ĐỀ KIỂM TRA CUỐI HỌC KÌ I – TOÁN 12

(Thời gian làm bài: 90 phút)

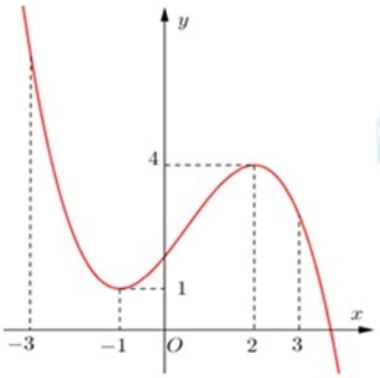
Câu 1. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$		-4		-1		2		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$-\infty$	↗	-11	↘	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào sau đây?

A. $(-1;2)$. B. $(-1;+\infty)$. C. $(-4;2)$. D. $(2;+\infty)$.

Câu 2. Cho đồ thị hàm số $y=f(x).y=f'(x)$ như hình vẽ. Khẳng định nào sau đây là đúng?



A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

B. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;2)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-3;3)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(0;2)$.

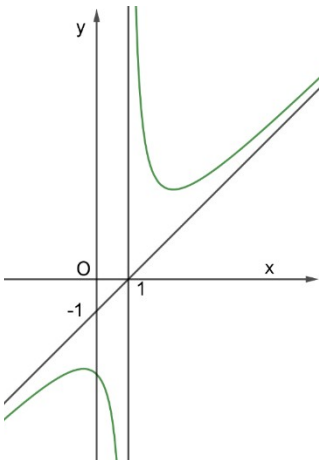
Câu 3. Cho hàm số $y=f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-3	↗	0	↘	-3	↗	$+\infty$

Giá trị cực tiểu của hàm số là

A. 0. B. -3. C. 1. D. -1.

Câu 4. Cho đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$ có đồ thị như hình vẽ.



Phương trình đường tiệm cận đứng và phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị đã cho là

A. $x=1;y=x-1$. B. $x=1;y=x+1$.

C. $x=-1;y=x-1$. D. $x=1;y=2x-2$.

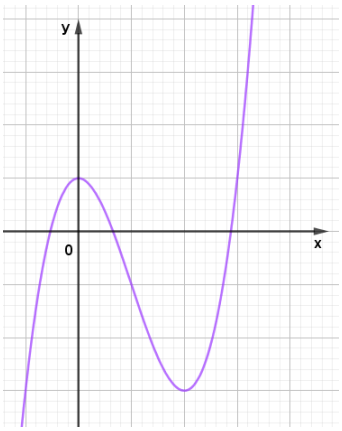
Câu 5. Đồ thị hàm số nào dưới đây có dạng như đường cong trong hình dưới?

A. $y=-x^3+3x+1$.

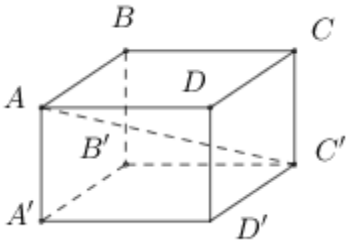
B. $y=x^3-3x^2+1$.

C. $y=\dfrac{3-x}{x-2}$.

D. $y=\dfrac{x^2+1}{x+2}$.



Câu 6. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ (hình vẽ bên). Khẳng định nào dưới đây là đúng?



A. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{D'C'}$.

B. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$.

C. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC'}$.

D. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'C'}$.

Câu 7. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tổng $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CC'}+\overrightarrow{A'D'}$ bằng

A. $\vec{0}$. B. $\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AC'}$. D. $\overrightarrow{A'C}$.

Câu 8. Cho lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$, gọi *M, N* lần lượt là trung điểm của *AB, AC*. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AC}$. B. $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BC}$. C. $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CB}$. D. $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{C'B'}$.

Câu 9. Cho lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a. Khi đó, giá trị $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{A'C'}$ là

A. $-\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. B. $-\dfrac{a^2}{2}$. C. $\dfrac{a^2\sqrt{3}}{2}$. D. $\dfrac{a^2}{2}$.

