

BÀI 5. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ GIẢI QUYẾT MỘT SỐ VẤN ĐỀ LIÊN QUAN ĐẾN THỰC TIỄN

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN

A. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Câu 1. Một đại lượng được mô tả bởi hàm số $Q(t) = t^2 + 4t$. Tốc độ thay đổi trung bình của Q trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. 6. B. 7. C. 8. D. 9.

Câu 2. Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng có phương trình vị trí $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t + 2$, trong đó t tính bằng giây và s tính bằng mét. Vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 2$ bằng

- A. -6 m/s. B. -4 m/s. C. 2 m/s. D. 4 m/s.

Câu 3. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 5t$. Gia tốc tức thời của chất điểm tại $t = 1$ bằng

- A. 3 m/s². B. 5 m/s². C. 6 m/s². D. 9 m/s².

Câu 4. Độ cao của một vật được mô tả bởi $h(t) = 40t - 5t^2 + 2$, với $t \geq 0$. Vận tốc của vật tại $t = 3$ bằng

- A. 5 m/s. B. 10 m/s. C. 15 m/s. D. 20 m/s.

Câu 5. Số lượng cá thể của một quần thể được mô hình hóa bởi $P(t) = 300 + 50t - 3t^2$. Tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại $t = 5$ bằng

- A. 10. B. 15. C. 20. D. 25.

Câu 6. Nồng độ của một chất trong dung dịch sau t phút được mô tả bởi $C(t) = \frac{6t}{t+3}$. Tốc độ thay đổi tức thời của nồng độ tại $t = 3$ bằng

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 1. D. 2.

Câu 7. Tổng chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm được cho bởi $C(x) = 2000 + 35x + 0,15x^2$ (nghìn đồng). Chi phí biên tại mức sản xuất $x = 50$ bằng

- A. 35 nghìn đồng. B. 45 nghìn đồng.
C. 50 nghìn đồng. D. 65 nghìn đồng.

Câu 8. Giá bán của một sản phẩm được mô hình hóa bởi hàm cầu $p(x) = 120 - 0,5x$. Doanh thu là $R(x) = xp(x)$. Doanh thu biên tại $x = 40$ bằng

- A. 60. B. 70. C. 80. D. 100.

Câu 9. Một doanh nghiệp có doanh thu $R(x) = 100x - x^2$ và chi phí $C(x) = 20x + 500$. Lợi nhuận biên tại $x = 30$ bằng

- A. 10. B. 20. C. 30. D. 40.

Câu 10. Nhiệt độ của một vật được mô tả bởi $T(t) = t^3 - 3t^2 + 2$. Tốc độ thay đổi trung bình của nhiệt độ trên đoạn $[1; 3]$ bằng

- A. -1 . B. 0. C. 1. D. 2.

Câu 11. Số lượng cá thể của một quần thể được mô hình hóa bởi $P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-t}}$, với $t \geq 0$. Theo mô hình, khi t tăng rất lớn thì số lượng cá thể tiến gần đến

- A. 100. B. 500. C. 900. D. 1000.

Câu 12. Chi phí để loại bỏ $x\%$ chất ô nhiễm được ước tính bởi $C(x) = \frac{250x}{100-x}$, với $0 \leq x < 100$. Khi x tiến đến 100 từ bên trái thì

- A. $C(x) \rightarrow 0$. B. $C(x) \rightarrow 250$. C. $C(x) \rightarrow +\infty$. D. $C(x) \rightarrow -\infty$.

B. Một số bài toán tối ưu hóa

Câu 13. Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 36 cm, diện tích lớn nhất bằng

- A. 72 cm^2 . B. 81 cm^2 . C. 90 cm^2 . D. 108 cm^2 .

Câu 14. Người ta dùng 80 m hàng rào để làm một khu vườn hình chữ nhật sát một bức tường, nên chỉ cần rào ba cạnh. Diện tích lớn nhất của khu vườn bằng

- A. 400 m^2 . B. 600 m^2 . C. 800 m^2 . D. 1600 m^2 .

Câu 15. Từ một tấm bìa hình vuông cạnh 42 cm, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau cạnh x cm rồi gấp thành một hộp không nắp. Để thể tích hộp lớn nhất thì x bằng

- A. 5 cm. B. 6 cm. C. 7 cm. D. 8 cm.

Câu 16. Một chiếc hộp không nắp có đáy là hình vuông cạnh x cm và chiều cao h cm. Tổng diện tích vật liệu dùng để làm hộp là 192 cm^2 . Để thể tích hộp lớn nhất thì cạnh đáy bằng

- A. 6 cm. B. 8 cm. C. 10 cm. D. 12 cm.

Câu 17. Một hộp hình trụ kín có thể tích bằng $128\pi \text{ cm}^3$. Để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất thì bán kính đáy bằng

- A. 2 cm. B. 3 cm. C. 4 cm. D. 8 cm.

Câu 18. Một rạp hát bán vé với giá 90 nghìn đồng thì có 600 người mua. Cứ giảm giá vé 5 nghìn đồng thì có thêm 60 người mua. Giá vé để doanh thu lớn nhất là

- A. 65 nghìn đồng. B. 70 nghìn đồng.
C. 75 nghìn đồng. D. 80 nghìn đồng.

Câu 19. Một khu nhà có 120 căn hộ. Nếu giá thuê mỗi căn là 5 triệu đồng/tháng thì tất cả các căn đều có người thuê. Mỗi khi tăng giá thêm $0,1$ triệu đồng thì có thêm 2 căn bị bỏ trống. Giá thuê mỗi căn để doanh thu lớn nhất là

- A. 5 triệu đồng. B. $5,5$ triệu đồng.
C. 6 triệu đồng. D. $6,5$ triệu đồng.

Câu 20. Một doanh nghiệp có hàm cầu $p(x) = 150 - x$ và tổng chi phí $C(x) = 30x + 900$. Số lượng sản phẩm cần bán để lợi nhuận lớn nhất là

- A. 30 . B. 45 . C. 60 . D. 75 .

