

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
THANH HÓA**

**KỲ THI VÀO LỚP 10 THPT
CHUYÊN LAM SƠN**

NĂM HỌC: 2024 – 2025

Môn thi: TOÁN

ĐỀ THI CHÍNH THỨC

(Dùng chung cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 22/5/2024

Câu I.

Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$$
 (với $x \geq 0$ và $x \neq \frac{1}{9}$)

1. Rút gọn biểu thức P

2. Tìm tất cả các giá trị của x để $P = \frac{2}{3}$.

Câu II.

1. Cho hai đường thẳng $(d_1): y = x + 5$ và $(d_2): y = 3x + 1$. Xác định a, b để đường thẳng $(d): y = ax + b$ đi qua điểm A(1; 5) và giao điểm của hai đường thẳng d_1, d_2 .

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2\sqrt{x-18} - 3\sqrt{y+4} = -5 \\ 4\sqrt{x-18} + 5\sqrt{y+4} = 23 \end{cases}$$

Câu III. Cho phương trình $x^2 - 5x + 4m^2 = 0$ (m là tham số)

1. Giải phương trình khi $m = 1$.

2. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn

$$|x_1^3 + x_2^3 + 16x_1x_2 - 5m^2 + m - 113| < 13m - m^2$$

Câu IV. Cho đường tròn (O) ngoại tiếp tam giác nhọn ABC ($AB < AC$). Hai đường cao BD và CE của tam giác ABC cắt nhau tại H ($D \in AC, E \in AB$). Tia phân giác của góc BAC cắt đường thẳng BD và đường tròn (O) lần lượt tại M và I (I khác A). Đường thẳng BD cắt đường tròn (O) tại K (K khác B), hai đường thẳng AC và IK cắt nhau tại Q.

1. Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp.

2. Gọi P là giao điểm của hai đường thẳng QH và AB. Chứng minh đường thẳng MQ song song với đường thẳng BC và AI là đường trung trực của PQ.

3. Đặt $BC = x$, $DE = y$. Tính độ dài đoạn thẳng MQ theo x, y .

Câu V. Cho hai số thực dương a, b thỏa mãn $8a^2 + 2b^2 = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của

biểu thức
$$T = \frac{4a-b-1}{1+b} - \frac{2a-2b+1}{1+2a} - \frac{6a+3b-6077}{6a+3b}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

1. Điều kiện: $x \geq 0$ và $x \neq \frac{1}{9}$

$$P = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{3\sqrt{x}-1} - \frac{1}{3\sqrt{x}+1} + \frac{8\sqrt{x}}{9x-1} \right) : \left(1 - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$$

$$P = \left(\frac{(\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} - \frac{3\sqrt{x}-1}{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)} + \frac{8\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}-1)(3\sqrt{x}+1)} \right) : \left(\frac{3\sqrt{x}+1}{3\sqrt{x}+1} - \frac{3\sqrt{x}-2}{3\sqrt{x}+1} \right)$$

$$P = \frac{3x + \sqrt{x} - 3\sqrt{x} - 1 - 3\sqrt{x} + 1 + 8\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)} : \frac{3\sqrt{x}+1 - 3\sqrt{x} + 2}{3\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{3x + 3\sqrt{x}}{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)} : \frac{3}{3\sqrt{x}+1}$$

$$P = \frac{3\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(3\sqrt{x}+1)(3\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{3\sqrt{x}+1}{3} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}-1}$$

Vậy
$$P = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}-1}$$

2.
$$P = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}-1} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{3\sqrt{x}-1} - \frac{3}{2} = 0$$

$$\frac{2(x+\sqrt{x})}{2(3\sqrt{x}-1)} - \frac{3(3\sqrt{x}-1)}{2(3\sqrt{x}-1)} = 0$$

$$\frac{2x + 2\sqrt{x} - 9\sqrt{x} + 3}{2(3\sqrt{x} - 1)} = 0$$

$$\frac{2x - 7\sqrt{x} + 3}{2(3\sqrt{x} - 1)} = 0$$

$$2x - 7\sqrt{x} + 3 = 0$$

$$2x - 6\sqrt{x} + 3 - \sqrt{x} = 0$$

$$2\sqrt{x}(\sqrt{x} - 3) - (\sqrt{x} - 3) = 0$$

$$(\sqrt{x} - 3)(2\sqrt{x} - 1) = 0$$

$$\begin{cases} \sqrt{x} - 3 = 0 \\ 2\sqrt{x} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 3 \\ \sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9(t/m) \\ x = \frac{1}{4}(t/m) \end{cases}$$

Vậy với x thuộc tập $S = \left\{9; \frac{1}{4}\right\}$ thì $P = \frac{3}{2}$.