Câu 10. Trong không gian *Oxyz*, cho $\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$. Toạ độ của $\vec{u}$ là

A. $(-2;3;-1)$. B. $(2;-3;1)$. C. $(2;-3;0)$. D. $(-3;2;1)$.

Sử dụng thông tin sau để làm các ***câu 11-14.***

Cân nặng (kg) trung bình của học sinh lớp 11D cho trong bảng sau:

Cân nặng	[40,5; 45,5)	[45,5; 50,5)	[50,5; 55,5)	[55,5; 60,5)	[60,5; 55,5)	[65,5; 70,5)
Số học sinh	10	7	16	4	2	3

Câu 11. Cân nặng trung bình của học sinh lớp 11D là (làm tròn tới hàng phần trăm)

A. 60,51 kg. B. 55,53 kg. C. 51,82 kg. D. 51,81 Kg.

Câu 12. Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm trên là

A. 25. B. 30. C. 15. D. 20.

Câu 13. Trung vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là (làm tròn tới hàng phần trăm)

A. 51,75. B. 48,68. C. 53. D. 50,5.

Câu 14. Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm trên là (làm tròn tới hàng phần trăm)

A. 50,55. B. 55,55. C. 55,5. D. 55,03.

Câu 15. Giá trị cực tiểu của hàm số $y = e^{x^2-2x+2024}$ là

A. 1. B. e^{2023}. C. e^{2025}. D. e.

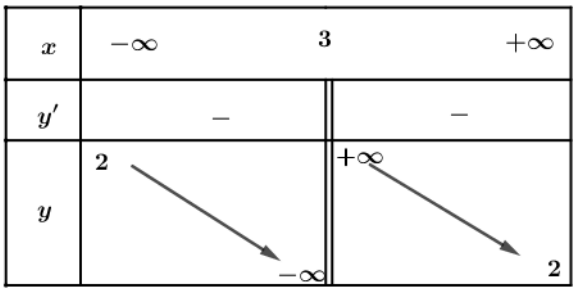
Câu 16. Giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = -x^3 + 3x - 3$ trên $[-2;2]$ là

A. -5. B. -1. C. -2. D. -6.

Câu 17. Phương trình đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{x - 1}$ là

A. $x = 1$. B. $y = 2x$. C. $y = 2x - 1$. D. $y = 2x - 3$.

Câu 18. Quan sát bảng biến thiên và cho biết bảng biến thiên đó là của hàm số nào.



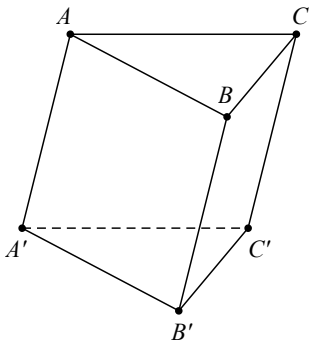
A. $y = \dfrac{-2x+1}{x+3}$.

B. $y = \dfrac{-2x+1}{x-3}$.

C. $y = \dfrac{2x-1}{x+3}$.

D. $y = \dfrac{2x-1}{x-3}$.

Câu 19. Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$ có 2 đáy là các tam giác đều (như hình bên).



Góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{B'C'}$ bằng

A. $120°$.

B. $150°$.

C. $60°$.

D. $30°$.

Câu 20. Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ bằng

A. $2a^2$. B. a^2. C. 0. D. $a^2\sqrt{3}$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(3;2;-1)$, $B(1;-3;2)$, $C(-2,1,3)$, khi đó $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ bằng

A. 27. B. -3. C. -8. D. 22.

Câu 22. Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Biết $A(1;0;1)$, $B'(2;1;2)$, $D'(1;-1;1)$, $C(4;5;-5)$. Gọi toạ độ của đỉnh $A'(a;b;c)$. Khi đó $2a+b+c$ bằng

A. 3. B. 2. C. 7. D. 8.

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi ***23-24.***

Thời gian (phút) truy cập Internet mỗi buổi tối của các học sinh lớp 10A được cho trong bảng sau:

Thời gian (phút)	[9,5; 12,5)	[12,5; 15,5)	[15,5; 18,5)	[18,5; 21,5)	[21,5; 24,5)
Số học sinh	3	12	15	24	2

