

ĐỀ CHÍNH THỨC

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6,0 điểm)

I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN. Thí sinh trả lời các câu 1 đến 16. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Điều kiện xác định của biểu thức $\frac{1}{\sqrt{x-1}}$ là

- A. $x \neq 1$. B. $x \geq 0$. C. $x \neq 1; x \geq 0$. D. $x < 1$.

Câu 2. Giá trị $x_0 = \sqrt[3]{26+15\sqrt{3}} + \sqrt[3]{26-15\sqrt{3}}$ là nghiệm của phương trình

- A. $x^2 - 4x = 0$. B. $x^2 - 4 = 0$. C. $x^2 - 6x + 9 = 0$. D. $x^2 + 4x = 0$.

Câu 3. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hai đường thẳng $(d): y = (m^2 - 1)x + 4$ và $(d'): y = 3x + m + 2$ song song với nhau?

- A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Câu 4. Trên mặt phẳng tọa độ Oxy , cho $M(x; y)$ với $x; y$ thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} x + y = 1 + 10m \\ x - y = 5 + 11m \end{cases}. \text{ Tìm giá trị của } m \text{ để điểm } M \in (d): y = x + 1.$$

- A. $m = \frac{3}{2}$. B. $m = -\frac{3}{2}$. C. $m = \frac{3}{11}$. D. $m = -\frac{6}{11}$.

Câu 5. Có bao nhiêu giá trị của m để hệ phương trình $\begin{cases} mx + y = -1 \\ x + y = -m \end{cases}$ có nghiệm duy nhất thỏa mãn đẳng thức $x = y(2 - y)$?

- A. 0. B. 1. C. 2. D. 3.

Câu 6. Cho các số x, y, z không âm thỏa mãn $(\sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{yz})(\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y}) = x + z$. Khi đó $2024x + 2024y - 2024z$ bằng?

- A. 0. B. 2024. C. -1. D. -2024.

Câu 7. Một người mua hai loại hàng và phải trả tổng cộng 2,17 triệu đồng, kể cả thuế giá trị gia tăng (VAT) với mức 10% đối với loại hàng thứ nhất và 8% đối với loại hàng thứ hai. Nếu thuế VAT là 9% đối với cả hai loại hàng thì người đó phải trả tổng cộng 2,18 triệu đồng. Hỏi nếu không kể thuế VAT thì người đó phải trả bao nhiêu tiền cho loại hàng thứ hai? (đơn vị là triệu đồng)

- A. 0,5. B. 1,5. C. 0,2. D. 2.

Câu 8. Biết rằng đường thẳng (d) đi qua hai điểm $A(0;a)$ và $B(-a;0)$ ($a > 0$) và đường thẳng $(d'): y = mx + n$ ($m \neq 0$) vuông góc với d và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2. Khi đó $m + n$ bằng

- A. 1. B. 2. C. -1. D. -2.

Câu 9. Một hình hộp chữ nhật có thể tích bằng $180cm^3$. Chiều cao của hình hộp đã cho bằng $5cm$. Diện tích xung quanh nhỏ nhất của hình hộp chữ nhật đó là

- A. $36cm^2$. B. $900cm^2$. C. $120cm^2$. D. $90cm^2$.

Câu 10. Cho tập $X = \{1; 2; 3; \dots; 9999; 10000\}$. Hỏi trong tập X có bao nhiêu phần tử không chia hết cho bất kỳ số nào trong các số $3; 4; 14$?

- A. 2023. B. 2739. C. 4762. D. 6768.

Câu 11. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Biết $BH < CH$ và $AH = 12cm, BC = 25cm$. Độ dài đoạn thẳng CH bằng:

- A. 18 cm B. 16 cm C. 12 cm D. 9 cm

Câu 12. Cho tam giác ABC cân tại A , đường cao CE , biết $BC = 24cm, BE = 9cm$. Độ dài cạnh AB bằng

- A. $16cm$. B. $18cm$. C. $24cm$. D. $32cm$.

Câu 13. Cho hình thoi $ABCD$ có $AB = a, \angle ABC = 60^\circ$. Điểm G là trọng tâm tam giác ADC . Độ dài đoạn thẳng BG bằng:

- A. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. D. a .