Câu 21. Lợi nhuận của một doanh nghiệp được mô hình hóa bởi $P(x) = -x^2 + 100x - 1600$. Lợi nhuận lớn nhất bằng

- A. 800 . B. 900 . C. 1000 . D. 1600 .

Câu 22. Hai số dương có tổng bằng 30 . Tích lớn nhất của hai số đó bằng

- A. 200 . B. 210 . C. 225 . D. 240 .

Câu 23. Với $x > 0$, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $Q(x) = x + \frac{16}{x}$ bằng

- A. 4 . B. 6 . C. 8 . D. 16 .

Câu 24. Một người ở điểm A trên một bờ sông rộng 3 km cần đến điểm B trên bờ đối diện, cách điểm C đối diện với A một đoạn 6 km về phía hạ lưu. Người đó chèo thuyền với vận tốc 4 km/h và chạy bộ

với vận tốc 5 km/h . Người đó nên cập bờ tại điểm D cách C bao nhiêu km về phía B để thời gian đi là nhỏ nhất?

- A. 2 km . B. 3 km . C. 4 km . D. 5 km .

Câu 25. Một hộp kín có đáy hình vuông cạnh x và thể tích bằng 125 cm^3 . Để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất thì cạnh đáy bằng

- A. 3 cm . B. 4 cm . C. 5 cm . D. 10 cm .

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG - SAI

Câu 1. Một đại lượng được mô tả bởi $Q(t) = t^2 + 2t + 1$.

- a) Khi t thay đổi từ 1 đến 3 , độ biến thiên của Q bằng 12 .
b) Tốc độ thay đổi trung bình của Q trên đoạn $[1; 3]$ bằng 6 .
c) Tốc độ thay đổi tức thời của Q tại $t = 2$ bằng 6 .
d) Tốc độ thay đổi trung bình của Q trên $[1; 3]$ bằng $Q'(1)$.

Câu 2. Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng có phương trình $s(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$.

- a) Vận tốc của chất điểm là $v(t) = 3t^2 - 12t + 8$.
b) Gia tốc của chất điểm là $a(t) = 6t - 12$.
c) Tại $t = 2$, vận tốc của chất điểm bằng -4 .
d) Tại $t = 2$, chất điểm đứng yên.

Câu 3. Độ cao của một vật được mô hình hóa bởi $h(t) = 1 + 18t - 3t^2$, với $t \geq 0$.

- a) Vận tốc của vật là $v(t) = 18 - 6t$.
b) Vật đạt độ cao lớn nhất tại $t = 3$.
c) Độ cao lớn nhất của vật bằng 28 .
d) Sau thời điểm $t = 3$, độ cao của vật tiếp tục tăng.

Câu 4. Chi phí sản xuất x đơn vị hàng hóa được cho bởi $C(x) = 3000 + 25x + 0,2x^2 + 0,002x^3$.

- a) Chi phí biên là $C'(x) = 25 + 0,4x + 0,006x^2$.
b) $C'(10) = 29,6$.
c) Chi phí biên tăng khi $x \geq 0$.
d) $C'(10)$ luôn bằng chính xác $C'(11) - C'(10)$.

Câu 5. Số lượng cá thể của một quần thể được mô hình hóa bởi $P(t) = \frac{800}{1 + 7e^{-0,5t}}$, với $t \geq 0$.

- a) $P(0) = 100$.
b) Khi t tiến tới $+\infty$, $P(t)$ tiến tới 800 .
c) $P'(t) > 0$ với mọi $t \geq 0$.
d) Theo mô hình, số lượng cá thể có thể vượt quá 800 .

Câu 6. Một hình chữ nhật có chu vi bằng 32 cm . Gọi $x \text{ cm}$ là chiều rộng của hình chữ nhật.

- a) Chiều dài của hình chữ nhật là $16 - x$.
b) Diện tích được biểu diễn bởi $S(x) = 16x - x^2$.
c) Diện tích lớn nhất bằng 64 cm^2 .

d) Diện tích lớn nhất đạt được khi $x = 4$ cm.

Câu 7. Từ một tấm bìa hình vuông cạnh 48 cm, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau cạnh x cm rồi gấp thành một hộp không nắp.

a) Điều kiện của x là $0 < x < 24$.

b) Thể tích của hộp là $V(x) = x(48 - 2x)^2$.

c) Thể tích lớn nhất đạt được khi $x = 8$ cm.

d) Thể tích lớn nhất bằng 4096 cm³.

Câu 8. Một doanh nghiệp có hàm cầu $P(x) = 200 - 2x$ và tổng chi phí $C(x) = 40x + 800$.

a) Doanh thu là $R(x) = 200x - 2x^2$.

b) Lợi nhuận là $P(x) = 160x - 2x^2 - 800$.

c) Lợi nhuận lớn nhất bằng 2400 .

d) Lợi nhuận lớn nhất đạt được khi $x = 50$.

Câu 9. Một hộp hình trụ kín có thể tích bằng 250π cm³. Gọi r là bán kính đáy và h là chiều cao.

a) $h = \frac{250}{r^2}$.

b) Diện tích toàn phần có thể viết $S(r) = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}$.

c) Diện tích toàn phần nhỏ nhất khi $r = 5$ cm.

d) Khi diện tích toàn phần nhỏ nhất thì $h = 5$ cm.

Câu 10. Một rạp chiếu phim bán vé với giá 80 nghìn đồng thì có 500 người mua. Cứ giảm giá vé 4 nghìn đồng thì có thêm 50 người mua. Gọi n là số lần giảm giá.

a) Giá vé là $80 - 4n$ (nghìn đồng).

b) Số người mua vé là $500 + 50n$.

c) Doanh thu đạt lớn nhất khi $n = 4$.

d) Giá vé để doanh thu lớn nhất là 60 nghìn đồng.

