

Chủ đề 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ**BÀI 1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ****PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM****1. TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ**

a) Khái niệm tính đơn điệu của hàm số

Giả sử K là một khoảng, một đoạn hoặc một nửa khoảng và $y = f(x)$ là hàm số xác định trên K .

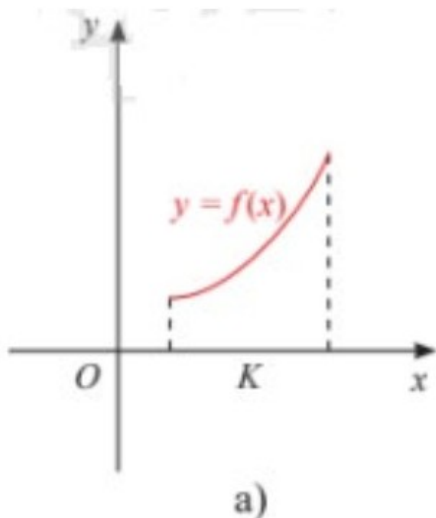
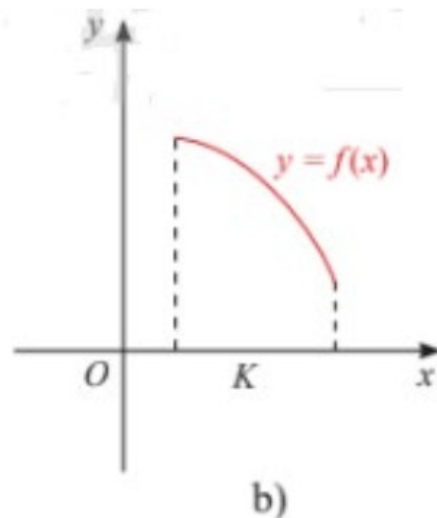
• Hàm số $y = f(x)$ được gọi là đồng biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

• Hàm số $y = f(x)$ được gọi là nghịch biến trên K nếu $\forall x_1, x_2 \in K, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

*Chú ý:

• Nếu hàm số đồng biến trên K thì đồ thị của hàm số đi lên từ trái sang phải (Hình ^a).

• Nếu hàm số nghịch biến trên K thì đồ thị của hàm số đi xuống từ trái sang phải (Hình ^b).



Hàm số $y = f(x)$ đồng biến hoặc nghịch biến trên K thì gọi chung là đơn điệu trên K .

• Khi xét tính đơn điệu của hàm số mà không chỉ rõ tập K thì ta hiểu là xét trên tập xác định của hàm số đó.

- Định lý:

Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm trên tập $K \subset \mathbb{R}$, với K là một khoảng, nửa khoảng hoặc đoạn.

• Nếu $f'(x) > 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên K .

• Nếu $f'(x) < 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên K .

*Chú ý:

• Định lý trên vẫn đúng trong trường hợp $f'(x) = 0$ tại một số hữu hạn điểm trên K .

- Nếu $f'(x) = 0, \forall x \in K$ thì hàm số $y = f(x)$ không đổi trên K .

Nhận xét:

Để xét tính đồng biến, nghịch biến của hàm số $y = f(x)$, ta có thể thực hiện các bước sau:

- Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số $y = f(x)$.
- Bước 2: Tính đạo hàm $f'(x)$. Tìm các điểm $m_{x_i} (i = 1, 2, 3, \dots, n)$ tại đó hàm số có đạo hàm bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Bước 3: Sắp xếp các điểm x_i theo thứ tự tăng dần và lập bảng biến thiên để xét dấu $y' = f'(x)$.
- Bước 4: Dựa vào bảng biến thiên, nêu kết luận các khoảng đồng biến và nghịch biến của hàm số.

2. CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

a) Khái niệm cực trị của hàm số

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định và liên tục trên khoảng $(a; b)$ (có thể a là $-\infty$; b là $+\infty$) và điểm $x_0 \in (a; b)$.

- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) < f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại tại x_0 .
- Nếu tồn tại số $h > 0$ sao cho $f(x) > f(x_0)$ với mọi $x \in (x_0 - h; x_0 + h) \subset (a; b)$ và $x \neq x_0$ thì ta nói hàm số $y = f(x)$ đạt cực tiểu tại x_0 .

*Chú ý:

- Nếu hàm số $y = f(x)$ đạt cực đại (cực tiểu) tại x_0 thì x_0 được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của hàm số; $f(x_0)$ được gọi là giá trị cực đại (giá trị cực tiểu) của hàm số, kí hiệu là $f_{CD} (f_{CT})$, còn điểm $M(x_0; f(x_0))$ được gọi là điểm cực đại (điểm cực tiểu) của đồ thị hàm số.
- Các điểm cực đại và cực tiểu được gọi chung là điểm cực trị. Giá trị cực đại và giá trị cực tiểu còn được gọi chung là giá trị cực trị (hay cực trị) của hàm số.

b) Cách tìm cực trị của hàm số

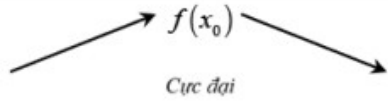
- Định lý:

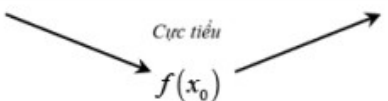
Giả sử hàm số $y = f(x)$ liên tục trên khoảng $(a; b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a; x_0)$ và $(x_0; b)$. Khi đó:

- Nếu $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực tiểu của hàm số $f(x)$.

- Nếu $f'(x) > 0$ với mọi $x \in (a; x_0)$ và $f'(x) < 0$ với mọi $x \in (x_0; b)$ thì x_0 là một điểm cực đại của hàm số $f(x)$.

Minh họa bằng bảng biến thiên

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	+		-
$f(x)$			

x	$x_0 - h$	x_0	$x_0 + h$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

*Chú ý: Từ định lý trên ta có các bước tìm cực trị của hàm số $y = f(x)$ như sau:

+Bước 1: Tìm tập xác định của hàm số.

+Bước 2: Tính $f'(x)$. Tìm các điểm tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc $f'(x)$ không xác định.

+Bước 3: Lập bảng biến thiên.

+Bước 4: Từ bảng biến thiên suy ra các cực trị của hàm số.

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một vật chuyển động theo quy luật $s(t) = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t (giây) là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động và $s(t)$ (m) là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vật chuyển động nhanh dần hay chậm dần.

$$V(t) = \frac{1}{100} \left(30t^3 - \frac{t^4}{4} \right) \text{ với}$$

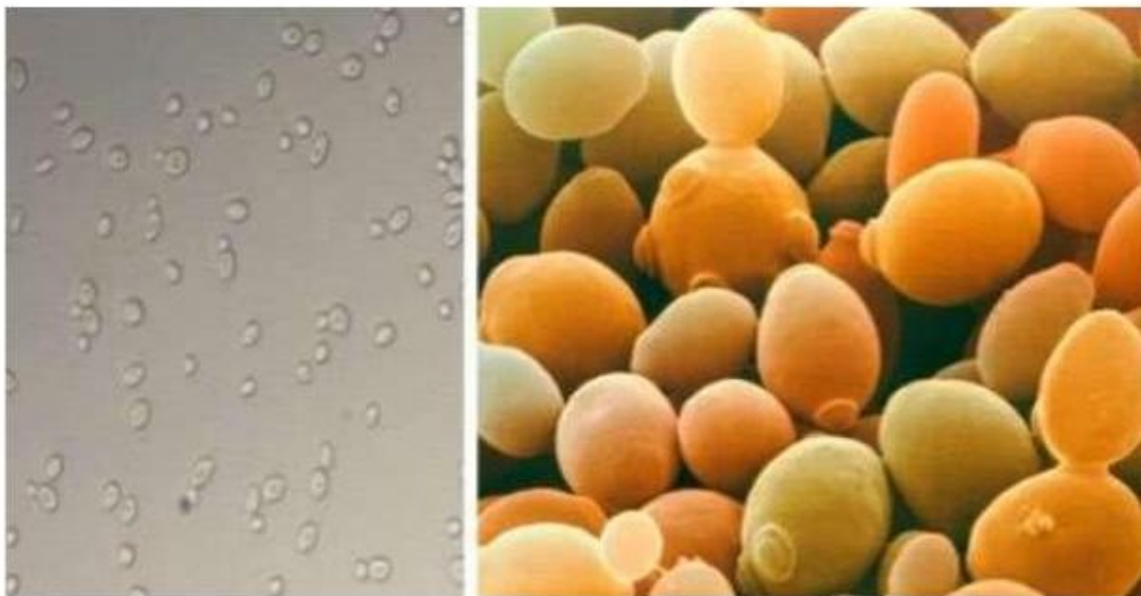
Bài 2. Thể tích nước của một bể bơi sau t phút bơm được tính theo công thức $0 \leq t \leq 90$. Tốc độ bơm nước ở thời đi mt được tính theo công thức $v(t) = V'(t)$. Tìm thời điểm tốc độ bơm nước là lớn nhất và tính tốc độ bơm nước lớn nhất đó.



Bài 3. Một cửa hàng trung bình bán được 100 cái tivi mỗi tháng với giá 14 triệu đồng một cái. Chủ cửa hàng nhận thấy rằng, nếu giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng. Hỏi cửa hàng nên bán với giá bao nhiêu để doanh thu cửa hàng là lớn nhất?

Bài 4. Giả sử số lượng quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa

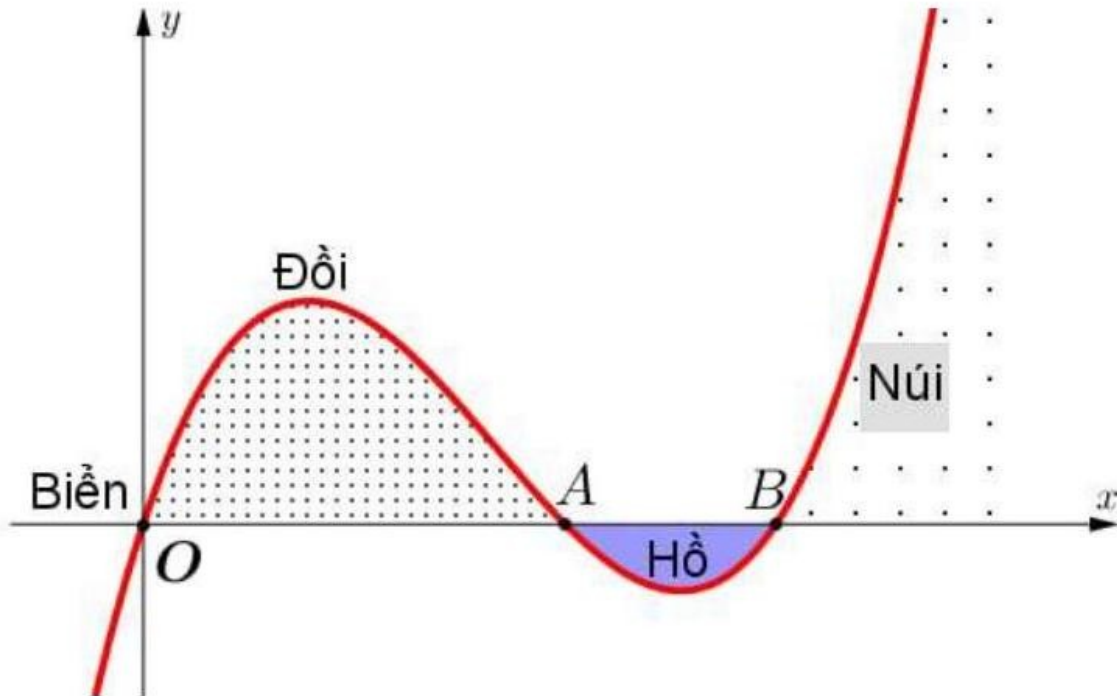
bằng hàm số $P(t) = \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}}$, trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Tốc độ sinh trưởng của quần thể nấm men ở thời điểm t được tính theo công thức $P'(t)$



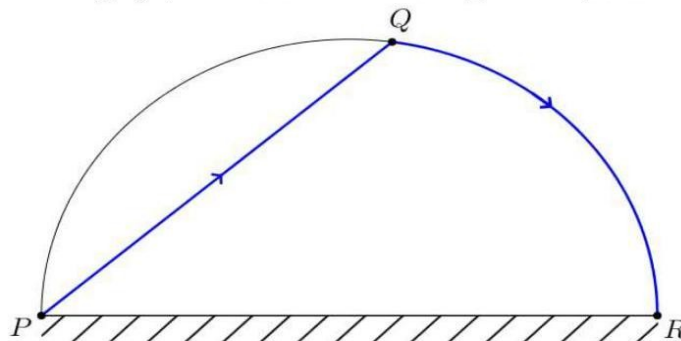
. Nêu nhận xét về sự tăng giảm của số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy. Số lượng quần thể nấm men có thể tăng lên vô cùng được không?

Bài 5. Lát cắt ngang của một vùng đất ven biển được mô hình hoá thành một hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là km).

Biết khoảng cách hai bên chân đê $OA = 2$ km , độ rộng của hồ $AB = 1$ km và ngọn đồi cao 528 m . Tìm độ sâu của hồ (tính bằng mét) tại điểm sâu nhất? (làm tròn đến hàng đơn vị).



Bài 6. Cho một bờ hồ hình bán nguyệt có bán kính bằng 2 km , đường kính PR như hình vẽ sau:



Từ điểm P anh Tài chèo một chiếc thuyền với vận tốc 3 km/h đến điểm Q trên bờ hồ, rồi chạy bộ dọc theo thành hồ đến vị trí R với vận tốc 6 km/h . Thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là bao nhiêu? (thời gian tính bằng phút).