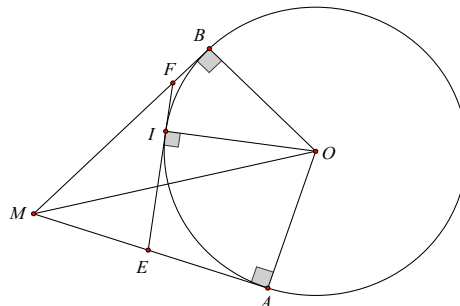
Câu 14. Cho tam giác ABC có $AB = 9cm$. Điểm D thuộc cạnh AB sao cho $AD = 6cm$. Kẻ DE song song với BC , kẻ EF song song với CD ($E \in AC, F \in AB$) độ dài AF bằng:

- A. $7cm$. B. $6cm$. C. $5cm$. D. $4cm$.

Câu 15. Cho đường tròn $(O; 10cm)$ và H là điểm cố định sao cho $OH = 8cm$. Dây MN thay đổi đi qua H thì độ dài dây MN đạt giá trị nhỏ nhất bằng:

- A. $11cm$. B. $12cm$. C. $15cm$. D. $14cm$.

Câu 16. Cho đường tròn $(O; 6cm)$. Từ điểm M ngoài đường tròn vẽ các tiếp tuyến MA, MB (A, B là các tiếp điểm) với đường tròn $(O; 6cm)$. Từ I trên cung nhỏ AB kẻ tiếp tuyến với $(O; 6cm)$, tiếp tuyến này cắt các đoạn MA, MB thứ tự tại E và F . Biết $OM = 10cm$, chu vi tam giác MEF bằng



- A. 15 cm. B. 16cm. C. 17 cm. D. 18 cm.

II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI. Thí sinh trả lời các câu hỏi 17, 18. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn **đúng** hoặc **sai**.

Câu 17. Lớp 9A có 7 học sinh giỏi Toán, 5 học sinh giỏi Ngữ văn, 6 học sinh giỏi Ngoại ngữ, 2 học sinh chỉ giỏi Toán và Ngữ văn, 3 học sinh chỉ giỏi Toán và Ngoại ngữ, 1 học sinh chỉ giỏi cả Ngữ văn và Ngoại ngữ, 1 học sinh giỏi cả 3 môn Toán, Ngữ văn và Ngoại ngữ. Vậy:

- a) Số học sinh chỉ giỏi môn Toán là 1 học sinh. b) Số học sinh chỉ giỏi môn Văn là 1 học sinh
c) Số học sinh chỉ giỏi môn Anh là 2 học sinh.
d) Số học sinh giỏi ít nhất một môn (Toán, Văn, Anh) là 10 học sinh.

Câu 18. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH, Kẻ HD vuông góc với AB tại D, HE vuông góc với AC tại E

- a) $BC = AB \cdot \sin C + AC \cdot \cos B$
b) $S_{ADE} = S_{ABC} \cdot (1 - \cos^2 B) \cdot \sin^2 C$
c) $BE = BC \cdot \sin^3 B$
d) $AH^3 = BC \cdot BD \cdot CE$

B. PHẦN TỰ LUẬN (14,0 điểm)

Câu 1. (4,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng : $(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) : 17$ với mọi số nguyên dương n .
b) Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $x^3 - x^2y + 2x - y = 2$
c) Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4 - p^2 + 16$ là số chính phương.

Câu 2. (4,0 điểm)

- a) Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = (a^3 + b^3)(b^5 + c^5)(c^{2023} + a^{2023})$.

- b) Giải phương trình: $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3$

- c)
$$\begin{cases} x^2 - 2x - xy + y + 1 = 0 & (1) \\ x^2 + 3x - \sqrt{y^2 + 5x - 1} - 2 = 0 & (2) \end{cases}$$

Câu 3. (4,0 điểm)

Cho điểm A cố định thuộc $(O; R)$, điểm H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, qua H kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (O) . Lấy điểm B, C thuộc d sao cho H nằm giữa B, C thỏa mãn $AB = AC = R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$).

- a) Chứng minh rằng $\triangle OMN$ đồng dạng với $\triangle OCB$.

b) Chứng minh rằng khi H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, thì MN luôn thuộc một đường cố định.

- c) Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4 (1,0 điểm). Một hộp thẻ có 100 que thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên ra một que thẻ. Tính xác suất của biến cố:

- a) Que thẻ lấy ra là số có 1 chữ số
b) Que thẻ lấy ra có chứa chữ số 5

Câu 5 (1,0 điểm). Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 3(x + y + z)$.

$$P = x + y + z + \frac{20}{\sqrt{x+z}} + \frac{20}{\sqrt{y+2}}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

.....Hết.....