PHẦN III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Một đại lượng được mô tả bởi $Q(t) = 2t^2 + t$. Tính tốc độ thay đổi trung bình của Q trên đoạn $[1; 4]$.

Câu 2. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$. Tính vận tốc tức thời của chất điểm tại $t = 3$.

Câu 3. Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = t^3 + 2t^2 - 4t$. Tính gia tốc tức thời tại $t = 2$.

Câu 4. Độ cao của một vật được cho bởi $h(t) = -5t^2 + 30t + 2$, với $t \geq 0$. Sau bao nhiêu giây vật đạt độ cao lớn nhất?

Câu 5. Tổng chi phí sản xuất x đơn vị sản phẩm được cho bởi $C(x) = 800 + 18x + 0,3x^2$. Tính chi phí biên tại $x = 20$.

Câu 6. Số lượng cá thể của một quần thể được mô hình hóa bởi $P(t) = 200 + 24t - 2t^2$. Tìm thời điểm mà tốc độ tăng trưởng tức thời bằng 0 .

Câu 7. Nồng độ của một chất được mô hình hóa bởi $C(t) = \frac{8t}{t+4}$. Tính tốc độ thay đổi tức thời của nồng độ tại $t = 4$.

Câu 8. Một doanh nghiệp có hàm cầu $P(x) = 100 - 2x$. Tìm số lượng sản phẩm cần bán để doanh thu lớn nhất.

Câu 9. Lợi nhuận của một doanh nghiệp được mô hình hóa bởi $P(x) = -3x^2 + 120x - 500$. Tìm lợi nhuận lớn nhất.

Câu 10. Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 20 cm, tìm diện tích lớn nhất.

Câu 11. Người ta dùng 36 m hàng rào để làm một khu vườn hình chữ nhật sát một bức tường, nên chỉ cần rào ba cạnh. Tìm diện tích lớn nhất của khu vườn.

Câu 12. Từ một tấm bìa hình vuông cạnh 60 cm, người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông bằng nhau cạnh x cm rồi gấp thành một hộp không nắp. Tìm x để thể tích của hộp lớn nhất.

Câu 13. Một chiếc hộp không nắp có đáy hình vuông cạnh x cm và chiều cao h cm. Tổng diện tích vật liệu dùng để làm hộp bằng 147 cm². Tìm x để thể tích của hộp lớn nhất.

Câu 14. Một hộp hình trụ kín có thể tích bằng 16π cm³. Tìm bán kính đáy để diện tích toàn phần của hộp nhỏ nhất.

Câu 15. Một rạp chiếu phim bán vé với giá 70 nghìn đồng thì có 300 người mua. Cứ giảm giá vé 5 nghìn đồng thì có thêm 50 người mua. Tìm giá vé để doanh thu lớn nhất.

ĐÁP ÁN

I. Đáp án trắc nghiệm 4 lựa chọn

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	C	B	C	B	C

Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	B	C	C	B	C

Câu	11	12	13	14	15
Đáp án	D	C	B	C	C

Câu	16	17	18	19	20
Đáp án	B	C	B	B	C

Câu	21	22	23	24	25
Đáp án	B	C	C	C	C

II. Đáp án trắc nghiệm đúng - sai

Câu	a	b	c	d
1	Đ	Đ	Đ	S
2	Đ	Đ	Đ	S
3	Đ	Đ	Đ	S
4	Đ	Đ	Đ	S
5	Đ	Đ	Đ	S
6	Đ	Đ	Đ	S
7	Đ	Đ	Đ	S
8	Đ	Đ	Đ	S
9	Đ	Đ	Đ	S
10	Đ	Đ	S	Đ

III. Đáp án câu trả lời ngắn

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	11	8	16	3	30

Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	6	0,5	25	700	25

Câu	11	12	13	14	15
Đáp án	162	10	7	2	50

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN

A. Tốc độ thay đổi của một đại lượng

Câu 1.

Một đại lượng được mô tả bởi hàm số $Q(t) = t^2 + 4t$. Tốc độ thay đổi trung bình của Q trên đoạn $[1; 3]$ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Tốc độ thay đổi trung bình của Q trên đoạn $[1; 3]$ là $\frac{Q(3) - Q(1)}{3 - 1}$.
Ta có

$$Q(3) = 3^2 + 4 \cdot 3 = 21,$$

$$Q(1) = 1^2 + 4 \cdot 1 = 5.$$

Do đó

$$\frac{Q(3) - Q(1)}{3 - 1} = \frac{21 - 5}{2} = 8.$$

Vậy chọn C.

Câu 2.

Một chất điểm chuyển động trên một đường thẳng có phương trình vị trí $s(t) = t^3 - 5t^2 + 4t + 2$. Tính vận tốc tức thời tại $t = 2$.

Lời giải.

Vận tốc tức thời là đạo hàm của hàm vị trí:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 10t + 4.$$

Tại $t = 2$:

$$v(2) = 3 \cdot 2^2 - 10 \cdot 2 + 4 = 12 - 20 + 4 = -4.$$

Vậy vận tốc tại $t = 2$ là -4 m/s. Chọn B.

Câu 3.

Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 2t^3 - 3t^2 + 5t$. Gia tốc tức thời của chất điểm tại $t = 1$ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Vận tốc:

$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 6t + 5.$$

Gia tốc:

$$a(t) = v'(t) = s''(t) = 12t - 6.$$

Suy ra

$$a(1) = 12 - 6 = 6.$$

Vậy chọn C.

Câu 4.

Độ cao của một vật được mô tả bởi $h(t) = 40t - 5t^2 + 2$, với $t \geq 0$. Tính vận tốc của vật tại $t = 3$.

Lời giải.

Vận tốc là

$$v(t) = h'(t) = 40 - 10t.$$

Tại $t = 3$:

$$v(3) = 40 - 30 = 10 \text{ m/s}.$$

Vậy chọn B.

Câu 5.