Câu 23. Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm trên là (làm tròn tới chữ số phần đơn vị)

A. 4.8. B. 4.7. C. 5,75. D. 5,8.

Câu 24. Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm trên là (làm tròn tới chữ số phần đơn vị)

A. 8,6. B. 8,7. C. 8,8. D. 8,9.

Câu 25. Thời gian (phút) để học sinh hoàn thành một câu hỏi thi được cho như sau:

Thời gian (phút)	[0,5; 10,5)	[10,5; 20,5)	[20,5; 30,5)	[30,5; 40,5)	[40,5; 50,5)
Số học sinh	2	10	6	4	2

Tìm mốt của mẫu số liệu ghép nhóm đã cho.

A.17,16 B. 10. C. 15,5. D. 10,5.

Câu 26. Giả sử doanh số (tính bằng số sản phẩm) của một sản phẩm mới (trong vòng một số năm nhất định) tuân theo quy luật logistic được mô hình hoá bằng hàm số

$$f(t)=\frac{5000}{1+5e^{-t}},\ t\ge 0,$$

trong đó thời gian t được tính bằng năm, kể từ khi phát hành sản phẩm mới. Khi đó, đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian nào?

A. $(0;\ln 5)$. B. $(0;5)$ C. $(\ln 5;10)$. D. $(1;2)$.

Câu 27. Người ta bơm xăng vào bình xăng của một xe ô tô. Biết rằng thể tích V (lít) của lượng xăng trong bình xăng tính theo thời gian bơm xăng t (phút) được cho bởi công thức

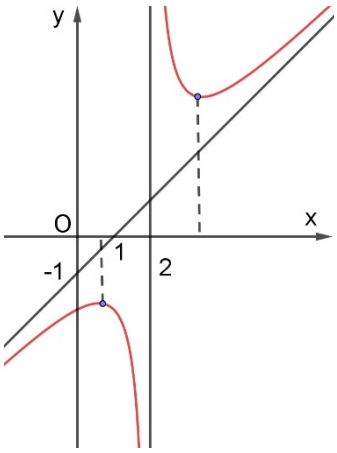
$$V(t)=300\left(t^2-t^3\right)+4,\ 0\le t\le 0,5.$$

(Nguồn: R.I. Charles et al., Algebra 2, Pearson)

Khi xăng chảy vào bình xăng, gọi $V'(t)$ là tốc độ tăng thể tích tại thời điểm t với $0\le t\le 0,5.$ Thời điểm xăng chảy vào bình với tốc độ lớn nhất là

A. 0 phút. B. 0,5 phút. C. $\frac{1}{3}$ phút. D. $\frac{1}{6}$ phút.

Câu 28. Cho đồ thị hàm số $y=\frac{ax^2+bx+c}{x+d}$ có đồ thị như hình vẽ.



Trong các số a,b,c,d có bao nhiêu số có giá trị dương?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

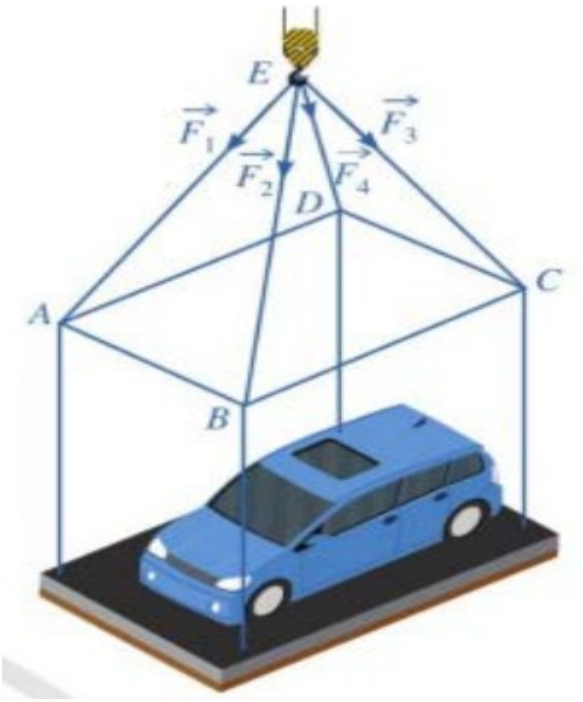
Câu 29. Một quần thể vi khuẩn được đưa vào môi trường nuôi cấy. Giả sử số lượng vi khuẩn P có thể được mô hình hoá bằng công thức:

