam giác $A'B'C$ là $G(2; 1; -2)$.

d) Gọi điểm $M \in (ABCD)$ sao cho $P = -4MA'^2 + MB'^2 - MC'^2 + MD'^2 + 6868$ nhỏ nhất. Giá trị nhỏ nhất của P là 6866

Lời giải



a) $ADD'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AD} = \overline{A'D'} \Rightarrow (x'; y'; z') = (0; 0; -3) \Rightarrow A'(0; 0; -3)$

Vậy a) Sai.

b) Ta có $\overline{AC'} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CC'} = \overline{AB} + \overline{AD} + \overline{DD'} = (3; 3; -3) \Rightarrow AC' = 3\sqrt{3}$

Vậy b) Sai.

c) Ta có $\overline{AB} = (3; 0; 0)$. Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overline{DC} = (x; y-3; z)$

$ABCD$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{DC} \Rightarrow (x; y; z) = (3; 3; 0) \Rightarrow C(3; 3; 0)$

Ta có $\overline{AD} = (0; 3; 0)$. Gọi $A'(x'; y'; z') \Rightarrow \overline{A'D'} = (-x'; 3-y'; -3-z')$

Gọi $B'(x_0; y_0; z_0) \Rightarrow \overline{A'B'} = (x_0; y_0; z_0+3)$

$ABB'A'$ là hình bình hành $\Rightarrow \overline{AB} = \overline{A'B'} \Rightarrow (x_0; y_0; z_0) = (3; 0; -3) \Rightarrow B'(3; 0; -3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_G = \frac{0+3+3}{3} = 2 \\ y_G = \frac{0+0+3}{3} = 1 \\ z_G = \frac{-3-3+0}{3} = -2 \end{cases} \Rightarrow G(2; 1; -2)$$

G là trọng tâm tam giác $A'B'C'$

. Vậy c) Đúng.

d) Từ $\overline{AC'} = (3; 3; -3) \Rightarrow C'(3; 3; -3)$. Gọi điểm I thỏa mãn $\overline{IB'} - \overline{IC'} + \overline{ID'} = \vec{0} \Rightarrow I(0; 0; -3)$, suy ra $I \equiv A'$

Ta có $P = -4MA'^2 + MI^2 + IB'^2 - IC'^2 + ID'^2 + 6868$

$$P = -4MA'^2 + MA'^2 + A'B'^2 - A'C'^2 + A'D'^2 + 6868 = MA'^2 - 4MA' + 6868$$

Vì mặt $(ABCD) \equiv (Oxy)$ nên hình chiếu của A' trên mặt $(ABCD)$ là $A \Rightarrow MA' \geq AA' = 3$. Do đó

$$P = MA'^2 - 4MA' + 6868 \geq 3^2 - 4 \cdot 3 + 6868 = 6865. \text{ Giá trị nhỏ nhất của } P \text{ là } 6865.$$

. Vậy **d) Sai**.

Câu 3: Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

Giá đóng cửa	[120; 122)	[122; 124)	[124; 126)	[126; 128)	[128; 130)
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu A ta có phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là $7,5216$

b) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là $115,28$.

c) Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B ta có độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $\sqrt{15,4096}$

d) Người ta có thể dùng phương sai và độ lệch chuẩn để so sánh mức độ rủi ro của các loại cổ phiếu có giá trị trung bình gần bằng nhau. Cổ phiếu nào có phương sai, độ lệch chuẩn cao hơn thì được coi là có độ rủi ro lớn hơn. Theo quan điểm trên, thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

Lời giải

a) Đúng	b) Sai	c) Sai	d) Đúng
---------	--------	--------	---------

Ta có bảng thống kê giá đóng cửa theo giá trị đại diện:

Giá đóng cửa	121	123	125	127	129
Cổ phiếu A	8	9	12	10	11
Cổ phiếu B	16	4	3	6	21

- Xét mẫu số liệu của cổ phiếu A :

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_1 = \frac{8.121 + 9.123 + 12.125 + 10.127 + 11.129}{50} = 125,28.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1^2 = \frac{1}{50} (8.121^2 + 9.123^2 + 12.125^2 + 10.127^2 + 11.129^2) - (125,28)^2 = 7,5216$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{7,5216}$.

- Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B :

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = \frac{16.121 + 4.123 + 3.125 + 6.127 + 21.129}{50} = 125,28.$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = \frac{1}{50} (16.121^2 + 4.123^2 + 3.125^2 + 6.127^2 + 21.129^2) - (125,28)^2 = 12,4096.$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_2 = \sqrt{S_2^2} = \sqrt{12,4096}$.

Vậy nếu đánh giá độ rủi ro theo phương sai và độ lệch chuẩn thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B .

Câu 4. Hàng ngày mực nước tại một cảng biển lên xuống theo thủy triều. Chiều cao $h(m)$ của mực nước

theo thời gian t (giờ) trong một ngày được cho bởi công thức

$$h = 8 + 6 \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \quad \text{với } 0 \leq t \leq 24.$$

a) Có 2 thời điểm trong 1 ngày chiều cao của mực nước tại bến cảng là cao nhất.

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất vào lúc 12 giờ.

c) Có 3 thời điểm trong 1 ngày mực nước tại bến cảng cao $11m$.

d) Biết tàu chỉ vào được cảng khi mực nước trong cảng không thấp hơn $11m$. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 1 giờ đến 5 giờ.

Lời giải

a) Do $-1 \leq \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 1$ nên $8-6 \leq 8+6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \leq 8+6$,

hay $2 \leq h \leq 14$. Vậy chiều cao của mực nước tại bến cảng cao nhất bằng $14m$ khi $\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = 3 + 12k (k \in \mathbb{Z})$

Mà $0 \leq t \leq 24$ nên $t = 3$ & $t = 15$.

Vậy **a) Đúng**

b) Chiều cao của mực nước tại bến cảng thấp nhất bằng $2m$ khi

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6}t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -3 + 12k (k \in \mathbb{Z}).$$

Mà $0 \leq t \leq 24$ nên $t = 9$ & $t = 21$.

Vậy **b) Sai**

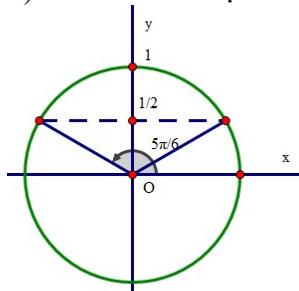
c) Xét phương trình: $8 + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = 11$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{6}t = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{\pi}{6}t = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 + 12k \\ t = 5 + 12k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $0 \leq t \leq 24$ nên $t \in \{1; 5; 13; 17\}$.

Vậy **c) sai**

d) Để tàu vào được cảng thì $8 + 6\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \geq 11 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{6}t\right) \geq \frac{1}{2}$.



$$\frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{6}t \leq \frac{5\pi}{6} \Leftrightarrow 1 \leq t \leq 5$$

Từ đường tròn lượng giác ta suy ra

Trong khoảng thời gian từ 1 giờ đến 5 giờ, mực nước tại bến cảng lớn hơn hoặc bằng $11m$. Vậy thời gian tàu vào được cảng là từ 1 giờ đến 5 giờ.

Vậy **d) Đúng**

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$, tam giác ABC vuông cân tại B , $DA \perp (ABC)$, M là trung điểm AC ,

$AC = a\sqrt{2}$, góc giữa đường thẳng CD với mặt phẳng (BDM) bằng α biết $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

