

Bài 1/ Cho số thực $0 \leq a \leq 1$ và dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ được xác định bởi điều kiện

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}, \\ x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Bài 2/ Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- i) $f(x+1)^3 = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;
- ii) $f(xy)^3 = f(x) \cdot f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbb{R}$.

Bài 3/ Tìm tất cả các số nguyên dương k thỏa điều kiện: tồn tại các số nguyên $m \geq 2, n \geq 2$ để $3^k + 5^k = n^m$.

Bài 4. Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . Lấy các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho DE không song song với BC . Các tia BD, CE lần lượt cắt đường tròn (O) tại M, N ($M \neq B, N \neq C$). Đường tròn tâm M , bán kính MC cắt đoạn thẳng BD tại P . Đường tròn tâm N , bán kính NB cắt đoạn thẳng CE tại Q .

a. Gọi T là trung điểm cung BC không chứa điểm A của đường tròn (O) . Chứng minh rằng $TP = TQ$.

b. Chứng minh rằng các đường thẳng DE, PQ, BC đồng quy.

Bài 5/ Theo dọc trên đường tròn, người ta ghi sẵn 299 số gồm số 0 và một số 1.

Ở mỗi bước đi sau đó của trò chơi, người chơi được phép thực hiện một trong hai động tác sau:

1/ Thay mỗi số đang có bởi hiệu giữa nó và tổng của hai số nằm kề với nó (lúc chưa thay) trên đường tròn;

2/ Chọn tùy ý hai số mà giữa chúng (trên đường tròn) có đúng hai số, rồi trừ mỗi số được chọn cho 1 hoặc cộng mỗi số được chọn cho 1.

Hỏi sau hữu hạn bước ta có thể thu được

a/ 298 số 0 và hai số 1 nằm kề nhau trên đường tròn?

b/ 297 số 0 ba số 1 nằm kề liên tiếp nhau trên đường tròn?

.....**HẾT**.....

Bài 1/ Cho số thực $0 \leq a \leq 1$ và dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ được xác định bởi điều kiện

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}, \\ x_n = \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2}, \quad n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ có giới hạn hữu hạn. Tìm giới hạn đó.

Giải

$$0 \leq x_n \leq \frac{a}{2}. \quad (1)$$

1/ Bằng quy nạp ta chứng minh được

2/ Giới hạn $x = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$, nếu có, sẽ là nghiệm của trong đoạn $[\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ của phương trình

$$x = \frac{a}{2} - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow x^2 + 2x - a = 0 \Leftrightarrow x = -1 + \sqrt{1+a}$$

Vì $a \geq 0$ nên $0 \leq c = \frac{a}{2} - \frac{c^2}{2} \leq \frac{a}{2}. \quad (1')$

3/ Từ công thức truy hồi của dãy nên ta có

$$\begin{aligned} x_n - c &= \frac{a}{2} - \frac{x_{n-1}^2}{2} - \left(\frac{a}{2} - \frac{c^2}{2} \right) = \frac{c^2 - x_{n-1}^2}{2} \\ &= \frac{1}{2} (c - x_{n-1})(c + x_{n-1}) \\ &= \dots \\ &= \frac{1}{2^{n-1}} \prod_{i=1}^{n-1} (x_i + c) \cdot (x_1 - c). \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (1') suy ra $0 \leq x_i + c \leq a \leq 1, \forall i \in \mathbb{Z}^+$ nên

$$0 \leq \prod_{i=1}^{n-1} (x_i + c) \leq 1$$

Từ đó và (2) kéo theo $0 \leq |x_n - c| \leq \frac{1}{2^{n-1}} |x_1 - c|, \quad n \geq 1.$

Vì thế $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 + \sqrt{1+a}.$

Bài 2/ Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

i) $f(x+1)^3 = f(x) + 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$;

ii) $f(xy)^3 = f(x) \cdot f(y)$ với mọi $x, y \in \mathbf{R}$.

Giải.

Giả sử f là một nghiệm hàm. Ta quy ước $f(x)^n$ viết thay $(f(x))^n$.

Từ ii) ta có $f(x)^3 = f(\sqrt{x})^2 \geq 0, \quad \forall x \geq 0. (1)$

$$f(1) = (0+1)^3 = f(0) + 1^3 = 1$$

Do đó $f(1) = (1 \cdot 1)^3 = f(1)^2$ suy ra $f(1) = 1$ và do đó $f(0) = 0. (2)$

Theo i) và quy nạp ta được $f(x+n)^3 = f(x) + n, \quad \forall x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}. (3)$

Theo ii) và quy nạp ta được $f(x^n)^3 = f(x)^n, \quad \forall x \geq 0, n \in \mathbf{Z}^+. (4)$

Với $x \geq 0$ suy ra $\forall n \in \mathbf{N}, \{x\}^3 \geq 0$ thì

$$f(x) = f(\{x\} + \lfloor x \rfloor)^3 = f(\{x\})^3 + 3f(\{x\})\lfloor x \rfloor + \lfloor x \rfloor^3 \geq x - 1.$$

Vì vậy, nếu $x > 1, n \in \mathbf{Z}^+$ thì

$$f(x^n) \geq x^n - 1 > 0$$

$$f\left(\frac{1}{x^n}\right)^3 = \frac{1}{f(x^n)^3} \geq 0 \text{ (theo (1), (4))}$$

$$(2) \Rightarrow 1 = f(1) = f\left(\frac{1}{x^n}\right)^3 = f(x^n)^3 (x^n - 1) f\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

Hay

$$f\left(\frac{1}{x^n}\right) \leq \frac{1}{x^n - 1} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x^n}\right) \leq \frac{1}{\sqrt[n]{x^n - 1}} = \frac{1}{x^n \sqrt[n]{1 - \frac{1}{x^n}}}$$

Cho $n \in \mathbf{N}^*, n \geq 2$, từ bất đẳng thức này ta nhận được $f\left(\frac{1}{x^n}\right) \leq \frac{1}{x}$ với mọi $x > 1$. Nói cách khác

$$f(x) \leq x, \quad \forall x \in \left(\frac{1}{n}, 1\right] \quad (5)$$

Ta có thể viết (3) dưới dạng $f(x-n) \leq f(x) - n, \quad \forall x \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}. (3')$

Từ (3') và (5) ta thấy nếu $x \leq 0$ thì $\forall n \in \mathbf{N}, 1 > \{x\}^3 \geq 0$ khi đó

$$f(x) = f(\{x\} - (-\lfloor x \rfloor)) \leq f(\{x\}) - (-\lfloor x \rfloor) \leq \{x\} - (-\lfloor x \rfloor) = x.$$

Vậy (5) đã nói thành $f(x) \leq x, \quad \forall x \leq 1. (5')$

Với mọi $-1 \leq x \leq 0$, dùng ii) và (5') ta còn thấy $f(x)^2 \leq f(x^2) \leq x^2$ suy ra $f(x)^3 - |x| = x \Rightarrow f(x) = x$. (*)

Ta sẽ chứng minh (*) cũng đúng khi $x < -1$.

$$1 = f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = (x) \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f(x)^3 = x$$

Ta có và theo (5') ta suy ra (*).

Bây giờ ta chứng minh (*) cho trường hợp $x > 0$.

Ta có $\{x\} - 1 < 0, \{x\} + 1 \in \mathbb{Z}^+$ nên từ (3) ta có

$$f(x) = f(\{x\} - 1 + \{x\} + 1)^3 = f(\{x\} - 1) + \{x\} + 1 = \{x\} - 1 + \{x\} + 1 = x > 0 \quad (6)$$

Thay x bởi $\frac{1}{x}$ ta có $f\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x} > 0$ (6').

$$1 = f(1) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{x}\right) = x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

Nhưng

Dấu "=" xảy ra nên nó xảy ra ở (6) và (6').

Tóm lại $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{R}$. Thử lại ta thấy hàm số đã tìm thỏa yêu cầu đề.

Bài 3/ Tìm tất cả các số nguyên dương k thỏa điều kiện: tồn tại các số nguyên $m^3 - 2, n^3 - 2$ để $3^k + 5^k = n^m$.

Giải

1/ Với $k = 1$ thỏa điều kiện của đề bài $3^1 + 5^1 = 2^3$.

2/ Ta sẽ chứng minh $k > 1$ không thỏa yêu cầu đề.

Với $k = 2l$, khi đó $\begin{cases} 3^k = 9^l \equiv 1 \pmod{4} \\ 5^k = 25^l \equiv 1 \pmod{4} \end{cases}$ suy ra $3^k + 5^k \equiv 2 \pmod{4}$ nên $v_2(3^k + 5^k) = 1$,

Trong khi đó $v_2(n^m) \equiv 0 \pmod{2}$ nên $v_2(n^m) > 1$. Suy ra $3^k + 5^k \neq n^m$.

Với $k = 2l + 1$ khi đó

$$\begin{aligned} 3^k + 5^k &= (3 + 5) \left(3^{2l} - 3^{2l-1} \cdot 5 + \dots - 3 \cdot 5^{2l-1} + 5^{2l} \right) \\ &= 8 \cdot \sum_{j=0}^{2l-1} (-1)^j \cdot 3^{2l-j} \cdot 5^j \end{aligned}$$

Hay $v_2(3^k + 5^k) = 3$. Từ đó, nếu k thỏa mãn yêu cầu ở đề thì

$$2 \leq m \mid v_2(n^m) = v_2(3^k + 5^k) = 3 \Rightarrow m = 3$$

Mà $n^3 \equiv -1; 0; 1 \pmod{9}$. Nên ta xét đồng dư của $3^k + 5^k$ theo mod 9.

Ta có, k lẻ nên $3^k \equiv 0 \pmod{9}, k \equiv 1; 3; 5 \pmod{6}$.

Nếu $k = 6p + 1$ thì $5^k = 5^{6p+1} = 5 \cdot (5^6)^p \equiv 5 \pmod{9}$ mâu thuẫn.

Nếu $k = 6p + 5$ thì $5^k = 5^{6p+5} = 5^5 \cdot (5^6)^p \equiv 2 \pmod{9}$ mâu thuẫn.

Như vậy chỉ còn trường hợp $k = 6p + 3$

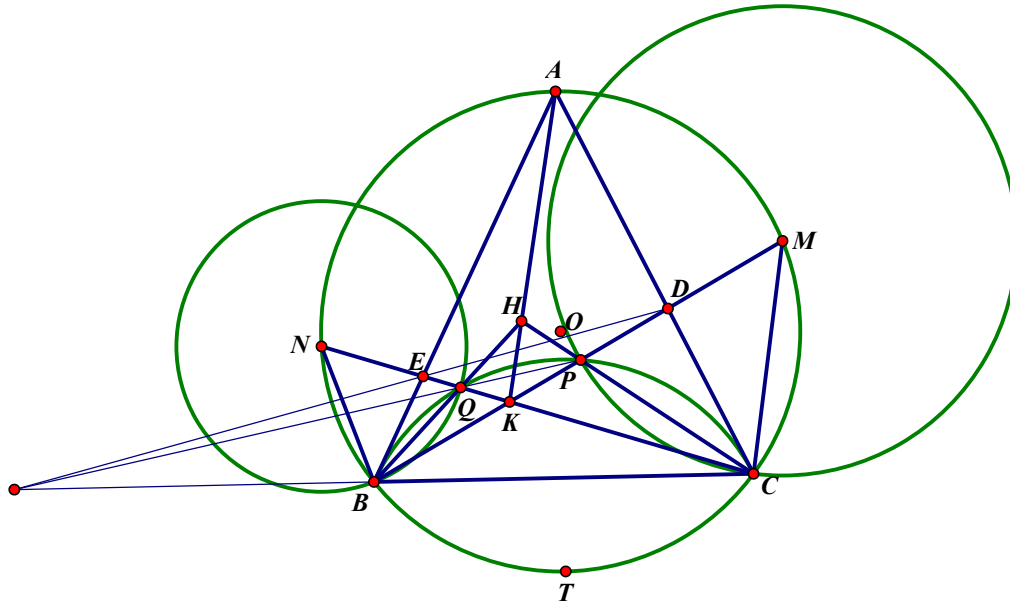
Ta lại thấy $n^3 \equiv -1; 0; 1 \pmod{7}$. Mà $3^k + 5^k = (3^6)^p \cdot 3^3 + (5^6)^p \cdot 5^3 \equiv -2 \pmod{7}$. Như vậy không tồn tại m, n thỏa yêu cầu bài.

Bài 4.

Cho tam giác ABC cân tại A , nội tiếp đường tròn (O) . Lấy các điểm D, E lần lượt thuộc các cạnh CA, AB sao cho DE không song song với BC . Các tia BD, CE lần lượt cắt đường tròn (O) tại M, N ($M \neq B, N \neq C$). Đường tròn tâm M , bán kính MC cắt đoạn thẳng BD tại P . Đường tròn tâm N , bán kính NB cắt đoạn thẳng CE tại Q .

a. Gọi T là trung điểm cung BC không chứa điểm A của đường tròn (O) . Chứng minh rằng $TP = TQ$.

b. Chứng minh rằng các đường thẳng DE, PQ, BC đồng quy.



a)

Các tam giác cân ABC, MCP, NBQ có góc ở đỉnh bằng nhau nên đồng dạng.

Suy ra $\angle BPC = \angle BQC$, do đó bốn điểm B, C, P, Q cùng thuộc một đường tròn W .

Hơn nữa $\hat{BPC} = \hat{BQC} = 90 + \frac{\hat{BAC}}{2}$ nên nếu gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

thì điểm I cũng thuộc W (vì $\hat{BIC} = 90 + \frac{\hat{BAC}}{2}$).

Bằng biến đổi góc, cũng dễ dàng kiểm tra được $TB = TI = TC$ nên T là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BIC (tức là đường tròn W).

Do đó $TP = TQ$.

b)

Dễ thấy AB, AC là các tiếp tuyến của đường tròn W .

Gọi K là giao điểm của các đường thẳng BP, CQ ; H là giao điểm của các đường thẳng BQ, CP .

Ta có biến đổi tỷ số kép (xét trên đường tròn W)

$$\begin{aligned} (BA, BK, BH, BC) &= (BB, BP, BQ, BC) = (CB, CP, CQ, CC) \\ &= (CB, CH, CK, CA) = (CA, CK, CH, CB) \end{aligned}$$

Do đó, A, K, H thẳng hàng.

Hai tam giác BEQ và CDP có $BE \angle CD = A, BQ \angle CP = H, BP \angle CQ = K$ mà A, K, H thẳng hàng nên theo định lý Desargues, ta có DE, PQ, BC đồng quy.

Bài 5/ Theo dọc trên đường tròn, người ta ghi sẵn 299 số gồm số 0 và một số 1.

Ở mỗi bước đi sau đó của trò chơi, người chơi được phép thực hiện một trong hai động tác sau:

1/ Thay mỗi số đang có bởi hiệu giữa nó và tổng của hai số nằm kề với nó (lúc chưa thay) trên đường tròn;

2/ Chọn tùy ý hai số mà giữa chúng (trên đường tròn) có đúng hai số, rồi trừ mỗi số được chọn cho 1 hoặc cộng mỗi số được chọn cho 1.

Hỏi sau hữu hạn bước ta có thể thu được

a/ 298 số 0 và hai số 1 nằm kề nhau trên đường tròn?

b/ 297 số 0 ba số 1 nằm kề liên tiếp nhau trên đường tròn?

Giải

Trên đường tròn ta đánh dấu (x) tại vị trí mà người ta đã ghi sẵn số 1 (và giữ nguyên dấu (x) đó suốt trò chơi).

Giả sử $a_1, a_2, \dots, a_{300}$ là các số đang có mặt trên đường tròn, kể theo thứ tự liên tiếp ngược chiều kim đồng hồ. Trong đó, a_1 là số nằm tại vị trí có dấu (x).

Đặt $S := \sum_{k=1}^{300} a_k; A := \sum_{k=1}^{300} (-1)^{k-1} a_k; T := \sum_{k=1}^{100} a_{3k}$.

Ta hãy tìm xem sau mỗi bước đi các tổng này có thể thay đổi thế nào.

Nếu bước đi được thực hiện bởi động tác 1, thì

a_k với $1 \leq k \leq 300$ được thay bởi $a'_k := a_k - a_{k-1} - a_{k+1}$ (quy ước $a_{301} = a_1, a_0 = a_{300}$).

$$S' = \sum_{k=1}^{300} a'_k = -S$$

Từ động tác 1 đưa tổng S thành

$$S' = \sum_{k=1}^{300} a'_k = S \pm 2$$

Nếu bước đi được thực hiện bởi động tác 2, thì dễ thấy

a/ Từ các phân tích trên ta thấy S giữ nguyên tính chẵn lẻ qua mỗi bước đi. Khi chưa thực hiện bước đi nào thì $S=1$, nên không thể thực hiện được yêu cầu của câu a.

$$A' = \sum_{k=1}^{300} (-1)^{k-1} a'_k = 3A$$

b/ Nếu mỗi bước đi được thực hiện bởi động tác 1, thì

Dễ thấy nếu thực hiện bởi động tác 2, thì A không thay đổi.

Khi chưa thực hiện bước đi nào thì $A = 1$, trong khi ở trạng thái 297 số 0 và ba số 1 nằm kề nhau thì $A = \pm 1$. Như vậy theo phân tích trên về cách thay đổi của A thì điều kiện cần và đủ để thu được trạng thái 297 số 0 và ba số 1 nằm liền kề sau hữu hạn bước là không bao giờ thực hiện bước đi bởi động tác 1 và ba số 1 phải nằm ở vị trí sao cho tổng $A=1$.

Tuy nhiên, ở chiều ngược lại với cách thực hiện các bước đi như thế (không thực hiện động tác

1) thì hoặc là các số $a_3, a_6, \dots, a_{300}$ đều được giữ nguyên hoặc là có đúng hai trong 100 số này

$$T' = \sum_{k=1}^{300} a'_{3k} = T \pm 2$$

thay đổi, theo cách cùng tăng 1 hoặc cùng giảm 1. Vì thế. Vậy, tính chẵn lẻ của T là không đổi.

Khi chưa thực hiện bước đi nào, tổng $T=0$, là một số chẵn, trong khi ở trạng thái 297 số 0 và ba số 1 nằm liền kề thì $T=1$. Như vậy không thể thực hiện được.

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 5x_n^2 + 3x_n + \frac{25n+26}{n+1}} - 1, n \geq 1. \end{cases}$$

Bài 1. Cho dãy số (x_n) được xác định

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm $\lim x_n$.

Bài 2. Tìm tất cả đa thức $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ thỏa mãn: $P^2(x) = 7P(x^2 - 15) + 2023, \forall x \in \mathbb{Z}$ (1)

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên tố m, n sao cho

$$(m^2 + 1) \mid (13^n + 1) \text{ và } (n^2 + 1) \mid (13^m + 1).$$

Bài 4. Cho tứ giác ABCD nội tiếp trong đường tròn (O) sao cho AB cắt CD tại E và AD cắt BC tại F, gọi G là giao điểm của AC và BD. Các đường tròn (ADE) và (CDF) cắt nhau tại D và H. Phân giác trong

góc $\widehat{AHB}$ cắt AB, AD lần lượt tại I, J và phân giác trong góc $\widehat{DHC}$ cắt CB, CD lần lượt tại K, L . Gọi M, M' là giao điểm của BH với AD, CD tương ứng, N, N' là giao điểm của DH với BC, BA tương ứng. Chứng minh IL, KJ, MN và $M'N'$ đồng quy tại G .

Bài 5. Cho tập hợp X là một tập hợp con của tập các số nguyên dương sao cho trong 2023 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn có một số thuộc tập X . Chứng minh rằng tồn tại hai số trong X sao cho số này chia hết cho số kia.

LỜI GIẢI

Bài 1. Cho dãy số (x_n) được xác định

$$\begin{cases} x_1 = 4 \\ x_{n+1} = \sqrt{x_n^3 - 5x_n^2 + 3x_n + \frac{25n+26}{n+1}} - 1, n \geq 1. \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn. Tìm $\lim x_n$.