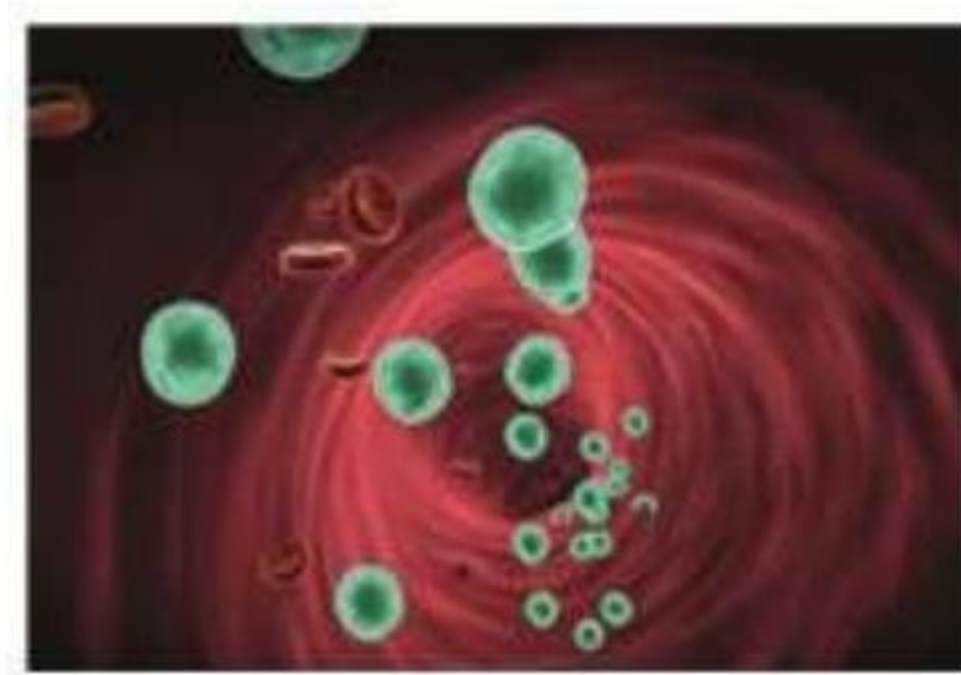
Bài 7. Xí nghiệp A sản xuất độc quyền một loại sản phẩm. Biết rằng hàm tổng chi phí sản xuất là $TC = x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000$ và hàm doanh thu là $TR = -2x^2 + 1312x$, với x là số sản phẩm. Lợi nhuận của xí nghiệp A được xác định bằng hàm số $f(x) = TR - TC$, cực đại lợi nhuận của xí nghiệp A khi đó đạt bao nhiêu sản phẩm?

Bài 8. Khi loại thuốc A đư c tiêm vào bệnh nhân, nồng đ mg/L của thuốc trong máu sau x phút (kể từ khi

bắt đầu tiêm) được xác định bởi công thức:

$$C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}.$$

(Nguồn: James Stewart, J. (2015). Calculus. Cengage Learning)



Để đưa ra những lời khuyên và cách xử lý phù hợp cho bệnh nhân, ta cần tìm khoảng thời gian mà nồng độ của thuốc trong máu đang tăng. Em hãy cho biết hàm nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là bao nhiêu trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?

Bài 9. Một tấm bạt hình vuông cạnh 20 m như hình vẽ dưới đây. Người ta dự tính cắt phần tô đậm của tấm bạt rồi gấp và may lại (các đường may không đáng kể), nhằm mục đích phủ lên tháp đèn trang trí (tháp dạng hình chóp tứ giác đều) để tránh hư hại tháp khi trời mưa.

Biết khối chóp hình thành sau khi gấp và may lại cần thể tích lớn nhất thì mới phủ kín tháp đèn. Hỏi phần diện tích tấm bạt bị cắt là bao nhiêu để đảm bảo yêu cầu trên.

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. CÁC KHÁI NIỆM CƠ BẢN

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D .

• Số M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \leq M$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = M$.

Kí hiệu: $M = \max_{x \in D} f(x)$ hoặc $M = \max_D f(x)$.

- Số m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên tập D nếu $f(x) \geq m$ với mọi $x \in D$ và tồn tại $x_0 \in D$ sao cho $f(x_0) = m$.

Kí hiệu: $m = \min_{x \in D} f(x)$ hoặc $m = \min_D f(x)$.

***Chú ý:**

- Khi nói giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x)$ (mà không nói "trên tập D ") thì ta hiểu đó là giá trị lớn nhất hay giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ trên tập xác định của hàm số.
- Để tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên tập D , ta thường lập bảng biến thiên của hàm số trên tập D để kết luận.
- Trong thực hành, ta dùng các ký hiệu $\min_D, \max_D$ để chỉ giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất (nếu có) của hàm số $f(x)$ trên tập D .

2. QUY TẮC TÌM GTLN, GTNN TRÊN ĐOẠN

Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a; b]$ và có đạo hàm trên $(a; b)$, có thể trừ ra tại một số hữu hạn điểm mà tại đó hàm số không có đạo hàm. Giả sử chỉ có hữu hạn điểm trong đoạn $[a; b]$ mà đạo hàm $f'(x)$ bằng 0.

Các bước tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên đoạn $[a; b]$

- Bước 1: Tìm các điểm $x_1, x_2, \dots, x_n \in (a; b)$, tại đó $f'(x)$ bằng 0 hoặc không tồn tại.
- Bước 2: Tính $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), f(a), f(b)$.
- Bước 3: Tìm số lớn nhất M và số nhỏ nhất m trong các số trên. Ta có:

$$M = \max_{[a; b]} f(x); m = \min_{[a; b]} f(x)$$

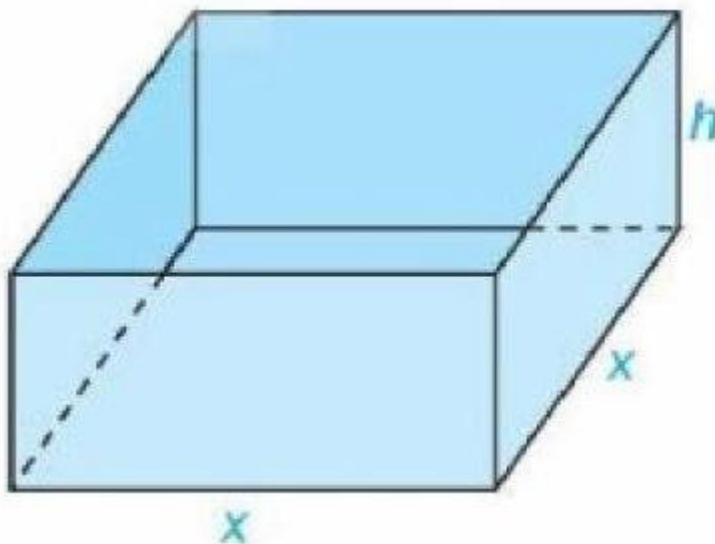
PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một loại vi khuẩn được tiêm một loại thuốc kích thích sự sinh sản. Sau t phút, số vi khuẩn được xác định theo công thức $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$). Hỏi sau bao nhiêu thì số vi khuẩn lớn nhất?



Bài 2. Giám đốc một nhà hát ^A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là $20\text{USD}/$ người thì trung bình có 1000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm $1\text{USD}/$ người thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi $1\text{USD}/$ người thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

Bài 3. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108 cm^2 như hình bên dưới. Tìm chiều cao của chiếc hộp sao cho thể tích của chiếc hộp là lớn nhất.



Bài 4. Nhà sản xuất dự định sử dụng hết 6 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, có đáy là hình vuông (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Tìm các kích thước của bể cá để bể cá có dung tích là lớn nhất?

Bài 5. Một người bán gạo muốn đóng một thùng tôn đựng gạo có thể tích không đổi bằng 10 m^3 , thùng tôn hình hộp chữ nhật có đáy là hình vuông, không nắp. Trên thị trường, giá tôn làm đáy thùng là 90000 đồng /m^2 và giá tôn làm thành xung quanh thùng là 40000 đồng /m^2 . Hỏi người bán gạo đó cần đóng thùng đựng gạo với cạnh đáy bằng bao nhiêu để chi phí mua nguyên liệu là nhỏ nhất?

Bài 6. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể sau t giờ được cho

$$c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1} (\text{mg / L})$$

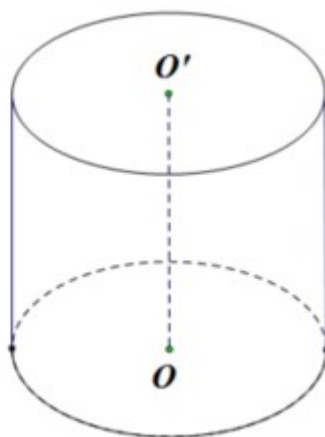
bởi công thức . Sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Bài 7. Cho một tấm nhôm hình vuông cạnh 40 cm . Người ta cắt ở bốn góc của tấm nhôm đó bốn hình vuông bằng nhau, mỗi hình vuông có cạnh bằng $x (\text{cm})$, rồi gập tấm nhôm lại như hình vẽ dưới đây để được một cái hộp không nắp. Tìm x để hộp nhận được có thể tích lớn nhất?

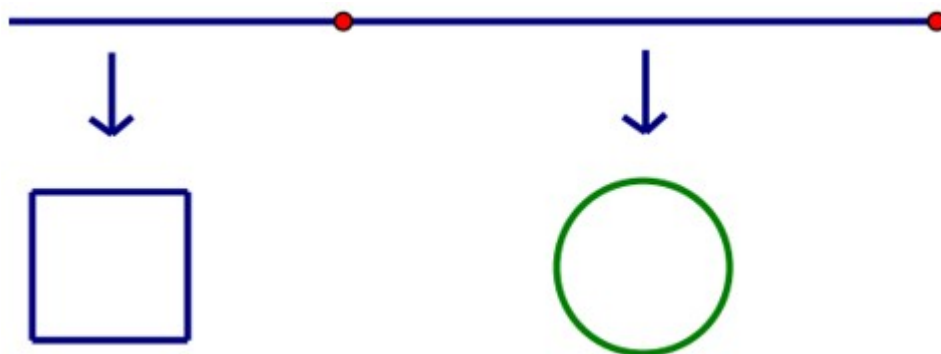
Bài 8. Ho ép khí quản co lại, ảnh hưởng đến tốc độ không khí đi vào khí quản. Tốc độ của không khí đi vào khí quản khi ho đo được bởi công thức: $V = k(R - r)r^2$ với $0 \leq r < R$, trong đó k là hằng số, R là bán kính bình thường của khí quản, r là bán kính khí quản khi ho. Hỏi bán kính khí quản khi ho bằng bao nhiêu thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất?

Bài 9. Một vật chuyển động theo quy luật $S = -t^3 + 18t^2$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và S (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Bài 10. Khi sản xuất vỏ lon sữa, lon bia hình trụ, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Hỏi khi nhà sản xuất muốn thể tích của hộp sữa là $V \text{ cm}^3$, thì diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



Bài 11. Một sợi dây kim loại dài 60 dm được cắt thành hai đoạn. Đoạn dây thứ nhất uốn thành hình vuông cạnh a , đoạn dây thứ hai uốn thành đường tròn bán kính r . Để tổng diện tích của hình vuông và hình tròn nhỏ nhất thì tỉ số $\frac{a}{r}$ bằng bao nhiêu?



Bài 12. Hằng ngày mực nước của hồ thủy điện ở miền Trung lên và xuống theo lượng nước mưa và các suối nước đổ về hồ. Tính từ thời điểm 8 giờ sáng, độ sâu của mực nước trong hồ tính theo mét và lên xuống theo

$$h(t) = -\frac{1}{3}t^3 + 5t^2 + 24t \quad (t > 0)$$

thời gian t (giờ) trong ngày cho bởi công thức: . Biết rằng phải thông báo cho các hộ dân phải di dời trước khi xả nước theo quy định trước 5 giờ. Hỏi cần thông báo cho hộ dân di dời trước khi xả nước mấy giờ. Biết rằng mực nước trong hồ phải lên cao nhất mới xả nước.

Bài 13. Để thiết kế một chiếc bể cá hình hộp chữ nhật không nắp có chiều cao là 60 cm, thể tích $96\,000\text{ cm}^3$. Người thợ dùng loại kính để sử dụng làm mặt bên có giá thành $70\,000\text{ VNĐ/m}^2$ và loại kính để làm mặt đáy có giá thành $100\,000\text{ VNĐ/m}^2$. Tính chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá.

Bài 14. Nhà xe khoán cho hai tài xế An và Bình mỗi người lần lượt nhận 32 lít và 72 lít xăng trong một tháng. Biết rằng trong một ngày tổng số xăng cả hai người sử dụng là 10 lít. Tổng số ngày ít nhất để hai tài xế sử dụng hết số xăng được khoán là bao nhiêu (biết số lít xăng tiêu thụ trong các ngày là như nhau).

Bài 15. Một loại thuốc được dùng cho một bệnh nhân và nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân được giám sát bởi bác sĩ. Biết rằng nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân sau khi tiêm vào cơ thể trong t giờ được

$$c(t) = \frac{t}{t^2 + 1} (\text{mg} / L)$$

cho bởi công thức . Hỏi sau khi tiêm thuốc bao lâu thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất?

Bài 16. Ông A dự định sử dụng hết 5 m^2 kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng. Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu?

Bài 17. Ông Khoa muốn xây một bể cá chứa nước dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích 288 m^3 .

Đáy bể là hình chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng, giá thuê công nhân xây bể là $500000 \text{ đồng} / \text{m}^2$. Nếu ông Khoa biết xác định các kích thước một cách hợp lý thì chi phí thuê nhân công sẽ thấp nhất. Hỏi ông Khoa trả chi phí thấp nhất để xây dựng bể cá đó là bao nhiêu?

BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

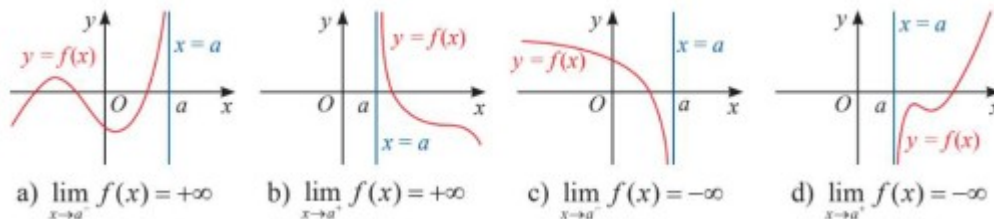
PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

1. ĐƯỜNG TIỆM CẬN ĐỨNG

Đường thẳng $x = a$ được gọi là một **đường tiệm cận đứng** (hay **tiệm cận đứng**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu ít nhất một trong các điều kiện sau thỏa mãn:

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

Từng trường hợp được minh họa trong hình dưới đây:

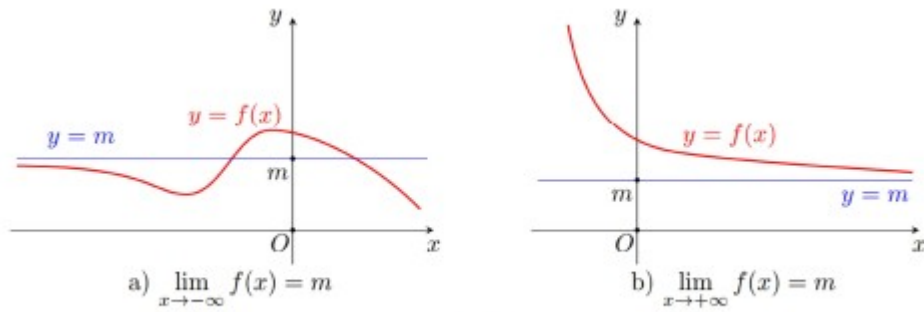


2. ĐƯỜNG TIỆM CẬN NGANG

Đường thẳng $y = m$ được gọi là một **đường tiệm cận ngang** (hay **tiệm cận ngang**) của đồ thị hàm số

$$y = f(x) \quad \text{nếu} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = m \quad \text{hoặc} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = m.$$

Đường thẳng $y = m$ là tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ được minh họa như Hình 5.