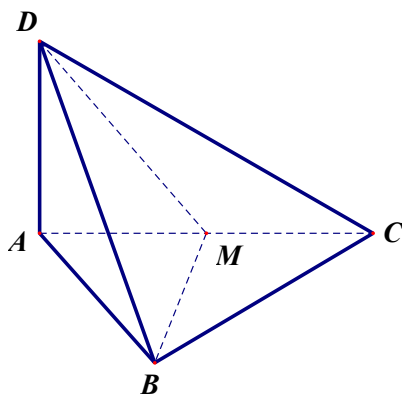
a) Góc giữa BD và mặt (ACD) là góc $\widehat{BDA}$

b) Góc nhị diện $[D, BM, C]$ là $\widehat{CMD}$

c) $(ABD) \perp (BCD)$

d) Thể tích khối tứ diện $CBMD$ bằng $\frac{a^3}{12}$

Lời giải



a) Vì $BM \perp (ACD)$ nên góc giữa BD và mặt (ACD) là góc $\widehat{BDM}$.

Vậy a) Sai

b) Vì $BM \perp (ACD)$ nên $BM \perp MC, BM \perp MD$, do đó góc nhị diện $[D, BM, C]$ là $\widehat{CMD}$.

Vậy b) Đúng

c) Vì $BC \perp (ABD)$ nên $(ABD) \perp (BCD)$.

Vậy c) Đúng

d) Từ $\cos \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ và $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Vì tam giác ABC vuông cân tại B và $AC = a\sqrt{2}$ nên $AB = BC = a$

Đặt $x = DA$ và $CD^2 = x^2 + 2a^2$. Gọi H là hình chiếu của A lên DM suy ra $AH \perp (BMD)$. Do đó

$$d(A, (BMD)) = AH, \quad \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AD^2} + \frac{1}{AM^2} = \frac{1}{x^2} + \frac{2}{a^2}$$

$$\text{Ta có } \frac{1}{3} = \sin \alpha = \frac{d(C, (BMD))}{CD} = \frac{d(A, (BMD))}{CD} = \frac{AH}{CD}$$

$$\hat{U} \frac{CD^2}{AH^2} = 9 \hat{U} (2a^2 + x^2) \frac{1}{x^2} + \frac{2}{a^2} = 9$$

$$\hat{U} x = a$$

$$\text{Suy ra } V_{BMD} = \frac{1}{2} V_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^3}{6} = \frac{a^3}{12}$$

Vậy d) Đúng

Câu 6: Một máy bay quân sự có 3 bộ phận A, B, C có tầm quan trọng khác nhau. Máy bay sẽ rơi khi có hoặc 1 viên đạn trúng vào A, hoặc 2 viên trúng vào B, hoặc 3 viên trúng vào C. Giả sử các bộ phận A, B, C lần lượt chiếm 15%, 30% và 55% diện tích máy bay. Tính xác suất để máy bay rơi nếu:

a) Xác suất máy bay không rơi khi máy bay bị trúng 1 viên đạn là 0,45

b) Khi máy bay trúng 2 viên đạn thì xác suất để 1 viên trúng B và 1 viên trúng C là 0,85

c) Xác suất để máy bay rơi khi máy bay bị trúng 2 viên đạn là 0,3675

d) Xác suất để máy bay rơi khi máy bay bị trúng 3 viên đạn là 0,7275

* Lời giải

Sai – sai – đúng – đúng

a) Khi trúng 1 viên đạn để máy bay không rơi thì không được trúng A

$\Rightarrow$ Phải trúng B hoặc C $\Rightarrow$ Xác suất là $P = 30\% + 55\% = 0,85$. **Mệnh đề sai**

b) Xác suất 1 viên trúng B và 1 viên trúng C là: $P = 30\% \cdot 55\% = 0,165$ **Mệnh đề sai**

c) Gọi A là biến cố: “Có ít nhất 1 viên đạn trúng A”

B là biến cố: “Cả 2 viên trúng B”

$\Rightarrow$ A, B xung khắc

$\Rightarrow \bar{A}$ là biến cố: “Không có viên nào trúng A”

$$\Rightarrow P(\bar{A}) = (1 - 0,15)^2 = 0,85^2 \quad \Rightarrow P(A) = 1 - 0,85^2$$

$$P(B) = 0,3^2$$

Vậy xác suất máy bay rơi khi trúng hai viên đạn là:

$$P = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = 1 - 0,85^2 + (0,3)^2 = 0,3675 \quad \text{Mệnh đề đúng}$$

d) Khi máy bay trúng 3 viên đạn. Ta trường hợp máy bay không rơi:

Máy bay không rơi nếu 1 trúng vào B và 2 viên trúng vào C.