Số lượng cá thể của một quần thể được mô hình hóa bởi $P(t) = 300 + 50t - 3t^2$. Tốc độ tăng trưởng tức thời của quần thể tại $t = 5$ bằng bao nhiêu?

Lời giải.

Tốc độ tăng trưởng tức thời là

$$P'(t) = 50 - 6t.$$

Tại $t = 5$:

$$P'(5) = 50 - 30 = 20.$$

Vậy chọn C.

Câu 6.

Nồng độ của một chất trong dung dịch sau t phút được mô tả bởi $C(t) = \frac{6t}{t+3}$. Tính tốc độ thay đổi tức thời tại $t = 3$.

Lời giải.

Áp dụng quy tắc đạo hàm thương:

$$C'(t) = \frac{6(t+3) - 6t}{(t+3)^2} = \frac{18}{(t+3)^2}.$$

Tại $t = 3$:

$$C'(3) = \frac{18}{6^2} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}.$$

Vậy chọn B.

Câu 7.

Tổng chi phí để sản xuất x đơn vị sản phẩm là $C(x) = 2000 + 35x + 0,15x^2$ (nghìn đồng). Tính chi phí biên tại $x = 50$.

Lời giải.

Chi phí biên chính là đạo hàm $C'(x)$:

$$C'(x) = 35 + 0,3x.$$

Tại $x = 50$:

$$C'(50) = 35 + 0,3 \cdot 50 = 35 + 15 = 50.$$

Vậy chi phí biên là 50 nghìn đồng. Chọn C.

Câu 8.

Giá bán được mô hình hóa bởi hàm cầu $p(x) = 120 - 0,5x$. Doanh thu là $R(x) = xp(x)$. Tính doanh thu biên tại $x = 40$.

Lời giải.

Ta có

$$R(x) = x(120 - 0,5x) = 120x - 0,5x^2.$$

Doanh thu biên:

$$R'(x) = 120 - x.$$

Tại $x = 40$:

$$R'(40) = 120 - 40 = 80.$$

Vậy chọn C.

Câu 9.

Một doanh nghiệp có doanh thu $R(x) = 100x - x^2$ và chi phí $C(x) = 20x + 500$. Tính lợi nhuận biên tại $x = 30$.

Lời giải.

Lợi nhuận là

$$P(x) = R(x) - C(x) = 100x - x^2 - (20x + 500) = 80x - x^2 - 500.$$

Lợi nhuận biên:

$$P'(x) = 80 - 2x.$$

Do đó

$$P'(30) = 80 - 60 = 20.$$

Vậy chọn B.

Câu 10.

Nhiệt độ của một vật được mô tả bởi $T(t) = t^3 - 3t^2 + 2$. Tính tốc độ thay đổi trung bình trên đoạn $[1; 3]$.

Lời giải.

Tốc độ thay đổi trung bình là

$$\frac{T(3) - T(1)}{3 - 1}.$$

Ta có

$$T(3) = 27 - 27 + 2 = 2,$$

$$T(1) = 1 - 3 + 2 = 0.$$

Suy ra

$$\frac{T(3) - T(1)}{2} = \frac{2 - 0}{2} = 1.$$

Vậy chọn C.

Câu 11.

Số lượng cá thể của một quần thể được mô hình hóa bởi $P(t) = \frac{1000}{1 + 9e^{-t}}$, $t \geq 0$. Khi t tăng rất lớn, số lượng cá thể tiến gần đến giá trị nào?

Lời giải.

Khi $t \rightarrow +\infty$ thì $e^{-t} \rightarrow 0$. Do đó

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot 0} = 1000.$$

Theo mô hình, quần thể tăng dần và tiến gần tới 1000 cá thể. Chọn **D**.

Câu 12.

Chi phí để loại bỏ $x\%$ chất ô nhiễm được ước tính bởi $C(x) = \frac{250x}{100-x}$, với $0 \leq x < 100$. Xét giới hạn khi $x \rightarrow 100^-$.

Lời giải.

Khi $x \rightarrow 100^-$:

- tử số $250x \rightarrow 25000 > 0$;
- mẫu số $100-x$ tiến tới 0 theo phía dương.

Vì vậy

$$\lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{250x}{100-x} = +\infty.$$

Điều này cho thấy chi phí tăng không giới hạn khi muốn loại bỏ gần 100% chất ô nhiễm. Chọn **C**.

B. Một số bài toán tối ưu hóa

Câu 13.

Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 36 cm, tìm diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi hai cạnh của hình chữ nhật là x và y ($x, y > 0$). Ta có

$$2(x+y) = 36 \Rightarrow x+y = 18 \Rightarrow y = 18-x.$$

Diện tích:

$$S(x) = x(18-x) = 18x - x^2.$$

Đây là parabol quay xuống, đạt giá trị lớn nhất tại

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{18}{2(-1)} = 9.$$

Khi đó $y = 9$ và

$$S_{\max} = 9 \cdot 9 = 81 \text{ cm}^2.$$

Vậy chọn **B**.

Câu 14.

Người ta dùng 80 m hàng rào để làm một khu vườn hình chữ nhật sát một bức tường nên chỉ cần rào ba cạnh. Tìm diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi x là chiều rộng vuông góc với tường và y là chiều dài song song với tường. Vì chỉ rào ba cạnh:

$$2x + y = 80 \Rightarrow y = 80 - 2x.$$

Diện tích:

$$S(x) = x(80 - 2x) = 80x - 2x^2.$$

Ta có

$$S'(x) = 80 - 4x.$$

Cho $S'(x) = 0$:

$$80 - 4x = 0 \Rightarrow x = 20.$$

Khi đó $y = 40$, nên

$$S_{\max} = 20 \cdot 40 = 800 \text{ m}^2.$$

Vậy chọn **C**.

Câu 15.

Từ tấm bìa hình vuông cạnh 42 cm, cắt ở bốn góc bốn hình vuông cạnh x rồi gấp thành hộp không nắp. Tìm x để thể tích lớn nhất.