Giải:

Trước hết, ta chứng minh $x_n > 3, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (1) bằng phương pháp quy nạp.

* Hiển nhiên $x_1 = 4 > 3$.

* Với $n \geq 2$, ta có

$$x_{n+1} = \sqrt{(x_n + 1)(x_n - 3)^2 + 16 + \frac{1}{n+1}} - 1 > \sqrt{16} - 1 = 3$$

Do đó $x_n > 3$ với mọi số nguyên dương n .

Tiếp theo, ta chứng minh dãy số (x_n) là dãy giảm hay $x_{n+1} < x_n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ (2) bằng phương pháp quy nạp.

* Với $n = 1, x_2 = \sqrt{18} - 1 < 4 = x_1$.

* Giả sử $3 < x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 = 4$

Khi đó xét hiệu

$$\begin{aligned} H &= (x_{n+1} + 1)^2 - (x_n + 1)^2 = \left(x_n^3 - 5x_n^2 + 3x_n + \frac{25n+26}{n+1} \right) - \left(x_{n-1}^3 - 5x_{n-1}^2 + 3x_{n-1} + \frac{25(n-1)+26}{n} \right) \\ &= (x_n - x_{n-1}) \left(x_n^2 + x_n x_{n-1} + x_{n-1}^2 - 5x_n - 5x_{n-1} + 3 \right) + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \\ &= (x_n - x_{n-1}) \left[\left(x_n - \frac{5}{2} \right)^2 + \left(x_{n-1} - \frac{5}{2} \right)^2 + x_n x_{n-1} + 3 - \frac{25}{2} \right] + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0, \forall n \geq 2. \end{aligned}$$

Vì $x_n - x_{n-1} < 0$ (gt quy nạp) và $x_n > 3, x_{n-1} > 3$ nên

$$\left[\left(x_n - \frac{5}{2} \right)^2 + \left(x_{n-1} - \frac{5}{2} \right)^2 + x_n x_{n-1} + 3 - \frac{25}{2} \right] > \left(3 - \frac{5}{2} \right)^2 + \left(3 - \frac{5}{2} \right)^2 + 3 \cdot 3 + 3 - \frac{25}{2} = 0; \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} < 0, \forall n \geq 2. \quad \text{Từ}$$

đó suy ra dãy số (x_n) giảm và bị chặn dưới nên theo nguyên lý Weierstrat dãy số có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim x_n = a, 3 \leq a < 4$.

Từ hệ thức truy hồi cho n dẫn đến dương vô cực ta có phương trình

$$a = \sqrt{a^3 - 5a^2 + 3a + 25} - 1 \Leftrightarrow (a+1)^2 = a^3 - 5a^2 + 3a + 25$$

$$\Leftrightarrow (a-3)(a^2 - 3a - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = \frac{3 - \sqrt{41}}{2} \\ a = \frac{3 + \sqrt{41}}{2} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện của a ta có $a = 3$

$$\lim x_n = 3$$

Vậy

Tìm tất cả đa thức $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ thỏa mãn: $P^2(x) = 7P(x^2 - 15) + 2023, \forall x \in \mathbb{Q}$ (1)

Bài 2.

Lời giải: Trước hết chúng ta cần tìm số thực a là nghiệm của phương trình;

$$x = x^2 - 15 \Leftrightarrow x^2 - x - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1 - \sqrt{61}}{2} \\ x = \frac{1 + \sqrt{61}}{2} \end{cases}$$

Với $a \in \left\{ \frac{1 - \sqrt{61}}{2}; \frac{1 + \sqrt{61}}{2} \right\}$ thì a thỏa $a = a^2 - 5$ hay $a^2 - a - 5 = 0$.

- Giả sử đa thức $P(x)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Trong (1) thay $x = a$ ta có:

$$P^2(a) = 7P(a^2 - 15) + 2023 \Leftrightarrow P^2(a) - 7P(a) - 2023 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} P(a) = \frac{7 - \sqrt{8141}}{2} \\ P(a) = \frac{7 + \sqrt{8141}}{2} \end{cases}$$

Giả sử $P(x)$ là đa thức khác hằng, khi đó $P(x) \neq b$ với $b \in \left\{ \frac{7 - \sqrt{8141}}{2}; \frac{7 + \sqrt{8141}}{2} \right\}$ và b thỏa $b^2 - 7b - 2023 = 0$

Do $P(a) = b$ nên ta viết $P(x)$ dưới dạng $P(x) = (x - a)^n \cdot Q(x) + b$ với $Q(a) \neq 0$.

Thay vào (1) ta được

$$\left((x - a)^n Q(x) + b \right)^2 = 7 \left[(x^2 - 15 - a)^n \cdot Q(x^2 - 15) + b \right] + 2023$$

Hay

$$(x - a)^{2n} \cdot Q^2(x) + 2b(x - a)^n \cdot Q(x) + b^2 = 7(x^2 - a - 15)^n Q(x^2 - 15) + 7b + 2023 \quad (2)$$

Vì $b^2 = 7b + 2023$, $a^2 = a + 15$ nên (2) được viết thành

$$(x-a)^{2n} \cdot Q^2(x) + 2b(x-a)^n \cdot Q(x) = 7(x^2 - a^2)^n Q(x^2 - 15)$$

$$\text{hay } (x-a)^n \cdot Q^2(x) + 2b \cdot Q(x) = 7(x+a)^n \cdot Q(x^2 - 15) \quad (3)$$

Trong (3) thay $x=a$ ta có:

$$2b \cdot Q(a) = 7(2a)^n \cdot Q(a^2 - 15)$$

$$\Leftrightarrow 2bQ(a) = 7(2a)^n \cdot Q(a)$$

$$\Leftrightarrow 2b = 7 \cdot (2a)^n \quad \text{vì } a^2 - 15 = a)$$

Hay $7 \pm \sqrt{8141} = 7(1 \pm \sqrt{61})^n$ điều này không xảy ra với mọi số nguyên dương n

Do đó $P(x) \equiv b$

Thử lại $P(x) \equiv b$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$P(x) \equiv \frac{7 - \sqrt{8141}}{2} \quad \text{hoặc} \quad P(x) \equiv \frac{7 + \sqrt{8141}}{2}$$

Vậy

Bài 3. Tìm tất cả các số nguyên tố m, n sao cho

$$(m^2 + 1) \mid (13^n + 1) \quad \text{và} \quad (n^2 + 1) \mid (13^m + 1)$$

Lời giải: Vì vai trò của m, n như nhau nên không mất tính tổng quát, giả sử $m \leq n$.

• Nếu $m = 2$, ta có:

$$5 \mid 13^n + 1 \quad (1) \quad \text{và} \quad (n^2 + 1) \mid 13^2 + 1 \quad (2).$$

Từ (1) suy ra n là số chẵn nên có $n = 2$. Thử lại $(m, n) = (2, 2)$ là cặp số thỏa mãn.

• Nếu $m > 2$, vì m lẻ nên $m^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$ do đó $m^2 + 1$ có ít nhất một ước là số lẻ. Gọi r là một ước nguyên tố lẻ của $m^2 + 1$ (*). Từ giả thiết suy ra

$$13^n \equiv -1 \pmod{r} \Rightarrow 13^{2n} \equiv 1 \pmod{r}.$$

Đặt $d = \text{ord}_r(13)$, khi đó $d \mid 2n$. Mà ta có $13^n \equiv -1 \pmod{r}$ nên $d \neq n$. Từ đó suy ra $d \mid 2$ hoặc $d = 2n$.

- TH1: $d \mid 2$ khi đó $r \mid 13^2 - 1 = 168 = 2^3 \cdot 3 \cdot 7$. Vì r lẻ nên $r = 3$ hoặc $r = 7$.

+ Xét $r = 3$, vì $13 \equiv 1 \pmod{3}$ nên $13^n \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 13^n + 1 \equiv 2 \pmod{3}$ (điều này mâu thuẫn với (*))

+ Xét $r = 7$, theo định lý Fermat nhỏ $m^6 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow (m^2 - 1)(m^4 + m^2 + 1) \equiv 0 \pmod{7}$.

Nếu $m^2 - 1 \equiv 0 \pmod{7}$ thì $m^2 + 1 \equiv 2 \pmod{7}$ (mâu thuẫn (*)).

Nếu $m^4 + m^2 + 1 \equiv 0 \pmod{7}$ thì $m^2 + 1 \equiv -m^4 \equiv 0 \pmod{7}$, suy ra $m \equiv 0 \pmod{7}$ (vô lý vì m là số nguyên tố).

- TH2: $d = 2n$, theo định lý Fermat nhỏ ta có

$$13^{r-1} \equiv 1 \pmod{r},$$

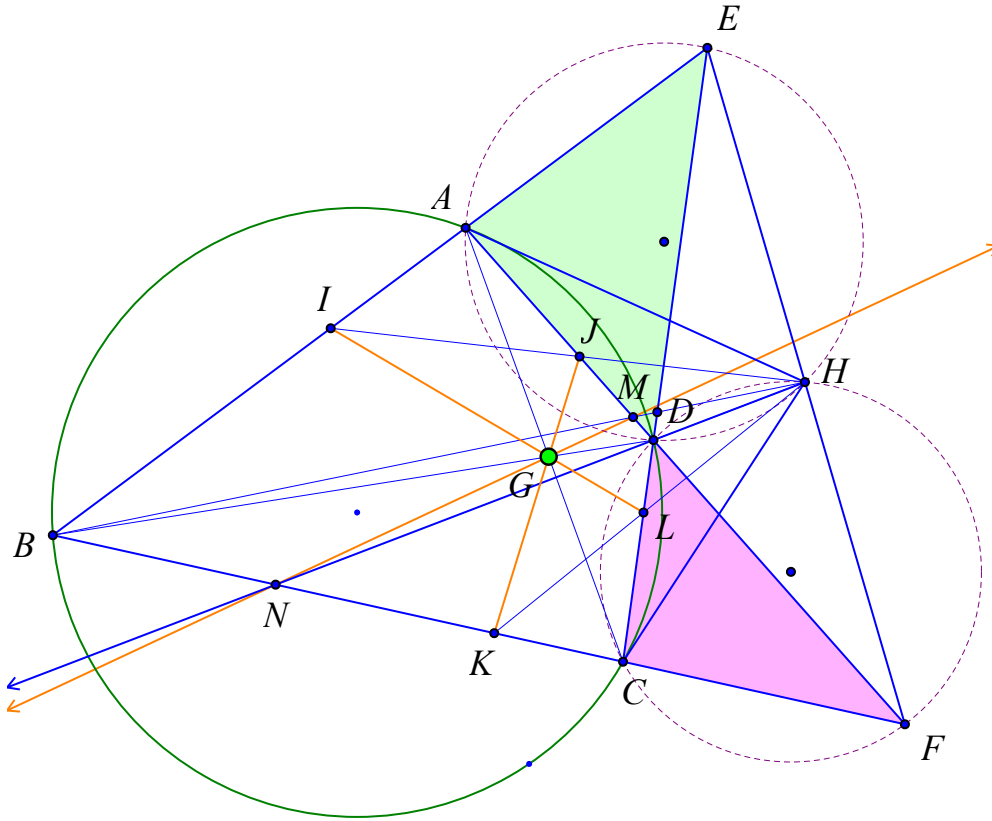
suy ra $d = 2n \mid (r-1)$, do đó $n \mid (r-1)$. Điều này nghĩa là các ước nguyên tố lẻ của $m^2 + 1$ đều chia cho n dư 1 và hơn nữa $m^2 + 1 \equiv 2 \pmod{4}$, từ đây suy ra $m^2 + 1 \equiv 2 \pmod{n}$.

Suy ra $(m-1)(m+1) \equiv 0 \pmod{n}$ hay $n \mid (m+1)$ hoặc $n \mid (m-1)$. Vì $m \leq n$ nên $n = m+1$. Do đó $m = 2$, $n = 3$ nhưng điều này mâu thuẫn với $m > 2$.

Vậy $(m, n) = (2, 2)$ là cặp số duy nhất thỏa mãn.

Bài 4. Cho tứ giác $ABCD$ nội tiếp trong đường tròn (O) sao cho AB cắt CD tại E và AD cắt BC tại F , gọi G là giao điểm của AC và BD . Các đường tròn (ADE) và (CDF) cắt nhau tại D và H . Phân giác trong góc $\angle AHB$ cắt AB, AD lần lượt tại I, J và phân giác trong góc $\angle DHC$ cắt CB, CD lần lượt tại K, L . Gọi M, M' là giao điểm của BH với AD, CD tương ứng, N, N' là giao điểm của DH với BC, BA tương ứng. Chứng minh IL, KJ, MN và $M'N'$ đồng quy tại G .

Lời giải :



Lời giải. Trước hết ta chứng minh H, E, F thẳng hàng. Thật vậy, do các tứ giác $ABCD, AEHD, CFHD$ nội tiếp nên ta có

$$(\angle HD, \angle HE) \equiv (\angle AD, \angle AE) \equiv (\angle AD, \angle AB) \equiv (\angle CD, \angle CB) \equiv (\angle CD, \angle CF) \equiv (\angle HD, \angle HF) \pmod{\pi}$$

Suy ra H, E, F thẳng hàng.

Xét hai tam giác HCB và HAD , ta có

$$(\angle HA, \angle HD) \equiv (\angle EA, \angle ED) \equiv (\angle EB, \angle EC) \equiv (\angle HB, \angle HC) \pmod{\pi}$$

(Đề ý H là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $ABCDEF$)

$$\begin{aligned} (\angle CB, \angle CH) &\equiv (\angle CB, \angle CD) + (\angle CD, \angle CH) \equiv (\angle AB, \angle AD) + (\angle FD, \angle FH) \\ &\equiv (\angle AE, \angle AD) + (\angle AD, \angle EH) \equiv (\angle EA, \angle EH) \equiv (\angle DA, \angle DH) \pmod{\pi} \end{aligned}$$

Suy ra hai tam giác HCB và HDA đồng dạng. Do đó

$$\frac{HB}{HC} = \frac{HA}{HD}, \frac{HC}{HD} = \frac{CB}{DA} \quad (1)$$

Để thấy $\triangle GBC \sim \triangle GAD$ nên $\frac{GC}{GD} = \frac{GB}{GA} = \frac{BC}{AD} \quad (2)$

Theo giả thiết thì HL, HI lần lượt là phân giác trong của $\angle CHD, \angle AHB$ nên ta lại có

$$\frac{LC}{LD} = \frac{HC}{HD}, \frac{IA}{IB} = \frac{HA}{HB} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta được $\frac{GC}{GD} = \frac{LC}{LD}$ và $\frac{GA}{GB} = \frac{IA}{IB}$. Suy ra GI, GL tương ứng là phân giác trong các góc $\angle GDC$ và $\angle AGB$. Mà hai góc này là hai góc đối đỉnh nên G, I, L thẳng hàng.

Tiếp theo ta cần chứng minh KJ và $MN, M'N'$ cũng qua G . Xét hai tam giác AIJ và CKL ta có CK cắt AJ tại F, IJ cắt KL tại H, IA cắt LC tại E . Mà H, F, E thẳng hàng nên theo định lý Desargues thì AC, JK, IL đồng quy tại G .

Lại xét hai tam giác FAC và HBD có FH, AB, CD đồng quy. Mà FA cắt HB tại M, AC cắt BD tại G, FC cắt HD tại N nên theo định lý Desargues thì M, N, G thẳng hàng.

Tương tự thì $M'N'$ cũng qua G . Vậy các đường thẳng $MN, M'N', IL, KJ$ đồng quy tại G .

Bài 5. Cho tập hợp X là một tập hợp con của tập các số nguyên dương sao cho trong 2023 số tự nhiên liên tiếp bất kì luôn có một số thuộc tập X . Chứng minh rằng tồn tại hai số trong X sao cho số này chia hết cho số kia.

Lời giải :

Xét một bảng gồm 2023 cột và 2024 hàng

Ta điền các số vào trong bảng theo quy tắc sau :

- Trong hàng đầu tiên ta điền từ trái qua phải các số $1, 2, \dots, 2023$.
- Giả sử trong hàng thứ i được điền các số (từ trái sang phải) là $k+1, k+2, \dots, k+2023$
- Đặt $A = (k+1)(k+2)\dots(k+2023)$ Ta điền các số (từ trái sang phải) vào hàng thứ $i+1$ các số $A+k+1, A+k+2, \dots, A+k+2023$

Như vậy ta được một bảng gồm 2023 cột và 2024 hàng thỏa mãn hai tính chất sau :

1) Mỗi hàng đều chứa 2023 số nguyên dương liên tiếp

2) Trong mỗi cột, số ở hàng $j+1$ chia hết cho hàng thứ j với mọi $j = 1, 2, \dots, 2023$

Theo giả thiết, trong mỗi hàng luôn chứa một phần tử của tập hợp X . Do $2024 > 2023$ nên theo nguyên lý Dirichlet tồn tại 2 phần tử của X nằm cùng một cột. Từ tính chất 2) của bảng đang xét ta có đpcm.

Câu 1 (4 điểm). Cho $a \neq 0$ và dãy số (x_n) định bởi

$$x_1 = a > 0; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{2(n+1)}{nx_n} \quad (n > 1)$$

Chứng minh rằng dãy số (x_n) có giới hạn hữu hạn và tìm giới hạn đó.

Câu 2 (4 điểm). Tìm tất cả các cặp đa thức hệ số nguyên $P(x), Q(x)$ thỏa mãn

$$Q(0) = 0 \quad \text{và} \quad P(Q(x)) = (x-1)(x-2)\dots(x-15)$$

Câu 3 (4 điểm). Tìm tất cả các số tự nhiên n sao cho

$$n + f(n) + f(f(n)) + f(f(f(n))) + \dots = 2023,$$

trong đó $f(k)$ là ước nguyên dương lớn nhất của số tự nhiên k và khác k và biết $f(0) = f(1) = 0$.

Câu 4 (4 điểm). Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $\angle ABC < 45^\circ$. Một đường thẳng đi qua B và vuông góc với BC cắt tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) tại điểm I. Gọi D là điểm đối xứng với C qua A. Đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD cắt AB và CI lần lượt tại H và K

a/ Chứng minh : $DB \cdot DH = CH \cdot CB$.

b/ Gọi J là giao điểm của AB và DI. Chứng minh rằng bốn điểm B, I, K, J nằm trên đường tròn có tâm thuộc đường thẳng CD.

Câu 5 (4 điểm). Bạn Bình và An mỗi bạn có một hộp bi Trong mỗi hộp đều có chứa bi trắng và có chứa bi đen tổng số bi trong hai hộp là 25 (các bi giống nhau về kích thước và trọng lượng)

a/ Biết hộp của Bình có 3bi trắng 10 bi đen , còn hộp của An 10 bi trắng và 2 bi đen . Mỗi bạn lấy ngẫu nhiên từ hộp của mình ra 2 viên Tính xác suất để bốn viên cùng màu.

b/ Biết hộp của Bình chứa nhiều bi hơn hộp của An và số bi đen trong hộp của Bình nhiều hơn số bi đen trong hộp của An .Từ mỗi hộp của mình mỗi bạn lấy ngẫu nhiên ra

một viên .Tính xác suất để hai viên được lấy ra khác màu và biết rằng xác suất lấy ra được hai viên cùng đen là 0,42.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1 (4 điểm).

Nhận xét được $x_n > 0, \forall n \geq 1$.