Họ và tên thí sinh:.....SBD:.....

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 9

NĂM HỌC 2024-2025

MÔN: TOÁN

A. PHẦN TRẮC NGHIỆM (6,0 điểm)

I. TRẮC NGHIỆM NHIỀU LỰA CHỌN (Mỗi câu đúng được 0,25 điểm)

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Đ/A	C	A	A	D	B	A	B	A	C	C	B	D	A	D	B	B

II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

- Thí sinh chỉ chọn chính xác 01 ý trong 1 câu hỏi được **0,1 điểm**
- Thí sinh chỉ chọn chính xác 02 ý trong 1 câu hỏi được **0,25 điểm**
- Thí sinh chỉ chọn chính xác 03 ý trong 1 câu hỏi được **0,5 điểm**
- Thí sinh chọn chính xác cả 04 ý trong 1 câu hỏi được **1,0 điểm**.

Câu	A	B	C	D
17	Đúng	Đúng	Sai	Đúng
18	Sai	Đúng	Sai	Đúng

B. PHẦN TỰ LUẬN (14,0 điểm)

Câu 1. (4,0 điểm)

- a) Chứng minh rằng : $(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) : 17$ với mọi số nguyên dương n .
- b) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^3 - x^2y + 2x - y = 2$
- c) Tìm tất cả các số nguyên tố p lẻ sao cho $2p^4 - p^2 + 16$ là số chính phương.

a	<p>a)</p> $6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}$ $= 36^n + 19^n - 2 \cdot 2^n$ $= (36^n - 2^n) + (19^n - 2^n)$	0,75
	<p>Ta có</p> $36 \equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow 36^n \equiv 2^n \pmod{17} \Rightarrow 36^n - 2^n \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 36^n - 2^n : 17$ $19 \equiv 2 \pmod{17} \Rightarrow 19^n \equiv 2^n \pmod{17} \Rightarrow 19^n - 2^n \equiv 0 \pmod{17} \Rightarrow 19^n - 2^n : 17$	0,5

	$(36^n - 2^n) + (19^n - 2^n) : 17$ Vậy $(6^{2n} + 19^n - 2^{n+1}) : 17$	0,25
b	b) Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn: $x^3 - x^2y + 2x - y = 2$ (1)	
	Ta có (1) $\Leftrightarrow y = \frac{x^3 + 2x - 2}{x^2 + 1} = \frac{x^3 + x + x - 2}{x^2 + 1} = x + \frac{x - 2}{x^2 + 1}$	0,5
	Đề $y \in \mathbb{Z}$ thì $x - 2 : x^2 + 1$	0,25
	$\Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) : x^2 + 1$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - 4 : x^2 + 1 \Leftrightarrow (x^2 + 1) - 5 : x^2 + 1 \Rightarrow 5 : x^2 + 1$ $\Rightarrow \begin{cases} x^2 + 1 = 1 \\ x^2 + 1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$	0,25
	Với $x = 0 \Rightarrow y = -2$ hoặc $x = 2 \Rightarrow y = 2$ hoặc $x = -2 \Rightarrow$ không có y nguyên thỏa mãn. Vậy $(x; y)$ là $(0; -2); (2; 2)$	0,25
c	Đặt $A = 2p^4 - p^2 + 16$	0,25
	Với $p = 3$ thì $A = 169 = 13^2$ là số chính phương. Vậy $p = 3$ thỏa mãn.	0,25
	Với $p > 3$ thì $p^2 \equiv 1 \pmod{3}$. Suy ra $p^4 = (p^2)^2 \equiv 1 \pmod{3}$	0,25
	Suy ra $A = 2p^4 - p^2 + 16 \equiv 2 \cdot 1 - 1 + 16 \equiv 2 \pmod{3}$	0,25
	Do các số chính phương chia cho 3 chỉ dư 0 hoặc 1 nên A không là số chính phương.	0,25

Câu 2.(4,0 điểm)

a) Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$.