Lời giải.

Sau khi cắt, đáy hộp có cạnh $42 - 2x$, chiều cao là x . Điều kiện
 $0 < x < 21$.

Thể tích:

$$V(x) = x(42 - 2x)^2.$$

Đạo hàm:

$$V'(x) = (42 - 2x)(42 - 6x).$$

Trong khoảng $(0; 21)$, $V'(x) = 0$ khi

$$42 - 6x = 0 \Rightarrow x = 7.$$

Vì $V(x)$ tăng trước $x = 7$ và giảm sau $x = 7$, thể tích lớn nhất khi $x = 7$ cm. Chọn C.

Câu 16.

Một chiếc hộp không nắp có đáy hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và tổng diện tích vật liệu bằng 192 cm^2 . Tìm cạnh đáy để thể tích lớn nhất.

Lời giải.

Diện tích vật liệu gồm đáy và bốn mặt bên:

$$x^2 + 4xh = 192.$$

Suy ra

$$h = \frac{192 - x^2}{4x}.$$

Thể tích:

$$V = x^2h = \frac{x(192 - x^2)}{4} = 48x - \frac{x^3}{4}.$$

Đạo hàm:

$$V'(x) = 48 - \frac{3x^2}{4}.$$

Cho $V'(x) = 0$:

$$48 - \frac{3x^2}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = 8.$$

Vì $x > 0$, cạnh đáy tối ưu là 8 cm. Chọn B.

Câu 17.

Một hộp hình trụ kín có thể tích bằng $128\pi \text{ cm}^3$. Tìm bán kính đáy để diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi bán kính đáy là $r > 0$, chiều cao là h . Thể tích:

$$\pi r^2 h = 128\pi \Rightarrow h = \frac{128}{r^2}.$$

Diện tích toàn phần:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh = 2\pi r^2 + \frac{256\pi}{r}.$$

Đạo hàm:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{256\pi}{r^2}.$$

Cho $S'(r) = 0$:

$$4r^3 = 256 \Rightarrow r^3 = 64 \Rightarrow r = 4.$$

Vậy chọn C.

Câu 18.

Một rạp hát bán vé giá 90 nghìn đồng thì có 600 người mua. Cứ giảm 5 nghìn đồng thì có thêm 60 người mua. Tìm giá vé để doanh thu lớn nhất.

Lời giải.

Gọi n là số lần giảm giá 5 nghìn đồng. Khi đó

$$\begin{aligned} p &= 90 - 5n, \\ q &= 600 + 60n. \end{aligned}$$

Doanh thu:

$$R(n) = (90 - 5n)(600 + 60n).$$

Khai triển:

$$R(n) = 54000 + 2400n - 300n^2.$$

Đây là parabol quay xuống, đạt lớn nhất tại

$$n = -\frac{2400}{2(-300)} = 4.$$

Giá vé tối ưu:

$$p = 90 - 5 \cdot 4 = 70 \text{ nghìn đồng.}$$

Vậy chọn B.

Câu 19.

Một khu nhà có 120 căn hộ. Giá thuê 5 triệu đồng/tháng thì tất cả đều có người thuê. Mỗi lần tăng 0,1 triệu đồng thì có thêm 2 căn bỏ trống. Tìm giá thuê để doanh thu lớn nhất.

Lời giải.

Gọi n là số lần tăng giá 0,1 triệu đồng. Khi đó

$$\begin{aligned} p &= 5 + 0,1n, \\ q &= 120 - 2n. \end{aligned}$$

Doanh thu:

$$R(n) = (5 + 0,1n)(120 - 2n) = 600 + 2n - 0,2n^2.$$

Parabol quay xuống, đạt lớn nhất tại

$$n = -\frac{2}{2(-0,2)} = 5.$$

Giá thuê tối ưu:

$$p = 5 + 0,1 \cdot 5 = 5,5 \text{ triệu đồng.}$$

Vậy chọn B.

Câu 20.

Một doanh nghiệp có hàm cầu $p(x) = 150 - x$ và tổng chi phí $C(x) = 30x + 900$. Tìm số lượng sản phẩm cần bán để lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải.

Doanh thu:

$$R(x) = xp(x) = 150x - x^2.$$

Lợi nhuận:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 150x - x^2 - 30x - 900 = 120x - x^2 - 900.$$

Đạo hàm:

$$P'(x) = 120 - 2x.$$

Cho $P'(x) = 0$;

$$120 - 2x = 0 \Rightarrow x = 60.$$

Vì hệ số của x^2 trong $P(x)$ âm, đây là điểm cho lợi nhuận lớn nhất. Chọn C.

Câu 21.

Lợi nhuận của doanh nghiệp được mô hình hóa bởi $P(x) = -x^2 + 100x - 1600$. Tìm lợi nhuận lớn nhất.

Lời giải.

Đây là hàm bậc hai có hệ số $a = -1 < 0$, nên đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{100}{-2} = 50.$$

Khi đó

$$P(50) = -50^2 + 100 \cdot 50 - 1600 = -2500 + 5000 - 1600 = 900.$$

Vậy chọn B.

Câu 22.

Hai số dương có tổng bằng 30. Tìm tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi một số là x , số còn lại là $30 - x$, với $0 < x < 30$. Tích là

$$P(x) = x(30 - x) = 30x - x^2.$$

Parabol đạt lớn nhất tại

$$x = 15.$$

Khi đó hai số đều bằng 15, nên

$$P_{\max} = 15 \cdot 15 = 225.$$

Vậy chọn C.

Câu 23.

Với $x > 0$, tìm giá trị nhỏ nhất của $Q(x) = x + \frac{16}{x}$.

Lời giải.

Đạo hàm:

$$Q'(x) = 1 - \frac{16}{x^2}.$$

Cho $Q'(x) = 0$;

$$1 - \frac{16}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = 4$$

(do $x > 0$).