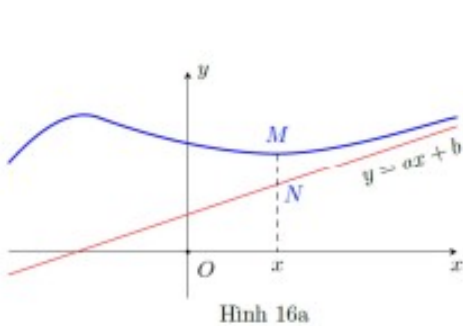
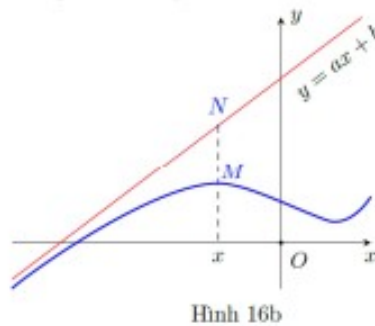


Hình 5

3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN XIÊN

Định nghĩa: Đường thẳng $y = ax + b, a \neq 0$, được gọi là **đường tiệm cận xiên** (hay **tiệm cận xiên**) của đồ thị hàm số $y = f(x)$ nếu $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ hoặc $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$.

Nhận xét: Giả sử đường thẳng $y = ax + b, (a \neq 0)$ là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$. Lấy điểm M thuộc đồ thị hàm số $y = f(x)$ và điểm N thuộc đường thẳng $y = ax + b$ có cùng hoành độ x . Khi đó, độ dài MN tiến tới 0 khi $x \rightarrow +\infty$ (Hình 16a) hay khi $x \rightarrow -\infty$ (Hình 16b).



***Chú ý:** Để xác định hệ số a, b của đường tiệm cận xiên $y = ax + b$ của đồ thị hàm số $y = f(x)$, ta có thể áp dụng công thức sau:

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] \quad \text{hoặc} \quad a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ và } b = \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax]$$

(Khi $a = 0$ thì ta có tiệm cận ngang $y = b$).

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

Bài 1. Một công ty sản xuất máy tính đã xác định được rằng, tính trung bình một nhân viên có thể lắp ráp

được $N(x) = \frac{50x}{x+4} (x \geq 0)$ bộ phận mỗi ngày sau x ngày đào tạo. Xem $y = N(x)$ là một hàm số xác định trên $[0; +\infty)$, khi số ngày đào tạo tăng lên, hãy tính số bộ phận một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá bao nhiêu?

Bài 2. Một bể chứa 1 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 20 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 30 lít/phút.

- Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Làm tròn đến hàng phần trăm.
- Sau t phút, nồng độ muối trong bể bằng bao nhiêu (gam/lít)? Tính theo t .
- Nếu cứ bơm liên tục thì nồng đ muối trong bể như thế nào?



Hình ảnh mang tính chất minh họa (Nguồn: Internet)

Bài 3. Chi phí (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm của một công ty được xác định bởi hàm số $F(x) = 60\,000 + 250x$. Gọi $\bar{F}(x)$ là hàm số biểu thị chi phí trung bình (đơn vị: nghìn đồng) để sản xuất x sản phẩm ($x \geq 0$), khi đó, hãy tính chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm.

Bài 4. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t+10}{t+5}$; $f(t)$ được tính bằng nghìn người (Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020). Khi đó, số dân tối đa của thị trấn không vượt quá bao nhiêu?

Bài 5. Một công ty chuyên sản xuất đồ gia dụng ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là:

$C(x) = 2x + 50$ (triệu đồng), khi đó $G(x) = \frac{C(x)}{x}$ là chi phí sản xuất cho mỗi sản phẩm. Khi đó, chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá bao nhiêu?

Bài 6. Một nhà máy sản xuất linh kiện điện tử thống kê được rằng trung bình một tổ sản xuất với x người thì

số sản phẩm sản xuất được trong một thời gian cố định được tính bằng công thức $P(x) = \frac{5000x}{4x+25}$. Hãy tìm số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn?



Bài 7. Số lượng sản phẩm của công ty bán được trong x (tháng) được tính bởi công thức

$S(x) = 300 \left(2 + \frac{4}{x+2} \right)$ với $x \geq 1$. Xem $y = S(x)$ là một hàm số xác định trên $[1; +\infty)$. Khi đó, hãy tính xem số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn bao nhiêu sản phẩm?

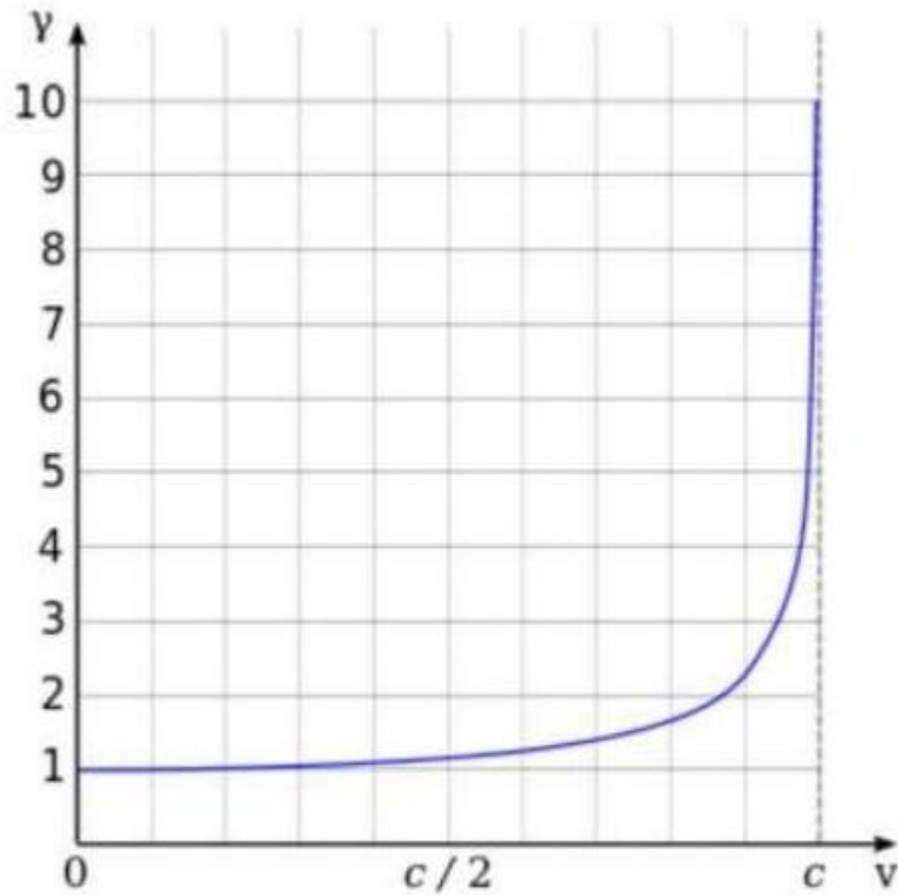
Bài 8. Định luật vạn vật hấp dẫn của Newton được cho bởi công thức $F = G \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2}$. Trong đó F là lực hấp

dẫn giữa 2 vật thể bất kì, G là hằng số hấp dẫn, m_1, m_2 là khối lượng các vật, r là khoảng cách giữa chúng.

Đồ thị của công thức này có tiệm cận đứng là $r = 0$, điều này có nghĩa là khi r dần về 0 thì lực hấp dẫn tiến đến bao nhiêu?

Bài 9. Một ứng dụng của hàm số trong vật lý là hệ số tương đối tính Lorentz được cho bởi công thức

$\gamma(v) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, với v là vận tốc tương đối giữa các hệ quy chiếu quán tính, c là tốc độ ánh sáng trong chân không. Hàm này được sử dụng trong thuyết tương đối đặc biệt của Einstein để mô tả các hiệu ứng tương đối tính có đồ thị trông như hình bên.



Dựa vào đồ thị hàm số đã cho, hãy cho biết khi hệ số tương đối dần về $+\infty$ thì vận tốc gần bằng bao nhiêu?

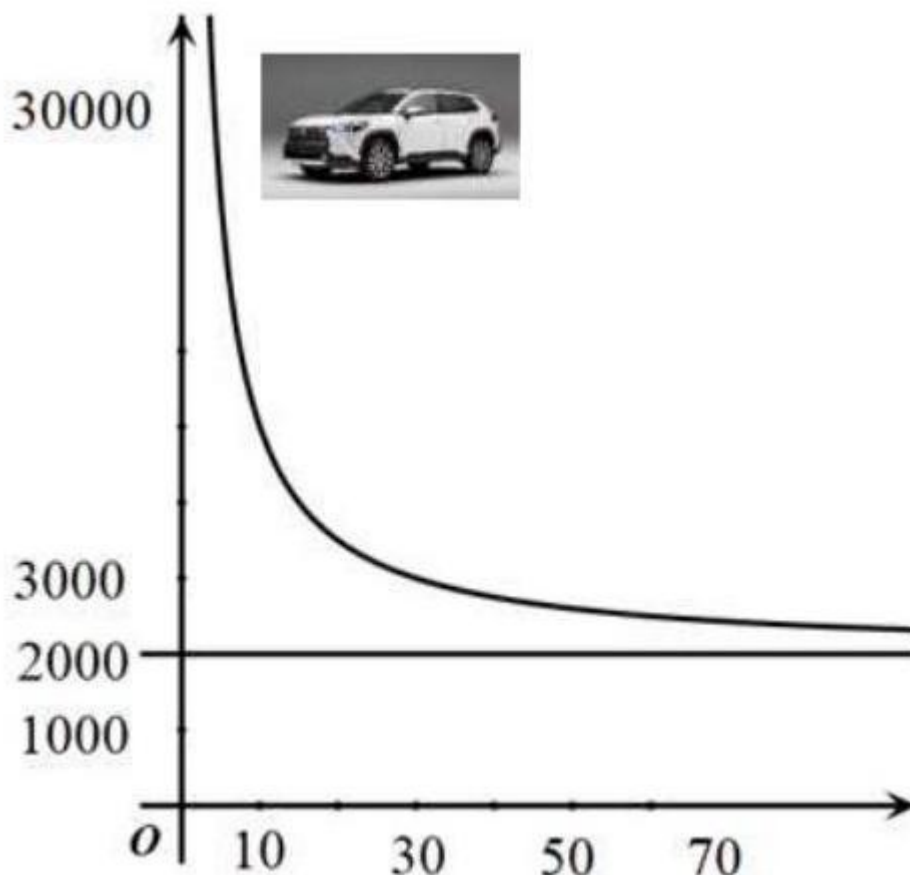
Bài 10. Một chiếc xe ô tô mới mua có giá 30 000 USD. Sau thời gian t (năm), người ta xác định giá trị của

$$f(t) = \frac{30000 + 2000t}{t} \text{ (USD)}$$

xe ô tô đó là

a) Sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng bao nhiêu (USD)?

b) Khi thời gian tăng lên, hỏi giá trị của xe ô tô đó ngày càng bằng bao nhiêu?



Bài 11. Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% , giả sử thêm vào dung dịch x (gam) muối tinh khiết và được dung dịch có nồng độ $f(x)\%$.

- Xác định hàm số $f(x)$.
- Khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì nồng độ phần trăm càng tăng và không vượt quá bao nhiêu %.

Bài 12. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức

$$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5} (f(t) \text{ được tính bằng nghìn người}) \quad (\text{Nguồn: Giải tích 12 nâng cao, NXBGD Việt Nam, 2020}).$$

Xem $y = f(t)$ là một hàm số xác định trên nửa khoảng $[0; +\infty)$.

- Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là bao nhiêu?
- Dân số của thị trấn đó không thể vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Bài 13. Số lượng xe máy điện bán được của một cửa hàng bán xe máy điện trong địa bàn thành phố Vinh

trong tháng thứ x được tính theo công thức $f(x) = 50 - \frac{30}{2+x}$, trong đó $x \geq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là bao nhiêu?
- Muốn số lượng xe bán ra trong tháng đạt mức từ 45 xe trở lên trong một tháng thì cần sau bao nhiêu tháng?

c) Khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức bao nhiêu xe một tháng?

Bài 14. Một tác giả muốn xuất bản một cuốn sách Toán học. Biết phí xuất bản là 7 triệu đồng và giá tiền in mỗi cuốn sách là 50 000 đồng. Gọi $t (t \geq 1)$ là số cuốn sách sẽ in và $f(t)$ (Đơn vị nghìn đồng) là chi phí trung bình của mỗi cuốn sách. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Bài 15. Tại một công ty sản xuất đồ chơi an toàn cho trẻ em, công ty phải chi 40 000 USD để thiết lập dây chuyền sản xuất ban đầu. Sau đó, cứ sản xuất được một sản phẩm đồ chơi A , công ty phải trả 6 USD cho nguyên liệu ban đầu và nhân công. Gọi $x (x \geq 1)$ là số đồ chơi A mà công ty đã sản xuất và $P(x)$ (đơn vị USD) là tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A . Người ta

xác định chi phí trung bình cho mỗi sản phẩm đồ chơi A là $F(x) = \frac{P(x)}{x}$. Xem $F(x)$ là hàm số theo x xác định trên nửa khoảng $[1; +\infty)$. Khi đó, chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn bao nhiêu ?

Bài 16. Giả sử dân số của một huyện sau t năm kể từ năm 2024 được mô tả bởi hàm số $f(t) = \frac{20t+5}{t+2}, t \geq 0$ (nghìn người). Dân số của huyện đó luôn tăng nhưng không vượt quá bao nhiêu nghìn người?

Bài 17. Để loại bỏ $x\%$ chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy, người ta ước lượng chi phí cần bỏ ra là $C(x) = \frac{400x+10}{100-x}$ (triệu đồng), $0 < x < 100$. Để đạt được gần như loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là bao nhiêu ?

Bài 18. Một công ty sản xuất đồ chơi ước tính chi phí để sản xuất x (sản phẩm) là $C(x) = 2x^2 + x + 25$ (nghìn đồng). Gọi $f(x)$ là chi phí sản xuất trung bình mỗi sản phẩm. Tìm đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$, coi $x \in [0; +\infty)$.

Bài 19. Một bể chứa 6 000 lít nước tinh khiết. Người ta bơm vào bể đó nước muối có nồng độ 25 gam muối cho mỗi lít nước với tốc độ 20 lít/phút. Giả sử sau t phút, tỉ số giữa khối lượng muối trong bể và thể tích nước trong bể (đơn vị gam/lít) là một hàm $f(t)$. Hãy xác định hàm số $f(t)$, coi $t \in [0; +\infty)$ và xác định nồng độ muối tối đa có trong bể.