$$P(t) = 500\left(1 + \frac{4t}{1+t^2}\right),$$

trong đó t là thời gian (giờ). Số lượng lớn nhất của quần thể vi khuẩn này là

A. 500. B. 1 000. C. 1 500. D. 2 000.

Câu 30. Một chiếc ô tô được đặt trên mặt đáy dưới của một khung sắt có dạng hình hộp chữ nhật với đáy trên là hình chữ nhật ABCD, mặt phẳng (ABCD) song song với mặt phẳng nằm ngang. Khung sắt đó được buộc vào móc E của chiếc cần cẩu sao cho các đoạn dây cáp EA, EB, EC, ED có độ dài bằng nhau và cùng tạo với mặt phẳng (ABCD) một góc bằng $60^0.60^0$. Chiếc cần cẩu kéo khung sắt lên theo phương thẳng đứng. Biết trọng lượng chiếc xe ô tô là $4000\,N$ và trọng lượng khung sắt là $3000\,N$; cường độ các lực căng $\vec{F_1},\vec{F_2},\vec{F_3},\vec{F_4}$ là bằng nhau. Cường độ lực căng $\vec{F_1}$ là



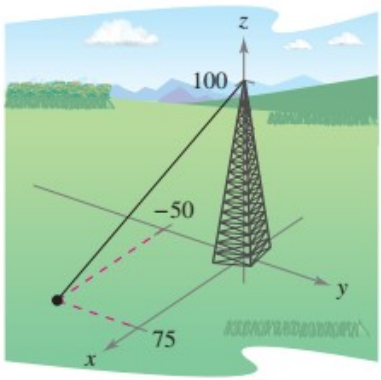
A. $\frac{14000}{\sqrt{3}}$ N.

B. $\frac{3500}{\sqrt{3}}$ N.

C. 3500 N.

D. 1750 N.

Câu 31. Trong không gian toạ độ $Oxyz$, có một tháp cao 100 m và có một sợi dây nối từ đỉnh tháp xuống đất như hình vẽ. Độ dài của sợi dây là (làm tròn tới một chữ số thập phân)



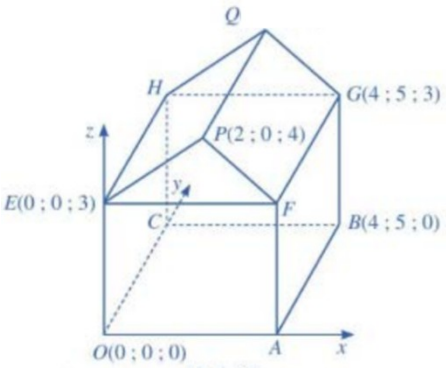
A. 134,6 m.

B. 134,7 m.

C. 133,7 m.

D. 133,6 m.

Câu 32. Toạ độ hoá một ngôi nhà như hình bên. Ta cần treo một chiếc đèn vào trung điểm PQ. Toạ độ của chiếc đèn sau khi được treo là



A. $(2;3;4)$.

B. $\left(2;\frac{5}{2};4\right)$.

C. $\left(1;\frac{5}{4};2\right)$.

D. $(2;5;2)$.

Sử dụng dữ liệu sau để trả lời các câu hỏi ***33-35.***

Thu nhập theo tháng (đơn vị: triệu đồng) của công nhân của hai nhà máy như sau:

Thu nhập	[5;8)	[8;11)	[11;14)	[14;17)	[17;20)
Nhà máy A	20	35	45	35	20
Nhà máy B	17	23	30	23	17

Câu 33. Dựa vào mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân hai nhà máy, kết luận nào sau đây là đúng?

A. Mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân ở nhà máy A lớn hơn mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân nhà máy B.

B. Mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân ở nhà máy A nhỏ hơn mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân nhà máy B.

C. Mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân ở nhà máy A bằng mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân nhà máy B.

D. Mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân ở nhà máy A gấp hai lần mức thu nhập trung bình theo tháng của công nhân nhà máy B.

Câu 34. Dựa vào khoảng tứ phân vị về thu nhập của công nhân hai nhà máy, kết luận nào sau đây là đúng?

A. Mức thu nhập của công nhân ở nhà máy A biến động lớn hơn mức thu nhập của công nhân nhà máy B.

B. Mức thu nhập của công nhân ở nhà máy A biến động ít hơn mức thu nhập của công nhân nhà máy B.

C. Biến động mức thu nhập của công nhân ở nhà máy A bằng biến động mức thu nhập của công nhân nhà máy B.

D. Mức thu nhập của công nhân ở nhà máy A biến động gấp 2 lần mức biến động thu nhập của công nhân nhà máy B.

Câu 35. Gọi $s_1, s_2 s_1, s_2$ lần lượt là độ lệch chuẩn về tiền lương theo tháng của công nhân hai nhà máy A và B. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $s_1 = s_2$. B. $s_1 > s_2$. C. $s_1 < s_2$. D. $s_1 = 2s_2$.

TỰ LUẬN (3 điểm)

Câu 36. Hàm phân phối chuẩn có vai trò quan trọng trong xác suất, thống kê và hàm số đó có dạng

$$y = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

trong đó hằng số μ được gọi là giá trị trung bình và hằng số dương σ được gọi là độ lệch chuẩn.

Để đơn giản, hãy chia tỉ lệ để loại bỏ $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ và nghiên cứu trong trường hợp đặc biệt $\mu = 0,$ tức là ta nghiên cứu hàm $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}.$

a) Tìm tiệm cận ngang của đồ thị hàm số và giá trị lớn nhất của hàm số đã cho.

b) Lập bảng biến thiên cho hàm số $g(x) = f(x) + \frac{x^2}{2\sigma^2} - 1.$ Từ đó so sánh giá trị của hàm số và $h(x) = -\frac{x^2}{2\sigma^2} + 1.$

Câu 37. Trong không gian $Oxyz,$ cho các điểm $A(2;-2;3), B(1;1;-1), C(-1;-2;1).$

a) Tìm toạ độ trọng tâm *G* của tam giác *ABC*.

b) Tìm toạ độ điểm *M* thuộc trục *Oz* sao cho đường thẳng *AM* vuông góc với đường thẳng *BC*.

C. ĐÁP ÁN ĐỀ KIỂM TRA HỌC KÌ I –TOÁN 12

1. A	2. D	3. B	4. A	5. B	6. A	7. C	8. B
9. D	10. B	11. D	12. B	13. A	14. D	15. B	16. A
17. C	18. D	19. A	20. C	21. A	22. B	23. A	24. A
25. A	26. A	27. C	28. B	29. C	30. B	31. A	32. B
33. C	34. B	35. C					

Hướng dẫn giải

Câu 13. Gọi $x_1, \ldots, x_{42}$ là cân nặng của 42 học sinh và giả sử dãy này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Khi đó, trung vị là $\frac{x_{21} + x_{22}}{2}$. Do 2 giá trị x_{21}, x_{22} thuộc nhóm [50,5; 55,5) nên nhóm này chứa trung vị. Do đó, $p = 3; a_3 = 50,5; m_3 = 16; m_1 + m_2 = 10 + 7 = 17; a_4 - a_3 = 5$ và ta có

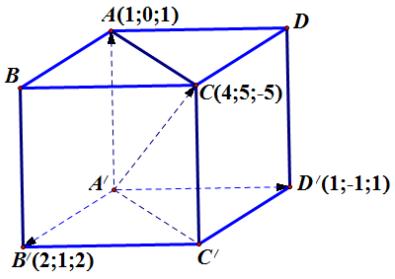
$$M_e = 50,5 + \frac{\frac{42}{2} - 17}{16} \cdot 5 = 51,75.$$