Ta có $Q'(x) < 0$ khi $0 < x < 4$ và $Q'(x) > 0$ khi $x > 4$, nên Q đạt GTNN tại $x = 4$.

$$Q_{\min} = 4 + \frac{16}{4} = 8.$$

Vậy chọn C.

Câu 24.

Một người ở điểm A trên bờ sông rộng 3 km cần đến điểm B trên bờ đối diện. Điểm C đối diện với A và $CB = 6$ km. Vận tốc chèo thuyền là 4 km/h, vận tốc chạy là 5 km/h. Tìm khoảng cách CD để thời gian nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi $CD = x$ km, $0 \leq x \leq 6$. Quãng đường chèo là

$$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{9 + x^2}.$$

Quãng đường chạy:

$$DB = 6 - x.$$

Thời gian:

$$T(x) = \frac{\sqrt{9 + x^2}}{4} + \frac{6 - x}{5}.$$

Đạo hàm:

$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} - \frac{1}{5}.$$

Cho $T'(x) = 0$:

$$\begin{aligned} \frac{x}{4\sqrt{9 + x^2}} &= \frac{1}{5} \\ \Rightarrow 5x &= 4\sqrt{9 + x^2}. \end{aligned}$$

Bình phương hai vế:

$$25x^2 = 16(9 + x^2) \Rightarrow 9x^2 = 144 \Rightarrow x = 4$$

(vì $x \geq 0$).

Vậy người đó nên cập bờ tại điểm D sao cho $CD = 4$ km. Chọn C.

Câu 25.

Một hộp kín có đáy hình vuông cạnh x và thể tích bằng 125 cm^3 . Tìm cạnh đáy để diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Lời giải.

Gọi chiều cao là h . Ta có

$$x^2 h = 125 \Rightarrow h = \frac{125}{x^2}.$$

Diện tích toàn phần của hộp kín:

$$S = 2x^2 + 4xh = 2x^2 + \frac{500}{x}.$$

Đạo hàm:

$$S'(x) = 4x - \frac{500}{x^2}.$$

Cho $S'(x) = 0$:

$$4x^3 = 500 \Rightarrow x^3 = 125 \Rightarrow x = 5.$$

Vậy chọn C.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG - SAI

Câu 1.

Cho $Q(t) = t^2 + 2t + 1$.

Lời giải.

Ta có

$$Q(1) = 4, Q(3) = 16.$$

- a) Độ biến thiên từ $t = 1$ đến $t = 3$:

$$\Delta Q = Q(3) - Q(1) = 16 - 4 = 12.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **b)** Tốc độ thay đổi trung bình:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{12}{3-1} = 6.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **c)**

$$Q'(t) = 2t + 2 \Rightarrow Q'(2) = 6.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **d)**

$$Q'(1) = 4 \neq 6.$$

Vì vậy tốc độ thay đổi trung bình trên $[1; 3]$ không bằng $Q'(1)$. Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 2.

Cho phương trình chuyển động $s(t) = t^3 - 6t^2 + 8t$.

Lời giải.

- **a)** Vận tốc:

$$v(t) = s'(t) = 3t^2 - 12t + 8.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **b)** Gia tốc:

$$a(t) = v'(t) = 6t - 12.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **c)**

$$v(2) = 3 \cdot 4 - 12 \cdot 2 + 8 = 12 - 24 + 8 = -4.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **d)** Chất điểm đứng yên khi $v(t) = 0$. Nhưng $v(2) = -4 \neq 0$, nên tại $t = 2$ chất điểm không đứng yên. Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 3.

Cho $h(t) = 1 + 18t - 3t^2$, $t \geq 0$.

Lời giải.

- **a)**

$$v(t) = h'(t) = 18 - 6t.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **b)** Vật đạt độ cao lớn nhất khi $v(t) = 0$:
 $18 - 6t = 0 \Rightarrow t = 3.$

Khẳng định **Đúng**.

- **c)**

$$h(3) = 1 + 18 \cdot 3 - 3 \cdot 3^2 = 1 + 54 - 27 = 28.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **d)** Khi $t > 3$, ta có $v(t) = 18 - 6t < 0$, nên độ cao giảm. Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 4.

Cho $C(x) = 3000 + 25x + 0,2x^2 + 0,002x^3$.

Lời giải.

- a)

$$C'(x) = 25 + 0,4x + 0,006x^2.$$

Khẳng định **Đúng**.

- b)

$$C'(10) = 25 + 0,4 \cdot 10 + 0,006 \cdot 100 = 25 + 4 + 0,6 = 29,6.$$

Khẳng định **Đúng**.

- c) Xét

$$C''(x) = 0,4 + 0,012x > 0 \text{ với } x \geq 0$$

Do đó $C'(x)$ tăng với mọi $x \geq 0$. Khẳng định **Đúng**.

- d) $C'(10)$ chỉ **xấp xỉ** chi phí sản xuất thêm một đơn vị gần mức $x = 10$, không nhất thiết bằng chính xác $C'(11) - C'(10)$. Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 5.

Cho $P(t) = \frac{800}{1 + 7e^{-0,5t}}$, $t \geq 0$.

Lời giải.

- a)

$$P(0) = \frac{800}{1 + 7} = 100.$$

Khẳng định **Đúng**.

- b) Khi $t \rightarrow +\infty$ thì $e^{-0,5t} \rightarrow 0$, nên

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 800.$$

Khẳng định **Đúng**.

- c) Đạo hàm có dạng

$$P'(t) = \frac{2800e^{-0,5t}}{(1 + 7e^{-0,5t})^2} > 0.$$

Vậy quần thể luôn tăng. Khẳng định **Đúng**.

- d) Vì mẫu số $1 + 7e^{-0,5t} > 1$, nên $P(t) < 800$ với mọi $t \geq 0$; do đó số lượng cá thể không vượt quá 800. Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 6.

Một hình chữ nhật có chu vi bằng 32 cm. Gọi x cm là chiều rộng.

Lời giải.