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

PHẦN A. KIẾN THỨC CẦN NẮM

Sơ đồ khảo sát hàm số

- **Bước 1.** Tìm tập xác định của hàm số.
- **Bước 2.** Xét sự biến thiên của hàm số.

+ Tìm các giới hạn vô cực, giới hạn tại vô cực và tìm tiệm cận (nếu có).

+ Tính đạo hàm y' và tìm các điểm mà tại đó đạo hàm bằng 0 .

+ Lập bảng biến thiên; xác định chiều biến thiên, cực trị của hàm số (nếu có).

• **Bước 3.** Vẽ đồ thị hàm số

+ Vẽ các đường tiệm cận (nếu có).

+ Xác định các điểm đặc biệt của đồ thị: cực trị, giao điểm của đồ thị với các trục tọa độ (trong trường hợp đơn giản), ...

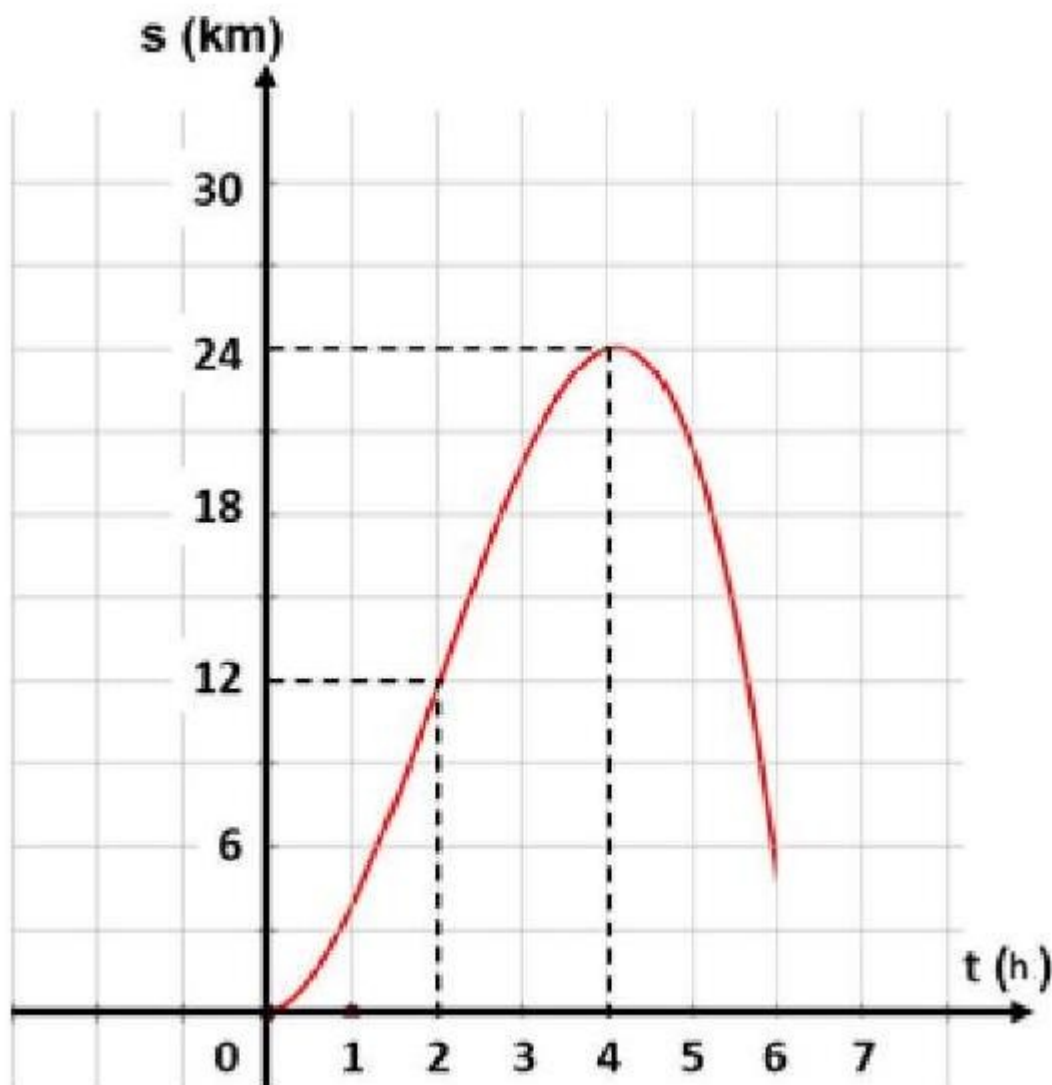
+ Nhận xét về đặc điểm của đồ thị: chỉ ra trục đối xứng, tâm đối xứng (nếu có).

PHẦN B. BÀI TẬP ÁP DỤNG

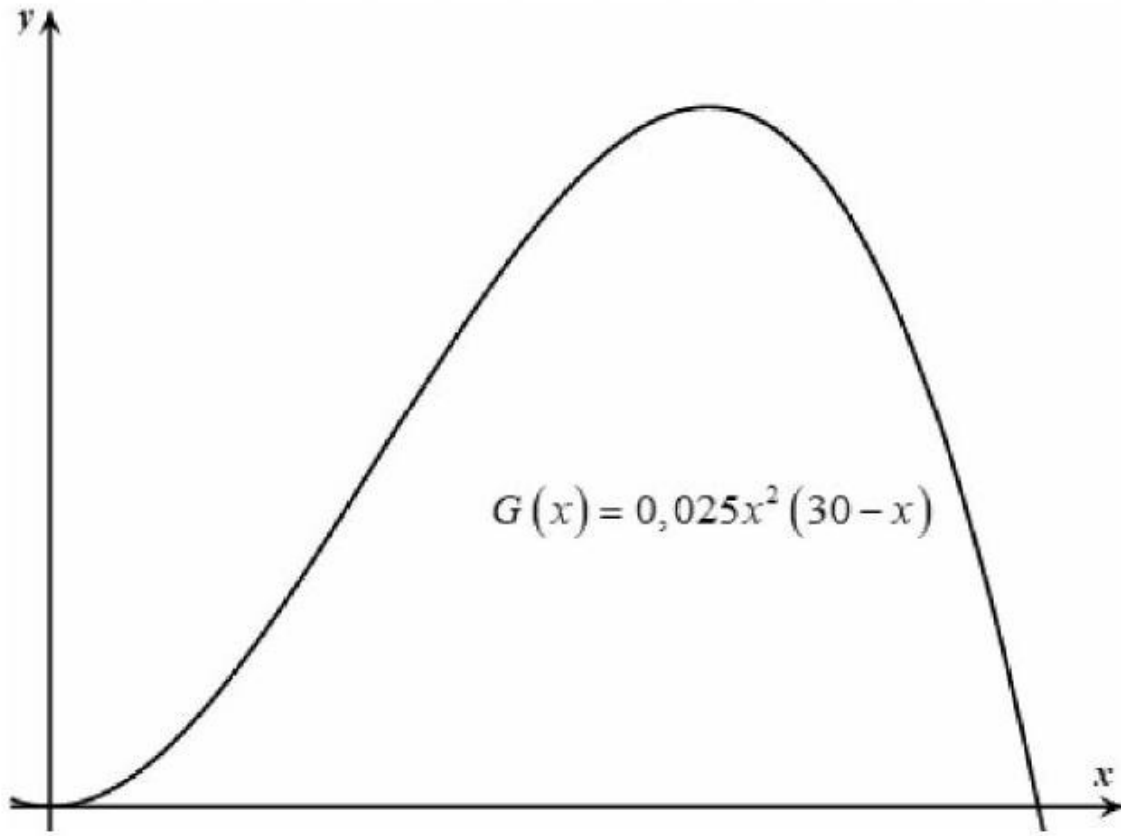
Bài 1. Thầy An tham dự giải "Đi bộ trực tuyến Ngành Giáo dục và Đào tạo Edu Run-HCMC" năm 2024.

Quãng đường thầy An đi được biểu diễn bằng hàm số $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$ (với $a \neq 0$) có đồ thị như hình bên. (trong đó t là thời gian tính bằng giờ, s là quãng đường tính bằng km).

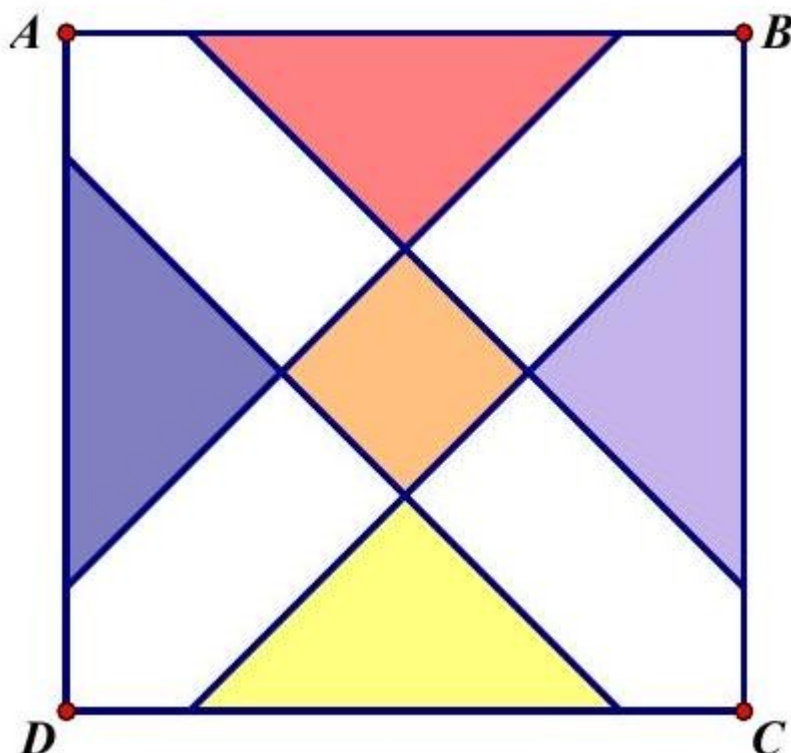
Khi đó, vận tốc tối đa của thầy An đạt được là bao nhiêu?



Bài 2. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,025x^2(30 - x)$ trong đó x là số miligam thuốc được tiêm cho bệnh nhân ($0 < x < 30$). Để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là bao nhiêu?



Bài 3. Cho hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4, chính giữa có một hình vuông đồng tâm với $ABCD$. Biết rằng bốn tam giác là bốn tam giác cân. Hỏi tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ nhất bằng bao nhiêu?



Bài 4. Giám đốc một nhà hát A đang phân vân trong việc xác định mức giá vé xem các chương trình được trình chiếu trong nhà hát. Việc này rất quan trọng nó sẽ quyết định nhà hát thu được bao nhiêu lợi nhuận từ các buổi trình chiếu. Theo những cuốn sổ ghi chép của mình, ông ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là $20\text{USD}/\text{người}$ thì trung bình có 1 000 người đến xem. Nhưng nếu tăng thêm $1\text{USD}/\text{người}$ thì sẽ mất 100 khách hàng hoặc giảm đi $1\text{USD}/\text{người}$ thì sẽ có thêm 100 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 2 USD lợi nhuận cho nhà hát trong các dịch vụ đi kèm. Hãy giúp giám đốc nhà hát này xác định xem cần tính giá vé vào cửa là bao nhiêu để thu nhập là lớn nhất.

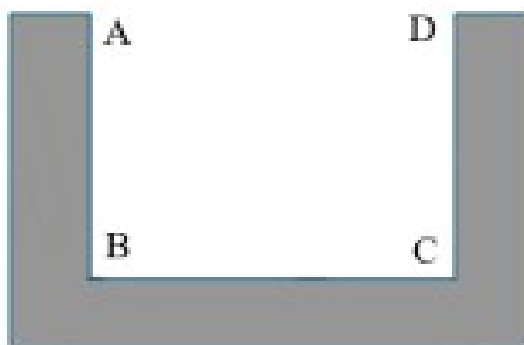
Bài 5. Bạn A có một đoạn dây mềm và dẻo không đàn hồi 20 m, bạn chia đoạn dây thành hai phần, phần đầu gấp thành một tam giác đều. Phần còn lại gấp thành một hình vuông. Hỏi độ dài phần đầu bằng bao nhiêu (m) để tổng diện tích hai hình trên là nhỏ nhất?

Bài 6. Một bể ban đầu chứa 150 lít nước. Sau đó, cứ mỗi phút người ta bơm thêm 50 lít nước, đồng thời cho vào bể 20 gam chất khử trùng (hòa tan). Đặt $f(t)$ gam/lít là nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút ($t \geq 0$), biết rằng sau khi khảo sát sự biến thiên của hàm số $f(t)$, ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng P gam/lít. Tìm số P (kết quả thể hiện dưới dạng số thập phân).



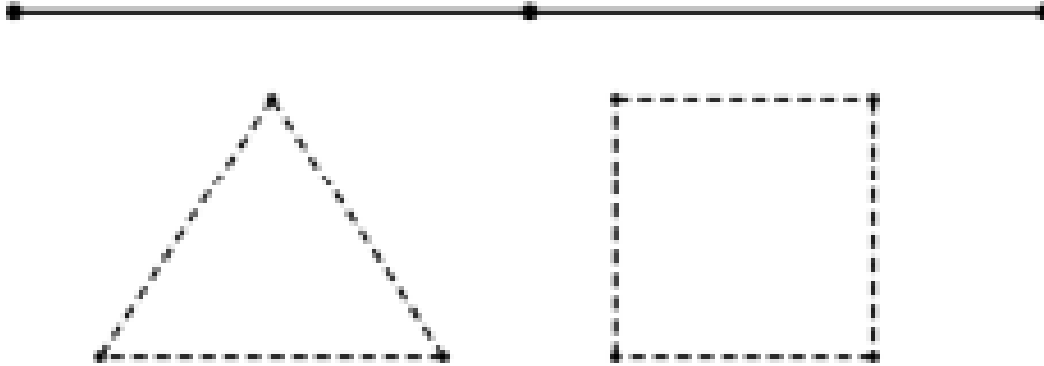
Bài 7. Ông A dự định sử dụng hết $6,7 \text{ m}^2$ kính để làm một bể cá bằng kính có dạng hình hộp chữ nhật không nắp, chiều dài gấp đôi chiều rộng (các mối ghép có kích thước không đáng kể). Bể cá có dung tích lớn nhất bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Bài 8. Hình dưới đây là mương dẫn nước thủy lợi tại một địa phương phục vụ tưới tiêu cho ruộng đồng. Phần không gian trong mương để nước chảy có mặt cắt ngang là hình chữ nhật $ABCD$. Với điều kiện lưu lượng nước qua mương cho phép thì diện tích mặt cắt $ABCD$ là $0,48 \text{ m}^2$. Để đảm bảo yêu cầu kỹ thuật tốt nhất cho mương, người ta cần thiết kế sao cho tổng độ dài $T = AB + BC + CD$ là ngắn nhất. Khi đó chiều rộng đáy mương bằng bao nhiêu (biết chiều rộng phải dưới 1 m , làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



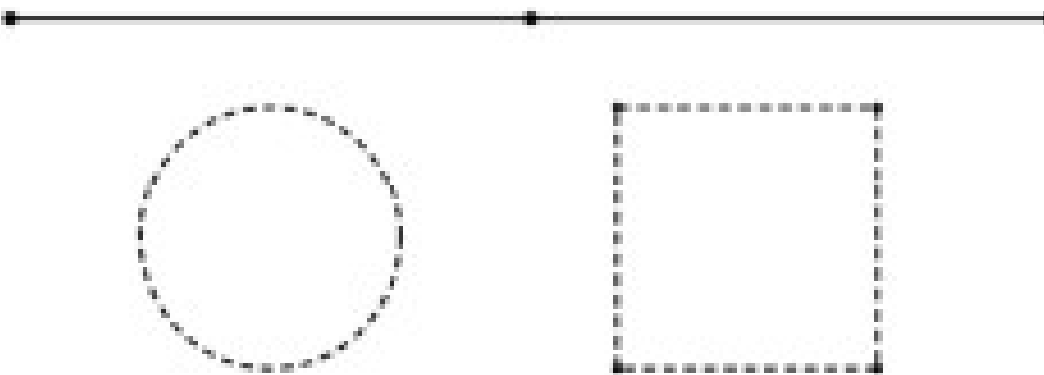
Bài 9. Cắt một đoạn dây dài 60 m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một tam giác đều có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ bên).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đơn hàng phần mười)?