Câu 14. Gọi $x_1, \ldots, x_{42}$ là cân nặng của 42 học sinh và giả sử dãy này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Khi đó, tứ phân vị thứ ba là x_{32} nên nhóm chứa tứ phân vị thứ ba [50,5; 55,5). Do đó, $p = 3; a_3 = 50,5; m_3 = 16; m_1 + m_2 = 10 + 7 = 17; a_4 - a_3 = 5$ và ta có

$$M_e = 50,5 + \frac{\frac{3 \cdot 42}{4} - 17}{16} \cdot 5 = 55,03.$$

Câu 22. Ta có:



$$\begin{cases}\overrightarrow{A'D'}=(1-a;-1-b;1-c)\\ \overrightarrow{A'B'}=(2-a;1-b;2-c)\\ \overrightarrow{A'A}=(1-a;-b;1-c)\\ \overrightarrow{A'C}=(4-a;5-b;-5-c).\end{cases}$$

Theo quy tắc hình hộp, ta có: $\overrightarrow{A'C}=\overrightarrow{A'B'}+\overrightarrow{A'D'}+\overrightarrow{A'A}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4-a=4-3a\\5-b=-3b\\-5-c=4-3c\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\b=-\dfrac{5}{2}\\c=\dfrac{9}{2}\end{cases}.$$ Vậy $2a+b+c=2$.

Câu 23. Cỡ mẫu là $n=56$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là $\dfrac{x_{14}+x_{15}}{2}$. Do x_{14},x_{15} đều thuộc nhóm $[12,5;15,5)$ nên nhóm này chứa Q_1. Do đó, $p=2;a_2=12,5;m_2=12;m_1=3,a_3-a_2=3$ và ta có

$$Q_1=12,5+\frac{\frac{56}{4}-3}{12}\cdot 3=15,25.$$

Với tứ phân vị thứ ba Q_3 là $\dfrac{x_{42}+x_{43}}{2}$. Do x_{42},x_{43} đều thuộc nhóm $[18,5;21,5)$ nên nhóm này chứa Q_3. Do đó, $p=4;a_4=18,5;m_4=24;m_1+m_2+m_3=3+12+15=30;a_5-a_4=3$ và ta có

$$Q_3=18,5+\frac{\frac{3.56}{4}-30}{24}\cdot 3=20.$$

Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q=Q_3-Q_1=4,75.$

Câu 24. Cỡ mẫu là $n=56$.

Thời gian truy cập Internet trung bình của các học sinh là

$$\overline{x}=\frac{1}{56}(3\cdot 11+12\cdot 14+15\cdot 17+24\cdot 20+2\cdot 23)=17,54.$$

Phương sai của mẫu số liệu về thời gian truy cập Internet của các bạn học sinh là

$$s^2=\frac{1}{56}\left[3\cdot 11^2+12\cdot 14^2+15\cdot 17^2+24\cdot 20^2+2\cdot 23^2\right]-\overline{x}^2\approx 8,56;\ s=2,93.$$

Câu 25. Tần số lớn nhất là 10 nên nhóm chứa mốt là nhóm [10.5; 20.5]. Ta có:

$j=2,a_2=10.5,m_2=10,m_1=2;m_3=6,h=10.$

Do đó $M_o=10.5+\dfrac{10-2}{(10-2)+(10-6)}\times 10=17,16.$

$$f(t)=5000\cdot\frac{e^t}{e^t+5};\ f'(t)=5000\cdot\frac{5e^t}{(e^t+5)^2};\ f''(t)=5000\cdot5\cdot\frac{e^t(5-e^t)}{(e^t+1)^3}.$$

Câu 26. Ta có

Xét $f''(t)>0\Leftrightarrow 5-e^t>0\Leftrightarrow t<\ln 5.$

Như vậy tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian $(0;\ln 5).$

Câu 27. Ta có $V'(t)=300\left(2t-3t^2\right),\ V''(t)=300(2-6t).$

$V''(t)=0\Rightarrow t=\frac{1}{3}.$

Lập bảng biến thiên của $V'(t)$ ta suy ra được, thời điểm xăng chảy vào bình với tốc độ lớn nhất là thời điểm lúc $\frac{1}{3}$ phút.