Tính giá trị của biểu thức $P = (a^3 + b^3)(b^5 + c^5)(c^{2023} + a^{2023})$.

b) Giải phương trình: $(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 5x^2 + \frac{3}{2}x - 3$

c) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - 2x - xy + y + 1 = 0 \quad (1) \\ x^2 + 3x - \sqrt{y^2 + 5x - 1} - 2 = 0 \quad (2) \end{cases}$

Đáp án	Điểm
a) Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0$. Tính giá trị của biểu thức $P = (a^3 + b^3)(b^5 + c^5)(c^{2023} + a^{2023})$.	1,5
Vì $(a + b + c)(ab + bc + ca) - abc = 0 \quad (a; b; c \neq 0)$ $\Rightarrow (a + b + c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = 1$ nên $a + b + c \neq 0 \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{a + b + c}$.	0,5

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+b+c} \right) + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{b+c}{a(a+b+c)} + \frac{b+c}{bc} = 0$ $\Leftrightarrow (b+c) \left(\frac{1}{a(a+b+c)} + \frac{1}{bc} \right) = 0$	0,5
$\Leftrightarrow (b+c) \left(\frac{bc+a^2+ab+ac}{abc(a+b+c)} \right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc(a+b+c)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -b \\ b = -c \\ c = -a \end{cases}$ $(a^3+b^3)(b^{25}+c^{25})(c^{2021}+a^{2021})=0.$ <p>Vậy</p>	0,5
b) Giải phương trình: $(x-1)^2 + \sqrt[3]{x^4 - x^2} = 2$	1,5
<p>Điều kiện $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$</p> <p>PT $\Leftrightarrow 2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} = 10x^2+3x-6$</p> $\Leftrightarrow 4(2x^2-1) - 2(3x+1)\sqrt{2x^2-1} + 2x^2+3x-2 = 0$	0,25
<p>Đặt $\sqrt{2x^2-1}=t \ (t \geq 0)$, ta được $4t^2-2(3x+1)t+2x^2+3x-2=0$</p> <p>Ta có $\Delta' = (3x+1)^2 - 4(2x^2+3x-2) = x^2-6x+9 = (x-3)^2$</p>	0,5
<p>nên PT $\begin{cases} t = \frac{3x+1-x+3}{4} \\ t = \frac{3x+1+x-3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x+2}{2} \\ t = \frac{2x-1}{2} \end{cases}$</p>	
<p>Với $t = \frac{x+2}{2}$ thì $\sqrt{2x^2-1} = \frac{x+2}{2} \Leftrightarrow \{ x \geq -2 \}$</p> $\Leftrightarrow \{ x \geq -2 \}$	0,25
<p>Với $t = \frac{2x-1}{2}$ thì $\sqrt{2x^2-1} = \frac{2x-1}{2} \Leftrightarrow \left\{ x \geq \frac{1}{2} \right\}$</p> $\Leftrightarrow \left\{ x \geq \frac{1}{2} \right\}$	0,5
<p>Kết hợp điều kiện $x \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ ta được nghiệm của PT là $x \in \left\{ \frac{2 \pm \sqrt{60}}{7}; \frac{-1 \pm \sqrt{6}}{2} \right\}$</p>	
<p>c. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-2x-xy+y+1=0(1) \\ x^2+3x-\sqrt{y^2+5x-1}-2=0(2) \end{cases}$</p> <p>DKXD: $y^2+5x-1 \geq 0$</p>	0,25

<p>Ta có biến đổi ở phương trình (1):</p> $x^2 - 2x - xy + y + 1 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 - y(x-1) = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x-1-y) = 0$	0,25
<p>Ta có hai trường hợp:</p> <p>(a) $x = 1$.</p> <p>Thay vào (2) ta có :</p> $2 - \sqrt{y^2 + 4} = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ (hoà mãn DKXD)}$	0,25
<p>(b) $x - 1 - y = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$</p> <p>Thay vào (2) ta có:</p> $x^2 + 3x - 2 - \sqrt{x^2 + 3x} = 0$ <p>Đặt $t = \sqrt{x^2 + 3x} \Rightarrow t \geq 0$</p> <p>Khi đó phương trình (3) trở thành:</p> $t^2 - 2 - t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = 2 \end{cases}$ <p>Kết hợp với điều kiện $t \geq 0$ ta có :</p> $t = 2 \Rightarrow x^2 + 3x = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -4 \end{cases}$ <p>Nếu $x = 1$ thì $y = x - 1$ (thoả mãn DKXD).</p> <p>Nếu $x = -4$ thì $y = x - 1 = -5$ (thoả mãn DKXD)</p>	0,25
<p>Vậy nên tất cả nghiệm của hệ phương trình đã cho là</p> $(x; y) \in \{(1; 0); (-4; -5)\}$	

Câu 3. (4,0 điểm):

Cho điểm A cố định thuộc $(O; R)$, điểm H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, qua H kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (O) . Lấy điểm B, C thuộc d sao cho H nằm giữa B, C thoả mãn $AB = AC = R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$).

a) Chứng minh rằng $\triangle OMN$ đồng dạng với $\triangle OCB$.

b) Chứng minh rằng khi H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, thì MN luôn thuộc một đường cố định và tích $OB \cdot OC$ luôn không đổi.

c) Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.