Bài 10. Cắt một đoạn dây dài 30 m thành hai đoạn dây, đoạn dây thứ nhất gấp thành một đường tròn có diện tích S_1 , đoạn dây thứ hai gấp thành một hình vuông có diện tích S_2 (như hình vẽ bên).

Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng $T = S_1 + S_2$ là bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)?



Bài 11. Một cái hộp có dạng hình hộp chữ nhật có thể tích bằng 48 và chiều dài gấp đôi chiều rộng. Chất liệu làm đáy và 4 mặt bên của hộp có giá thành gấp ba lần giá thành của chất liệu làm nắp hộp. Gọi h là chiều

cao của hộp để giá thành của hộp là thấp nhất. Biết $h = \frac{m}{n}$ với m, n là các số nguyên dương nguyên tố cùng nhau. Tổng $m + n$ bằng bao nhiêu?

Bài 12. Một người nông dân có 15 000 000 đồng để làm một hàng rào hình chữ E dọc theo một con sông bao quanh hai khu đất trồng rau có dạng hai hình chữ nhật bằng nhau (hình vẽ dưới). Đi với mặt hàng rào song song với bờ sông thì chi phí nguyên vật liệu là 60 000 đồng/mét, còn đối với ba mặt hàng rào song song nhau thì chi phí nguyên vật liệu là 50 000 đồng/mét, mặt giáp với bờ sông không phải rào. Tìm diện tích lớn nhất của hai khu đất thu được sau khi làm hàng rào.

Bài 13. Nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B . Hai nhà máy thỏa thuận rằng, hằng tháng A cung cấp cho B số lượng sản phẩm theo đơn đặt hàng của B (tối đa 100 tấn sản phẩm). Nếu số lượng đặt hàng là x tấn sản phẩm thì giá bán cho mỗi tấn sản phẩm là $P(x) = 45 - 0,001x^2$ (triệu đồng). Cho

phí để A sản xuất x tấn sản phẩm trong một tháng là $C(x) = 100 + 30x$ triệu đồng (gồm 100 triệu đồng chi phí cố định và 30 triệu đồng cho mỗi tấn sản phẩm).

a) Tính chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng.

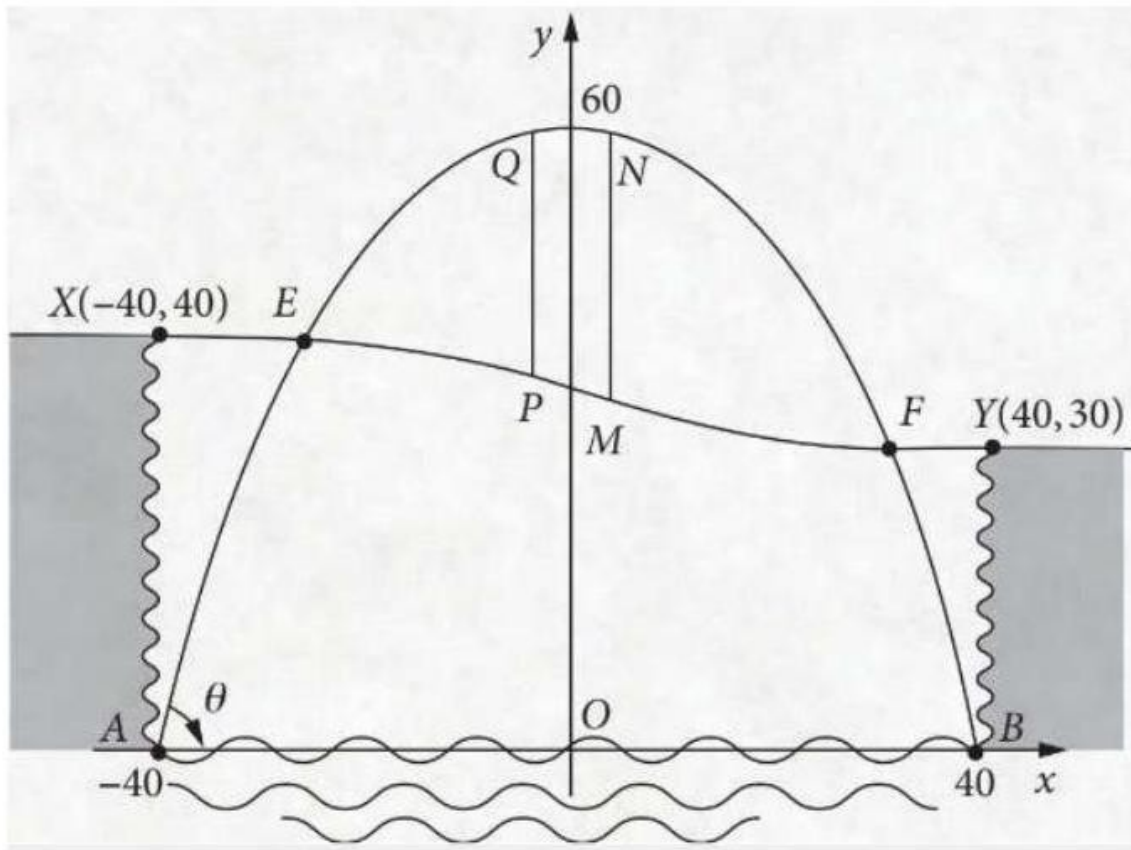
b) Tính số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B .

c) Xác định hàm số biểu thị lợi nhuận mà A thu được khi bán x tấn sản phẩm ($0 \leq x \leq 100$) cho B .

d) A bán cho B khoảng bao nhiêu tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất?

Bài 14. Một thành phố nằm trên một con sông chảy qua hẻm núi. Hẻm có chiều ngang 80 m, một bên cao 40 m và một bên cao 30 m. Một cây cầu sẽ được xây dựng bắc qua sông và hẻm núi. Sơ đồ thiết kế của cây cầu được gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ dưới đây.

Con đường XY xuyên qua hẻm núi được mô hình hóa bằng phương trình: $y = \frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35$.



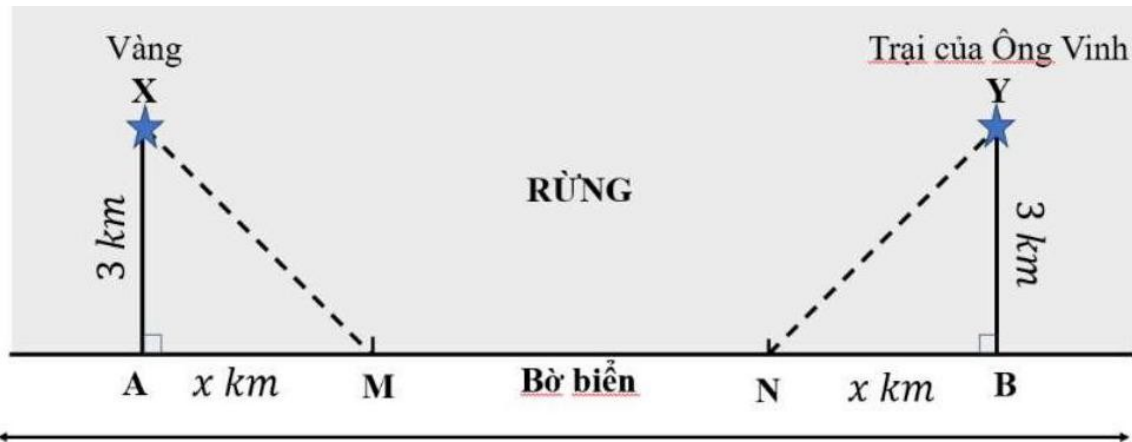
Hai cột đỡ dọc MN và PQ (song song với trục Oy) là đoạn nối giữa khung của parabol và đường XY .

Tính tổng độ dài đoạn MN và PQ biết rằng N và Q là hai điểm đối xứng qua Oy ; MN là đoạn có độ dài lớn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần chục).

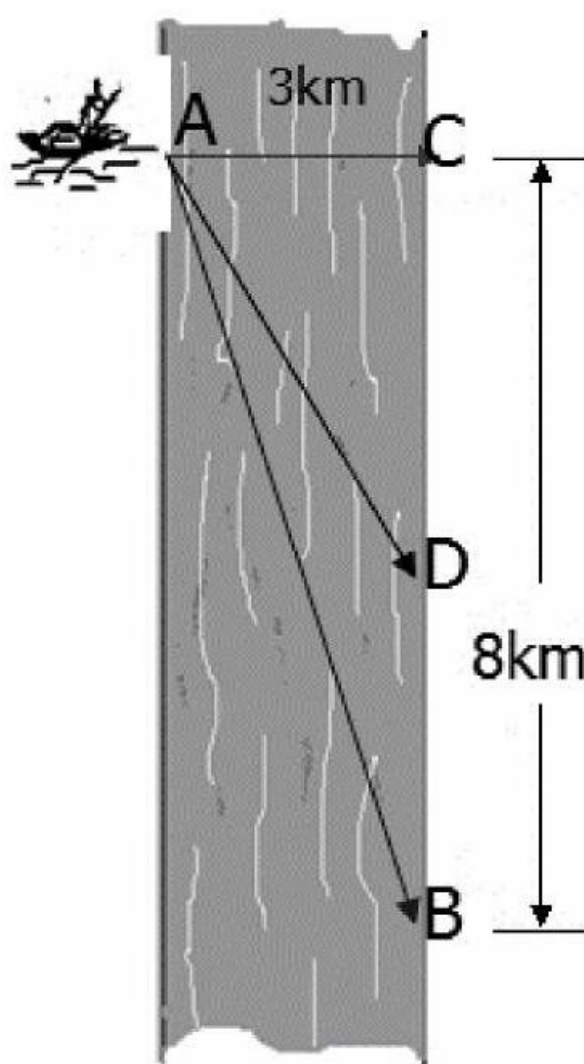
Bài 15. Ông Vinh đang ở trong rừng để đào vàng. Anh ta tìm thấy vàng ở X , cách điểm A : 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Trại của ông Vinh nằm ở Y , cách điểm B : 3 km.

Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 3 \text{ km}$, 18 km $AM = NB = x \text{ km}$ và $AX = BY = 3 \text{ km}$. (Như hình vẽ)

Khi đang đào vàng, ông Vinh bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Ông Vinh cần quay trở lại trại để lấy thuốc giải độc. Ông ấy chạy trong rừng và trên bãi biển với vận tốc lần lượt là 5 km/h và 13 km/h . Để về đến trại Ông Vinh cần chạy từ trong rừng qua đi M, N trên bãi biển. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi ông Vinh về đến trại (làm tròn đáp án đến hàng phần chục).



Bài 16. Một người đàn ông muốn chèo thuyền ở vị trí A tới đi B về phía hạ lưu bờ đối diện, càng nhanh càng tốt, trên một bờ sông thẳng rộng 3 km (như hình vẽ). Anh có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D giữa C và B và sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền 6 km/h , chạy 8 km/h và quãng đường $BC = 8 \text{ km}$. Biết tốc độ của dòng nước là không đáng kể so với tốc độ chèo thuyền của người đàn ông. Tính khoảng thời gian ngắn nhất (đơn vị: phút) để người đàn ông đến B .



ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI

Chủ đề 1. ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. TÍNH ĐƠN ĐIỆU VÀ CỰC TRỊ CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Vận tốc chuyển động của vật được xác định theo công thức $v(t) = s'(t) = -6t^2 + 48t + 9$.

Ta có $v'(t) = -12t + 48; v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Từ đó ta có bảng biến thiên:

t	0	4	10
$v'(t)$	+	0	-
$v(t)$			

Nhìn vào bảng biến thiên ta thấy: Từ thời điểm bắt đầu chuyển động đến thời điểm $t = 4$ giây, vật chuyển động nhanh dần. Từ thời điểm $t = 4$ giây đến thời điểm $t = 10$ giây, vật chuyển động chậm dần.

$$v(t) = v'(t) = \frac{1}{100}(90t^2 - t^3)$$

Bài 2. Ta có

$$v'(t) = \frac{1}{100}(180t - 3t^2).$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 60 \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

t	0	60		90
$v'(t)$	0	+	0	-
$v(t)$	0	1080		0

Từ bảng biến thiên ta thấy: Tốc độ bơm nước lớn nhất bằng 1080, tại thời điểm $t = 60$ phút.

Bài 3. Giả sử cần giảm giá bán mỗi cái tivi là x triệu đồng ($x < 14$).

Do giảm giá bán mỗi cái 500 ngàn đồng thì số lượng tivi bán ra sẽ tăng thêm 10 cái mỗi tháng nên số lượng

tivi bán ra tăng lên bấy giờ là: $\frac{10x}{0,5} = 20x$

Khi đó, doanh thu một tháng của cửa hàng là: $(100 + 20x) \cdot (14 - x) = -20x^2 + 180x + 1400$

Xét hàm số $f(x) = -20x^2 + 180x + 1400 (x < 14)$

Ta có $f'(x) = -40x + 180; f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4,5$

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	4,5	14
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$	1805	0

Từ bảng biến thiên ta thấy: Để doanh thu của cửa hàng đạt cao nhất thì giá bán mỗi cái tivi là $14 - 4,5 = 9,5$ triệu đồng

$$P'(t) = \frac{18,75 \cdot e^{-0,75t}}{(0,25 + e^{-0,75t})^2} > 0, \forall t > 0$$

Bài 4. Ta có

. Suy ra số lượng quần thể nấm men được nuôi cấy luôn tăng.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{0,25 + e^{-0,75t}} = 100$$

Ta lại có . Do đó, số lượng quần thể nấm men tăng nhưng không vượt quá 100, nên không thể tăng lên vô cùng được.