Câu 28. Do đồ thị có tiệm cận đứng là $x=2$ nên $d<0.$

Giao điểm của đồ thị và trục tung có tung độ $\frac{c}{d}<0\Rightarrow c>0.$

Hệ số góc của tiệm cận xiên là $a.$ Mặt khác, từ hình vẽ hệ số góc của tiệm cận xiên là dương nên $a>0.$

Lại có $y'=\frac{ax^2+2adx+bd-c}{(x+d)^2}$ và hai điểm cực trị của hàm số có giá trị dương. Suy ra

$$x_1x_2=\frac{bd-c}{a}>0\Rightarrow bd-c>0\Rightarrow bd>c\Rightarrow b<0.$$

Vậy có 2 số có giá trị dương trong các số a,b,c,d.

Câu 30. Ta đơn giản hoá mô hình bài toán thông qua hình vẽ sau ($\overrightarrow{EO}$ cùng hướng với véctơ trọng lực của ô tô và khung sắt).

Theo giả thiết ta có $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2},+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right|=7000.$ Mặt khác: $\left|\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}+\overrightarrow{F_4}\right|=\left|4\overrightarrow{EO}\right|=4EO.$

Suy ra $EO=1750.$

Ta có $(ED,(ABCD))=\widehat{EDO}=60^0$. Như vậy $ED=\frac{EO}{\sin 60^0}=\frac{3500}{\sqrt{3}}.$

Cường độ lực căng $\overrightarrow{F_1}$ là $\frac{3500}{\sqrt{3}}$.

Câu 31. Toạ độ đỉnh của tòa tháp là $A(0;0;100)$ và toạ độ điểm buộc dây dưới mặt đất là $B(75;-50;0).$

Độ dài của sợi dây là đoạn $AB=\sqrt{75^2+50^2+100^2}\approx 134,6\ m.$

Câu 32. Ta có $A(4;0;0).$ Từ $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow Q(2;5;4).$

Toạ độ trung điểm M của PQ là $M\left(2;\frac{5}{2};4\right)$.

Câu 33. Số công nhân nhà máy A là 155.

Tiền lương trung bình của công nhân nhà máy A là

$$\frac{1}{155}(6,5\cdot 20+9,5\cdot 35+12,5\cdot 45+15,5\cdot 35+18,5\cdot 20)=12,5$$ (triệu đồng)

Số công nhân nhà máy B là 110.

Tiền lương trung bình của công nhân nhà máy B là $12,5$ triệu đồng.

+ Ta tính khoảng tứ phân vị đối với mức lương của công nhân nhà máy A.

Cỡ mẫu là $n=155$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là x_{39}. Do x_{39} thuộc nhóm [8;11) nên nhóm này chứa Q_1. Do đó,

$p=2;a_2=8;m_2=35;m_1=20,a_3-a_2=3$ và ta có $Q_1=8+\frac{\frac{155}{4}-20}{35}\cdot 3=9,61$.

Với tứ phân vị thứ ba Q_3 là x_{117}. Do x_{117} thuộc nhóm [14;17) nên nhóm này chứa Q_3. Do đó,

$p=4;a_4=14;m_4=35;m_1+m_2+m_3=20+35+45=110;a_5-a_4=3$ và ta có

$$Q_3=14+\frac{\frac{3.155}{4}-110}{35}\cdot 3=14,54.$$

Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q=Q_3-Q_1=4,93$.

+ Ta tính khoảng tứ phân vị đối với mức lương của công nhân nhà máy B. Cỡ mẫu là $n=110$.

Tứ phân vị thứ nhất Q_1 là x_{28}. Do x_{28} thuộc nhóm [8;11) nên nhóm này chứa Q_1. Do đó,

$p=2;a_2=8;m_2=23;m_1=17,a_3-a_2=3$ và ta có $Q_1=8+\frac{\frac{110}{4}-17}{23}\cdot 3=9,37.$

Với tứ phân vị thứ ba Q_3 là x_{83}. Do x_{83} thuộc nhóm [14;17) nên nhóm này chứa Q_3. Do đó,

$p=4;a_4=14;m_4=23;m_1+m_2+m_3=17+23+30=70;a_5-a_4=3$ và ta có

$$Q_3=14+\frac{\frac{3.110}{4}-70}{23}\cdot 3=15,63.$$

Khoảng tứ phân vị là $\Delta_Q=Q_3-Q_1=6,26$.