Câu 2:

1. Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là nghiệm của phương trình:

$$x + 5 = 3x + 1$$

$$2x = 4$$

$$x = 2$$

$$y = 7$$

Vậy giao điểm của hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$ là B(2; 7).

Ta có đường thẳng (d): $y = ax + b$ đi qua điểm A(1; 5) và B(2; 7) nên thay tọa độ hai điểm vào phương trình đường thẳng ta có:

$$\begin{cases} 5 = a + b \\ 7 = 2a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

Vậy $a = 2$; $b = 3$ thì đường thẳng (d): $y = ax + b$ đi qua điểm A(1; 5) và giao điểm của hai đường thẳng $(d_1), (d_2)$.

2. Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 18 \\ y \geq -4 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} \sqrt{x-18} = a \\ \sqrt{y+4} = b \end{cases}$, điều kiện $a, b \geq 0$ khi đó hệ phương trình trở thành

$$\begin{cases} 2a-3b = -5 \\ 4a+5b = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 11b = 33 \\ 4a+5b = 23 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 22(tm) \\ y = 5(tm) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) = (22; 5)$.

Câu 3:

1. Thay $m = 1$ vào phương trình $x^2 - 5x + 4m^2 = 0$, ta có

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

Ta có: $a + b + c = 0$ nên phương trình có hai nghiệm là $x = 1; x = 4$.

$$2. |x_1^3 + x_2^3 + 16x_1x_2 - 5m^2 + m - 113| < 13m - m^2$$

$$\text{Xét } \Delta = 5^2 - 4.4m^2 = 25 - 16m^2$$

Phương trình ban đầu có hai nghiệm khi $\Delta \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 16m^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} \leq m \leq \frac{5}{4}$

Theo hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1x_2 = 4m^2 \end{cases}$

$$\text{Ta có: } |x_1^3 + x_2^3 + 16x_1x_2 - 5m^2 + m - 113| < 13m - m^2$$

$$\Leftrightarrow |(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) + 16.4m^2 - 5m^2 + m - 113| < 13m - m^2$$

$$\Leftrightarrow |5(x_1 + x_2)^2 - 5.2x_1x_2 - 5.4m^2 + 59m^2 + m - 113| < 13m - m^2$$

$$\Leftrightarrow |5.(5^2 - 2.4m^2 - 4m^2) + 59m^2 + m - 113| < 13m - m^2$$

$$\Leftrightarrow |5(25 - 12m^2) + 59m^2 + m - 113| < 13m - m^2$$

$$\Leftrightarrow |125 - 60m^2 + 59m^2 + m - 113| < 13m - m^2$$

$$\Leftrightarrow |m^2 - m - 12| < 13m - m^2$$

Điều kiện $13m - m^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < m < 13$

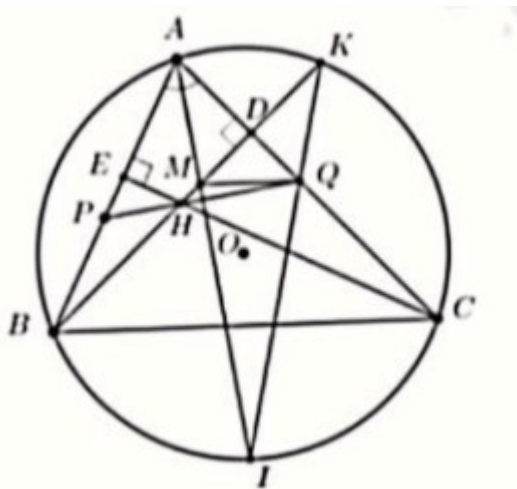
$$\text{Bất phương trình } \Leftrightarrow -(13m - m^2) < m^2 - m - 12 < 13m - m^2$$

$$\Leftrightarrow -13m + m^2 < m^2 - m - 12 < 13m - m^2$$

uigeli.xyz

$$1 < m \leq \frac{5}{4}$$
$$1 < m \leq \frac{5}{4}$$

Câu 4:



1. Do BD và CE là đường cao của tam giác ABC nên

$$CE \perp AB, BD \perp AC \Rightarrow \angle CEQ = \angle BDA = 90^\circ$$

Xét tứ giác AEHD có: $\widehat{AEH} + \widehat{ADH} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đối diện suy ra tứ giác AEHD nội tiếp.