Chu vi:

$$2(x + y) = 32 \Rightarrow y = 16 - x.$$

- a) Chiều dài là $16 - x$. Khẳng định **Đúng**.
- b) Diện tích:

$$S(x) = x(16 - x) = 16x - x^2.$$

Khẳng định **Đúng**.

- c) Parabol $S(x)$ quay xuống, đạt lớn nhất tại $x = 8$.

Khi đó

$$S_{\max} = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **d)** Diện tích lớn nhất đạt tại $x = 8$, không phải $x = 4$. Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 7.

Từ một tấm bìa hình vuông cạnh 48 cm , cắt ở bốn góc bốn hình vuông cạnh x rồi gấp thành hộp không nắp.

Lời giải.

- **a)** Để đáy còn kích thước dương:

$$48 - 2x > 0 \Rightarrow 0 < x < 24.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **b)** Thể tích:

$$V(x) = x(48 - 2x)^2.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **c)**

$$V'(x) = (48 - 2x)(48 - 6x).$$

Trong $(0; 24)$, điểm tới hạn phù hợp là

$$48 - 6x = 0 \Rightarrow x = 8.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **d)**

$$V(8) = 8(48 - 16)^2 = 8 \cdot 32^2 = 8192 \text{ cm}^3,$$

không phải 4096 cm^3 . Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 8.

Một doanh nghiệp có hàm cầu $p(x) = 200 - 2x$ và tổng chi phí $C(x) = 40x + 800$.

Lời giải.

- **a)** Doanh thu:

$$R(x) = xp(x) = 200x - 2x^2.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **b)** Lợi nhuận:

$$P(x) = R(x) - C(x) = 160x - 2x^2 - 800.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **c)** Đạo hàm:

$$P'(x) = 160 - 4x.$$

Cho $P'(x) = 0$:

$$x = 40.$$

Khi đó

$$P(40) = 160 \cdot 40 - 2 \cdot 40^2 - 800 = 2400.$$

Khẳng định **Đúng**.

- **d)** Lợi nhuận lớn nhất đạt tại $x = 40$, không phải $x = 50$. Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 9.

Một hộp hình trụ kín có thể tích bằng $250\pi \text{ cm}^3$.

Lời giải.

Thể tích:

$$\pi r^2 h = 250\pi \Rightarrow h = \frac{250}{r^2}.$$

- a) Công thức trên đúng. Khẳng định **Đúng**.
- b) Diện tích toàn phần:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{500\pi}{r}.$$

Khẳng định **Đúng**.

- c)

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{500\pi}{r^2}.$$

Cho $S'(r) = 0$:

$$4r^3 = 500 \Rightarrow r^3 = 125 \Rightarrow r = 5.$$

Khẳng định **Đúng**.

- d) Khi $r = 5$:

$$h = \frac{250}{25} = 10 \text{ cm},$$

không phải 5 cm. Khẳng định **Sai**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) Đ; d) S.

Câu 10.

Một rạp chiếu phim bán vé giá 80 nghìn đồng thì có 500 người mua. Cứ giảm 4 nghìn đồng thì có thêm 50 người mua. Gọi n là số lần giảm giá.

Lời giải.

- a) Giá vé:

$$p = 80 - 4n.$$

Khẳng định **Đúng**.

- b) Số người mua:

$$q = 500 + 50n.$$

Khẳng định **Đúng**.

- c) Doanh thu:

$$R(n) = (80 - 4n)(500 + 50n) = 40000 + 2000n - 200n^2.$$

Parabol đạt lớn nhất tại

$$n = -\frac{2000}{2(-200)} = 5.$$

Do đó khẳng định $n = 4$ là **Sai**.

- d) Khi $n = 5$:

$$p = 80 - 4 \cdot 5 = 60 \text{ nghìn đ} \square \text{ ng.}$$

Khẳng định **Đúng**.

Kết luận: a) Đ; b) Đ; c) S; d) Đ.

PHẦN III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1.

Cho $Q(t) = 2t^2 + t$. Tính tốc độ thay đổi trung bình trên đoạn $[1; 4]$.

Lời giải.

$$Q(4) = 2 \cdot 16 + 4 = 36,$$

$$Q(1) = 2 + 1 = 3.$$

Tốc độ thay đổi trung bình:

$$\frac{Q(4) - Q(1)}{4 - 1} = \frac{36 - 3}{3} = 11.$$

Đáp số: 11.

Câu 2.

Một chất điểm chuyển động theo $s(t) = t^3 - 4t^2 + 5t$. Tính vận tốc tức thời tại $t = 3$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} v(t) &= s'(t) = 3t^2 - 8t + 5. \\ v(3) &= 27 - 24 + 5 = 8. \end{aligned}$$

Đáp số: 8.

Câu 3.

Một chất điểm chuyển động theo $s(t) = t^3 + 2t^2 - 4t$. Tính gia tốc tức thời tại $t = 2$.

Lời giải.

Vận tốc:

$$v(t) = 3t^2 + 4t - 4.$$

Gia tốc:

$$a(t) = v'(t) = 6t + 4.$$

Tại $t = 2$:

$$a(2) = 12 + 4 = 16.$$

Đáp số: 16.

Câu 4.

Độ cao của một vật là $h(t) = -5t^2 + 30t + 2$, $t \geq 0$. Sau bao nhiêu giây vật đạt độ cao lớn nhất?

Lời giải.

$$h'(t) = -10t + 30.$$

Vật đạt độ cao lớn nhất khi

$$h'(t) = 0 \Rightarrow -10t + 30 = 0 \Rightarrow t = 3.$$

Đáp số: 3.

Câu 5.

Tổng chi phí sản xuất là $C(x) = 800 + 18x + 0,3x^2$. Tính chi phí biên tại $x = 20$.

Lời giải.

$$\begin{aligned} C'(x) &= 18 + 0,6x. \\ C'(20) &= 18 + 12 = 30. \end{aligned}$$

Đáp số: 30.