Theo BĐT Cô si, $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{2(n+1)}{nx_n} \geq 2\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, suy ra $x_n \geq 2\sqrt{\frac{n}{n-1}} > 2, \forall n \geq 2$. (1 điểm)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{2(n+1)}{nx_n} = f(x_n)$$

Ta có: $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{1}{x}$

$$0 < f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{2(n+1)}{n} \cdot \frac{1}{x^2} < \frac{1}{2} \quad (\text{do } (*)) \quad (1 \text{ điểm})$$

Với mọi $x, y \in [2, +\infty)$, theo định lí Lagrang- có $c \in (x, y)$ hay $c \in (y, x)$ sao cho:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= |f'(c)| |x - y| \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| &\leq \frac{1}{2} |x - y| \end{aligned} \quad (1 \text{ điểm})$$

Do vậy f là ánh xạ co suy ra dãy (x_n) có giới hạn L

Trong phương trình xác định dãy cho n dần tới vô cùng ta được $L = \frac{1}{2}L + \frac{2}{L} \Leftrightarrow L = 2$.

Do đó kết luận $\lim x_n = 2$ (1 điểm)

Câu 2 (4 điểm).

Trường hợp 1 : $\text{Deg } P = 0, \text{deg } Q = 0$ không thỏa

Trường hợp 2 : $\text{Deg } P = p \geq 1, \text{Deg } Q = q \geq 1$

Nhận xét : Đa thức $\text{Deg } P(Q) = 15$ và có hệ số cao nhất là 1

Nên hệ số cao nhất của $P(x), Q(x)$ đều bằng 1

Đa thức $Q(x)$ có hệ số tự do bằng 0 (vì $Q(0) = 0$)

Đa thức $P(Q(x))$ có tập nghiệm là $S = \{1, 2, 3, \dots, 15\}$

Mặt khác $\text{Deg}(P(Q)) = p.q$ (0,5 điểm)

Cân bằng bậc ta có $p.q = 15 \Rightarrow \begin{cases} q = 1 \\ p = 15 \end{cases}, \begin{cases} q = 15 \\ p = 1 \end{cases}, \begin{cases} q = 3 \\ p = 5 \end{cases}, \begin{cases} q = 5 \\ p = 3 \end{cases}$ (0,5 điểm)

+Khi $\begin{cases} q = 1 \\ p = 15 \end{cases}$ Thì ta có $\begin{cases} Q(x) = x \\ P(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-15) \end{cases}$ là nghiệm

+Khi $\begin{cases} q = 15 \\ p = 1 \end{cases}$ Thì $P(x) = x + C \Rightarrow P(Q(x)) = Q(x) + C = (x-1)(x-2)\dots(x-15) + C$

Do $Q(0) = 0 \Rightarrow C = -15!$

Vậy ta có cặp nghiệm là $\begin{cases} P(x) = x + 15! \\ Q(x) = \prod_{i=1}^{15} (x-i) - 15! \end{cases}$ (1 điểm)

+Khi $\begin{cases} q = 3 \\ p = 5 \end{cases}$

Thì $P(x) = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x-x_5)$

$$Q(x) = x^3 - ax^2 + bx \quad (\text{Do } Q(0) = 0)$$

$$\text{Ta có } P(Q(x)) = (Q(x) - x_1)(Q(x) - x_2)(Q(x) - x_3)(Q(x) - x_4)(Q(x) - x_5)$$

$$\text{Suy ra } Q(x) = x_i \quad i = \overline{1, 5}$$

$$\text{Mỗi phương trình } Q(x) = x_i, i = \overline{1, 5} \text{ có ba nghiệm } a_i, b_i, c_i$$

$$\text{Theo Định lý Viet ta có } a_i + b_i + c_i = -a \quad \forall i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}, a_i b_i + b_i c_i + c_i a_i = b$$

$$\text{Cũng theo Viets ta có } \sum_{i=1}^5 (a_i + b_i + c_i) = (1 + 2 + \dots + 15) \Rightarrow a = 24$$

$$\text{Ta lại có } (a_i + b_i + c_i)^2 = a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + 2(a_i b_i + b_i c_i + c_i a_i) \Rightarrow a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = a^2 - 2b$$

$$\text{Suy ra } \sum_{i=1}^5 (a_i^2 + b_i^2 + c_i^2) = (1^2 + 2^2 + \dots + 15^2) \Rightarrow a^2 - 2b^2 = 248$$

$$\text{Do } P(Q(x)) \text{ có nghiệm là 1 nên trong 5 phương trình } Q(x) = x_i \text{ có bộ nghiệm là } (1, b_j, c_j) \Rightarrow b_j^2 + c_j^2 = 247 \equiv 3 \pmod{4}$$

$$\text{Mà } n^2 \equiv 0, 1 \pmod{4} \text{ nên vô lý} \quad (1 \text{ điểm})$$

$$+ \text{ Khi } \begin{cases} p = 3 \\ q = 5 \end{cases} \Rightarrow P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3), Q(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$$

$$\text{Ta có } P(Q(x)) = 0 \Leftrightarrow Q(x) = x_i, i = \overline{1, 3}$$

$$\text{Mỗi phương trình } Q(x) = x_i \text{ có 5 nghiệm } a_i, b_i, c_i, d_i, e_i$$

$$\text{Ta đặt } A_i = \{a_i, b_i, d_i, e_i, \dots, a_3, b_3, c_3, d_3, e_3\} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^3 A_i = S$$

Ta có $a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 + d_i^2 + e_i^2 = \frac{1}{3}(1^2 + 2^2 + \dots + 15^2) = \frac{1240}{3}$ Vô lý (1 điểm)

Thử lại và kết luận

Câu 3 (4 điểm).

Giả sử n là số tự nhiên thỏa yêu cầu của đề bài

Cứ mỗi n tồn tại N sao cho $n = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_N$

Trong đó p_i là số nguyên tố với mọi $i = \overline{1, N}$ và $p_1 \leq p_2 \leq \dots \leq p_N$

Từ giả thiết ta có : $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_N + p_2 \cdot p_3 \dots p_N + \dots + p_{N-1} \cdot p_N + p_N = 2022$ (*) (1 điểm)

Suy ra $p_N \mid 2022 \Rightarrow p_N \in \{2, 3, 337\}$

Nếu $p_N = 337$ đem thay vào (*) thu gọn ta có :

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_{N-1} + p_2 \cdot p_3 \dots p_{N-1} + \dots + p_{N-1} = 5 \Rightarrow p_{N-1} = 5 \Rightarrow n = 5 \cdot 337 = 1685 \quad (1 \text{ điểm})$$

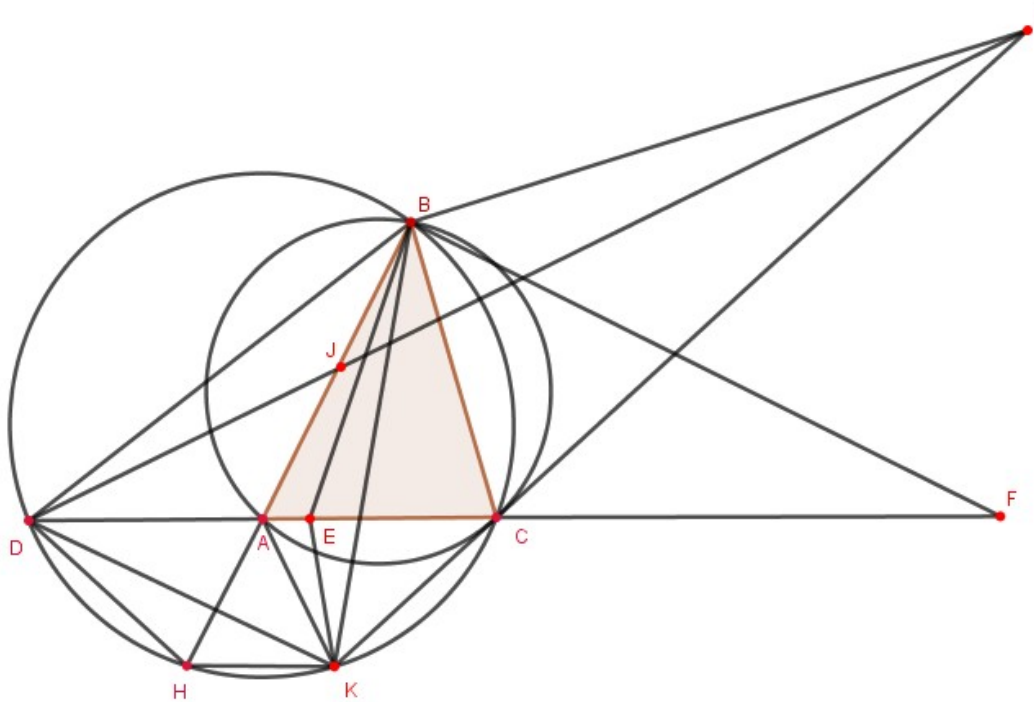
Khi $p_N = 2$ Thì (*) thành $2^N + 2^{N-1} + \dots + 2 + 1 = 2^{N+1} - 1 = 2022$ (vô lý) (1 điểm)

Khi $p_N = 3$ Thì (*) thành $p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots 3 + p_2 \cdot p_3 \dots 3 + \dots + p_{N-1} \cdot 3 + 3 = 2022$

$$p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \dots p_{n-1} + p_2 \cdot p_3 \dots p_{n-1} + \dots + p_{N-1} = 673 \Rightarrow p_{N-1} \mid 673 \quad (\text{vô lý vì } p_{N-1} = 2)$$

Thử lại và kết luận $n = 1685$ (1 điểm)

Câu 4 (4 điểm).



a/ Ta có: $\angle DCK = \angle ACK = \angle ABC = \angle HBC = \angle HDC$.

Xét tứ giác nội tiếp CDHK có

$\angle C = \angle D$ và $\angle D + \angle K = 180^\circ$ nên $\angle C + \angle K = 180^\circ$ suy ra $CD \parallel HK$

suy ra tứ giác CDHK là hình thang cân.

(1 điểm)

nên $DH = CK \Rightarrow \angle DBH = \angle KBC$

$\Rightarrow BK$ là đường đối trung của góc B $\Rightarrow$ tứ giác BDKC là tứ giác điều hòa

$$\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{KD}{KC} \Rightarrow BD \cdot KC = BC \cdot KD$$

Kết hợp với CDHK là hình thang cân suy ra $DB \cdot DH = CH \cdot CB$

(1 điểm)

b/ Vì tứ giác BDKC là tứ giác điều hòa nên $\frac{BD}{BC} = \frac{KD}{KC}$

$\Rightarrow$ 2 đường phân giác trong của $\angle DBC$ và $\angle DKC$ cắt nhau tại điểm E thuộc CD ; 2 đường

phân giác ngoài của $\angle DBC$ và $\angle DKC$ cắt nhau tại điểm F thuộc CD

$\Rightarrow B$ và K thuộc đường tròn Apollonius của tam giác DBC và DKC dựng trên đoạn CD có đường kính EF.

+ Ta lại có:

$$\angle BEK = 360^\circ - \angle BCK - (\angle EBC + \angle EKC) = 360^\circ - (90^\circ + \angle BIC) - \frac{1}{2}(\angle DBC + \angle DKC) = 180^\circ - \angle BIC$$

Suy ra tứ giác BEKI nội tiếp. (1 điểm)

+ Từ trên suy ra I cũng thuộc đường tròn Apollonius của tam giác DBC dựng trên đoạn CD nên IE là phân giác của góc DIC

$$\text{suy ra } \frac{ID}{IC} = \frac{ED}{EC} = \frac{KD}{KC} \text{ hay } \frac{ID}{KD} = \frac{IC}{KC} \text{ nên DC là phân giác của góc IDK}$$

Lại có $\angle CAK = \angle DAH = \angle CAB$

Do đó phép đối xứng trục CD biến DI thành DK, biến AB thành AK nên biến điểm J thành điểm K. Phép đối xứng trục CD biến đường tròn Apollonius của tam giác DBC dựng trên đoạn CD thành chính nó, mà K thuộc đường tròn Apollonius nên J cũng nằm trên đường tròn đó.

Vậy bốn điểm B, I, K, J nằm trên đường tròn Apollonius của tam giác DBC dựng trên đoạn CD có tâm là trung điểm EF thuộc đường thẳng CD. (1 điểm)

Câu 5 (4 điểm).

a/ (2 điểm) Tính xác suất để An và Bình lấy ra được bốn viên cùng màu

Ta gọi A_t, A_d lần lượt là biến cố An lấy ra được hai bi trắng , 2 bi đen

Gọi B_t, B_d lần lượt là biến cố Bình lấy ra được hai bi trắng , hai bi đen

Trường hợp cả hai đều lấy ra hai bi đen

$$P(A_d B_d) = P(A_d) \cdot P(B_d) = \frac{1}{C_{10}^2} \cdot \frac{C_{10}^2}{C_{13}^2} = \frac{1}{C_{13}^2} = \frac{1}{78} \quad (1 \text{ điểm})$$

Trường hợp cả hai đều lấy ra được hai bi trắng

$$P(A_t B_t) = P(A_t) \cdot P(B_t) = \frac{C_{10}^2}{C_{12}^2} \cdot \frac{C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{15}{572}$$

Qui tắc cộng ta có $P(C) = \frac{15}{572} + \frac{1}{78} = \frac{67}{1726}$ (1 điểm)

b/ (2 điểm)

Ta ký hiệu $2D$, $2T$, $1T1D$ lần lượt là các biến cố lấy được 2 bi trắng, 2 bi đen, 1 bi trắng và 1 bi đen và các biến cố ấy là xung khắc

Gọi n_A, n_B lần lượt là số bi trong hộp của An và Bình. Ta có $n_A < n_B$ và $n_A + n_B = 25$

Và gọi d_A, d_B lần lượt là số bi đen trong hộp của An và Bình. Ta có $d_A < d_B$

$$\text{Từ } \begin{cases} n_A < n_B \\ n_A + n_B = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 25 = n_A + n_B < 2n_B \\ n_A + n_B = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n_B \geq 13 \\ n_A + n_B = 25 \end{cases} \quad (1 \text{ điểm})$$

$$\text{Đề cho } P(2D) = \frac{k_A}{n_A} \cdot \frac{k_B}{n_B} = 0,42 = \frac{21}{50} \Leftrightarrow 50 \cdot k_A \cdot k_B = 21 \cdot n_A \cdot n_B \Rightarrow n_A \cdot n_B : 5 \text{ và } n_A + n_B = 25$$

Nên có hai trường hợp xảy ra

$$\text{Trường hợp 1 : } n_A = 5 \Rightarrow n_B = 20 \Rightarrow d_A \cdot d_B = 42 \Rightarrow d_A = 3, d_B = 14$$

Và do đó số bi trắng trong hộp của An và Bình lần lượt là 2 và 6

$$\text{Vậy } P(2T) = \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{20} = 0,12 \Rightarrow P(1T1D) = 1 - 0,42 - 0,2 = 0,46$$

$$\text{Trường hợp 2 : } n_A = 10 \Rightarrow n_B = 15 \Rightarrow d_A \cdot d_B = 63 \Rightarrow d_A = 5, d_B = 9$$

Do đó số bi trắng trong hộp của An và Bình lần lượt là 3 và 6

$$\text{Vậy } P(2T) = \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{15} = 0,12 \Rightarrow P(1T1D) = 1 - 0,42 - 0,2 = 0,46 \quad (1 \text{ điểm})$$

Kết luận : 0,46

Bài 1 (4 điểm). Với mỗi số nguyên dương n , xét phương trình $e^x + x^n = 3$ (1).

a) Chứng minh rằng với mọi n phương trình (1) có duy nhất một nghiệm dương.

b) Kí hiệu nghiệm dương của phương trình (1) là x_n . Chứng minh rằng các dãy số (x_n) và $n(x_n - 1)$ có giới hạn hữu hạn và tính các giới hạn đó.

Bài 2 (4 điểm). Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $1 \leq x, y, z \leq 6$ và $x + y + z = 12$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x^2 + y^2 + z^2$.

Bài 3 (4 điểm). Cho tam giác nhọn ABC có các đường cao AD, BE, CF . Đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác ABC cắt đường thẳng EF tại M và N (các điểm M, F, E, N lần lượt nằm theo thứ tự). Giả sử BM cắt DF tại I , CN cắt DE tại K . Chứng minh rằng tam giác AIK là tam giác cân.

Bài 4 (4 điểm). Cho dãy số (a_n) xác định như sau $a_1 = 9; a_{n+1} = 2a_n^2 - 1 \quad \forall n \geq 1$.

a) Xác định công thức tổng quát của dãy a_n .

b) Cho m là một số nguyên dương tùy ý và p là một ước số nguyên tố của $m^2 - 5$. Chứng minh rằng nếu a_n chia hết cho p thì 2^{n+2} là ước số của $p - 1$.

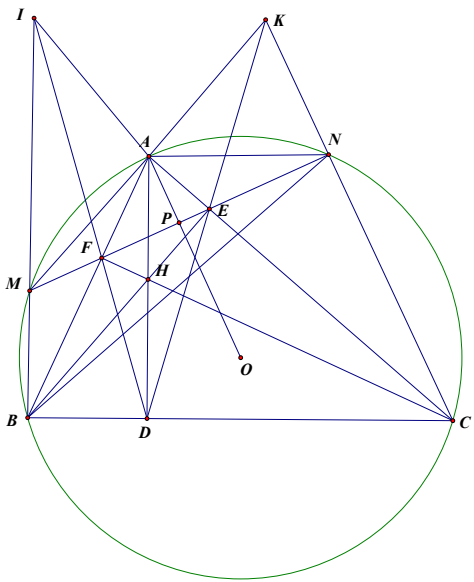
Bài 5 (4 điểm). Cho số nguyên dương n và kí hiệu $X = \{1; 2; 3; \dots; 4n - 1; 4n\}$. Với mỗi hoán vị $\{a_1; a_2; \dots; a_{4n}\}$ của X ; đặt $S = \sum_{k=1}^{4n} |3a_k - k|$. Hỏi có bao nhiêu hoán vị $\{a_1; a_2; \dots; a_{4n}\}$ của X thỏa mãn

biểu thức $S = \sum_{k=1}^{4n} |3a_k - k|$ đạt giá trị lớn nhất.