Vậy mức thu nhập của công nhân ở nhà máy A biến động ít hơn mức thu nhập của công nhân nhà máy B.

Câu 35. Số công nhân nhà máy A là 155.

Tiền lương trung bình của công nhân nhà máy A là

$$\frac{1}{155}(6,5\cdot 20+9,5\cdot 35+12,5\cdot 45+15,5\cdot 35+18,5\cdot 20)=12,5$$ triệu.

Phương sai và độ lệnh chuẩn của mẫu số liệu về lương của công nhân nhà máy A là

$$s_1^2=\frac{1}{155}\left[20\cdot 6,5^2+35\cdot 9,5^2+45\cdot 12,5^2+35\cdot 15,5^2+20\cdot 18,5^2\right]-\overline{x}^2\approx 13,35\Rightarrow s_1\approx 3,6538.$$

Số công nhân nhà máy B là 110.

Tiền lương trung bình của công nhân nhà máy B là $12,5\,12,5$ triệu đồng.

Phương sai và độ lệnh chuẩn của mẫu số liệu về lương của công nhân nhà máy B là

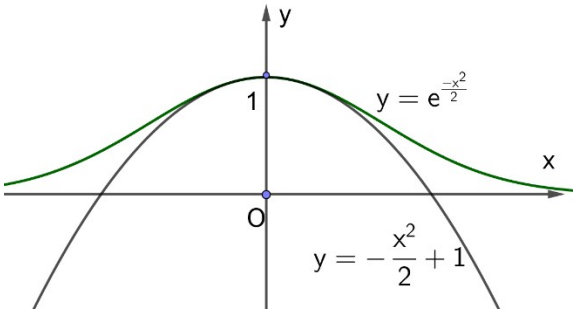
$$s_2^2=\frac{1}{110}\left[17\cdot 6,5^2+23\cdot 9,5^2+30\cdot 12,5^2+23\cdot 15,5^2+17\cdot 18,5^2\right]-\overline{x}^2\approx 14,89\Rightarrow s_2\approx 3,8588.$$

Câu 36. a) Ta có $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=0;\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}=0.$

Suy ra đồ thị hàm số đã cho có tiệm cận ngang là đường thẳng $y=0.$

Ta có $f'(x)=-\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}};\ f'(x)=0\Rightarrow x=0.$

Lập bảng biến thiên ta có GTLN của hàm số là $f(0)=1$.



(Hình vẽ của các đồ thị $y=e^{-\frac{x^2}{2}},\ y=-\frac{x^2}{2}+1$).

b) Tập xác định: $\mathbb{R}$. Ta có

$$g'(x)=-\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}+\frac{x}{\sigma^2}=\frac{x}{\sigma^2}\left(-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}+1\right);\ g'(x)=0\Rightarrow x=0$$

(do $1>e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ \forall x\in\mathbb{R}$).

Bảng biến thiên của hàm số:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
g′(x)		+	0	−	
g(x)		↗	0	↘	
	$-\infty$				$-\infty$

Từ bảng biến thiên, ta suy ra $g(x)\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow f(x)\ge-\frac{x}{2\sigma^2}+1\ \forall x\in\mathbb{R}.$

Câu 37. a) Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{2}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = -1 \Rightarrow G\left(\dfrac{2}{3};-1;1\right). \\ z_G = \dfrac{z_A + z_B + z_C}{3} = 1 \end{cases}$$

b) Do điểm M thuộc trục Oz nên $M(0;0;m)$. Ta có $\overrightarrow{AM} = (-2;2;m-3), \overrightarrow{BC} = (-2;-3;2)$.
Do đường thẳng AM vuông góc với đường thẳng BC nên

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \Leftrightarrow 4 - 6 + 2(m-3) = 0 \Leftrightarrow m = 4.$$

Vậy $M(0;0;4)$.