Tương tự câu a, thì máy bay không rơi khi trúng 3 viên đạn là: $P = C_3^2 \cdot (0,55)^2 \cdot (0,3)$

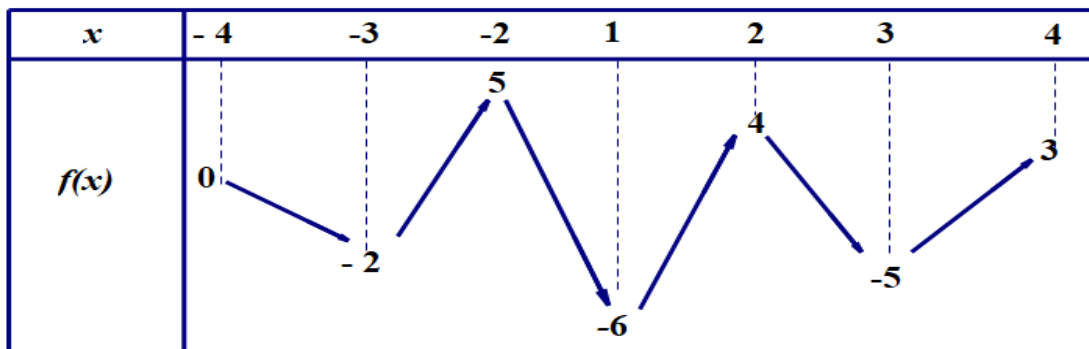
Vậy xác suất để máy bay rơi khi trúng ba viên đạn là:

$$P(\text{máy bay rơi}) = 1 - C_3^2 (0,55)^2 (0,3) = 0,72775.$$

Mệnh đề đúng

Phần III: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-4;4]$ và có bản biến thiên như hình vẽ bên dưới

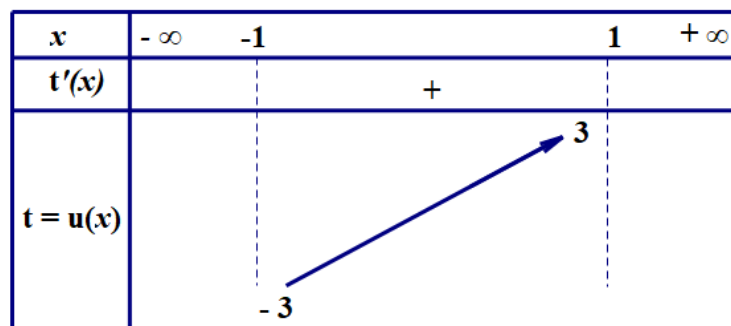


Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của tham số $m \in [-4;4]$ để hàm số $g(x) = |f(x^3 + 2x) + 3f(m)|$ có giá trị lớn nhất trên đoạn $[-1;1]$ bằng 8?