----- HẾT -----

ĐÁP ÁN

Bài	Nội dung	Điểm
1 (4 điểm)	<p>a) Với mỗi số nguyên dương n, xét hàm số $f_n(x) = e^x + x^n - 3$.</p> <p>Có $f_n(0) = -2 < 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ và $f_n(x)$ là hàm liên tục, đơn điệu tăng trên khoảng $(0; +\infty)$ nên PT (1) có duy nhất một nghiệm dương x_n.</p>	1,5
	<p>b) $f_n(1) = e - 2 > 0 = f_n(x_n) \Rightarrow x_n < 1$.</p> <p>Lại có $f_n(x_n) = e^{x_n} + x_n^n - 3 = 0 < e^{x_n} + x_n^{n-1} - 3 = f_{n-1}(x_n) \Rightarrow x_n > x_{n-1}$.</p> <p>$\Rightarrow \exists \lim x_n = A$ hữu hạn và $x_n < A \leq 1 \forall n$.</p> <p>Suy ra $f_n(x_n) = 0 < f_n(A) = e^A + A^n - 3$.</p> <p>Cho $n \rightarrow +\infty \Rightarrow e^A + \lim A^n - 3 \geq 0 \Rightarrow \lim A^n \geq 3 - e^A > 0 \Rightarrow A \geq 1 \Rightarrow A = 1$.</p>	1,5
	<p>Có</p> $x_n^n = 3 - e^{x_n} \Rightarrow n \cdot \ln x_n = \ln(3 - e^{x_n}) \Rightarrow n(x_n - 1) \cdot \ln \frac{1 + (x_n - 1)}{x_n - 1} \cdot x_n = \ln(3 - e^{x_n})$ <p>Cho $n \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim n(x_n - 1) = \ln(3 - e)$.</p>	1,0
Bài	Nội dung	Điểm
2 (4 điểm)	<p>+Áp dụng BĐT Bunhiacôpxki:</p> $3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = 144 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq 48$ <p>Vậy $\min P = 48$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = 4$.</p>	1,0
	<p>Giả sử $x \notin y \notin z \Rightarrow x \notin 4$.</p> <p>Ta có $x^2 + y^2 + z^2 = 144 - 2xy - 2yz - 2zx = 144 - 2x(12 - x) - 2yz$</p>	3,0

	$yz - 6y - 6z + 36 = (y - 6)(z - 6) \geq 0 \Rightarrow yz \geq 6(y + z) - 36 = 36 - 6x$ <p>Mà</p> $P = x^2 + y^2 + z^2 \leq 144 - 2x(12 - x) - 2(36 - 6x) = 72 + 2x^2 - 12x$ $\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 62 + 2(x - 1)(x - 5) \leq 62$ <p>$\max P = 62$ $(x; y; z) = (1; 5; 6)$</p> <p>Vậy . Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi và các hoán vị.</p>	
Bài	Nội dung	Điểm
3 (4 điểm)	 <p>Gọi H là trực tâm tam giác ABC, P là giao điểm của AO và EF.</p> <p>Ta có $\angle PAE + \angle AEP = \frac{180^\circ - \angle AOC}{2} + \angle AEP = 90^\circ - \angle ABC + \angle AEP = 90^\circ$ (vì $\angle ABC = \angle AEP$)</p> <p>$\Rightarrow \angle APE = 90^\circ \Rightarrow OA \perp MN$. Mà $OM = ON \Rightarrow OA$ là trung trực đoạn $MN \Rightarrow AM = AN$ (1).</p> <hr/> <p>$\Rightarrow \angle ABM = \angle ABN$ (2).</p>	2,0
		2,0

	<p>Lại có hai tứ giác $ACDF$ và $BCEF$ nội tiếp suy ra $\angle AFD = \angle BFE \Rightarrow \angle BFI = \angle BFE$ (3).</p> <p>Từ (2) và (3) suy ra $\triangle BFI = \triangle BFN (g.c.g) \Rightarrow BI = BN, FI = FN \Rightarrow BF$ là trung trực đoạn IN.</p> <p>Dẫn đến $AI = AN$. Hoàn toàn tương tự c/m $AK = AM$.</p> <p>Kết hợp (1) suy ra 4 đoạn thẳng AI, AK, AM, AN bằng nhau $\Rightarrow đpcm$.</p>	
Bài	Nội dung	Điểm
4 (4 điểm)	$a_n = \frac{(\sqrt{5}+2)^{2^n} + (\sqrt{5}-2)^{2^n}}{2}$ <p>Bằng phương pháp chứng minh quy nạp ta có</p>	1,5
	<p>$m^2 \equiv 5 \pmod{p} \Rightarrow a_n \equiv \frac{(m+2)^{2^n} + (m-2)^{2^n}}{2} \pmod{p}$.</p> <p>Do</p> $a_n \not\equiv p \Leftrightarrow \frac{(m+2)^{2^n} + (m-2)^{2^n}}{2} \not\equiv p \Rightarrow (m+2)^{2^n} + (m-2)^{2^n} \not\equiv p \pmod{1}$ <p>Vì vậy</p> $m^2 \equiv 5 \pmod{p} \Rightarrow (m+2)(m-2) \equiv 1 \pmod{p}.$ <p>Hơn nữa</p> $(1) \Leftrightarrow (m+2)^{2^{n+1}} + 1 \not\equiv p$ <p>Vì vậy</p> $a_n \not\equiv 2 \Rightarrow p \not\equiv 2 \Rightarrow \begin{cases} (m+2)^{2^{n+1}} - 1 \not\equiv p \\ (m+2)^{2^{n+2}} - 1 \not\equiv p \end{cases} \Rightarrow 2^{n+2} = \text{ord}_p(m+2)$ <p>Ta có</p> <p>Mà $(m+2)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow p-1 \vdots 2^{n+2}$, đpcm.</p>	2,5
Bài	Nội dung	Điểm
5	<p>Với mỗi $k \in \{1; 2; 3; \dots; 4n\}$, kí hiệu $b_k = \max \{3a_k; k\}; c_k = \min \{3a_k; k\}$.</p>	2,0

(4 điểm)	<p>Khi đó $\sum_{k=1}^{4n} 3a_k - k = \sum_{k=1}^{4n} (b_k - c_k) = \sum_{k=1}^{4n} b_k - \sum_{k=1}^{4n} c_k$</p> <p>Chú ý</p> $\sum_{k=1}^{4n} b_k \leq 3[(n+1) + (n+2) + \dots + 4n] + [(3n+1) + (3n+2) + \dots + 4n] = 26n^2 + 5n$ $\sum_{k=1}^{4n} c_k \geq 3(1+2+\dots+n) + (1+2+\dots+3n) = 6n^2 + 3n$ <p>Suy ra $\sum_{k=1}^{4n} 3a_k - k \leq 20n^2 + 2n$</p>	
	<p>Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 2 điều kiện sau được thỏa mãn:</p> <p>+ Với mọi $k \in \{1; 2; 3; \dots; 3n\}$ thì $a_k \in \{n+1; n+2; n+3; \dots; 4n\}$</p> <p>+ Với mọi $k \in \{3n+1; 3n+2; 3n+3; \dots; 4n\}$ thì $a_k \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$</p> <p>Vậy có tất cả $n! \cdot (3n)!$ hoán vị thỏa mãn.</p>	2,0

Câu 1 (4 điểm) Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + 2n + 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Chứng minh rằng dãy số $\left(\frac{u_n}{n^2}\right)$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

b) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $v_n = u_n^2 + 1$ và $w_n = \frac{v_1 v_3 \dots v_{2n-1}}{v_2 v_4 \dots v_{2n}}$. Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy số $(n^\alpha w_n)$ có giới hạn hữu hạn khác 0.

$$f: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{Q}^+ \quad xf(x+y)(yf(x)+2023)=2023$$

Câu 2 (4 điểm) Tìm hàm số thỏa mãn thỏa mãn

Câu 3 (4 điểm) Cho đường tròn (O) và dây AB, P là điểm chính giữa cung nhỏ AB ($\widehat{AOB} > 60^\circ$). Tiếp tuyến tại B của (O) cắt AP tại C. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua BC. Đường OP cắt đường thẳng qua C vuông góc BC tại D. Chứng minh 4 điểm A, D, C, Q cùng thuộc một đường tròn.

Câu 4 (4 điểm) Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn với số nguyên dương n nào đó mà $na^2 + na + 1$ là lập phương đúng của một số nguyên dương thì $nb + 1$ cũng là lập phương đúng của một số nguyên dương. Chứng minh rằng $4b + 1$ là một số chính phương.

Câu 5 (4 điểm) Cho số thực x lớn hơn 2 thỏa mãn với mọi số nguyên dương n thì x^n là số vô tỉ. Với mọi số tự nhiên t , xét các quân bài gồm các loại có giá trị bằng x^t . Hỏi có xảy ra trường hợp với mọi số nguyên dương m thì đều có thể chọn ra được một số quân bài có tổng giá trị bằng m và mỗi loại bài được chọn đều không quá 6 quân hay không?

..... HẾT

ĐÁP ÁN

Câu 1 Cho dãy số (u_n) được xác định bởi $u_1 = 3, u_{n+1} = u_n + 2n + 2, \forall n \in \mathbb{Q}^+$

a) Chứng minh rằng dãy số $\left(\frac{u_n}{n^2}\right)$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó.

b) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $v_n = u_n^2 + 1$ và $W_n = \frac{v_1 v_3 \dots v_{2n-1}}{v_2 v_4 \dots v_{2n}}$. Tìm tất cả các số thực α sao cho dãy số $(n^\alpha W_n)$ có giới hạn hữu hạn khác 0 .

Lời giải

a) Với mỗi số nguyên dương n , đặt $t_n = u_n - n^2 - n$, ta có $v_{n+1} = v_n = \dots = v_1 = 1, \forall n \in \mathbb{Q}^+$.

Lúc này ta sẽ có được $u_n = n^2 + n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$. Vì vậy $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + n + 1}{n^2} = 1$.

b) Ta có $v_n = (n^2 + n + 1)^2 + 1 = (n^2 + 1)[(n + 1)^2 + 1], \forall n \in \mathbb{N}^*$ nên

$$w_n = \frac{v_1 v_3 \dots v_{2n-1}}{v_2 v_4 \dots v_{2n}} = \frac{(1^2 + 1)(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1) \dots [(2n-1)^2 + 1][(2n)^2 + 1]}{(2^2 + 1)(3^2 + 1)(4^2 + 1)(5^2 + 1) \dots [(2n)^2 + 1][(2n+1)^2 + 1]} = \frac{2}{(2n+1)^2 + 1} = \frac{1}{2n^2 + 2n + 1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 w_n = \frac{1}{2}$$

Vì vậy ta sẽ có được

Nếu $\alpha > 2$ thì rõ ràng $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha w_n = +\infty$, còn nếu $\alpha < 2$ thì $\lim_{n \rightarrow \infty} n^\alpha w_n = 0$.

Vì vậy tất cả các số thực α cần tìm là $\alpha = 2$, và $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 w_n = \frac{1}{2}$.

Câu 2. Tìm hàm số thỏa mãn $f: \mathbb{N}^+ \rightarrow \mathbb{N}^+$ thỏa mãn $xf(x+y)(yf(x)+2023) = 2023$

HD: Đổi chỗ x và y ta được $yf(x+y)(xf(y)+2023) = 2023 = xf(x+y)(yf(x)+2023)$

Mà $f(x+y) > 0$ nên $y(xf(y)+2023) = x(yf(x)+2023)$ suy ra $xyf(y)+2023y = xyf(x)+2023x$

Thay $y=1$ và biến đổi ta được $f(x) = \frac{2023}{x} + C$ với $C = f(1) - 2023$

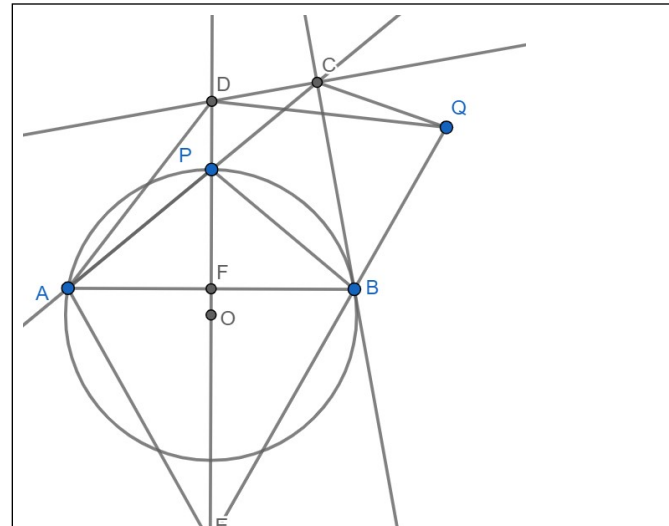
Biện luận ta được không tồn tại C. Vậy không tồn tại hàm thỏa mãn đề.

Câu 3.

Cho đường tròn (O) và dây AB, P là điểm chính giữa cung nhỏ AB có số đo > 60 độ. Tiếp tuyến tại B của (O) cắt AP tại C. Gọi Q là điểm đối xứng với P qua BC. Đường OP cắt đường thẳng qua C vuông góc BC tại D. Chứng minh 4 điểm A, D, C, Q cùng thuộc một đường tròn.

HD: + OP cắt QB, AB lần lượt tại E, F.

+ Cm tg QCDE, QDAE nội tiếp



Câu 4 Cho a, b là các số nguyên dương thỏa mãn với số nguyên dương n nào đó mà $na^2 + na + 1$ là lập phương đúng của một số nguyên dương thì $nb + 1$ cũng là lập phương đúng của một số nguyên dương.

a) Chứng minh rằng tồn tại vô số số nguyên dương n để $na^2 + na + 1$ là lập phương đúng của một số nguyên dương.

b) Chứng minh rằng $4b + 1$ là một số chính phương.

Lời giải

a) Đặt $n_k = k^3(a^2 + a)^2 + 3(a^2 + a)k^2 + 3k, \forall k \in \mathbb{N}^*$, khi đó $n_k a^2 + n_k a + 1 = [k(a^2 + a) + 1]^3$ là lập phương đúng của một số nguyên dương.

Vì thế tồn tại vô số số nguyên dương n để $na^2 + na + 1$ là lập phương đúng của một số nguyên dương.

b) Đầu tiên, ta có bổ đề sau:

Bổ đề: Cho đa thức $P(x)$ hệ số nguyên có bậc bằng 3 thỏa mãn với mọi số nguyên dương n thì ta đều có $P(n)$ là lập phương đúng. Khi đó sẽ tồn tại đa thức hệ số nguyên $Q(x)$ sao cho $P(x) = Q(x)^3$.

Chứng minh bổ đề:

Viết $P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số nguyên, $a \neq 0$.

Với mỗi số nguyên dương n , tồn tại số nguyên x_n để $x_n^3 = P(n)$.

Ta có với mọi số nguyên dương n thì

$$x_{n+1} - x_n = \sqrt[3]{a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1) + d} - \sqrt[3]{ax^3 + bx^2 + cx + d} = \frac{a(3n^2 + 3n + 1) + b(2n + 1) + c}{\sqrt[3]{P(n+1)^2} + \sqrt[3]{P(n)P(n+1)} + \sqrt[3]{P(n)^2}}$$

$$= \frac{a(3 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}) + b(\frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) + \frac{c}{n^2}}{\sqrt[3]{\frac{P(n+1)^2}{n^6}} + \sqrt[3]{\frac{P(n)P(n+1)}{n^3 n^3}} + \sqrt[3]{\frac{P(n)^2}{n^6}}}$$

Vì vậy $\lim(x_{n+1} - x_n) = \sqrt[3]{a}$, ta lại có giới hạn của một dãy số nguyên là một số nguyên nên $\sqrt[3]{a}$ là số nguyên và tồn tại n_0 để $x_{n+1} - x_n = \sqrt[3]{a}, \forall n \geq n_0$. Khi đó sẽ tồn tại số nguyên A để $A^3 = a$ và $x_{n+1} - x_n = A, \forall n \geq n_0$.

Ta có $x_{n_0+n} = An + x_{n_0} = A(n + n_0) + x_{n_0} - An_0, \forall n \geq n_0$ nên $x_n = An + B, \forall n \geq n_0$, ở đây $B = x_{n_0} - An_0$.

Vì vậy $(An + B)^3 = x_n^3 = P(n), \forall n \geq n_0$ nên $P(x) = (Ax + B)^3$, lúc này ta chọn $Q(x) = Ax + B$ là bổ đề được chứng minh.

Trở lại bài toán:

Với n_k đã chọn ở phía trên, ta có $n_k b + 1$ cũng là lập phương đúng.

Xét đa thức $P(x) = b(a^2 + a)^2 x^3 + 3b(a^2 + a)x^2 + 3bx + 1$, ta có $n_k b + 1$ là lập phương đúng nên $P(k)$ là lập phương đúng với mọi số nguyên dương k .

Áp dụng bổ đề thì sẽ tồn tại các số nguyên A, B để $P(x) = (Ax + B)^3$.

Vì vậy sau khi đồng nhất hệ số ta sẽ có được $B = 1, b = A$ nên $b = a^2 + a$.

Lúc này ta sẽ có được $4b + 1 = (2a + 1)^2$ là số chính phương, từ đó ta có điều phải chứng minh.

Câu 5 Cho số thực x lớn hơn 2 thỏa mãn với mọi số nguyên dương n thì x^n là số vô tỉ. Với mọi số tự nhiên t , xét các quân bài gồm các loại có giá trị bằng x^t . Hỏi có xảy ra trường hợp với mọi số nguyên dương m thì đều có thể chọn ra được một số quân bài có tổng giá trị bằng m và mỗi loại bài được chọn đều không quá 6 quân hay không?

Lời giải

Câu trả lời là có thể xảy ra trường hợp đấy.

Giả sử tồn tại số thực x thỏa mãn yêu cầu đề bài, khi đó ta có thể chọn ra một số quân bài có tổng bằng 7 và mỗi loại bài đều không quá 6 quân.

Trong các quân bài được chọn, không có quân nào có dạng x^t với $t \geq 3$, bởi vì nếu có thì $x^t > 8$, vô lý, ta cũng có nhận xét rằng không thể có 2 quân bài x^2 .

Rõ ràng phải có ít nhất một quân bài x^2 , vì nếu không thì x sẽ không phải là số vô tỉ.

Vì vậy $r + x^2 + kx = 7$, với $r, k \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$. Vì $x > 2$ nên ta có thể chọn x là số thực thỏa mãn $x^2 + x = 7$.

$$x = \frac{\sqrt{29} - 1}{2}$$

Lúc này, chọn $x = \frac{\sqrt{29} - 1}{2}$, ta sẽ chứng minh với mọi số nguyên dương m thì đều có thể chọn ra được một số quân bài có tổng giá trị bằng m và mỗi loại bài được chọn đều không quá 6 quân.

Thật vậy, ta sẽ chứng minh với mọi số nguyên dương m sẽ đều tồn tại các số thực $a_0, a_1, \dots, a_s$ để

$$P(t) = (t^2 + t - 7)(a_s t^s + \dots + a_0) + m$$
 có các hệ số đều thuộc $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$.

Nếu có điều này thì rõ ràng $P(x) = m$ và sẽ thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ta có các hệ số $t^0, t^1, \dots, t^{s+2}$ của $P(t)$ lần lượt là

$$m - 7a_0, a_0 - 7a_1, a_0 + a_1 - 7a_2, \dots, a_{s-2} + a_{s-1} - 7a_s, a_{s-1} + a_s, a_s$$

$$a_0 = \left\lfloor \frac{m}{7} \right\rfloor, a_1 = \left\lfloor \frac{a_0}{7} \right\rfloor, a_2 = \left\lfloor \frac{a_0 + a_1}{7} \right\rfloor, a_3 = \left\lfloor \frac{a_1 + a_2}{7} \right\rfloor, \dots$$

Lúc này ta chỉ cần chọn $a_0, a_1, \dots, a_s$ là ta sẽ có được các hệ số của $P(t)$ đều thuộc $\{0, 1, 2, \dots, 6\}$.

Từ đó ta có được khẳng định cho bài toán là có thể.

Cho dãy số $\{a_n\}$ xác định bởi $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$. Tìm điều kiện của a_0 để dãy $\{a_n\}$ có giới hạn hữu hạn. Trong trường hợp này, tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} (na_n)$.

Câu 2. (2 điểm)

Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $x[f(x+y) - f(x-y)] = 4yf(x) \forall x, y \in \mathbb{R}$

Câu 3. (2 điểm)

Cho tứ giác lồi $ABCD$ nội tiếp (O) . Giả sử tia AB cắt DC tại E , tia BC cắt AD tại F , đường thẳng AC cắt đường thẳng EF tại G . Giả sử đường tròn ngoại tiếp tam giác AEF cắt lại (O) tại K khác A .

- Chứng minh rằng KD đi qua trung điểm I của EF .
- Giả sử EF lần lượt cắt BD , đường tròn ngoại tiếp tam giác IAC tại $H; J (J \neq I)$.

Chứng minh rằng $OH = OJ$.

Câu 4. (2 điểm)

Chứng minh rằng không tồn tại các số nguyên dương $x, y > 2$ phân biệt sao cho :

$$x^{2021} + y! = y^{2021} + x!$$

Câu 5. (2 điểm)

Cho đa giác lồi n đỉnh. Ta nối tất cả các đường chéo. Biết rằng không có 3 đường chéo nào đồng quy bên trong của đa giác đã cho. Tính số miền đa giác được tạo thành bên trong của đa giác lồi đó (ta chỉ tính các đa giác mà bên trong nó không có điểm nào thuộc đường chéo của đa giác ban đầu)

-Hết-

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1:

Ta có $2(a_{n+1} - a_n) = -a_n^2 \geq 0$, suy ra dãy $\{a_n\}$ đơn điệu giảm. Giả sử $\{a_n\}$ có giới hạn hữu hạn là A , từ $2a_{n+1} - 2a_n + a_n^2 = 0$ ta có $2A - 2A + A^2 = 0$ hay $A = 0$.