Bài 5. Theo đề bài ta có: $OA = 2 \text{ km}, OB = 3 \text{ km}$ và $528 \text{ m} = 0,528 \text{ km}$

Đồ thị hàm số $y = f(x)$ đi qua các điểm $O(0;0), A(2;0), C(3;0)$ suy ra
 $y = f(x) = ax(x-2)(x-3) = a(x^3 - 5x^2 + 6x)$ với $a > 0$.

$$y' = a(3x^2 - 10x + 6), y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5-\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Ta có:

Từ độ cao của đồi ta có tại vị trí điểm cực đại $x_{CD} = \frac{5-\sqrt{7}}{3}; y_{CD} = 0,528$ suy ra

$$a = \frac{0,528}{\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6 \cdot \left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)} \approx 0,25$$

Điểm sâu nhất của hồ ứng với vị trí của điểm cực tiểu $x_{CT} = \frac{5+\sqrt{7}}{3}, y_{CT} \approx 0,1578$

Vậy độ sâu của hồ tại điểm sâu nhất xấp xỉ $0,1578 \text{ km}$ hay xấp xỉ 158 m .

$$\angle QPR = \varphi (\text{rad}), \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

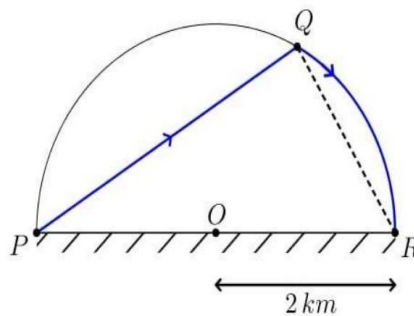
Bài 6. Đặt

Ta có $\triangle PQR$ vuông tại $Q \Rightarrow PQ = PR \cdot \cos \varphi = 4 \cos \varphi$

Mà $\angle QOR = 2\angle QPR = 2\varphi$

Độ dài cung tròn $QR = 2 \cdot 2\varphi = 4\varphi$

Thời gian anh Tài chèo từ P đến Q là: $\frac{4 \cos \varphi}{3}$ (giờ).



Thời gian anh Tài chèo từ Q đến R là: $\frac{4\varphi}{6} = \frac{2\varphi}{3}$ (giờ).

Tổng thời gian anh Tài di chuyển từ P đến R là: $t = \frac{4 \cos \varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3} \left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$

Xét hàm số $t(\varphi) = \frac{4\cos\varphi}{3} + \frac{2\varphi}{3}$ với $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$t'(\varphi) = \frac{1}{3}(-4\sin\varphi + 2), \quad \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

$$t'(\varphi) = 0, \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin\varphi = \frac{1}{2}, \varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{6}$$

Bảng biến thiên:

φ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	
$t'(\varphi)$		+	0	-
$t(\varphi)$			$t\left(\frac{\pi}{6}\right)$	
	$\frac{4}{3}$			$\frac{\pi}{3}$

Vậy thời gian chậm nhất mà anh Tài di chuyển từ P đến R là $t\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{3} + \frac{\pi}{9} \approx 1,5$ (giờ) hay 90 phút.

Bài 7. Xét hàm số: $f(x) = TR - TC = -2x^2 + 1312x - (x^3 - 77x^2 + 1000x + 40000)$

$$f(x) = -x^3 + 75x^2 + 312x - 40000$$

TXĐ: $D = (0; +\infty)$

$$f'(x) = -3x^2 + 150x + 312 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 52 (N) \\ x = -2 (L) \end{cases}$$

Ta có

Bảng biến thiên:

x	0	52	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-
$f(x)$			74416	
	-4000			$-\infty$

Hàm số đạt giá trị cực đại $y_{CD} = 74416$ tại $x = 52$.

Vậy lợi nhuận của công ty đạt cực đại khi số sản phẩm $x = 52$.

Bài 8. Xét hàm số $y = C(x) = \frac{30x}{x^2 + 2}$ trên khoảng $x \in (0; 6)$.

$$y' = \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2}$$

Ta có:

$$y' = 0 \Leftrightarrow \frac{-30x^2 + 60}{(x^2 + 2)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2} \end{cases} \text{ do } x \in (0; 6) \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{2}$	6
y'		+	0
y	0	$\frac{15\sqrt{2}}{2}$	$\frac{90}{19}$

Từ bảng biến thiên suy ra:

Nồng độ thuốc trong máu $C(x)$ đạt giá trị cực đại là $\frac{15\sqrt{2}}{2} (\text{mg/L}) \approx 10,6 (\text{mg/L})$ trong khoảng thời gian 6 phút sau khi tiêm.

Bài 9. Gọi cạnh đáy hình vuông của tháp là $x (\text{m})$.

Độ dài đường chéo tấm bạt bằng $20\sqrt{2} (\text{m})$.

Gọi hình chóp tứ giác đều là $S \cdot ABCD$, Gọi M, N lần lượt là trung điểm AB, CD .

Khi đó $MN = x (\text{m}), SN = \frac{20\sqrt{2} - x}{2} (\text{m})$ với $0 < x < 10\sqrt{2}$.

Gọi O là tâm của hình vuông, ta có

$$SO = \sqrt{SN^2 - ON^2} = \sqrt{\left(\frac{20\sqrt{2} - x}{2}\right)^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} SO = \frac{1}{6} x^2 \sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}$$

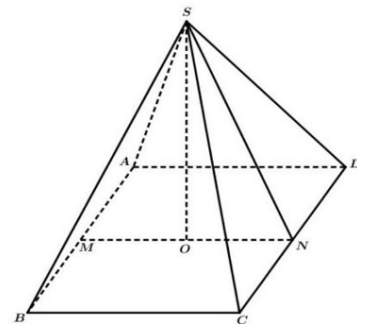
Thể tích khối chóp

$$V' = \frac{20x(80 - 5\sqrt{2}x)}{6\sqrt{800 - 40\sqrt{2}x}} \Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = 8\sqrt{2}$$

Ta có

với $0 < x < 10\sqrt{2}$.

Xét bảng biến thiên:



x	0	$8\sqrt{2}$		$10\sqrt{2}$
$V'(x)$		+	0	-
$V(x)$				

Vậy khi $x = 8\sqrt{2}$ thì thể tích khối chóp lớn nhất

$$V = \frac{256\sqrt{10}}{3} (\text{m}^3)$$

Diện tích phần bị cắt của tấm bìa:

$$S = S_{h\gamma} - S_{ABCD} - 4 \cdot S_{\triangle SAB} = 20^2 - (8\sqrt{2})^2 - 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{20\sqrt{2} - 8\sqrt{2}}{2} \cdot 8\sqrt{2} = 80 (\text{m}^2)$$

BÀI 2. GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Bài 1. Xét hàm số $N(t) = 1000 + 30t^2 - t^3$ ($0 \leq t \leq 30$)

$$N'(t) = 60t - 3t^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 20 \end{cases}$$

Ta có:

t	0	20	30
N'	+	0	-
N			

Với $t = 20$ giây thì số vi khuẩn lớn nhất.

Bài 2. Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x$ (ĐK: $x > -20$)

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập

$$f(x) = (20 + x + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000$$

Bảng biến thiên:

x	-20	-6	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f(-6)$	
	$f(-20)$		$-\infty$

$\max_{(-20; +\infty)} f(x) = f(-6)$. Suy ra giá vé là: $x + 20 = 20 - 6 = 14$ USD

Bài 3. Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là $x(\text{cm}, x > 0)$ và chiều cao là $h(\text{cm}, h > 0)$

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108 cm^2 nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x} (\text{ cm})$
(điều kiện $0 < x < \sqrt{108}$).

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4} (\text{ cm}^3)$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $V = -\frac{x^3}{4} + 27x (0 < x < \sqrt{108})$

Ta có: $V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6 (0 < x < \sqrt{108})$
(do

Lập bảng biến thiên của hàm số:

x	0	6	$\sqrt{108}$
V'		+	0
			-
V	0	108	0

Do đó, thể tích của chiếc hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6 \text{ cm}$

Khi đó, chiều cao của chiếc hộp là: $\frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3 (\text{ cm})$

Bài 4. Gọi x, y lần lượt là cạnh đáy và chiều cao của bể cá (điều kiện $x, y > 0$).

Ta có: thể tích bể cá $V = x^2 y$.

Theo đề bài ta có: $4xy + x^2 = 6 \Leftrightarrow y = \frac{6 - x^2}{4x} (\text{điều kiện } y > 0 \Leftrightarrow 6 - x^2 > 0 \Rightarrow 0 < x < \sqrt{6})$

Khi đó: $V = x^2 \cdot \frac{6 - x^2}{4x} = \frac{6x - x^3}{4} \Rightarrow V' = \frac{6 - 3x^2}{4}$

$V' = 0 \Leftrightarrow 6 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{2}$.

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	
V'		+	0	-
V				

Suy ra $V_{\max} = \sqrt{2}$ tại $x = \sqrt{2}; y = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy bể cá có kích thước là cạnh đáy là $\sqrt{2}$, chiều cao là $\frac{1}{\sqrt{2}}$ thì dung tích là lớn nhất.

Bài 5. Gọi chiều dài cạnh đáy hình vuông và chiều cao của thùng đựng gạo lần lượt là x, y (m);

$(x > 0, y > 0)$. Ta có thể tích của thùng là:

$$V = x^2 y = 10 \Rightarrow y = \frac{10}{x^2}$$

Diện tích đáy hình hộp là x^2 và diện tích xung quanh là $4xy$ nên chi phí để làm thùng tôn là

$$90000x^2 + 160000xy = 90000x^2 + \frac{1600000}{x} = f(x) \quad 120000\sqrt[3]{900}$$

Trên khoảng $(0; +\infty)$ ta có $f'(x) = 180000x - \frac{1600000}{x^2}$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$$

Ta có bảng biến thiên:

x	0	$\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$		$120000\sqrt[3]{900}$	$+\infty$

Vậy chi phí nhỏ nhất bằng $120000\sqrt[3]{900}$ đồng khi và chỉ khi cạnh đáy hình hộp bằng $\frac{2\sqrt[3]{10}}{\sqrt[3]{9}}$.

Bài 6. Xét hàm số $c(t) = \frac{2t}{t^2 + 1}, (t > 0)$.

$$c'(t) = \frac{2 - 2t^2}{(t^2 + 1)^2}$$

$$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

t	0	1	$+\infty$
$c'(t)$	+	0	-
$c(t)$	0	1	0

Sau 1 giờ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân cao nhất.

Bài 7. Ta có: $h = x$ (cm) là chiều cao của hình hộp.

Vì tấm nhôm được gấp lại tạo thành hình hộp nên cạnh đáy của hình hộp là: $40 - 2x$ (cm)

Vậy diện tích đáy hình hộp $S = (40 - 2x)^2 \text{ (cm}^2\text{)}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ 40 - 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < 20 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0; 20)$$

Thể tích của hình hộp là: $V = S.h = x \cdot (40 - 2x)^2$

Xét hàm số: $y = x \cdot (40 - 2x)^2$ trên khoảng $(0; 20)$

Ta có: $y' = (40 - 2x)^2 - 4x(40 - 2x) = (40 - 2x)(40 - 6x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20(L) \\ x = \frac{20}{3}(N) \end{cases}$$

x	0	$\frac{20}{3}$	20
y'		+	0
y			128000

$\frac{128000}{27}$

0 $\nearrow$ $\frac{128000}{27}$ $\searrow$ 0

Vậy $x = \frac{20}{3}$ thì thể tích khối hộp là lớn nhất.

Bài 8. Ta có $V = kRr^2 - kr^3$

$$V' = 2kRr - 3kr^2, V' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 0 \\ r = \frac{2R}{3} \end{cases}$$

Bảng biến thiên:

r	0	$\frac{2R}{3}$	R
$v'(r)$	+	0	-
$v(r)$	0	$\frac{4kR^3}{27}$	0

$2R$

Từ BBT ta có bán kính khí quản khi ho bằng 3 thì tốc độ của không khí đi vào khí quản là lớn nhất.

Bài 9. Ta có: $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 36t$ với $t \in [0; 10]$

$$v'(t) = -6t + 36$$

$$v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 6$$

$$v(0) = 0$$

$$v(10) = 60$$

$$v(6) = 108$$

Vậy vận tốc lớn nhất của vật trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động là 108 (m/s) .

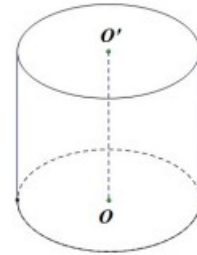
Bài 10.

$$V = \pi r^2 h \Rightarrow h = l = \frac{V}{\pi r^2}$$

Ta có:

Diện tích toàn phần của lon sữa:

$$\begin{aligned} S_{tp} &= S_{xq} + S_{2d} = 2\pi r l \\ &= 2\pi r \frac{V}{\pi r^2} + 2\pi r^2 = \frac{2V}{r} + 2\pi r^2 \end{aligned}$$



$$\frac{2V}{r} + 2\pi r^2 = \frac{V}{r} + \frac{V}{r} + 2\pi r^2 \geq 3\sqrt{\frac{V}{r} \cdot \frac{V}{r} \cdot 2\pi r^2} = 6\sqrt{\frac{\pi V^2}{4}}$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$\frac{V}{r} = 2\pi r^2 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Dấu "=" xảy ra khi:

$$6\sqrt[3]{\frac{\pi V^2}{4}} \quad \text{khi} \quad r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Vậy diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất bằng

Bài 11. Ta có: $4a + 2\pi r = 60 \Leftrightarrow \pi r = 30 - 2a$

Điều kiện: $0 < 4a < 60 \Leftrightarrow 0 < a < 15$

Tổng diện tích của hình vuông và hình tròn:

$$S = a^2 + r^2 \pi = a^2 + \frac{(30 - 2a)^2}{\pi} = \frac{1}{\pi} [(\pi + 4)a^2 - 120a + 900]$$

Xét $f(a) = (\pi + 4)a^2 - 120a + 900$ với $a \in (0, 15)$

$f(a)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại $a = \frac{120}{2(\pi + 4)} = \frac{60}{\pi + 4} \in (0, 15)$

S đạt giá trị nhỏ nhất khi $a = \frac{60}{\pi + 4} \Rightarrow \pi r = 30 - 2 \cdot \frac{60}{\pi + 4} = \frac{30\pi}{\pi + 4} \Rightarrow r = \frac{30}{\pi + 4}$

Khi đó: $\frac{a}{r} = \frac{60}{\pi + 4} : \frac{30}{\pi + 4} = 2$

Kết luận: $\frac{a}{r} = 2dm$

Bài 12. Ta có: $h'(t) = -t^2 + 10t + 24$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 10t + 24 = 0 \Leftrightarrow t = 12$$

Bảng biến thiên:

t	0	12	$+\infty$
$h'(t)$	+	0	-
$h(t)$		$h_{\max}$	

Để mực nước lên cao nhất thì phải mất 12 giờ. Khi đó 20 giờ nước đầy. Vậy phải thông báo cho dân di dời vào 15 giờ chiều cùng ngày.