A. 11

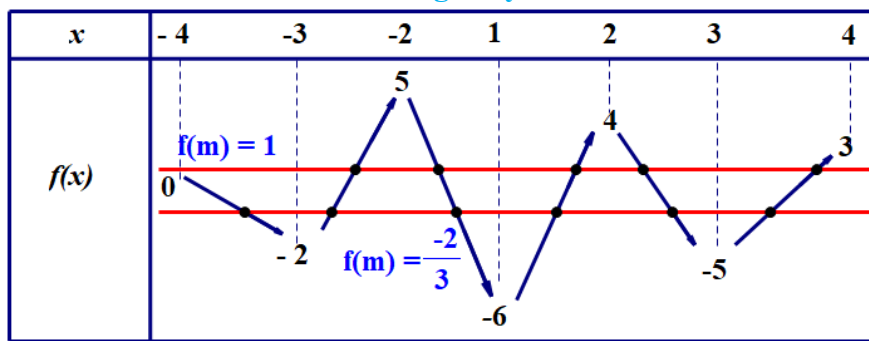
Đáp án: 11

Đặt $t = u(x) = x^3 + 2x$ ta có $t' = u'(x) = 3x^2 + 2 > 0, \forall x$ do đó $t = x^3 + 2x$ là một hàm số tăng vì vậy $x \in [-1;1]$ thì $t \in [-3;3]$.



Dựa vào bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[-3;3]$ ta có $\max_{[-3;3]} f(t) = 5$ và $\min_{[-3;3]} f(t) = -6$.

Từ đây ta có $\max_{[-1;1]} g(x) = \left| \max_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right|$ hoặc $\max_{[-1;1]} g(x) = \left| \min_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \right|$



$$\begin{cases} \max_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) = 8 \\ \max_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \geq \min_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |5 + 3f(m)| = 8 \\ |5 + 3f(m)| \geq |-6 + 3f(m)| \end{cases}$$

Trường hợp 1:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = 1 \\ f(m) = -\frac{13}{3} \Leftrightarrow f(m) = 1 \\ f(m) \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m) = 1$ có 5 nghiệm, như vậy trường hợp này có 5 giá trị thực của m thỏa mãn.

$$\begin{cases} \min_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) = 8 \\ \min_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) > \max_{[-3;3]} f(t) + 3f(m) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |-6 + 3f(m)| = 8 \\ |-6 + 3f(m)| > |5 + 3f(m)| \end{cases}$$

Trường hợp 2:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(m) = -\frac{2}{3} \\ f(m) = \frac{14}{3} \Leftrightarrow f(m) = -\frac{2}{3} \\ f(m) < \frac{1}{2} \end{cases}$$

Từ bảng biến thiên phương trình $f(m) = -\frac{2}{3}$ có 6 nghiệm, như vậy trường hợp này có 6 giá trị thực của m thỏa mãn.

Vậy có tất cả là 11 giá trị thực của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 2. Tổng giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8|$ nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$?

A. 1

Đáp án: 3

Xét hàm số $f(x) = x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8$.

Trường hợp 1: $f(x) = 0$ có nghiệm $x_0 \in (-\infty; 1)$ thì hàm số $y = |f(x)|$ không thể nghịch biến trên khoảng $(-\infty; 1)$.

Trường hợp 2: $f(x) = 0$ không có nghiệm $x_0 \in (-\infty; 1)$.

Ta có: $f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m-1)$.

Khi đó $y = |x^5 - 5x^2 + 5(m-1)x - 8| = |f(x)| = \sqrt{f^2(x)}$ nên $y' = \frac{f'(x) \cdot f(x)}{\sqrt{f^2(x)}}$.

Hàm số nghịch biến trên $(-\infty; 1)$ khi và chỉ khi $y' \leq 0$ với $\forall x \in (-\infty; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \cdot f(x) \leq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0 \\ f'(x) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (-\infty; 1) \quad \left(\text{vì } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 5x^4 - 10x + 5(m-1) \geq 0, \forall x \in (-\infty; 1) \\ f(1) = 5m - 17 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -x^4 + 2x + 1, \forall x \in (-\infty; 1) \\ m \leq \frac{17}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{(-\infty; 1)} (-x^4 + 2x + 1) = \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \\ m \leq \frac{17}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{2\sqrt[3]{2}} + 1 \leq m \leq \frac{17}{5} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m = 3.$$

Câu 3. Ở một số vùng quê ở Việt Nam, trước mỗi nhà thường có một khoảng sân rộng để phơi lúa vào mùa gặt và cũng là nơi để tổ chức một số sự kiện: đám cưới, âm hội, thổi nôi,... Bác An tính xây một sân trước cửa nhà hình chữ nhật $ABCD$ có độ dài các cạnh lần lượt là $AB = 6$ m và $AD = 12$ m. Để tiện cho việc thoát nước khi trời mưa và khi rửa sân nên bác An xây vị trí B thấp hơn vị trí A là 7 cm, vị trí D thấp hơn vị trí A là 9 cm. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ để xác định xem vị trí C thấp hơn vị trí A bao nhiêu cm? (làm tròn đến cm).