Nếu $a_0 < 0$ thì $\{a_n\}$ không thể có giới hạn bằng 0 do $\{a_n\}$ đơn điệu giảm.

Nếu $a_0 > 2$ thì $a_1 < 0$ do đó $\{a_n\}$ không thể có giới hạn bằng 0 do $\{a_n\}$ đơn điệu giảm.

Nếu $0 \leq a_0 \leq 2$ thì $0 \leq a_n \leq 2, \forall n$, do đó $\{a_n\}$ có giới hạn bằng 0.

Tiếp theo chúng ta tính $\lim_{n \rightarrow +\infty} (na_n)$.

Nếu $a_0 = 0$ hoặc $a_0 = 2$ thì $\lim_{n \rightarrow +\infty} (na_n) = 0$.

Nếu $0 < a_0 < 2$ ta có

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{2}{2a_{n+1} - a_n^2} = \frac{1}{2 - a_n} + \frac{1}{a_n}$$

Suy ra

$$\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_0} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2 - a_i} \text{ theo Định lý trung bình công Stolz-Cesàro, ta có}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2 - a_i} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2 - a_{n-1}} = \frac{1}{2}. \text{ Vậy từ đẳng thức trước đó, ta có ngay } \lim_{n \rightarrow +\infty} (na_n) = 2.$$

Câu 2:

Cho $a = f(0)$. Thay $x = y$ vào (*) ta có

$$f(2x) = a + 4f(x) \text{ với mọi } x \neq 0.$$

Thay x, y bởi $2x, 2y$ vào (*) và dùng tính chất bên trên (ta chọn x, y sao cho $x+y, x-y, x \neq 0$), ta có

$$2x[4f(x+y) - 4f(x-y)] = 8y[a + 4f(x)], \text{ hay}$$

$$f(x+y) - f(x-y) = \frac{ay}{x} + \frac{4y}{x} f(x). \quad (1)$$

Kết hợp (2) và (*), ta có $a = 0$ hay $f(0) = 0$; từ đó $f(2x) = 4f(x)$ với mọi x .

Thay $y = -x$ ở (*) ta có

$$f(-2x) = 4f(x) = f(2x) \text{ với mọi } x \neq 0. \text{ Do } f(0) = 0, \text{ ta suy ra } f \text{ là hàm chẵn.}$$

Thay x bởi $-x$ ở (1) ta có:

$$x[f(-x-y) - f(y-x)] = 4yf(-x), \text{ hay}$$

$x[f(y+x) - f(y-x)] = 4yf(x)$. Điều này dẫn đến

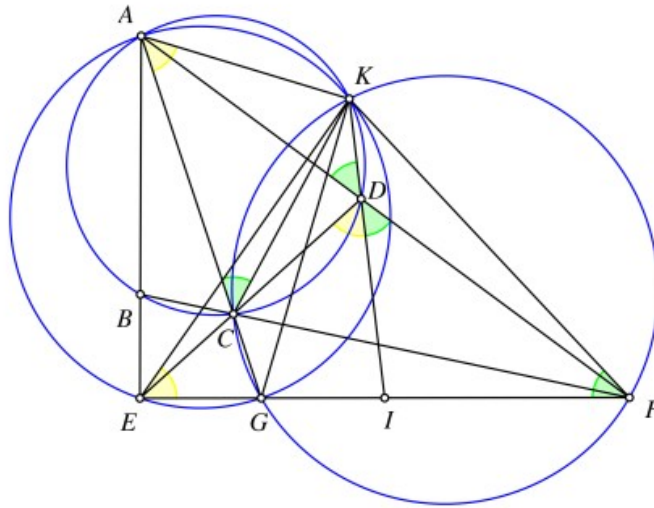
$$xy[f(y+x) - f(y-x)] = 4y^2f(x).$$

Từ (*) ta có $y[f(y+x) - f(y-x)] = 4xf(y)$. Kết hợp với phương trình bên trên ta có

$$x^2f(y) = y^2f(x) \text{ với mọi } x, y. \text{ Điều này dẫn đến } f(x) = cx^2$$

Câu 3:

a)



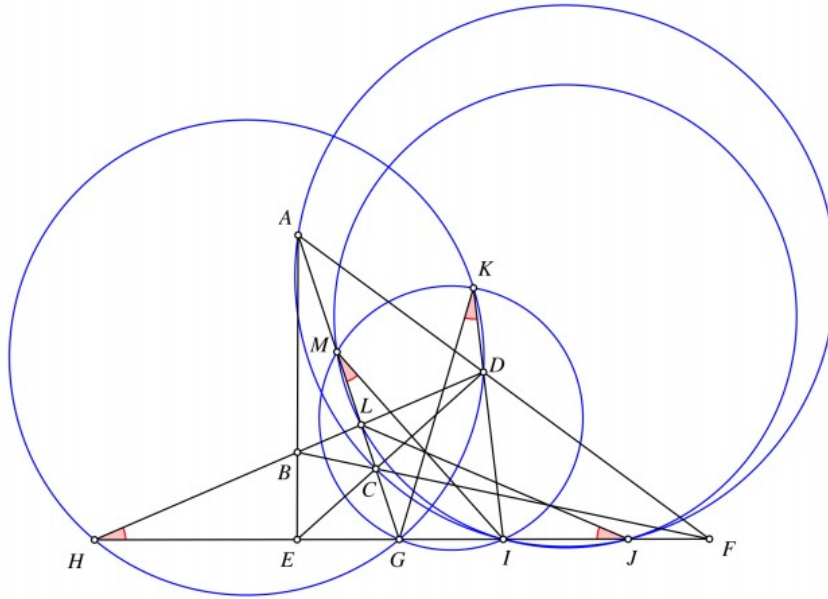
Giả sử $KD \cap EF$ tại I , ta chứng minh I là trung điểm EF

+) $\angle IEK = \angle GAK (K \in (AEG)) = \angle IDE (K \in (O))$ nên $\triangle IEK \sim \triangle IDE$

Dẫn tới $IE^2 = ID.IK$

+) Ta có K là điểm Miquel của tứ giác toàn phần $EBCGAF$ do K thuộc $(ABC), (AEG)$ nên $K \in (FCG)$. Từ đó, ta được $\angle IFK = \angle ACK = \angle ADK (K \in (O))$
 $= \angle IDF$ nên $\triangle IFK \sim \triangle IDF$, dẫn tới $IF^2 = ID.IK = IE^2$ hay $IE = IF$

b)



Gọi L là giao điểm của $AC; BD$. theo định lý Brocard, $OL \perp EF \equiv HJ$ nên yêu cầu bài toán tương đương chứng minh $LH = LJ$. Gọi M là trung điểm AC . Do $(AC, LG) = -1$ nên $\overline{GM} \cdot \overline{GL} = \overline{GA} \cdot \overline{GC} = P_{G(A, AC)} = \overline{GI} \cdot \overline{GJ}$ nên tứ giác $MLIJ$ nội tiếp. Suy ra $\angle LJI = \angle GMI$

- Do K là giao điểm của $(GAE), (GCF)$ nên tồn tại phép vị tự quay S tâm K sao cho $S: A \rightarrow E, C \rightarrow F$ mà $M; I$ là trung điểm $AC; EF$ nên $S: M \rightarrow I$ dẫn tới $K \in (GMI)$. Suy ra $\angle GMI = \angle GKD$.

- Do $(HG, EF) = -1$ nên $\overline{IH} \cdot \overline{IG} = IE^2 = \overline{ID} \cdot \overline{IK}$ nên tứ giác $KDGH$ nội tiếp. Suy ra $\angle LHI = \angle GKD = \angle GMI = \angle LJI$ hay $\square LHI$ cân tại L

Câu 4:

Ta sẽ chứng minh : "với mỗi số nguyên dương $n \geq 2$, nếu $n \neq 2^m - 1$ thì hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$ được xác định bởi $f(x) = x! - x^n$ là đơn ánh".

a) Trước hết, ta chứng minh $f(x)$ là hàm tăng với $x \geq 2n$.

Ta có

$$(x!)^2 = \prod_{i=1}^x i(x+1-i) \geq x^x \geq x^{2n}.$$

Suy ra $x! \geq x^n$ hay $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{N}^*, x \geq 2n$.

Hơn nữa

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \leq e. \text{ Khi đó với } x \geq 2n \text{ ta có}$$

$$f(x+1) = (x+1)! - (x+1)^n = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n (x! - x^n) + \left(x+1 - \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n\right) x! \geq f(x) + (x+1-e)x! > f(x).$$

Do đó $f(x)$ là hàm tăng với mọi $x \geq 2n$.

b) Bây giờ ta sẽ chứng minh f là đơn ánh.

Giả sử tồn tại hai số nguyên dương $x < y$ sao cho $f(x) = f(y)$. Dễ thấy $x < 2n$. Gọi p là một ước nguyên tố của x . Khi đó

$$p \mid x! - x^n = y! - y^n = x!(x+1)\dots(y-1)y - y^n. \text{ Suy ra } p \mid y.$$

Mặt khác, ta có

$$y! - x! = x!((x+1)\dots(y-1)y - 1). \text{ Suy ra}$$

$$v_p(x!) = v_p(y! - x!) = v_p(y^n - x^n) \geq n.$$

Hơn thế nữa

$$v_p(x!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{x}{p^i} \right\rfloor \leq \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{x}{p^i} = \frac{x}{p-1} < \frac{2n}{p-1}.$$

Từ (1) và (2) suy ra $(p-1)n \leq (p-1)v_p(x!) < 2n$. Điều này dẫn đến $p=2$ hay x chỉ nhận 2 làm ước nguyên tố tức là $x=2^m$ với mọi số nguyên $m \geq 2$.

Khi đó:

$$v_2(y^n - x^n) = v_2(x!) = \sum_{i=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{2^m}{2^i} \right\rfloor = 2^m - 1.$$

$$\text{Đặt } y = 2^k z \left(z \in \mathbb{N}^*, \gcd(z, 2) = 1 \right).$$

Xét các trường hợp sau đây:

- Nếu $k \neq n$ thì

$$v_2(y^n - x^n) = v_2(2^{kn} z^n - 2^{mn}) = n \cdot \min\{k, m\}. \text{ Suy ra } n \mid 2^m - 1. \text{ Do } 2^m = x < 2n \text{ nên } n = 2^m - 1 \text{ (vô lý).}$$

- Nếu $k = n$ thì

$v_2(y^n - x^n) = v_2(2^{mn}(z^n - 1)) = mn + v_2(z^n - 1) \geq mn$. Do $2^m = x < 2n$ nên $n > 2^{m-1}$. Vì thế

$2^m - 1 = v_2(y^n - x^n) \geq mn > 2 \cdot 2^{m-1} = 2^m$ (vô lý). Vậy f là đơn ánh với mọi $x \geq 2$.

Câu 5:

Gọi $a_3; a_4; \dots; a_m$ lần lượt là số miền tam giác; tứ giác; ngũ giác; ...; m- giác được tạo thành.

Ta cần tính $S = a_1 + a_2 + \dots + a_m$

+) Trước hết; ta đếm tổng tất cả các đỉnh của các miền đa giác.

Ta thấy ngay tổng này bằng $A = 3a_3 + 4a_4 + \dots + m.a_m$.

Hơn nữa; nếu đếm như vậy thì mỗi giao điểm của 2 đường chéo sẽ được tính 4 lần (do giao điểm đó thuộc 4 miền). Mỗi đỉnh của đa giác ban đầu sẽ được đếm $n-2$ lần (do thuộc $n-2$ miền)

Như vậy, $A = 3a_3 + 4a_4 + \dots + m.a_m = 4.C_n^4 + n(n-2)$ (1)

+) Tiếp theo, ta đếm tổng tất cả các góc trong các miền của đa giác.

Ta có tổng này bằng $B = 180^0.a_3 + 180^0.2.a_4 + 180^0.3.a_5 + \dots + 180^0.(m-2)a_m$

Mặt khác, tổng các góc trên chính là tổng các góc của đa giác ban đầu ($180^0.(n-2)$) cộng với 360^0 nhân tổng các giao điểm của các đường chéo.

Như vậy, $B = 180^0.a_3 + 180^0.2.a_4 + 180^0.3.a_5 + \dots + 180^0.(m-2)a_m = 180^0(n-2) + 360^0.C_n^4$

Suy ra $a_3 + 2a_4 + \dots + (m-2)a_m = 2.C_n^4 + (n-2)$ (2)

Từ (1); (2) suy ra $S = 1 + C_n^4 + \frac{1}{2}n(n-3)$.

Bài 1 (5,0 điểm)

Cho $0 < a < \frac{1}{2}$ và hàm số $f(x) = ax + \ln(x+2)$.

a) Chứng minh dãy số $(x_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi

$$x_1 > 0, x_{n+1} = f(x_n), n = 1, 2, \dots$$

có giới hạn hữu hạn.

b) Tồn tại hay không các số thực $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa $\sum_{i=1}^{100} a_i = 0$ đồng thời dãy số $(y_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi

$$y_n = \sqrt{n} \left(a_1 \frac{f(n+1)}{n+2} + a_2 \frac{f(n+2)}{n+3} + \dots + a_{100} \frac{f(n+100)}{n+101} \right), n = 1, 2, \dots$$

có giới hạn là số khác 0?

Bài 2 (4,0 điểm)

Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x)f(y+x) = xf(f(y)) + f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Bài 3 (5,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn không cân, nội tiếp đường tròn (O) và có đường cao AD . Gọi E là điểm di động trên cung nhỏ AB (E khác A, B). Đường thẳng qua E và song song với BC và cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai là F . Đường tròn đường kính AB cắt AE, AF lần lượt tại M, N . Đường tròn đường kính AC cắt AE, AF lần lượt tại P, Q . Chứng minh tiếp tuyến chung ngoài của các đường tròn ngoại tiếp các tam giác DMQ và DNP luôn đi qua một điểm cố định.

Bài 4 (3,0 điểm)

Cho dãy số $(u_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi

$$u_1 = 0, u_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+2} u_n - 3(n+1), \forall n \geq 1$$

a) Chứng minh u_n là số nguyên với mọi số nguyên dương n .

b) Chứng minh tồn tại vô hạn số nguyên tố p sao cho $u_{p-1} - p$ chia hết cho p^3 .

Bài 5 (3,0 điểm)

Cho số nguyên tố $p > 3$, có bao nhiêu bộ (a, b, c) với $a, b, c \in \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ thỏa mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 \equiv ab + bc + ca \pmod{p} \quad ?$$

--Hết--

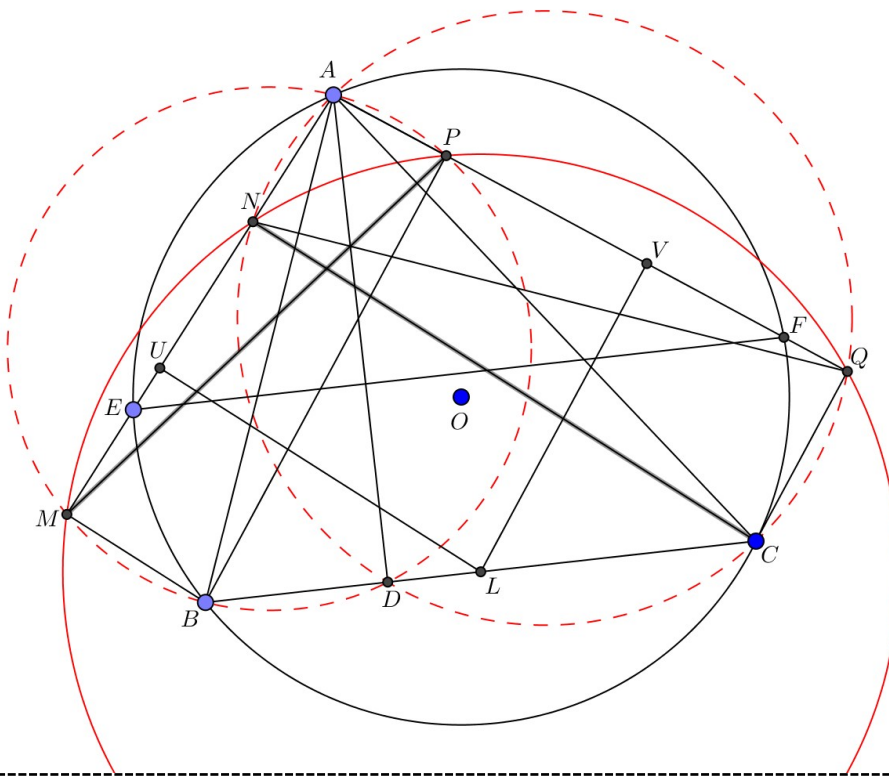
HƯỚNG DẪN ĐÁP ÁN

Bài	Ý	Nội dung	Điểm
1	a	Xét $g(x) = x - f(x)$ với $x > 0$. Ta có $g'(x) = (1-a) - \frac{1}{x+2} > \frac{1}{2} - a > 0$ với mọi $x > 0$ Do $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\ln 2 < 0$ và g liên tục trên $(0; +\infty)$ nên phương trình $g(x) = 0$ có nghiệm $x_0 > 0$ duy nhất.	1,0
		Nhận xét $x_n > 0$ với mọi n và $ f'(x) = a + \frac{1}{x+2} < a + \frac{1}{2}$ với mọi $x > 0$ nên với mọi $n > 1$, áp dụng định lý Lagrange cho hàm số f . Ta có $ x_n - x_0 = f(x_{n-1}) - f(x_0) \leq \left(a + \frac{1}{2}\right) x_{n-1} - x_0 \leq \dots \leq \left(a + \frac{1}{2}\right)^{n-1} x_1 - x_0 $ Vì $0 < a + \frac{1}{2} < 1$ nên $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(a + \frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$, do đó $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$.	1,0
	b	Bổ đề: Cho dãy số $(t_n)_{n \geq 1}$ xác định bởi $t_n = \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sqrt{j}}$, $n \geq 1$. Khi đó $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$. Chứng minh. Xét hàm số $h(x) = \sqrt{x}$ với $x > 0$ Khi đó, $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ liên tục trên $(0; +\infty)$ nên với mọi số nguyên dương j , áp dụng định lý Lagrange trên các đoạn $[j; j+1]$ thì tồn tại $c \in (j; j+1)$ để $h(j+1) - h(j) = h'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} < \frac{1}{2\sqrt{j}}$ Đánh giá trên đúng với mọi $j = 1, 2, \dots, n$ nên $h(n+1) - h(1) = (h(n+1) - h(n)) + (h(n) - h(n-1)) + \dots + (h(2) - h(1)) < \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$ hay $t_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$, từ đó bổ đề được chứng minh.	1,0
		Trở lại bài toán, giả sử $y_n = \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^{100} a_i \frac{f(n+i)}{n+i+1} \right)$ có giới hạn bằng $l > 0$ Đặt $z_n = \sum_{i=1}^{100} a_i \frac{f(n+i)}{n+i+1}$, $n = 1, 2, \dots$	1,0