Câu 6.

Số lượng cá thể của quần thể là $P(t) = 200 + 24t - 2t^2$. Tìm thời điểm tốc độ tăng trưởng tức thời bằng 0.

Lời giải.

$$P'(t) = 24 - 4t.$$

Cho $P'(t) = 0$:

$$24 - 4t = 0 \Rightarrow t = 6.$$

Đáp số: 6.

Câu 7.

Nồng độ của một chất là $C(t) = \frac{8t}{t+4}$. Tính tốc độ thay đổi tức thời tại $t = 4$.
Lời giải.

$$C'(t) = \frac{8(t+4) - 8t}{(t+4)^2} = \frac{32}{(t+4)^2}.$$

Tại $t = 4$:

$$C'(4) = \frac{32}{8^2} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Đáp số: 0,5.

Câu 8.

Một doanh nghiệp có hàm cầu $P(x) = 100 - 2x$. Tìm số lượng sản phẩm cần bán để doanh thu lớn nhất.
Lời giải.
 Doanh thu:

$$R(x) = x(100 - 2x) = 100x - 2x^2.$$

Đạo hàm:

$$R'(x) = 100 - 4x.$$

Cho $R'(x) = 0$:

$$100 - 4x = 0 \Rightarrow x = 25.$$

Vì R là parabol quay xuống, $x = 25$ cho doanh thu lớn nhất.

Đáp số: 25.

Câu 9.

Lợi nhuận được mô hình hóa bởi $P(x) = -3x^2 + 120x - 500$. Tìm lợi nhuận lớn nhất.
Lời giải.

$$P'(x) = -6x + 120.$$

Cho $P'(x) = 0$:

$$-6x + 120 = 0 \Rightarrow x = 20.$$

Khi đó

$$P(20) = -3 \cdot 400 + 120 \cdot 20 - 500 = -1200 + 2400 - 500 = 700.$$

Đáp số: 700.

Câu 10.

Trong tất cả các hình chữ nhật có chu vi bằng 20 cm, tìm diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi hai cạnh là x và y . Ta có

$$x + y = 10 \Rightarrow y = 10 - x.$$

Diện tích:

$$S(x) = x(10 - x) = 10x - x^2.$$

Diện tích lớn nhất tại $x = 5$, khi đó $y = 5$.

$$S_{\max} = 5 \cdot 5 = 25.$$

Đáp số: 25.

Câu 11.

Dùng 36 m hàng rào làm khu vườn hình chữ nhật sát một bức tường, chỉ rào ba cạnh. Tìm diện tích lớn nhất.

Lời giải.

Gọi x là chiều rộng và y là chiều dài dọc theo tường. Ta có

$$2x + y = 36 \Rightarrow y = 36 - 2x.$$

Diện tích:

$$S(x) = x(36 - 2x) = 36x - 2x^2.$$

$$S'(x) = 36 - 4x.$$

Cho $S'(x) = 0$:

$$x = 9.$$

Khi đó

$$y = 36 - 18 = 18.$$

Vậy

$$S_{\max} = 9 \cdot 18 = 162.$$

Đáp số: 162.

Câu 12.

Từ tấm bìa hình vuông cạnh 60 cm, cắt ở bốn góc bốn hình vuông cạnh x rồi gấp thành hộp không nắp. Tìm x để thể tích lớn nhất.

Lời giải.

Điều kiện:

$$0 < x < 30.$$

Thể tích:

$$V(x) = x(60 - 2x)^2.$$

Đạo hàm:

$$V'(x) = (60 - 2x)(60 - 6x).$$

Trong $(0; 30)$, nghiệm thích hợp là

$$60 - 6x = 0 \Rightarrow x = 10.$$

Đáp số: 10.

Câu 13.

Một hộp không nắp có đáy hình vuông cạnh x cm, chiều cao h cm và tổng diện tích vật liệu bằng 147 cm^2 . Tìm x để thể tích lớn nhất.

Lời giải.

Ta có

$$x^2 + 4xh = 147.$$

Suy ra

$$h = \frac{147 - x^2}{4x}.$$

Thể tích:

$$V = x^2 h = \frac{147x - x^3}{4}.$$

Đạo hàm:

$$V'(x) = \frac{147 - 3x^2}{4}.$$

Cho $V'(x) = 0$:

$$147 - 3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 49 \Rightarrow x = 7$$

(do $x > 0$).

Đáp số: 7.

Câu 14.

Một hộp hình trụ kín có thể tích bằng $16\pi \text{ cm}^3$. Tìm bán kính đáy để diện tích toàn phần nhỏ nhất.

Lời giải.

Ta có

$$\pi r^2 h = 16\pi \Rightarrow h = \frac{16}{r^2}.$$

Diện tích toàn phần:

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{32\pi}{r}.$$

Đạo hàm:

$$S'(r) = 4\pi r - \frac{32\pi}{r^2}.$$

Cho $S'(r) = 0$:

$$4r^3 = 32 \Rightarrow r^3 = 8 \Rightarrow r = 2.$$

Đáp số: 2.

Câu 15.

Một rạp chiếu phim bán vé giá 70 nghìn đồng thì có 300 người mua. Cứ giảm 5 nghìn đồng thì có thêm 50 người mua. Tìm giá vé để doanh thu lớn nhất.

Lời giải.

Gọi n là số lần giảm giá 5 nghìn đồng. Khi đó

$$\begin{aligned} p &= 70 - 5n, \\ q &= 300 + 50n. \end{aligned}$$

Doanh thu:

$$R(n) = (70 - 5n)(300 + 50n).$$

Khai triển:

$$R(n) = 21000 + 2000n - 250n^2.$$

Parabol quay xuống, đạt lớn nhất tại

$$n = -\frac{2000}{2(-250)} = 4.$$

Giá vé tối ưu:

$$p = 70 - 5 \cdot 4 = 50 \text{ nghìn đồng.}$$

Đáp số: 50.