A. 16 cm

Lời giải

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2} = \sqrt{600^2 - 7^2} \approx 600 \text{ cm}$$

$$AK = \sqrt{AD^2 - DK^2} = \sqrt{1200^2 - 9^2} \approx 1200 \text{ cm}$$

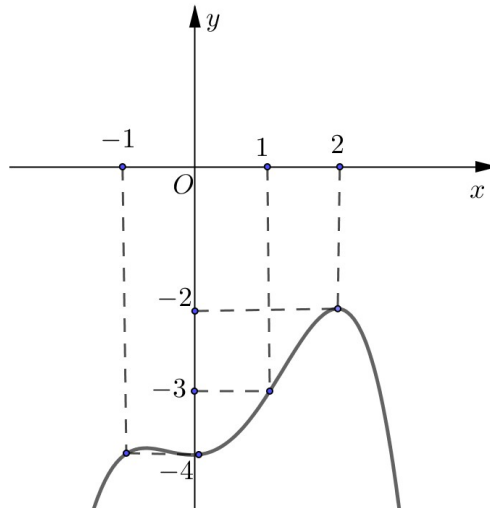
Dựa vào hình vẽ ta có: $A(0; 0; 0); B(600; 0; -7), D(0; 1200; -9)$.

$$\overrightarrow{AD} = (0; 1200; -9); \overrightarrow{BC} = (x_c - 600; y_c; z_c + 7)$$

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow \begin{cases} x_c - 600 = 0 \\ y_c = 1200 \\ z_c + 7 = -9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_c = 600 \\ y_c = 1200 \\ z_c = -16 \end{cases} \Rightarrow C(600; 1200; -16)$$

Vậy vị trí C thấp hơn vị trí A là 16 cm.

Câu 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\square$ và có đồ thị như hình vẽ



Tích tất cả các giá trị nguyên của tham số m để bất phương trình $9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$ đúng $\forall x \in \square$ là

A. 10

Lời giải

Ta có

$$9.6^{f(x)} + (4 - f^2(x)).9^{f(x)} \leq (-m^2 + 5m).4^{f(x)}$$

$$\Leftrightarrow (4 - f^2(x)).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq -m^2 + 5m \quad (1)$$

Từ đồ thị hàm số suy ra $f(x) \leq -2, \forall x \in \square$

Do đó $(4 - f^2(x)).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} \leq 0, \forall x \in \square$ và $9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} = 4, \forall x \in \square$

Suy ra $(4 - f^2(x)).\left(\frac{3}{2}\right)^{2f(x)} + 9.\left(\frac{3}{2}\right)^{f(x)} \leq 4, \forall x \in \square$