	<p>Tồn tại số nguyên dương N sao cho $y_n > \frac{l}{2}, \forall n > N$ hay $z_n > \frac{l}{2\sqrt{n}}, \forall n > N$. Vậy với mọi $n > N$ thì $\sum_{j=N+1}^n z_j > \frac{l}{2} \sum_{j=N+1}^n \frac{1}{\sqrt{j}}$.</p> <p>$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n z_j = +\infty$</p> <p>Theo bổ đề, suy ra</p>	
	<p>Mặt khác, đặt $A = \max_{i=1,100} a_i$ đồng thời chú ý rằng</p> $\left \frac{f(x)}{x+1} \right = a \frac{x}{x+1} + \frac{\ln(x+2)}{x+1} < a+1, \forall x > 0 \quad \text{và} \quad \sum_{i=1}^{100} a_i = 0,$ <p>Với mọi $n > N+100$ thì</p> $\left \sum_{j=N+1}^n z_j \right = \left \sum_{j=N+1}^n \sum_{i=1}^{100} a_i \frac{f(j+i)}{j+i+1} \right = \left \sum_{i=1}^{100} a_i \frac{f(N+i+1)}{N+i+2} + \dots + \sum_{i=1}^{100} a_i \frac{f(n+i+1)}{n+i+1} \right $ $= \left a_1 \frac{f(N+2)}{N+3} + (a_1 + a_2) \frac{f(N+3)}{N+4} + \dots + (a_1 + \dots + a_{99}) \frac{f(N+100)}{N+101} \right.$ $\left. + (a_2 + \dots + a_{100}) \frac{f(n+2)}{n+3} + \dots + a_{100} \frac{f(n+100)}{n+101} \right $ $< 2(A + 2A + \dots + 99A)(a+1) = 99.100A(a+1)$ <p>Điều này dẫn đến mâu thuẫn.</p> <p>Trong trường hợp $\lim y_n = l' < 0$ thì ta cũng tìm được mâu thuẫn bằng cách thay f bởi $-f$. Vậy không tồn tại các số thực $a_1, a_2, \dots, a_{100}$ thỏa yêu cầu bài toán.</p>	1,0
2	<p>Ký hiệu $f(x)f(y+x) = xf(f(y)) + f^2(x), \forall x, y \in \mathbb{Q} \quad (1)$</p> <p>TH1. f là hàm hằng thì $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$.</p> <p>TH2. f không phải hàm hằng</p> <p>Thay $x = 0$ được $f(0)f(y) = f^2(0)$, vì f không phải hàm hằng nên $f(0) = 0$.</p> <p>Giả sử tồn tại u để $f(u) = 0$ thì thay $x = u$ vào (1) ta được $uf(f(y)) = 0$</p> <p>Nếu $u \neq 0$ thì $f(f(y)) = 0$ với mọi y. Khi đó $f(x)f(y+x) = f^2(x)$</p> <p>Cho $y = -x$ vào phương trình trên suy ra $f(x) = 0, \forall x$: mâu thuẫn</p> <p>Vậy $u = 0$ hay $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.</p>	1,0
	<p>+Chứng minh f đơn ánh. Giả sử tồn tại các số thực a, b sao cho $f(a) = f(b)$</p> <p>Nếu $f(a) = f(b) = 0$ thì $a = b = 0$.</p> <p>Nếu $f(a) = f(b) \neq 0$ thì lần lượt thay $x = a, y = b$ và $x = b, y = a$ suy ra</p> $af(f(b)) + f^2(a) = bf(f(a)) + f^2(b)$ <p>Vậy $a = b$ hay f đơn ánh.</p>	1,0

	<p>+Chứng minh f lẻ. Thay $y = -x$ suy ra $f^2(x) = -xf(f(-x))$ hay $f^2(-x) = xf(f(x))$</p> <p>Thay $y = x$ thì $f(x)f(2x) = xf(f(x)) + f^2(x) = f^2(-x) + f^2(x), \forall x$ (2)</p> <p>Do đó $f(x).f(2x)$ là hàm chẵn. Thay $y = -2x$ ta được $f(x)f(-x) = xf(f(-2x)) + f^2(x)$</p> <p>Thay x bởi $2x$ và $y = -2x$ được $0 = 2xf(f(-2x)) + f^2(2x)$</p> <p>Hay $f^2(2x) = -2xf(f(-2x)) = 2f(x)(f(x) - f(-x))$</p> <p>Suy ra $f^2(2x)f^2(x) = 2f^3(x)(f(x) - f(-x))$</p> <p>Vậy $f^2(2x)f^2(x) = 2f^3(-x)(f(-x) - f(x))$, suy ra f lẻ</p>	1,0
	<p>Từ (2), suy ra $f(f(x)) = \frac{f^2(x)}{x}, \forall x \neq 0$, nên từ (1) ta có</p> $f(x+y) = x \cdot \frac{f^2(y)}{yf(x)} + f(x), \forall x, y \neq 0$ <p>Hoán đổi vai trò x, y:</p> $x \cdot \frac{f^2(y)}{yf(x)} + f(x) = y \cdot \frac{f^2(x)}{xf(y)} + f(y)$ $\Leftrightarrow \left(\frac{f(x)}{x} - \frac{f(y)}{y} \right) \left(\frac{f^2(y)}{y} + \frac{f^2(x)}{x} \right) = 0$ <p>Vì vậy với $x, y > 0$ thì $\frac{f^2(x)}{x} + \frac{f^2(y)}{y} > 0$ nên</p> $\frac{f(x)}{x} = \frac{f(y)}{y} \Rightarrow f(x) = f(1)x, \forall x > 0$ <p>Vì f lẻ nên $f(x) = f(1)x, \forall x$. KL $f(x) = ax, \forall x (a \in \mathbb{R})$.</p>	1,0

3



Gọi L, U, V theo thứ tự là trung điểm BC, MN, PQ .

1,0

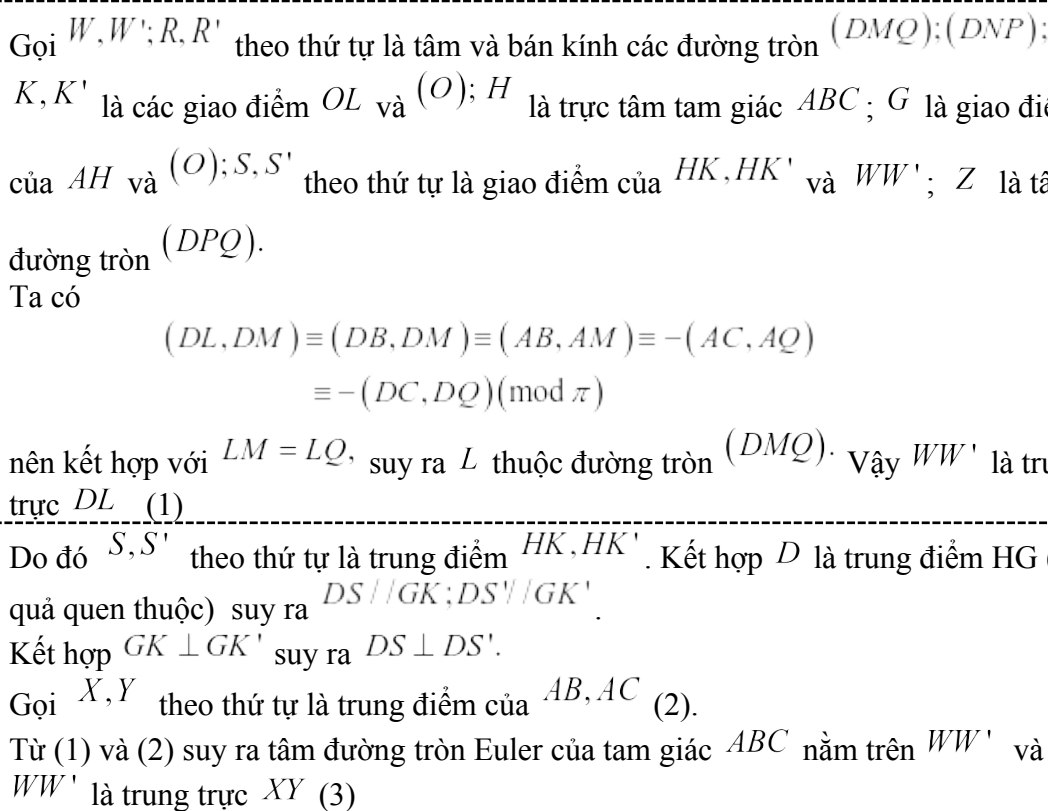
Ta có các bộ điểm (A, B, M, P) , (A, C, N, Q) cùng thuộc một đường tròn và các tam giác ABM , ACQ đồng dạng ngược hướng. Do đó

$$\begin{aligned} (PM, PQ) &\equiv (PM, PA) \equiv (BM, BA) \equiv (CA, CQ) \\ &\equiv (NA, NQ) \equiv (NM, NQ) \pmod{\pi}. \end{aligned}$$

Vậy các điểm M, N, P, Q thuộc một đường tròn.

Vì $BM \parallel CN$ và $\frac{\overline{LB}}{\overline{LC}} = -1 = \frac{\overline{UM}}{\overline{UN}}$ nên theo định lý Thales đảo $LU \parallel BM \parallel CN$. Do đó LU vuông góc MN . Vậy LU là trung trực MN .

Tương tự LV là trung trực của PQ . Vậy L là tâm đường tròn qua các điểm M, N, P, Q .



Do đó S, S' theo thứ tự là trung điểm HK, HK' . Kết hợp D là trung điểm HG (kết quả quen thuộc) suy ra $DS \parallel GK; DS' \parallel GK'$.
 Kết hợp $GK \perp GK'$ suy ra $DS \perp DS'$.
 Gọi X, Y theo thứ tự là trung điểm của AB, AC (2).
 Từ (1) và (2) suy ra tâm đường tròn Euler của tam giác ABC nằm trên WW' và WW' là trung trực XY (3)

1,0

	<p>Ta có DP là dây cung chung của các đường tròn (X) và (Z); DQ là dây cung chung của các đường tròn (Y) và (Z) nên $DP \perp ZX$, $DQ \perp ZY$. Suy ra</p> $(ZX, ZY) \equiv (DP, DQ) \equiv (DP, AP) + (AP, DQ) \\ \equiv (DB, AB) + (AC, DC) \equiv (AC, AB) \equiv (LX, LY) \pmod{\pi}$ <p>Vậy Z thuộc đường tròn $(DLXYSS')$ (đường tròn Euler của tam giác ABC) (4)</p>	1,0
	<p>Từ (3), (4) suy ra $(SS'WW') = Z(SS'WW') = Z(SS'XY) = -1$</p> <p>Kết hợp $DS \perp DS'$ suy ra DS, DS' là phân giác của góc tạo bởi DW, DW'</p> <p>Theo tính chất đường phân giác</p> $\frac{\overline{SW}}{\overline{SW'}} = -\frac{DW}{DW'} = -\frac{R}{R'}; \frac{\overline{S'W}}{\overline{S'W'}} = \frac{DW}{DW'} = \frac{R}{R'}$ <p>Suy ra S, S' theo thứ tự là tâm vị tự trong và tâm vị tự ngoài của các đường tròn $(DMQ), (DNP)$ nên cố định. Nói riêng tiếp tuyến chung ngoài của các đường tròn (DMQ) và (DNP) luôn đi qua điểm cố định.</p>	1,0
4	<p>a</p> <p>Đặt $u_n = (n+2) - v_n, \forall n \geq 1$ thì</p> $(n+3) - v_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+2} (n+2 - v_n) - 3(n+1) \Rightarrow v_{n+1} = \frac{2(2n+3)}{n+2} v_n$ <p>Khi đó $v_1 = 3$ và chứng minh quy nạp được $v_n = C_{2n+1}^n$ với mọi n.</p> <p>Vậy $u_n = (n+2) - C_{2n+1}^n$ nên u_n là số nguyên với mọi số nguyên dương n.</p>	1,0
	<p>b</p> <p>Nhận xét. Với mọi số nguyên tố $p \geq 5$ thì $C_{2p-1}^p \equiv 1 \pmod{p^3}$</p> $C_{2p-1}^p = \frac{(p+1)(p+2)\dots(2p-1)}{(p-1)!}$ <p>Chứng minh</p> <p>Ta chứng minh $(p+1)(p+2)\dots(2p-1) - (p-1)! \equiv p^3$</p> $2(p-1)! \left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \right) = (p-1)! \left(\sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{i} + \frac{1}{p-i} \right) \right) = p(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{(p-i)i} \right)$ <p>Ta có</p> <p>Hệ $\{1; 2; \dots; p-1\}$ thu gọn theo modunlo p nên</p> $(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{(p-i)i} \right) \equiv -(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \equiv -(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} i^2 \\ \equiv -(p-1)! \frac{p(p-1)(2p-1)}{6} \pmod{p}$ $\Rightarrow (p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} \left(\frac{1}{(p-i)i} \right) \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow (p-1)! \left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \right) \equiv 0 \pmod{p^2}$ <p>Ta cũng có</p>	1,0

	$2(p-1)! \left(\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \right) = (p-1)! \left(\left(\sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i} \right)^2 - \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \right)$ $\equiv -(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{i^2} \equiv -(p-1)! \sum_{i=1}^{p-1} i^2$ $\equiv -(p-1)! \frac{(p-1)(2p-1)p}{6} \equiv 0 \pmod{p}$ <p>Nên Do đó,</p> $(p+1)(p+2)\dots(2p-1) - (p-1)!$ $= Ap^3 + p^2(p-1)! \left(\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{ij} \right) + p(p-1)! \left(\sum_{1 \leq i < j \leq p-1} \frac{1}{i} \right)$ $\equiv 0 \pmod{p^3}$ <p>Vậy nhận xét được chứng minh</p> <p>Do đó với mọi số nguyên tố $p \geq 5$ thì $u_{p-1} - p = 1 - C_{2p-1}^{p-1} \equiv 0 \pmod{p^3}$.</p>	
5	<p>Biến đổi $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \equiv 0 \pmod{p}$</p> <p>Đặt $a-b = x$ và $b-c = y$ thì $x^2 + y^2 + xy \equiv 0 \pmod{p}$ (1),</p> <p>TH1. Nếu $p \equiv 2 \pmod{3}$ thì từ (1), ta có $(2x+y)^2 \equiv -3y^2 \pmod{p}$</p> <p>Nếu $(y, p) = 1$ thì $(-3)^{\frac{p-1}{2}} \cdot y^{p-1} \equiv (2x+y)^{p-1} \pmod{p} \Rightarrow (-3)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1 \pmod{p}$</p> <p>Vậy $\left(\frac{-3}{p} \right) = 1 \Rightarrow p \equiv 1 \pmod{6}$, mâu thuẫn vì $p \equiv 2 \pmod{3}$</p> <p>Do vậy $y \equiv x \equiv 0 \pmod{p}$. Khi đó $a \equiv b \equiv c \pmod{p}$, tức có P bộ thỏa.</p>	1,0
	<p>TH2. Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$ thì -3 là thặng dư bình phương modunlo P nên phương trình $z^2 + z + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ có hai nghiệm z_0 và z_0^{-1} theo modunlo P.</p> <p>Khi đó $(x - z_0 y)(x - z_0^{-1} y) \equiv 0 \pmod{p}$, suy ra $x \equiv z_0 y \pmod{p}$ hoặc $x \equiv z_0^{-1} y \pmod{p}$</p> <p>Nếu $x \equiv z_0 y \pmod{p}$ thì $a \equiv (z_0 + 1)b - z_0 c \pmod{p}$, nên có P^2 bộ thỏa.</p> <p>Nếu $x \equiv z_0^{-1} y \pmod{p}$ thì $a \equiv (z_0^{-1} + 1)b - z_0^{-1} c \pmod{p}$, nên có P^2 bộ thỏa</p>	1,0
	<p>Giả sử tồn tại bộ (a, b, c) thỏa đồng thời $a \equiv (z_0 + 1)b - z_0 c \pmod{p}$ và $a \equiv (z_0^{-1} + 1)b - z_0^{-1} c \pmod{p}$ thì $(z_0 - z_0^{-1})(b - c) \equiv 0 \pmod{p}$</p> <p>Do $z_0^{-1} \equiv -1 - z_0 \pmod{p}$ nên $z_0^{-1} - z_0 \equiv -1 - 2z_0 \not\equiv 0 \pmod{p}$, do đó $b \equiv c \pmod{p}$, tức có P bộ như thế. Vậy trường hợp này có $2P^2 - P$ bộ thỏa.</p>	1,0

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n} + \frac{2022}{\sqrt[2023]{u_n}}, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Câu 1. Cho dãy số xác định bởi Tìm tất cả các giá trị α sao

cho dãy số $\left(\frac{u_n^\alpha}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn.

Câu 2. Tìm tất cả các hàm số liên tục $f, g, h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$f(x+y) + g(xy) = h(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 3. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp (O) , các đường cao $AA_1; BB_1; CC_1$ đồng quy tại H . Đường thẳng OA_1 cắt lại (OBC) tại A_2 , OB_1 cắt lại (OCA) tại B_2 , OC_1 cắt lại (OAB) tại C_2 . Chứng minh rằng $AA_2; BB_2; CC_2$ đồng quy.

Câu 4. Cho $X \subset \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

- Nếu $a, b \in X$ thì $a + b \in X$.
 - Với mọi $a \in \mathbb{R}, a > 1$ luôn tồn tại $b \in X$ sao cho b không chia hết cho a .
- Chứng minh rằng $\mathbb{R} \setminus X$ là tập có hữu hạn phần tử.