Bài 13. Gọi $x, y(m) (x > 0, y > 0)$ là chiều dài và chiều rộng của đáy bể.

$$0,6xy = 0,096 \Leftrightarrow y = \frac{0,16}{x}$$

Khi đó theo đề ta suy ra:

Giá thành của bể cá được xác định theo hàm số sau:

$$f(x) = 2 \cdot 0,6 \left(x + \frac{0,16}{x} \right) \cdot 70000 + 100000 \cdot x \cdot \frac{0,16}{x} \Leftrightarrow f(x) = 84000 \left(x + \frac{0,16}{x} \right) + 16000$$

$$f'(x) = 84000 \left(1 - \frac{0,16}{x^2} \right) \Rightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0,4$$

Ta có:

Bảng biến thiên:

x	0	0,4	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$		$f(0,4)$	

Dựa vào bảng biến thiên suy ra chi phí thấp nhất để hoàn thành bể cá là $f(0,4) = 83200VN$

Bài 14. Gọi x (lít) ($0 < x < 10$) là số xăng An sử dụng trong 1 ngày.

Khi đó: $10 - x$ (lít) là số xăng Bình sử dụng trong 1 ngày.

Suy ra: $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}, x \in (0;10)$

là tổng số ngày An và Bình sử dụng hết số xăng được khoán.

Ta có: $f'(x) = -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2}$

Cho $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{32}{x^2} + \frac{72}{(10-x)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ x = -20 \notin (0;10) \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số $f(x) = \frac{32}{x} + \frac{72}{10-x}, x \in (0;10)$

x	0	4	10		
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$		20		$+\infty$

Dựa vào BBT ta có ít nhất 20 ngày thì An và Bình sử dụng hết lượng xăng được khoán.

Bài 15. Xét hàm số $c(t) = \frac{t}{t^2+1} (t > 0)$

$c'(t) = \frac{1-t^2}{(t^2+1)^2}$

Ta có

$c'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1(L) \end{cases}$

Bảng biến thiên:

t	0	1	$+\infty$		
$c'(t)$		+	0	-	
$c(t)$	0		$\frac{1}{2}$		0

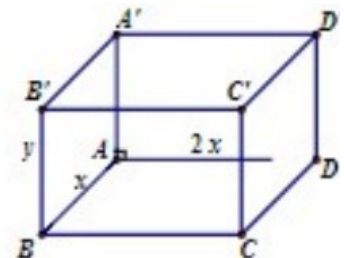
Vậy khi $t = 1$ thì nồng độ thuốc trong máu của bệnh nhân là cao nhất.

Bài 16.

Gọi x và y lần lượt là chiều rộng và chiều cao của bể cá.

Ta có: Thể tích của bể cá là $V = 2x^2y$.

Theo đề bài ta có:



$$2xy + 2.2xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow 6xy + 2x^2 = 5 \Leftrightarrow y = \frac{5 - 2x^2}{6x}$$

$$\Rightarrow V = 2x^2 \cdot \frac{5 - 2x^2}{6x} = \frac{5x - 2x^3}{3} \Rightarrow V' = \frac{5 - 6x^2}{3}$$

$$\Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

$$\Rightarrow V' = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{5}{6}}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{\frac{5}{6}}$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
V'		+	-
V	0	$\frac{5\sqrt{30}}{27}$	0

$\frac{5\sqrt{30}}{27} \approx 1,01 \text{ m}^3$

Vậy thể tích lớn nhất của bể cá là

Bài 17. Theo bài ra ta có chi phí thuê nhân công thấp nhất thì bể phải xây dựng có tổng diện tích xung quanh và diện tích đáy nhỏ nhất.

Gọi ba kích thước của bể là $a, 2a, c$ với $(a, c > 0)$.

Diện tích các mặt cần xây là $S = 2a^2 + 4ac + 2ac = 2a^2 + 6ac$.

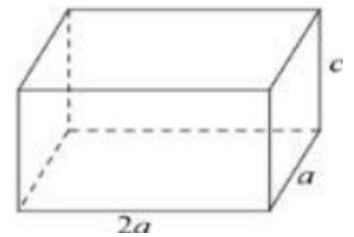
$$V = a \cdot 2a \cdot c = 2a^2c = 288 \Rightarrow c = \frac{144}{a^2}$$

Thể tích bể là

$$S = 2a^2 + 6a \cdot \frac{144}{a^2} = 2a^2 + \frac{864}{a} = 2a^2 + \frac{432}{a} + \frac{432}{a} \geq 3\sqrt{2a^2 \cdot \frac{432}{a} \cdot \frac{432}{a}} = 216$$

Khi đó:

Vậy chi phí thấp nhất là $216.500000 = 108$ triệu đồng.



BÀI 3. ĐƯỜNG TIỆM CẬN

Bài 1. Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} N(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50x}{x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50}{1+\frac{4}{x}} = 50$

Vậy một nhân viên lắp ráp tối đa không vượt quá 50 bộ phận máy tính.

Bài 2.

a) Sau 20 phút, số gam muối trong bể là: $20 \times 30 \times 20 = 12000$ (gam).

Sau 20 phút, số lít nước trong bể là: $1000 + 30 \times 20 = 1600$ (lít).

Sau 20 phút, nồng độ muối trong bể là: $\frac{12000}{1600} = \frac{15}{2} \approx 7,5$ (gam/lít).

b) Sau t phút, số gam muối trong bể là: $20 \times 30t = 600t$ (gam).

Sau t phút, số lít nước trong bể là: $1000 + 30t$ (lít).

Sau t phút, nồng độ muối trong bể là: $f(t) = \frac{600t}{1000 + 30t} = \frac{60t}{100 + 3t}$ (gam/lít).

c) Xét hàm số $f(t) = \frac{60t}{100 + 3t}$ Với t có đơn vị là phút và $t \geq 0$.

Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60t}{100 + 3t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{\frac{100}{t} + 3} = 20$.

Nên tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y = 20$.

Vậy nồng độ muối trong bể luôn nhỏ hơn và ngày càng gần 20 (gam/lít).

$$F(x) = \frac{60000 + 250x}{x}$$

Bài 3. Chi phí trung bình để sản xuất x sản phẩm là (nghìn đồng).

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{60000 + 250x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{60000}{x} + 250 \right) = 250$

Vậy chi phí trung bình tối đa để sản xuất một sản phẩm là không quá 250000 đồng.

Bài 4. Ta có: $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = 26$.

Vậy số dân tối đa của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người.

Bài 5. Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(t) = 2$. Nên số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $G(t)$ là 2. Vậy chi phí sản xuất tối đa cho mỗi sản phẩm không vượt quá 2 triệu đồng.

Bài 6. Ta có: $P'(x) = \frac{5000 \cdot 25}{(4x + 25)^2} > 0 \quad \forall x > 0$, suy ra hàm số $P(x) = \frac{5000x}{4x + 25}$ là hàm số đồng biến trên $(0; +\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5000x}{4x + 25} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5000}{4 + \frac{25}{x}} = 1250.$$

Ta lại có:

Suy ra tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 1250$.

Vậy số sản phẩm sản xuất được tối đa khi số người tham gia là rất lớn không vượt quá 1250.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 300 \left(2 + \frac{4}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(600 + \frac{\frac{1200}{x}}{1 + \frac{2}{x}} \right) = 600$$

Bài 7. Ta có:

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là $y = 600$.

Vậy số lượng sản phẩm của công ty bán được trong thời gian dài không thể thấp hơn 600 sản phẩm.

Bài 8. Ta có $\lim_{r \rightarrow 0} F = \lim_{r \rightarrow 0} G \frac{m_1 m_2}{r^2} = +\infty$. Vậy điều này có nghĩa là khi r dần về 0 thì lực hấp dẫn tiến đến $+\infty$.

$$\lim_{v \rightarrow c} \gamma(v) = \lim_{v \rightarrow c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = +\infty$$

Bài 9. Ta có: nên $x = c$ là tiệm cận đứng của đồ thị. Vậy khi hệ số tương đối dần về $+\infty$ thì vận tốc gần bằng c .

Bài 10.

a) Ta có: $f(t) = \frac{30000 + 2000t}{t}$

Sau 15 năm thì $t = 15$. Nên $f(15) = \frac{30000 + 2000 \times 15}{15} = 4000$

Vậy sau 15 năm, giá trị của xe ô tô đó bằng 4000 (USD).

b) Ta có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30000 + 2000t}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{30000}{t} + 2000 \right) = 2000$

Suy ra, tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$ là $y = 2000$.

Vậy khi thời gian tăng lên, giá trị của xe ô tô đó ngày càng giảm về và gần bằng 2000 USD.

Bài 11.

a) Trong 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% có $200 \cdot \frac{15}{100} = 30$ (gam) muối tinh khiết. Khi thêm x (gam) muối tinh khiết vào 200 gam dung dịch muối nồng độ 15% thì có $(x + 30)$ (gam) muối tinh khiết. Khi đó, ta có hàm số là $f(x) = \frac{100(x + 30)}{x + 200}$.

b) Ta có $f'(x) = \frac{17000}{(x + 200)^2} > 0, \forall x \in (0; +\infty)$

Vì $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$ nên khi x tăng thì $f(x)$ tăng. Nghĩa là khi thêm càng nhiều gam muối tinh khiết thì dung dịch có nồng độ phần trăm càng tăng.

Vì $x + 30 < x + 200$ với mọi $x \in (0; +\infty)$ nên $\frac{x + 30}{x + 200} < 1$ dẫn đến $f(x) = \frac{100(x + 30)}{x + 200} < 100$.

Nghĩa là nồng độ phần trăm không vượt quá 100% khi cho thêm nhiều gam muối tinh khiết vào.

Bài 12.

a) Dân số của thị trấn đó vào năm 2025 là $f(55) = \frac{26 \cdot 55 + 10}{55 + 5} = 24$ nghìn người.

b) Ta có $f'(t) = \frac{120}{(t + 5)^2} > 0 (\forall t \neq -5)$ luôn nhận giá trị dương trên khoảng $(0; +\infty)$. Nên hàm số đồng biến trên $[0; +\infty)$.

Ta lại có: $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{26t + 10}{t + 5} = 26$. Do đó đồ thị hàm số $f(t)$ có đường tiệm cận ngang là $y = 26$.

Vì vậy dân số của thị trấn đó không thể vượt quá 26 nghìn người.

Bài 13.

a) Số lượng xe máy điện của cửa hàng được bán ra trong tháng đầu là $f(1) = 50 - \frac{30}{2+1} = 40$ (xe).

b) Ta có: $f(x) \geq 45 \Leftrightarrow \frac{30}{2+x} \leq 5 \Leftrightarrow 2+x \geq 6 \Leftrightarrow x \geq 4 \Rightarrow$ để bán được từ 45 xe trở lên trong mỗi tháng thì phải từ tháng thứ tư trở đi.

c) Ta có: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(50 - \frac{30}{2+x} \right) = 50 \Rightarrow$ Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y = 50$.

Vì tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng $y = 50$ nên khi x càng lớn thì số lượng xe bán ra càng tiến gần đến mức 50xe / tháng.

Bài 14. Tổng số tiền cần bỏ ra để in t cuốn sách là: $7000 + 50t$ (nghìn đồng).

Chi phí trung bình của mỗi cuốn sách là $f(t) = \frac{7000 + 50t}{t}$.

Ta có $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 50$.

Suy ra $y = 50$ là đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $f(t)$. Vậy chi phí trung bình của mỗi cuốn sách thấp nhất càng gần nhưng không thể thấp hơn 50000 đồng.

Bài 15. Một đồ chơi A công ty phải trả 6 USD nên x đồ chơi A công ty phải trả $6x$ (USD) ($x > 1$). Khi đó tổng số tiền bao gồm cả chi phí ban đầu mà công ty phải chi trả khi sản xuất x đồ chơi A là:

$$P(x) = 6x + 40000 \Rightarrow F(x) = \frac{P(x)}{x} = \frac{6x + 40000}{x}$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{6x + 40000}{x} \right) = 6$

Suy ra $y = 6$ là phương trình đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số $F(x)$. Vậy chi phí trung bình của mỗi đồ chơi A thấp nhất càng gần nhưng không thể nhỏ hơn 6 USD.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t + 5}{t + 2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20 + \frac{5}{t}}{1 + \frac{2}{t}} = 20$$

Bài 16. Ta có

Vậy dân số của huyện đó không vượt quá 20 (nghìn người).

Bài 17. Ta có $\lim_{x \rightarrow 100^-} C(x) = \lim_{x \rightarrow 100^-} \frac{400x + 10}{100 - x} = +\infty$.

Suy ra, đường thẳng $x = 100$ là đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = C(x)$.

Vậy để đạt được gần như loại bỏ 100% chất gây ô nhiễm không khí từ khí thải của một nhà máy thì cần chi phí là vô cùng lớn và gần như là không thể thực hiện được.

Bài 18. Chi phí để sản xuất trung bình một sản phẩm là

$$f(x) = \frac{2x^2 + x + 25}{x} = 2x + 1 + \frac{25}{x} \quad (\text{nghìn đồng}).$$

Ta có $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{25}{x} = 0$.

Vậy đường thẳng $y = 2x + 1$ là đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $f(x)$.

Bài 19. Sau t phút khối lượng muối trong bể là $25 \cdot 20 \cdot t = 500t$ (gam).

Thể tích của bể sau t phút là $6000 + 20 \cdot t$ (lít).

Khi đó $f(t) = \frac{500t}{6000 + 20t} = \frac{25t}{3000 + t}$ (gam / lít).

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25t}{3000 + t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{25}{\frac{3000}{t} + 1} = 25$$

Vậy nồng độ muối tối đa có trong bể là 25 (gam/lít).

BÀI 4. KHẢO SÁT VÀ VẼ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

Bài 1. Dựa vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua các điểm: $O(0;0), A(2;12), B(4;24)$ và nhận $B(4;24)$ làm 1 cực trị.

Ta có: $s(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \Rightarrow s'(t) = 3at^2 + 2bt + c$

$$\begin{cases} s(0) = 0 \\ s(2) = 12 \\ s(4) = 24 \\ s'(4) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = 12 \\ 64a + 16b + 4c + d = 24 \\ 48a + 8b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{4} \\ b = \frac{9}{2} \\ c = 0 \\ d = 0 \end{cases}$$

Khi đó ta có hệ sau:

Nên: $s(t) = -\frac{3}{4}t^3 + \frac{9}{2}t^2 \Rightarrow v(t) = s'(t) = -\frac{9}{4}t^2 + 9t$

Thầy Hiếu dừng đi bộ khi: $v(t) = 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{4}t^2 + 9t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $v(t)$ trên $[0;4]$.