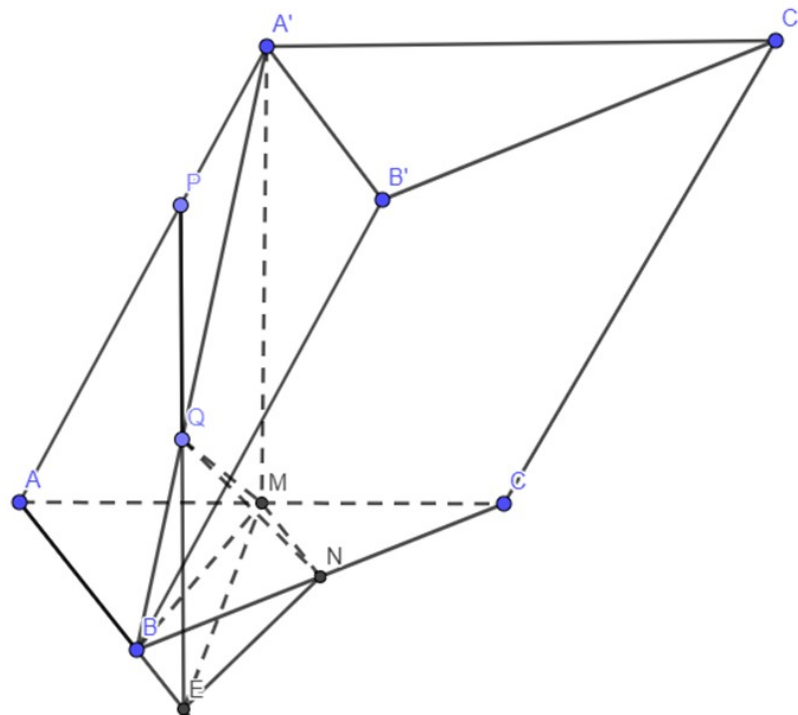
Để (1) có nghiệm đúng $\forall x \in \square$ thì $4 \leq -m^2 + 5m \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 4$.

Do m là số nguyên nên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$. **Đáp án : 24**

Câu 5. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$. Có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B , $AB = BC = 2$, $A'B = A'C = A'A = 3$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm AC và BC . Trên đoạn $A'A, A'B$ lấy các điểm P, Q tương ứng sao cho $A'P = 1, A'Q = 2$. Tính thể tích khối tứ diện $MNPQ$ (làm tròn đến chữ số phần trăm)

A. 0,15

Lời giải



Gọi E là giao điểm của PQ và AB .

Ta có $S_{VEMN} = \frac{1}{4} S_{VABC}$;

$$V_{PQMN} = V_{PEMN} - V_{QEMN} \Rightarrow \frac{V_{PQMN}}{V_{ABC..A'B'C}} = \frac{V_{PEMN}}{V_{ABC..A'B'C}} - \frac{V_{QEMN}}{V_{ABC..A'B'C}}.$$

$$\frac{V_{PEMN}}{V_{ABC,A'B'C}} = \frac{\frac{1}{3}d(P, (ABC)) \cdot S_{V_{EMN}}}{\frac{1}{3}d(A', (ABC)) \cdot S_{V_{ABC}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{18}$$

$$\frac{V_{QEMN}}{V_{ABC,A'B'C}} = \frac{\frac{1}{3}d(Q, (ABC)) \cdot S_{QEMN}}{d(A', (ABC)) \cdot S_{V_{ABC}}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{36}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{PQMN}}{V_{ABC.A'B'C}} = \frac{1}{18} - \frac{1}{36} = \frac{1}{36} \Rightarrow V_{PQMN} = \frac{1}{36} V_{ABC.A'B'C}$$

Mặc khác ta có $A'B = A'C = A'A = 3 \Rightarrow M$ là hình chiếu A' lên (ABC)

$$\Rightarrow A'M \perp (ABC) \Rightarrow A'M \perp BM$$

$$A'M = \sqrt{A'B^2 - BM^2} = \sqrt{7}$$

Do đó $V_{ABC.A'B'C'} = 2\sqrt{7} \Rightarrow V_{PQMN} = \frac{1}{36} V_{ABC.A'B'C'} = \frac{\sqrt{7}}{18}$

Đáp án: 0,15

Câu 6. Cho A là tập hợp các số tự nhiên có 6 chữ số. Chọn ngẫu nhiên một số thuộc tập A . Xác suất để số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 là $P(B) = \frac{a}{900000}$. Tìm a ?

A. 6923

Lời giải

Cách 1.

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 9 \cdot 10^5$.

Gọi B là biến cố số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 .