Câu 5. Xét bảng 7×7 ô vuông có bốn ô ở bốn góc bị xóa. Ta tô màu n ô trong bảng còn các ô còn lại không tô màu. Tìm số n nhỏ nhất sao cho với mọi cách tô màu thỏa mãn yêu cầu bài toán đều không tồn tại một hình chữ thập nào mà 5 ô của hình này đều không màu

Đáp Án

Câu	Đáp Án	Điểm
1	Chứng minh được $\lim u_n = +\infty$	0.5
	Xét với $\alpha = \frac{1}{2}$. Ta có	1.0

	$\sqrt{u_{n+1}-u_n} = \sqrt{u_n + \sqrt{u_n} + \frac{2022}{2023\sqrt{u_n}}} - \sqrt{u_n} = \frac{\sqrt{u_n} + \frac{2022}{2023\sqrt{u_n}}}{\sqrt{u_n + \sqrt{u_n} + \frac{2022}{2023\sqrt{u_n}}} + \sqrt{u_n}} \rightarrow \frac{1}{2}.$ <p>Suy ra $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^{\frac{1}{2}}}{n} = \frac{1}{2}.$</p>	
	Với $\alpha > \frac{1}{2}$, ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^\alpha}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^{\frac{1}{2}}}{n} \cdot u_n^{\alpha - \frac{1}{2}} = +\infty.$	1.0
	Với $\alpha < \frac{1}{2}$, ta có $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^\alpha}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n^{\frac{1}{2}}}{n} \cdot u_n^{\alpha - \frac{1}{2}} = 0.$	1.0
	Vậy, dãy số $\left(\frac{u_n^\alpha}{n}\right)$ có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi $\alpha \leq \frac{1}{2}.$	0.5
2	$f(x+y) + g(xy) = h(x) + h(y), \forall x, y \in \mathbb{Q}. (*)$	
	Từ (*) cho $y=0$ ta có $f(x) + g(0) = h(x) + h(0)$, suy ra $h(x+y) - h(x) - h(y) = p(xy)$ (1), trong đó $p(x) = -g(x) - g(0) + h(0).$	0.5
	Trong (1) thay y bởi $y+z$ ta có $h(x+y+z) = h(x) + h(y+z) + p(xy+xz)$ $= h(x) + h(y) + h(z) + p(yz) + p(xy+xz), (2)$ Trong (2) thay đổi vị trí x và z ta có $p(xy) + p(yz+xz) = p(yz) + p(xy+xz), \forall x, y, z \in \mathbb{Q}. (3)$	1.0
	Với $a, b, c > 0$ bất kỳ, chọn $x = \sqrt{\frac{ac}{b}}; y = \sqrt{\frac{ab}{c}}; z = \sqrt{\frac{bc}{a}}$ thế vào (3) ta có $p(a) + p(b+c) = p(b) + p(a+c)$, cho $a \rightarrow 0^+$ ta có $p(0) + p(b+c) = p(b) + p(c).$	1.0
	Với $a, c > 0; b < 0$ bất kỳ chọn $x = -\sqrt{\frac{ac}{b}}; y = \sqrt{\frac{ab}{c}}; z = \sqrt{\frac{bc}{a}}$ thế vào (3) ta có $p(a) + p(b+c) = p(b) + p(a+c)$, cho $b \rightarrow 0^+$ ta có $p(0) + p(a+c) = p(a) + p(c).$ Cho $a \rightarrow 0^-$ ta có $p(0) + p(b+c) = p(b) + b(c).$	
	Như vậy $p(a+b) = p(a) + p(b) - p(0), \forall a, b \neq 0$, kết hợp với P liên tục ta có $p(x) = ax + b.$	0.5
	Đặt $k(x) = h(x) - \frac{a}{2}x^2$, khi đó $k(x)$ liên tục trên $\mathbb{Q}$, kết hợp (1) ta có $k(x+y) = k(x) + k(y) + b, \forall x, y \in \mathbb{Q}.$, suy ra $k(x) = cx - b$. Do đó	1.0

	$h(x) = \frac{a}{2}x^2 + cx - b.$ <p>Thử lại ta có</p> $g(x) = -ax; h(x) = \frac{a}{2}x^2 + cx - b; f(x) = \frac{a}{2}x^2 + cx - b.$	
3		
	<p>Gọi S, S' lần lượt là giao điểm của AA_2, BB_2 với OH.</p> <p>Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác HOA_1 với các điểm A, A_2, S thẳng hàng ta có</p> $\frac{\overline{SO}}{\overline{SH}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_2O}} = 1 \quad \frac{\overline{SH}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_2O}} \quad (1)$	1.0
	<p>Vì tam giác ABC nhọn nên H nằm giữa A và A_1; A_1 nằm trong (OBC)</p> <p>nên nó nằm giữa A_2 và O. Do đó</p> $\frac{\overline{SH}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_2O}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_2O}} \quad (1)$	1.0
	<p>Mặt khác lại có $\frac{\overline{A_2A_1}}{\overline{A_2O}} = \frac{\overline{A_1A_2} \cdot \overline{OA_1}}{\overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2}} = \frac{\overline{A_1B} \cdot \overline{A_1C}}{\overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2}}$ (2)</p> <p>Lại có $\triangle OA_1B \sim \triangle OBA_2$ nên $\overline{OA_1} \cdot \overline{OA_2} = \overline{OB}^2 = R^2$ (3)</p> <p>Tam giác $ABA_1 \sim CHA_1$ nên $\overline{A_1B} \cdot \overline{A_1C} = \overline{A_1A} \cdot \overline{A_1H}$ (4)</p>	1.0
	<p>Từ (1), (2), (3), (4) ta có</p> $\frac{\overline{SH}}{\overline{SO}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{AA_1}} \cdot \frac{\overline{A_1B} \cdot \overline{A_1C}}{R^2} = \frac{\overline{AH} \cdot \overline{A_1H}}{R^2}$	1.0
4	<p>Từ 2 điều kiện trên ta suy ra tồn tại $x \neq 0, x \in X$. Khi đó $kx \in X, \forall k \in \mathbb{Z}^*$.</p>	0.5

	Nếu $x = 1$ thì $\mathbb{N} \setminus X \subset \{0\}$ là tập hữu hạn	0.5
	Nếu $x > 1$ thì $x = \prod_{i=1}^k p_i^{a_i}$, trong đó p_i là các số nguyên tố khác nhau. Từ điều kiện 2 suy ra tồn tại $x_i \in X$ không chia hết cho p_i . Đặt $y = \sum \left(\frac{x}{p_i^{a_i}} \cdot x_i \right)$	1.0
	Dễ thấy $y \in X$. Ta sẽ chứng minh mọi số nguyên $n > xy$ đều thuộc X . Thật vậy	1.0
	Vì $(x, y) = 1$ nên $\{n - x, n - 2x, \dots, n - yx\}$ là một hệ đầy đủ modul y . Do đó tồn tại $l \in \mathbb{N}^*$ sao cho $n - lx \equiv y$. Suy ra $n = lx + ky \in X$. Vậy $\mathbb{N} \setminus X$ là tập có hữu hạn phần tử.	1.0
5	+Gọi (i, j) là ô vuông nằm ở hàng i cột j . Để ý rằng một hình chữ thập được xác định một cách duy nhất bởi ô ở chính giữa. Ta ký hiệu C_{ij} là hình chữ thập có tâm là ô (i, j) trong đó $i, j \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Do đó tổng số hình chữ thập trong bảng là 25, chia các ô trong bảng thành bốn loại. Loại 1 : các ô thuộc đúng một hình chữ thập là các ô $(1, j), (i, 1), (7, j), (i, 7)$ với $(i, j) \in \{2, 3, 4, 5, 6\}$ Loại 2 : Các ô trong bảng thuộc đúng ba hình chữ thập gồm các ô $(2, 2), (2, 6), (6, 2), (6, 6)$ Loại 3 : Các ô trong bảng thuộc đúng bốn hình chữ thập gồm các ô $(2, i), (i, 2), (6, i), (i, 6)$ với $i \in \{3, 4, 5\}$ Loại 4 : Các ô trong bảng thuộc đúng năm hình chữ thập bao gồm các ô (i, j) $3 \leq i, j \leq 5$	1.0
	Nếu không thấy được 5 ô không màu của hình C_{22} thì trong các ô $(2, 2), (2, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 2)$ có ít nhất một ô được tô màu. Nếu hình C_{62} được tô màu thì trong các ô $(6, 2), (6, 1), (6, 3), (7, 2), (5, 2)$ có ít nhất 1 ô được tô màu Nếu hình C_{26} được tô màu thì trong các ô $(2, 6), (2, 5), (2, 7), (1, 6), (3, 6)$ có ít nhất 1 ô được tô màu. Nếu hình C_{66} được tô màu thì trong các ô $(6, 6), (6, 5), (6, 7), (5, 6), (7, 6)$ có ít nhất một ô được tô màu	1.0
	Theo cách phân loại trên các ô kể trên thuộc không quá 4 hình chữ thập. Gọi x là số ô được tô màu trong loại 4, số hình chữ thập được tô màu $\leq 5x + 4.4$	1.0
	Nếu với mọi hình chữ thập đều được tô màu thì $5x + 16 \geq 25$ (1) $\Leftrightarrow x \geq 2$ Nếu các ô được tô màu là 6 tương ứng $x = 2$ và do vậy theo (1) có không quá 1 hình chữ thập chứa nhiều hơn 1 ô được tô màu. Nếu có 2 ô có 1 cạnh chung và có 1 đỉnh	1.0

<p>chung được tô màu thì sẽ có 2 hình chữ thập mà mỗi hình có ít nhất 2 ô được tô màu đỏ được.</p> <p>Suy ra (4,4), (3,3), (3,5), (5,3), (5,5) không màu.</p> <p>Không gian tổng quát : giả sử (4,3), (4,5) được tô màu $\Rightarrow C_{34}, C_{54}$ không màu. Vậy $n = 6$ không thỏa mãn $n \geq 7$</p> <p>Với $n = 7$ cách tô trên thỏa mãn. Vậy min $n = 7$</p>	
--	--

Câu 1 (4 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \frac{2023}{2022}$, $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + \frac{n^2}{u_n}$ với $n \geq 1$.

a) Tính $\lfloor \sqrt{u_{2023}} \rfloor$.

b) Chứng minh rằng dãy $a_n = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \dots + \frac{n}{u_n}$ không có giới hạn hữu hạn.

Câu 2 (4 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có M là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại B, C của O cắt nhau tại T. (BOC) lần lượt cắt lại AC, AB tại điểm thứ hai là E, F. Gọi S là hình chiếu của O trên AT, H là trực tâm của tam giác BOC.

- Kẻ đường cao AD của tam giác ABC, gọi L là điểm Lemoine của tam giác ABC. Chứng minh rằng khi A di động trên (O) sao cho ABC là tam giác nhọn, DL luôn đi qua một điểm cố định.
- Chứng minh rằng hai đường tròn (AEF) và (HST) trực giao.

Câu 3 (4 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn:

$$f(xy + xf(y)) = xy + yf(x), \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Câu 4 (4 điểm). Cho a là số nguyên dương thỏa mãn $\gcd(a+1, 2n+1) = 1$ với mọi số nguyên n.

- Chứng minh rằng $\gcd(a-2, 2n+1) = 1$ với mọi số nguyên n.
- Tìm tất cả số nguyên a thỏa mãn.

Câu 5 (4 điểm). Cho một bảng kích thước 2024×2024 được điền các số tự nhiên từ 1 đến 2024 theo quy tắc sau: Hàng thứ nhất ta điền các số từ 1 đến 2024 từ trái qua phải, ở hàng thứ hai ta đánh các số từ 2025 đến 4048 từ phải qua trái, các hàng tiếp theo được đánh theo kiểu zích zắc tương tự như trên. Hãy tìm các phủ kín bảng trên bởi 1012×2024 quân cờ Domino 1x2 sao cho tổng của tích các số trên mỗi quân cờ Domino lớn nhất.

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI

Câu 1 (4 điểm). Cho dãy số (u_n) thỏa mãn $u_1 = \frac{2023}{2022}$, $u_{n+1} = u_n + 2\sqrt{u_n} + \frac{n^2}{u_n}$ với $n \geq 1$.

a) Tính $\lfloor \sqrt{u_{2023}} \rfloor$.

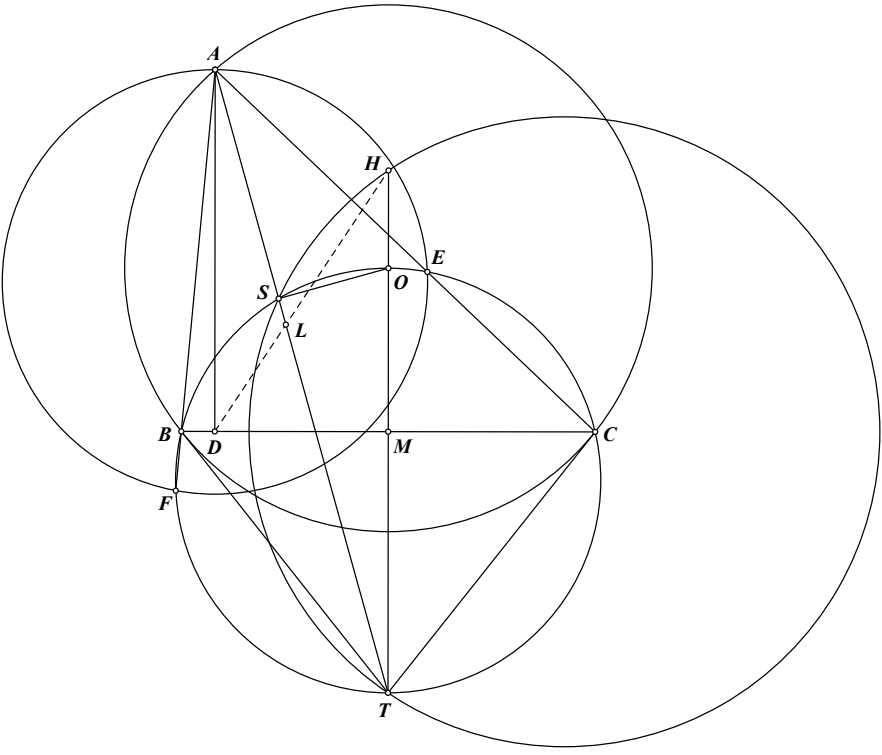
b) Chứng minh rằng dãy $a_n = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \dots + \frac{n}{u_n}$ không có giới hạn hữu hạn.

Nội dung	Điểm
a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp: $n^2 < u_n < (n+1)^2$. Thật vậy: Xét $n=1$ đúng, giả sử khẳng định đúng tới $n=k \geq 1$, ta sẽ chứng minh khẳng định vẫn đúng với $n=k+1$	0,5
Ta có: $u_{k+1} = u_k + 2\sqrt{u_k} + \frac{k^2}{u_k} > k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$ $u_{k+1} = u_k + 2\sqrt{u_k} + \frac{k^2}{u_k} < (k+1)^2 + 2(k+1) + 1 = (k+2)^2$	0,5
Vậy theo nguyên lý quy nạp toán học, ta có $n^2 < u_n < (n+1)^2$.	0,5
$\rightarrow \lfloor \sqrt{u_{2023}} \rfloor = 2023$.	0,5
b) Rõ ràng (a_n) là dãy tăng, hơn nữa: $a_n = \frac{1}{u_1} + \frac{2}{u_2} + \dots + \frac{n}{u_n} > \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2}$	0,5
Ta sẽ chứng minh: $\lim \left(\frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2} \right) = +\infty$. Thật vậy: Gọi (s_n) là dãy thỏa mãn: $s_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{(k+1)^2}$. Xét dãy con (s_{2^k-1}) , ta có: $\frac{2^k}{(2^k+1)^2} + \frac{2^k+1}{(2^k+1)^2} + \dots + \frac{2^{k+1}-1}{(2^k+1)^2} > \frac{2^k+2^k+1+\dots+2^{k+1}-1}{2^{2k+2}}$	0,5

$i \frac{2^k(2^k+2^{k+1}-1)}{2^{2k+3}} = \frac{2^k+2^{k+1}-1}{2^{2k+2}} > \frac{2^{k+1}}{2^{k+3}} = \frac{1}{4}$	0,5
$\rightarrow s_{2^k-1} > \frac{k}{4}, \forall k \in \mathbb{N}^+$ Mà $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{k}{4} = +\infty$ nên $\lim s_{2^k-1} = +\infty \rightarrow \lim s_n = +\infty$.	0,5

Câu 2 (4 điểm). Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) có M là trung điểm BC. Tiếp tuyến tại B,C của O cắt nhau tại T. (BOC) lần lượt cắt lại AC,AB tại điểm thứ hai là E,F. Gọi S là hình chiếu của O trên AT, H là trực tâm của tam giác BOC.

- Kẻ đường cao AD của tam giác ABC, gọi L là điểm Lemoine của tam giác ABC. Chứng minh rằng khi A di động trên (O) sao cho ABC là tam giác nhọn, DL luôn đi qua một điểm cố định.
- Chứng minh rằng hai đường tròn (AEF) và (HST) trực giao.

Nội dung	Điểm
	
a) Gọi M là trung điểm BC, ta có chùm điều hòa cơ bản D(AM,ST)=-1 (1).	0,5
Mặt khác, do H là trực tâm của tam giác BOC nên $\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{MO} \rightarrow \overrightarrow{MH} = -\overrightarrow{MT}$ hay M là trung điểm HT.	1,0

Lại có $DA/\angle HT$ nên $D(AM,HT)=-1$ (2). Từ (1) và (2) suy ra D,L,H thẳng hàng. Rõ ràng khi A di động thì H là điểm cố định nên ta có điều phải chứng minh.	0,5
b) Xét phép nghịch đảo f cực A, phương tích $\overline{AB} \cdot \overline{AF}$, ta có:	0,5
f: $B \leftrightarrow F, C \leftrightarrow E, S \leftrightarrow T, (AEF) \leftrightarrow BC, (HST) \leftrightarrow (HST)$.	0,5
Mặt khác, theo ý a ta có H,T đối xứng nhau qua BC nên tâm của (HST) thuộc BC.	0,5
Do phép nghịch đảo có tính bảo toàn góc nên (AEF) trực giao với (HST), ta có điều phải chứng minh.	0,5

Câu 3 (4 điểm). Tìm tất cả các hàm số $f: R \rightarrow R$ thỏa mãn:

$$f(xy + xf(y)) = xy + yf(x), \forall x, y \in R.$$

Nội dung	Điểm
<p>Gọi $P(x; y)$ là phép thế chỉ khẳng định</p> $f(xy + xf(y)) = xy + yf(x). \quad (1)$ <p>$P(0; 0) : f(0) = 0.$</p> <p>$P(1; x) : f(x + f(x)) = x + xf(1), \forall x \in \mathbb{R}.$ (2)</p> <p>Giả sử $\exists a \neq 0$ sao cho $f(a) = 0.$</p> <p>$P(x; a) : f(ax) = ax + af(x), \forall x \in \mathbb{R}.$ (3)</p> <p>$P(a; x) : f(ax + af(x)) = ax, \forall x \in \mathbb{R}.$</p>	0,5
<p>Từ (3) $\Rightarrow a(x + f(x)) + af(x + f(x)) = ax, \forall x \in \mathbb{R}.$</p> <p>$\Rightarrow ax + af(x) + a(x + xf(1)) = ax, \forall x \in \mathbb{R}.$</p> <p>$\Rightarrow f(x) + x + xf(1) = 0, \forall x \in \mathbb{R}.$</p> <p>$\Rightarrow f(x) = -(f(1) + 1)x, \forall x \in \mathbb{R}.$ (4)</p>	0,5

<p>Trong (4) thay $x = 1 : f(1) = -f(1) - 1 \Rightarrow f(1) = \frac{-1}{2}$.</p> <p>$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x, \forall x \in \mathbb{Q}$.</p> <p>Thử lại thấy không thỏa mãn.</p> <p>Suy ra $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.</p>	
<p>Xét 2 trường hợp sau:</p> <p>Trường hợp 1: $\exists b \neq 0 : f(b) = -b$.</p> <p>$P(b; x) : f(bx + bf(x)) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$.</p> <p>$\Rightarrow bx + bf(x) = 0, \forall x \in \mathbb{Q}$.</p> <p>$\Rightarrow f(x) = -x, \forall x \neq 0$. Thử lại thấy thỏa mãn.</p> <p>Trường hợp 2: $f(x) \neq -x, \forall x \neq 0$.</p> <p>Giả sử $\exists x_1, x_2 \neq 0 : f(x_1) = f(x_2) = x_0 \Rightarrow x_0 \neq 0$ và $\begin{cases} x_0 + x_1 = f(x_1) + x_1 \neq 0 \\ x_0 + x_1 = f(x_1) + x_1 \neq 0 \end{cases}$.</p> <p>$P(x; x_1) : f(x \cdot x_1 + x \cdot x_0) = x \cdot x_1 + x_1 \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$. (5)</p> <p>$P(x; x_1) : f(x \cdot x_2 + x \cdot x_0) = x \cdot x_2 + x_2 \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{Q}$. (6)</p>	1,0
<p>Từ (5), (6) suy ra</p> $\frac{f((x_1 + x_0)x)}{f((x_2 + x_0)x)} = \frac{x_1(x + f(x))}{x_2(x + f(x))}, \forall x \neq 0.$ $\Rightarrow f((x_1 + x_0)x) = \frac{x_1}{x_2} f((x_2 + x_0)x), \forall x \neq 0. \quad (7)$ <p>Trong (7) thay x bởi $\frac{x}{x_2 + x_0} : f\left(\frac{x_1 + x_0}{x_2 + x_0} \cdot x\right) = \frac{x_1}{x_2} f(x), \forall x \neq 0. \quad (8)$</p> <p>$P\left(\frac{x_1 + x_0}{x_2 + x_0} \cdot x; y\right) : f\left(\frac{x_1 + x_0}{x_2 + x_0} (xy + xf(y))\right) = \frac{x_1 + x_0}{x_2 + x_0} \cdot xy + yf\left(\frac{x_1 + x_0}{x_2 + x_0} \cdot x\right), \forall x \neq 0; y \in \mathbb{Q}.$</p>	0,5
<p>Từ (8) suy ra $\frac{x_1}{x_2} f(xy + xf(y)) = \frac{x_1 + x_0}{x_2 + x_0} \cdot xy + \frac{x_1}{x_2} yf(x), \forall x \neq 0; y \in \mathbb{Q}.$</p>	0,5

<p>Cũng từ (1) : $\frac{x_1}{x_2} f(xy + xf(y)) = \frac{x_1}{x_2} \cdot xy + \frac{x_1}{x_2} yf(x), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$</p> <p>Suy ra</p> $\frac{x_1 + x_0}{x_2 + x_0} \cdot xy = \frac{x_1}{x_2} \cdot xy, \forall x \neq 0; y \in \mathbb{Q}.$ $\Rightarrow \frac{x_1 + x_0}{x_2 + x_0} = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow x_1 x_2 + x_0 x_2 = x_1 x_2 + x_1 x_0 \Rightarrow x_1 = x_2.$ <p>Kết hợp với $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ suy ra f đơn ánh trên $\mathbb{Q}.$</p> <p>Viết lại (1) thành</p> $f(x(y + f(y))) = y(x + f(x)), \forall x, y \in \mathbb{Q}. \quad (9)$ <p>Trong (9) thay $y \rightarrow y + f(y)$ ta được</p> $f(x(y + f(y) + f(y + f(y)))) = (y + f(y))(x + f(x)), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$	
<p>Đổi vai trò x, y suy ra</p> $f(x(y + f(y) + f(y + f(y)))) = f(y(x + f(x) + f(x + f(x)))), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$ $\Rightarrow x(y + f(y) + f(y + f(y))) = y(x + f(x) + f(x + f(x))), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$ <p>Thay $x = 1 : x(1 + f(1) + f(1 + f(1))) = x + f(x) + f(x + f(x)), \forall x, y \in \mathbb{Q}.$</p> <p>Từ (2) $\Rightarrow x(1 + f(1) + 1 + f(1)) = x + f(x) + x + xf(1), \forall x \in \mathbb{Q}.$</p> $\Rightarrow f(x) = xf(1), \forall x \in \mathbb{Q}.$	0,5
<p>Thử lại ta được $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}.$</p> <p>Vậy tất cả các hàm thỏa mãn là $f(x) = x, \forall x \in \mathbb{Q}; f(x) = -x, \forall x \in \mathbb{Q}.$</p>	0,5

Câu 4 (4 điểm). Cho a là số nguyên dương thỏa mãn $\gcd(an+1, 2n+1) = 1$ với mọi số nguyên n .