Ta có: $v'(t) = -\frac{9}{2}t + 9 \Rightarrow v'(t) = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Khi đó: $v(0) = 0, v(2) = 9, v(4) = 0$

Vậy vận tốc lớn nhất mà thầy Hiếu đạt được là 9 km/h tại thời điểm $t = 2$.

Bài 2. $G'(x) = 1,5x - 0,075x^2$

$$G'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 20$$

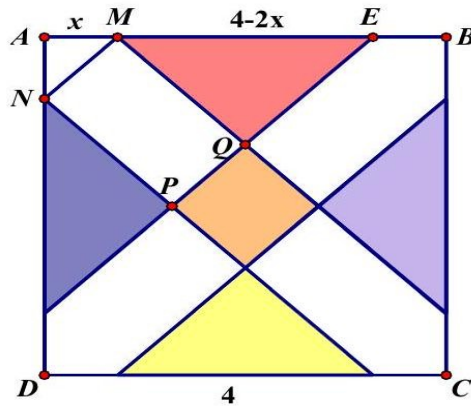
x	0	20	30
$G'(x)$	+	0	-
$G(x)$	0	$G_{\max}$	0

Vậy để bệnh nhân đó có huyết áp giảm nhiều nhất thì liều lượng thuốc cần tiêm vào là $x = 20(\text{mg})$.

Bài 3. Đặt $AM = x (0 < x < 4) \Rightarrow ME = 4 - 2x, MN = x\sqrt{2}, 2MQ^2 = ME^2 = (4 - 2x)^2$

Gọi S tổng diện tích của hình vuông ở giữa và bốn tam giác cân nhỏ.

$$S = 4 \cdot \frac{MQ^2}{2} + PQ^2 = 2MQ^2 + MN^2 = (4 - 2x)^2 + (x\sqrt{2})^2 = 6x^2 - 16x + 16$$



$$S' = 12x - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4}{3}$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{4}{3}$	4
S'	$-$	0	$+$
S		$\frac{16}{3}$	

Vậy $S_{\min} = \frac{16}{3}$.

Bài 4. Gọi giá vé sau khi điều chỉnh là $20 + x (x + 20 > 0)$

Số khách là: $1000 - 100x$

Tổng thu nhập: $f(x) = (20 + x + 2)(1000 - 100x) = (22 + x)(1000 - 100x) = -100x^2 - 1200x + 22000$

Bảng biến thiên

x	-20	-6	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$f(-6)$	$-\infty$

$\max_{(-20;+\infty)} f(x) = f(-6)$. Suy ra giá vé là: $x + 20 = 20 - 6 = 14$ USD

Bài 5.



Gọi x (m) là cạnh của tam giác đều, $\left(0 < x < \frac{20}{3}\right)$.

Suy ra cạnh hình vuông là $\frac{20-3x}{4}$ (m).

Gọi S là tổng diện tích của hai hình.

$$S(x) = x^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} + \left(\frac{20-3x}{4}\right)^2. \quad \text{Ta có:} \quad S'(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right).$$

$$S'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}x + 2 \cdot \frac{20-3x}{4} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{60}{9+4\sqrt{3}}$	$\frac{20}{3}$
$S'(x)$		$-$	$+$
$S(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên, S đạt giá trị nhỏ nhất tại $x = \frac{60}{9+4\sqrt{3}}$ (m).

Vậy độ dài phần đầu là $\frac{180}{9+4\sqrt{3}}$ (m).

Bài 6. Sau t phút, trong bể chứa $(50t+150)$ lít nước và $20t$ gam chất khử trùng.

Suy ra nồng độ chất khử trùng trong bể sau t phút là $f(t) = \frac{20t}{50t+150}$ gam/lít.

Khảo sát sự biến thiên hàm số $f(t) = \frac{20t}{50t+150}, t \geq 0$.

Ta có: $f'(t) = \frac{3000}{(50t+150)^2} > 0, \forall t \geq 0$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20t}{50t+150} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{20}{50 + \frac{150}{t}} = \frac{2}{5} = 0,4$$

Bảng biến thiên:

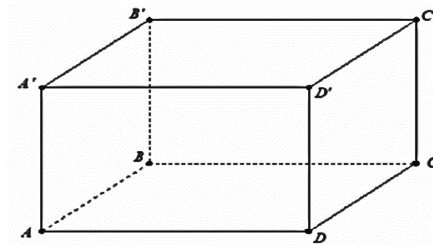
x	0	$+\infty$
$f'(t)$	+ ↗	
$f(t)$	0	0.4

Dựa vào BBT ta thấy giá trị $f(t)$ tăng theo t nhưng không vượt ngưỡng 0,4 gam/lít.
 Vậy $p = 0,4$.

Bài 7. Gọi x là chiều rộng, ta có chiều dài là $2x$.

Do diện tích đáy và các mặt bên là $6,7 \text{ m}^2$ nên có chiều cao $h = \frac{6,7 - 2x^2}{6x}$,

Ta có: $h > 0$ nên $x < \sqrt{\frac{6,7}{2}}$.



Thể tích bể cá là $V(x) = \frac{6,7x - 2x^3}{3}$ và $V'(x) = \frac{6,7 - 6x^2}{3} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{6,7}{6}}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\sqrt{\frac{6,7}{6}}$	$\sqrt{\frac{6,7}{2}}$
y'	+ ↗	0	- ↘
y	0	$1,57 \text{ m}^3$	0

Bể cá có dung tích lớn nhất bằng $1,57 \text{ m}^3$.

Bài 8. Đặt $BC = x \text{ (m)}$ $0 < x < 1$. Theo đề bài, ta có $AB \cdot BC = 0,48 \Rightarrow AB = \frac{0,48}{BC} = \frac{0,48}{x}$.

$$T = f(x) = AB + BC + CD = x + 2 \cdot AB = x + \frac{0,96}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{0,96}{x^2} \quad \text{Khi đó} \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 0,96 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{6}}{5} \approx 0,98 \text{ (m)}$$

x	0	$\frac{2\sqrt{6}}{5}$	1		
$f'(x)$	$\parallel$	-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{4\sqrt{6}}{5}$	$\nearrow$	$\frac{49}{25}$

Vậy chiều rộng đáy mương $BC = 0,98 \text{ (m)}$ thỏa ycbt.

Bài 9. Gọi độ dài đoạn dây gấp tam giác đều là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $60 - x$ (mét)

$$x = 3a \Leftrightarrow a = \frac{x}{3} \Rightarrow S_1 = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36}$$

Khi đó

Mặt khác:

$$60 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{60 - x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\frac{60 - x}{4} \right)^2$$

$$\text{Khi đó} \quad S_1 + S_2 = \frac{x^2 \sqrt{3}}{36} + \left(\frac{60 - x}{4} \right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(9 + 4\sqrt{3})x^2 - 1080x + 32400}{144}$$

$$(S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{540}{9 + 4\sqrt{3}}\right) \approx 97,9 \text{ (m}^2\text{)}$$

Dễ dàng tính được

Bài 10. Gọi độ dài đoạn dây gấp đường tròn là x thì độ dài đoạn dây gấp hình vuông là $30 - x$ (mét)

$$x = 2\pi a \Leftrightarrow a = \frac{x}{2\pi} \Rightarrow S_1 = \pi a^2 = \frac{x^2}{4\pi}$$

Khi đó

Mặt khác:

$$30 - x = 4b \Rightarrow b = \frac{30 - x}{4} \Rightarrow S^2 = b^2 = \left(\frac{30 - x}{4} \right)^2$$

Khi

$$S_1 + S_2 = \frac{x^2}{4\pi} + \left(\frac{30 - x}{4} \right)^2 \Leftrightarrow f(x) = \frac{(\pi + 4)x^2 - 60\pi x + 900\pi}{16\pi}$$

$$(S_1 + S_2)_{\min} = \min f(x) = f\left(\frac{30\pi}{\pi + 4}\right) \approx 31,5 \text{ (m}^2\text{)}$$

Dễ dàng tính được

Bài 11. Gọi chiều dài, chiều rộng của hộp là $2x$ và $x(x > 0)$.

Khi đó, ta có thể tích của cái hộp là:

$$V = 2x^2 \cdot h \Rightarrow 2x^2 \cdot h = 48 \Leftrightarrow x^2 \cdot h = 24$$

Do giá thành làm đáy và mặt bên hộp là 3, giá thành làm nắp hộp là 1 nên giá thành làm hộp là:

$$L = 3(2x^2 + 2xh + 4xh) + 2x^2 = 8x^2 + 18xh$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho ba số không âm ta được:

$$3\sqrt[3]{8x^2 \cdot 9xh \cdot 9xh} = 3\sqrt[3]{648(x^2h)^2} = 216$$

$$\begin{cases} 8x^2 = 9xh \\ x^2h = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{9h}{8} \\ \frac{9^2}{8^2} \cdot h^3 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ h = \frac{8}{3} \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

Vậy $m = 8, n = 3$ và $m + n = 11$.

Bài 12. Gọi độ dài của hàng rào song song với bờ sông là x với $x > 0$

Gọi độ dài của mỗi hàng rào trong ba hàng rào song song nhau là y với $y > 0$

Diện tích đất mà bác nông dân rào được là: xy (m^2).

Tổng chi phí là 15000000 đồng nên ta có phương trình:

$$x60000 + 3y50000 = 15000000 \Rightarrow 6x + 15y = 1500$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho hai số dương ta có:

$$6x + 15y \geq 2\sqrt{6x \cdot 15y} \Rightarrow 1500 \geq 2\sqrt{90xy} \Rightarrow xy \leq 6250$$

Vậy diện tích lớn nhất mà bác nông dân có thể tạo rào là 6250 (m^2).

Bài 13.

a) Chi phí để A sản xuất 10 tấn sản phẩm trong một tháng là $C(10) = 100 + 30 \cdot 10 = 400$ triệu đồng.

b) Số tiền A thu được khi bán 10 tấn sản phẩm cho B là

$$R(10) = 10 \cdot P(10) = 10 \cdot (45 - 0,001 \cdot 10^2) = 449 \quad (\text{triệu đồng}).$$

c) Lợi nhuận mà A thu được là:

$$\begin{aligned} H(x) &= R(x) - C(x) = xP(x) - C(x) = P(x) = 45x - 0,001x^3 - (100 + 30x) \\ &= -0,001x^3 + 15x - 100 \end{aligned}$$

d) Xét hàm số $H(x) = -0,001x^3 + 15x - 100, (0 \leq x \leq 100)$ ta có $H'(x) = -0,003x^2 + 15$,

$$H'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,003x^2 + 15 = 0 \Leftrightarrow x = 50\sqrt{2} \quad (\text{chọn}).$$

$$\text{Ta có } H(0) = -100; H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100; H(100) = 400$$

Vậy A bán cho B khoảng $50\sqrt{2} \approx 70,7$ tấn sản phẩm mỗi tháng thì thu được lợi nhuận lớn nhất bằng

$$H(50\sqrt{2}) = 500\sqrt{2} - 100$$

Bài 14. Theo bài ra ta có: phương trình của parabol là $y = 60 - \frac{3}{80}x^2$.

Khoảng cách giữa khung Parabol và đường xuyên núi là:

$$D = 60 - \frac{3}{80}x^2 - \left(\frac{x^3}{25600} - \frac{3x}{16} + 35 \right) \quad \text{với } x \in (-23,71; 27,99)$$

$$D' = -\frac{3}{40}x - \frac{3x^2}{25600} + \frac{3}{16} = 0 \Leftrightarrow x = 2,49$$

Xét

Bảng biến thiên:

x	$-23,37$	$2,49$	$27,99$
$D'(x)$	$+$	0	$-$
$D(x)$	$0 \nearrow 25,23 \searrow 0$		

Dựa vào bảng biến thiên, MN là đoạn có độ dài lớn nhất khi $x = 2,49$

$$\Rightarrow MN = D_{MN} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot 2,49}{16} + 35 \right) \approx 25,23$$

Vì N và Q là hai điểm đối xứng qua $Oy \Rightarrow x_{PQ} \approx -2,49$

$$\Rightarrow PQ = D_{PQ} = 60 - \frac{3}{80} \cdot 2,49^2 - \left(\frac{-2,49^3}{25600} - \frac{3 \cdot -2,49}{16} + 35 \right) \approx 24,3$$

Tổng độ dài $MN + PQ = 49,5$.

Bài 15. Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến tại thấp nhất. Vậy nên Quảng đường ông Vinh di chuyển về đến trại phải thấp nhất.

Quảng đường của Ông Vinh

Theo bài ra ta có: ông Vinh sẽ đi qua các quãng đường $XM + MN + NY$.

Ta có: $XM = NY = \sqrt{9 + x^2}$; $MN = 18 - 2x$

$$T(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13} \right) \text{ với } x \in (0; 9)$$

Thời gian Ông Vinh chạy đến Trại nghỉ là:

$$T'(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13} \right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$$

Xét

(thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{5}{4}$	9
$T'(x)$	$-$	0	$+$
$T(x)$	$\frac{168}{65}$	$\frac{162}{65}$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = \frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow \min_{x \in (0,9)} T(x) = T\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$$

Vậy, nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là $\min_{x \in (0,9)} y = 50 \log \left(\frac{162}{65} + 2 \right) \approx 32,6$

Bài 16. Gọi x (km) là độ dài quãng đường CD ($0 \leq x \leq 8$);

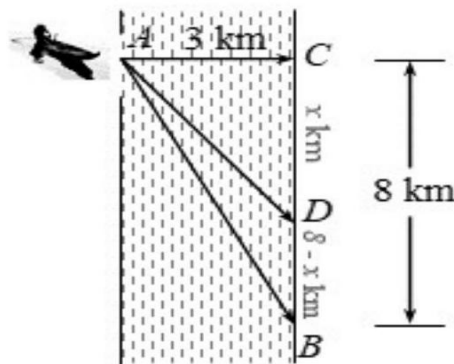
$8 - x$ (km) là độ dài quãng đường DB .

Thời gian chèo thuyền trên quãng đường $AD = \sqrt{x^2 + 9}$

là: $\frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6}$ (giờ)

Thời gian chạy trên quãng đường DB là: $\frac{8 - x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian di chuyển từ A đến B là:



$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$$

Xét hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{6} + \frac{8 - x}{8}$ trên khoảng $[0; 8]$.

Ta có $f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{x^2 + 9}} - \frac{1}{8}; f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{x^2 + 9} = 4x \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}}$

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy thời gian ngắn nhất để di chuyển từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 80$.