Ta nhận thấy rằng: Số nhỏ nhất có 6 chữ số chia hết cho 13 là: 100009 , số lớn nhất có 6 chữ số chia hết cho 13 là: 999999 .

Ta có $100009 + 13 = 100022$, do đó số có 6 chữ số nhỏ nhất chia hết cho 13 và có tận cùng bằng 2 chính là số 100022 .

Nhận thấy rằng nếu hai số tự nhiên có 6 chữ số cùng chia hết cho 13 và đều có chữ số tận cùng bằng 2 thì hiệu của chúng cũng chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 0 .

Số nhỏ nhất (lớn hơn 0) có chữ số tận cùng bằng 0 chia hết cho 13 là 130 .

Điều này chứng tỏ tất cả các số có 6 chữ số chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 lập thành một cấp số cộng có số hạng đầu là $u_1 = 100022$, công sai $d = 130$.

Công thức số hạng tổng quát của dãy là: $u_n = u_1 + (n-1)d$.

Vì số cần tìm là số có 6 chữ số không vượt quá 999999 nên ta có:

$$100022 + (n-1)130 \leq 999999 \Leftrightarrow n \leq \frac{69230}{10} = 6923,9$$

Vì n là số tự nhiên nên số hạng lớn nhất trong dãy trên ứng với $n = 6923$.

Vậy số phần tử của biến cố B là $|B| = 6923$.

$$P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6923}{900000}$$

Xác suất của biến cố B là:

Cách 2.

Số phần tử của không gian mẫu là: $|\Omega| = 9 \cdot 10^5$.

Gọi số chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2 là $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 2}$.

Ta có $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 2} = 10 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} + 2$.

Gọi k là số dư của phép chia $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ cho 13 ($k \in \square, 0 \leq k \leq 12$).

Khi đó vì $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 2} = 10 \cdot \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} + 2 \equiv 13$ ($k \in \square, 0 \leq k \leq 12$) nên ta có:

$$10k + 2 \equiv 13 \quad (k \in \square, 0 \leq k \leq 12)$$

$$10k + 2 = 13t \Leftrightarrow t = \frac{10k + 2}{13} \in \square \quad (k \in \square, 0 \leq k \leq 12).$$

Do đó tồn tại số tự nhiên t sao cho

Ta có bảng:

$k = 0$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{2}{13} \notin \square$	Loại
$k = 1$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{12}{13} \notin \square$	Loại
$k = 2$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{22}{13} \notin \square$	Loại
$k = 3$	$\frac{10k + 2}{13} = \frac{32}{13} \notin \square$	Loại

$k = 4$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{42}{13} = 4 \in \square$	Thỏa mãn
$k = 5$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{52}{13} \notin \square$	Loại
$k = 6$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{62}{13} \notin \square$	Loại
$k = 7$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{72}{13} \notin \square$	Loại
$k = 8$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{82}{13} \notin \square$	Loại
$k = 9$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{92}{13} \notin \square$	Loại
$k = 10$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{102}{13} \notin \square$	Loại
$k = 11$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{112}{13} \notin \square$	Loại
$k = 12$	$\frac{10k+2}{13} = \frac{122}{13} \notin \square$	Loại

Từ bảng trên ta có $k = 4$ là số dư của phép chia $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5}$ cho 13 . Như vậy, tồn tại số tự nhiên t để $\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} = 13t + 4$. Vì $10000 \leq \overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5} \leq 99999$ nên $\frac{10000-4}{13} \leq t \leq \frac{99999-4}{13}$,
hay $\frac{9996}{13} \approx 768,923 \leq t \leq \frac{99995}{13} \approx 7691,923$
 $\Rightarrow 769 \leq t \leq 7691, t \in \square$.

Gọi B là biến cố số được chọn chia hết cho 13 và có chữ số tận cùng bằng 2.

Khi đó số phần tử của biến cố B là $|B| = 7691 - 769 + 1 = 6923$.

Xác suất của biến cố B là: $P(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{6923}{900000}$.

----- **HẾT** -----