- c) Chứng minh rằng $\gcd(a-2, 2n+1) = 1$ với mọi số nguyên n .
- d) Tìm tất cả số nguyên a thỏa mãn.

Nội dung	Điểm
a) Ta có $an + 1 = 2n + 1 + (a-2)n$ nên $(an+1, 2n+1) = (2n+1, (a-2)n) = 1$ Suy ra $(2n+1, a-2) = 1$	1,0
b) TH1 : a chẵn, đặt $a=2k$ (k nguyên dương) Theo ý a ta có $(2n+1, 2k-2) = (2n+1, a-2) = 1$ với mọi n nguyên Hay $(2n+1, k-1) = 1$ với mọi n nguyên Suy ra $k-1 = 2^x$ nên $a = 2^{x+1} + 2$ với x là số nguyên không âm	1,0
TH2 : a lẻ Nếu $a = 1$ hoặc $a = 3$ thì thỏa mãn	1,0
Nếu $a = 1$ hoặc $a = 3$ thì thỏa mãn Xét $a \geq 5$, đặt $a = 2k+1$ với $k \geq 2$ Khi đó với $n = 3k - 2$ thì $\gcd(an+1, 2n+1) = 2k-1 > 1$ Vậy $a = 1, a = 3$ hoặc $a = 2^m + 2, m \geq 1$ thì thỏa mãn	1,0

Câu 5 (4 điểm). Cho một bảng kích thước 2024×2024 được điền các số tự nhiên từ 1 đến 2024 theo quy tắc sau: Hàng thứ nhất ta điền các số từ 1 đến 2024 từ trái qua phải, ở hàng thứ hai ta đánh các số từ 2025 đến 4048 từ phải qua trái, các hàng tiếp theo được đánh theo kiểu zích zắc tương tự như trên. Hãy tìm các phủ kín bằng trên bởi 1012×2024 quân cờ Domino 1×2 sao cho tổng của tích các số trên mỗi quân cờ Domino lớn nhất.

Nội dung	Điểm
Đặt $A = \{ 1, 2, \dots, 2024^2 \}$. Gọi a_i, b_i là hai số được ghi trên quân cờ Domino thứ i với $a_i, b_i \in \{ 1, 2, \dots, 2024^2 \}$; $i = 1, \dots, 1006 \times 1012$ và $S = \sum_{i=1}^n a_i \cdot b_i$ với $n = 1012 \times 2024$. Ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của S.	0,5
Vì $xy = \frac{x^2 + y^2}{2} - \frac{(x-y)^2}{2}$ Nên ta có:	1,0

$S = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n (a_i - b_i)^2$	
Mặt khác a_i, b_i là các số tự nhiên khác nhau thuộc tập A nên $\sum_{i=1}^n (a_i^2 + b_i^2) = \sum_{i=1}^{2n} i^2 \text{ và } (a_i - b_i)^2 \geq 1$	1,0
Suy ra $S \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2n} (i^2 - 2i + 1)$	0,5
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a_i, b_i là hai số tự nhiên liên tiếp Vậy để S lớn nhất ta phủ các quân cờ Domino sao cho mỗi quân cờ chứa hai số tự nhiên liên tiếp.	1,0

Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy (x_n) xác định bởi
$$\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 2 - x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$
 với $a \in \mathbb{R}$.

Tìm tất cả các giá trị của a sao cho dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Câu 2 (4,0 điểm). Chứng minh rằng với mọi hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, luôn tồn tại $x, y > 0$ sao cho

$$f(x+y) < yf(f(x)).$$

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC và điểm I thuộc miền trong tam giác $\triangle ABC$; AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F . Đường thẳng qua I và vuông góc với AI cắt BC tại $M; N, P$ lần lượt là các điểm đối xứng với I qua DE, DF . Chứng minh rằng M, P, N thẳng hàng.

Câu 4 (4,0 điểm). Cho $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k} \left(k \geq 2; r_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = \overline{1, k} \right)$ là phân tích của n thành tích các thừa số nguyên tố.

Chứng minh rằng nếu phương trình $x^{2023} \equiv a \pmod{n}$ có nghiệm nguyên với mọi $a \in \mathbb{Z}$ thì $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 1$ và $\gcd(p_i - 1, 2023) = 1, \forall i = \overline{1, k}$.

Câu 5 (4,0 điểm). Cho X là một tập hữu hạn với $|X| = n$ và cho $A_1, A_2, \dots, A_m \ (m \geq 2)$ là các tập con có ba phần tử của X sao cho $|A_i \cap A_j| \leq 1$ với mọi $i \neq j$.

Chứng minh rằng tồn tại một tập A là tập con của X sao cho $|A| \geq \left\lceil \sqrt{2n} \right\rceil$ và A không chứa tập nào trong các tập $A_1, A_2, \dots, A_m$.

-----Hết-----

Ghi chú: - Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay trong khi làm bài.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM

Câu 1 (4,0 điểm). Cho dãy (x_n) xác định bởi $\begin{cases} x_1 = a \\ x_{n+1} = 2 - x_n^2, \forall n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$ với $a \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của a sao cho dãy (x_n) có giới hạn hữu hạn.

Hướng dẫn chấm	4,0 điểm
Với $ a < 2$ chỉ ra được dãy không có giới hạn hữu hạn. Ta xét trường hợp $ a \leq 2$. Đặt $x_1 = a = -2 \cos \alpha, \alpha \in [0; \pi]$. Ta có $x_n = -2 \cos(2^{n-1} \alpha), \forall n \in \mathbb{N}^*$. Giả sử a là số mà tồn tại $\lim x_n$. Khi đó $L = 2 - L^2 \Rightarrow L \in \{-2; 1\}$.	1,0

<p>Đặt $f(x) = 2 - x^2$, $n \in \mathbb{N}^*$. Khi đó $f(L) = L$. Ta có</p> $ x_{n+1} - L = f(x_n) - f(L) \stackrel{\text{Lagrange}}{=} f'(c_n) x_n - L = 2c_n x_n - L ,$ <p>với c_n là một số nào đó nằm giữa x_n và L.</p> <p>Do $\lim x_n = L \in \{-2; 1\}$ nên tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}^* : x_n > \frac{3}{4}, \forall n \geq n_0$. Suy ra</p> $ c_n > \frac{3}{4}, \forall n \geq n_0.$ <p>Khi đó $x_{n+1} - L > \frac{3}{2} x_n - L , \forall n \geq n_0$. Do vậy</p> $ x_{n_0+k} - L > \left(\frac{3}{2}\right)^k x_{n_0} - L , \forall k \in \mathbb{N}^*.$ <p>(*)</p>	<p>1,0</p>
<p>Nếu $x_{n_0} - L \neq 0$ thì trong (*) cho $k \rightarrow +\infty$ ta suy ra điều vô lý. Vậy $x_{n_0} = L$.</p> <p>Trường hợp 1: $L = -2$. Xét phương trình</p> $-2 \cos(2^{n_0-1} \alpha) = -2 \Leftrightarrow \cos(2^{n_0-1} \alpha) = 1 \Leftrightarrow 2^{n_0-1} \alpha = m.2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{m.2\pi}{2^{n_0-1}}, \forall m \in \mathbb{Z}.$	<p>0,5</p>
<p>Trường hợp 2: $L = 1$. Xét phương trình</p> $-2 \cos(2^{n_0-1} \alpha) = 1 \Leftrightarrow \cos(2^{n_0-1} \alpha) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{(\pm 1 + 3m).2\pi}{3.2^{n_0-1}}, \forall m \in \mathbb{Z}.$ $\alpha = \frac{p.2\pi}{3.2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}.$ <p>Kết hợp lại ta được</p>	<p>0,5</p>
<p>Thử lại, xét $\alpha = \frac{p.2\pi}{3.2^q}, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$. Ta có</p> $x_n = -2 \cos\left(2^{n-1} \cdot \frac{p.2\pi}{3.2^q}\right) = -2 \cos\left(2^{n-1-q} \cdot \frac{p.2\pi}{3}\right), \forall n \in \mathbb{N}^*.$ <p>Với $n \geq q+1$, thì</p> <p>+) Nếu $p \equiv 0 \pmod{3}$ thì $x_n = -2 \cos(2^{n-1-q} \cdot p'.2\pi) = -2, \forall n \geq q+1$.</p> <p>+) Nếu $p \equiv 1 \pmod{3}$ thì $x_n = -2 \cos\left(2^{n-1-q} \cdot \frac{2\pi}{3}\right), \forall n \geq q+1$. Ta thấy</p> $2^{n-1-q} \equiv \pm 1 \pmod{3} \text{ nên } x_n = -2 \cos\left(\pm \frac{2\pi}{3}\right) = 1, \forall n \geq q+1, p \equiv 1 \pmod{3}.$ <p>+) Nếu $p \equiv 2 \pmod{3}$ thì $x_n = -2 \cos\left(2^{n-1-q} \cdot \frac{4\pi}{3}\right), \forall n \geq q+1$. Ta thấy</p> $2^{n-1-q} \equiv \pm 1 \pmod{3} \text{ nên } x_n = -2 \cos\left(\pm \frac{4\pi}{3}\right) = 1, \forall n \geq q+1, p \equiv 2 \pmod{3}.$	<p>1,0</p>

$2^{n-1-q} \equiv \pm 1 \pmod{3}$ nên $x_n = -2 \cos\left(\pm \frac{4\pi}{3}\right) = 1, \forall n \geq q+1, p \equiv 2 \pmod{3}$. Tóm lại, với $x_1 = a = -2 \cos\left(\frac{p \cdot 2\pi}{3 \cdot 2^q}\right), p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z}$ thì dãy hội tụ.	
--	--

Câu 2 (4,0 điểm). Chứng minh rằng với mọi hàm số $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, luôn tồn tại $x, y > 0$ sao cho

$$f(x+y) < yf(f(x)).$$

Hướng dẫn chấm	4,0 điểm
Giả thiết phản chứng $f(x+y) \geq yf(f(x)); \forall x, y > 0$. Lấy $a > 1$ và đặt $t = f(f(a)) > 0$. $b = a\left(1 + \frac{1}{t} + \frac{1}{t^2}\right) > a$. Xét	1,0
Ta có $f(b) = f((b-a)+a) \geq (b-a)f(f(a)) = (b-a)t = a\left(1 + \frac{1}{t}\right) > a$ (1) và $f(f(b)) = f(a + (f(b)-a)) = (f(b)-a)f(f(a)) \geq \frac{a}{t} \cdot t = a$. (2)	1,0
Ta có $f(x) = f(b + (x-b)) = (x-b)f(f(b)) > (x-b)a, \forall x > b$. (3) Xét $f(x) > (x-b)a > x \Rightarrow x > \frac{ab}{a-1}$. Khi đó $f(f(x)) = f(x + (f(x)-x)) \geq (f(x)-x)f(f(x)) \Rightarrow 1 \geq f(x)-x \Rightarrow f(x) \leq x+1$. (4)	1,0
Trong (3), ta chọn x sao cho $(x-b)a > x+1 \Leftrightarrow x > \frac{ab+1}{a-1}$ thì $f(x) > x+1$. (5) Tóm lại, với $x > \frac{ab+1}{a-1}$ thì ta có đồng thời (4) và (5). Đây là điều vô lý hay giả thiết phản chứng là sai.	1,0

Câu 3 (4,0 điểm). Cho tam giác ABC và điểm I thuộc miền trong tam giác $\triangle ABC$; AI, BI, CI lần lượt cắt BC, CA, AB tại D, E, F . Đường thẳng qua I và vuông góc với AI cắt BC tại M ; N, P lần lượt là các điểm đối xứng với I qua DE, DF . Chứng minh rằng M, P, N thẳng hàng.

Hướng dẫn chấm	4,0 điểm
Gọi Q là điểm đối xứng với I qua BC . Ta có $DN = DI = DP = DQ$ nên bốn điểm N, I, P, Q cùng nằm trên đường tròn tâm D .	1,0
Mặt khác, vì $\angle DIM = 90^\circ$ nên IM tiếp xúc với (D) tại I . Vì I, Q đối xứng với nhau qua BC nên MQ tiếp xúc với (D) tại Q . Đặt X, Y là các giao điểm của EF với BC, AD . Khi đó $(XYEF) = -1 \Rightarrow D(XYEF) = -1$ hoặc có thể viết $D(M, I, E, F) = -1$.	1,0
Lại có $I(Q, M, N, P) = \frac{\sin(\overline{IN}, \overline{IQ})}{\sin(\overline{IN}, \overline{IM})} : \frac{\sin(\overline{IP}, \overline{IQ})}{\sin(\overline{IP}, \overline{IM})} = \frac{\sin(\overline{DE}, \overline{DM})}{\sin(\overline{DE}, \overline{DI})} : \frac{\sin(\overline{DF}, \overline{DM})}{\sin(\overline{DF}, \overline{DI})}$ $= D(M, I, E, F) = -1$ (vì IQ, IM, IN, IP theo thứ tự vuông góc với DM, DI, DE, DF).	1,5
Suy ra $I(I, Q, N, P) = -1$ hay tứ giác $IPQN$ điều hòa. Vậy M, P, N thẳng hàng.	0,5

Câu 4 (4,0 điểm). Cho $n = p_1^{r_1} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot p_k^{r_k}$ ($k \geq 2; r_i \in \mathbb{N}^*, \forall i = \overline{1, k}$) là phân tích của n thành tích các thừa số nguyên tố. Chứng minh rằng: Nếu phương trình $x^{2023} \equiv a \pmod{n}$ có nghiệm nguyên với mọi $a \in \mathbb{Z}$ thì $r_1 = r_2 = \dots = r_k = 1$ và $\gcd(p_i - 1, 2023) = 1, \forall i = \overline{1, k}$.

Hướng dẫn chấm	4,0 điểm
Giả sử phương trình $x^{2023} \equiv a \pmod{n}$ có nghiệm nguyên với mọi $a \in \mathbb{Z}$. Khi đó các phương trình $x^{2023} \equiv a \pmod{p_i^{r_i}}$ cũng có nghiệm nguyên với mọi	0,5

$a \in \square, i = \overline{1, k}.$	
Nếu tồn tại i sao cho $r_i > 1$ thì chọn $a = p_i$. Từ $x^{2023} \equiv p_i \pmod{p_i^{r_i}}$ và $r_i > 1$ suy ra $p_i \mid p_i^2$, vô lí. Vậy $r_i = 1, \forall i = \overline{1, k}.$	0,5
Giả sử $\gcd(p_i - 1, 2023) = d_i \Rightarrow \gcd\left(\frac{p_i - 1}{d_i}, \frac{2023}{d_i}\right) = 1.$ cho $\frac{p_i - 1}{d_i} = 1 + \frac{2023}{d_i} \cdot s.$ Suy ra tồn tại $s \in \square^*$ sao	1,0
Với $a \in \square, \gcd(a, p_i) = 1,$ gọi x là nghiệm nguyên của phương trình $x^{2023} \equiv a \pmod{p_i}$ thì $\gcd(x, p_i) = 1.$ Suy ra $a^{\frac{p_i - 1}{d_i}} \equiv \left(x^{2023}\right)^{\frac{p_i - 1}{d_i}} \equiv \left(x^{p_i - 1}\right)^{\frac{2023}{d_i}} \equiv 1 \pmod{p_i}; \forall a \in \square, \gcd(a, p) = 1.$	1,0
Do đó đa thức $P(t) = t^{\frac{p_i - 1}{d_i}} - 1$ có $p_i - 1$ nghiệm $t \equiv 1, 2, \dots, p_i - 1 \pmod{p_i}.$ Theo Định lí Lagrange thì $\deg P(t) = p_i - 1 \Rightarrow d_i = 1.$ Vậy $\gcd(p_i - 1, 2023) = 1, \forall i = \overline{1, k}.$	1,0

Câu 5 (4,0 điểm). Cho X là một tập hữu hạn với $|X| = n$ và cho $A_1, A_2, \dots, A_m$ ($m \geq 2$) là các tập con có ba phần tử của X sao cho $|A_i \cap A_j| \leq 1$ với mọi $i \neq j$. Chứng minh rằng tồn tại một tập A là tập con của X sao cho $|A| \geq \lceil \sqrt{2n} \rceil$ và A không chứa tập nào trong các tập $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Hướng dẫn chấm	4,0 điểm
Gọi B là tập hợp con của X có số phần tử lớn nhất sao cho B không chứa tập nào trong các tập $A_1, A_2, \dots, A_m$. Giả sử $ B = k.$ Khi đó số phần tử của tập $ X \setminus A = n - k.$	1,0
Ta sẽ đếm số phần tử của $ X \setminus A $ theo các cách khác như sau: Nếu $x \in X \setminus A $ thì $A \cup \{x\}$ không thỏa mãn yêu cầu của bài toán nên tồn tại $i(x) \in \{1, 2, \dots, m\}$ sao cho $A_{i(x)} \subset A \cup \{x\}.$ Suy ra $x \in A_{i(x)}$ và $A_{i(x)} \setminus \{x\} \subset A.$	1,0
Mặt khác tập $A_{i(x)}$ có số phần tử bằng 3 nên $ A_{i(x)} \setminus \{x\} = 2.$	1,0

<p>Ta thấy với $x, y \in X \setminus A$, $x \neq y$, nếu $A_{i(x)} \setminus \{x\} = A_{i(y)} \setminus \{y\}$ thì $A_{i(x)} \cup A_{i(y)} = 2$. Đây là điều vô lý, suy ra $A_{i(x)} \setminus \{x\} \neq A_{i(y)} \setminus \{y\}$.</p>	
<p>Do vậy, mỗi phần tử của tập $X \setminus A$ tương ứng với một tập con có hai phần tử của A nên ta có $X \setminus A \leq C_k^2 \Leftrightarrow n - k \leq \frac{k(k-1)}{2} \Leftrightarrow k^2 + k - 2n \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \lceil \sqrt{2n} \rceil$. Đây là điều phải chứng minh.</p>	1,0