2. Ta có: $\sigma_{AMK}^2 = \frac{1}{2}(\sigma_{AK}^2 + \sigma_{BK}^2)$

$$\sigma_{QK} = \frac{1}{2}(\sigma_{AK} + \sigma_{EI})$$

Mà $\widehat{sdBI} = \widehat{sdCI}$ (do AI là phân giác của góc BAC)

$$\Rightarrow \square_{AMK} = \square_{QK}$$

Mà hai góc này ở vị trí kề nhau, cùng nhìn AK dưới hai góc bằng nhau
Nên A, M, Q, K cùng thuộc một đường tròn.

$$\Rightarrow \angle MQK = \angle MAQ \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung KQ)}$$

$$\text{Mà } \angle MAQ = \angle MAC = \angle MBC \text{ (góc nội tiếp cùng chắn cung KC)}$$

$$\Rightarrow \angle MQK = \angle MBC (= \angle MAC)$$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $MQ \parallel BC$

Tam giác ABC có H là trực tâm nên $AH \perp BC$

Do $MQ \parallel BC$ nên $MQ \perp AH$

Xét tam giác AHQ có HD, MQ là đường cao cắt nhau tại M

$\Rightarrow$ M là trực tâm của tam giác AHQ

$$\Rightarrow AM \perp HQ$$

Tam giác APQ có AM vừa là đường cao vừa là phân giác nên đồng thời là trung trực.

Chứng tỏ AI là trung trực của PQ.

3. Xét tam giác ADE và tam giác ABC có

$$\angle BAC \text{ chung}$$

$$\angle ADE = \angle ABC \text{ (góc ngoài đỉnh đối diện tứ giác nội tiếp)}$$

$$\Rightarrow \triangle ADE \sim \triangle ABC (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{DE}{BC} = \frac{AD}{AB} = \frac{y}{x}$$

$$\text{Ta có: } \frac{DM}{MB} = \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{DM}{BD} = \frac{y}{x+y}$$

$$\text{Do } MQ \parallel BC \Rightarrow \frac{MQ}{BC} = \frac{DM}{DB} \Rightarrow \frac{MQ}{x} = \frac{y}{x+y} \Rightarrow MQ = \frac{xy}{x+y}$$

Câu 5:

Đặt $x = 2a$, $y = b$.

$$\text{Do } 8a^2 + 2b^2 = 1 \Leftrightarrow 2(x^2 + y^2) = 1$$

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{4a-b-1}{1+b} - \frac{2a-2b+1}{1+2a} - \frac{6a+3b-6077}{6a+3b} \\
 &= \frac{2x-y-1}{1+y} - \frac{x-2y+1}{1+x} - \frac{3x+3y-6077}{3x+3y} \\
 &= \frac{2x}{y+1} - 1 + \frac{2y}{x+1} - 1 + \frac{6077}{3(x+y)} - 1 \\
 &= \frac{2x}{y+1} + \frac{2y}{x+1} + \frac{6077}{3(x+y)} - 3 \\
 &= \frac{2x^2}{xy+x} + \frac{2y^2}{xy+y} + \frac{6077}{3(x+y)} - 3 \geq \frac{2(x+y)^2}{2xy+x+y} + \frac{6077}{3(x+y)} - 3
 \end{aligned}$$

Do $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 2xy \leq \frac{1}{2}$

$$(x+y)^2 \leq 2(x^2 + y^2) \Rightarrow x+y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = 1$$

$$\Rightarrow 2xy + x + y \leq \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow T &\geq \frac{2(x+y)^2}{\frac{3}{2}} + \frac{6077}{3(x+y)} - 3 \\
 &= \frac{4}{3}(x+y)^2 + \frac{4}{3(x+y)} + \frac{4}{3(x+y)} + \frac{2023}{x+y} - 3 \\
 &\geq \frac{4}{3} \cdot 3 + \frac{2023}{1} - 3 = 2024
 \end{aligned}$$

$$x = y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4} \\ b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Dấu “=” có khi