Đáp án	Điểm

MN Vậy luôn đi qua một điểm cố định.	
c) Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.	1,0
Ta có $\Delta OMN \sim \Delta OCB$ (c - g - c) Suy ra $\frac{S_{OMN}}{S_{OBC}} = \frac{OJ \cdot MN}{OH \cdot BC} = \frac{OJ^2}{OH^2}$	0,25
Mà $OH = OA = 2OJ$	0,25
$\Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{4} S_{OBC} = \frac{OH \cdot BC}{8} = \frac{R \cdot BC}{8} \leq \frac{R \cdot 2R}{8} = \frac{R^2}{4}$ $\Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{4} S_{OBC} = \frac{OB \cdot OC \cdot \sin BOC}{8} \leq \frac{2R^2}{8} = \frac{R^2}{4}$ (Hoặc $\sin BOC = 1 \Leftrightarrow \angle BOC = 90^\circ$) Khi	0,25
Dấu “=” $\Leftrightarrow BC = 2R \Leftrightarrow H \equiv A$ Vậy H trùng với A thì diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.	0,25

Câu 4 (1,0 điểm).

Một hộp thẻ có 100 que thẻ được đánh số từ 1 đến 100. Lấy ngẫu nhiên ra một que thẻ. Tính xác suất của biến cố:

a) Que thẻ lấy ra là số có 1 chữ số

b) Que thẻ lấy ra có chứa chữ số 5

a) Số kết quả có thể là 100 Số kết quả thuận lợi là 9 Xác suất để que thẻ lấy ra là số có một chữ số là $\frac{9}{100}$	0,25
b) Có 10 số chứa chữ số 5 ở hàng đơn vị Có 10 số chứa chữ số 5 ở hàng chục. Trong đó số 55 được tính 2 lần Số các số chứa chữ số 5 trong các số từ 1 đến 100 là: $10 + 10 - 1 = 19$ Số kết quả thuận lợi là 19 Xác suất của biến cố que thẻ lấy ra có chứa chữ số 5 là $\frac{19}{100}$	0,75

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 + 2xy = 3(x + y + z)$.

$$P = x + y + z + \frac{20}{\sqrt{x+z}} + \frac{20}{\sqrt{y+2}}$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

<p>Từ giả thiết ta có:</p> $3(x + y + z) = (x + y)^2 + z^2 \geq \frac{1}{2}(x + y + z)^2$ $\Rightarrow x + y + z \leq 6.$	0,25
<p>Khi đó, áp dụng bất đẳng thức Cô-si ta có</p> $P = \left[(x+z) + \frac{8}{\sqrt{x+z}} + \frac{8}{\sqrt{x+z}} \right] + \left[(y+2) + \frac{8}{\sqrt{y+2}} + \frac{8}{\sqrt{y+2}} \right] + 4 \left(\frac{1}{\sqrt{x+z}} + \frac{1}{\sqrt{y+2}} \right) - 2$ $\geq 12 + 12 + \frac{8}{\sqrt{(x+z)(y+2)}} - 2$ $\geq 22 + \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{x+y+z+2}}$ ≥ 26 <p>Dấu “=” có khi: $x = 1; y = 2; z = 3$</p>	0,25
Vậy giá trị nhỏ nhất $\text{Min}P = 1$, Có được khi $x = 1; y = 2; z = 3$	0,25

UBND THỊ XÃ HOÀNG MAI
PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI THỊ XÃ LỚP 9
NĂM HỌC 2024-2025

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Môn thi: Toán

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Câu 1. (5,0 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \left(\frac{2a^2+1}{a^3-1} - \frac{a}{a^2+a+1} \right) \left(\frac{1+a^3}{1+a} - a \right)$ (Với $a \neq 1; a \neq -1$)

b) Chứng minh $n^3 - n$ chia hết cho 24 với mọi n là số nguyên lẻ.

c) Tìm các số nguyên tố $x; y$ thỏa mãn $3x^2 - x - y^2 = 348$

Câu 2. (5,0 điểm)

a) Giải phương trình sau: $(x^2 - 4x + 1)^2 + 4(x^2 - 4x) = 1$

b) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 - 1 = xy + y \\ x^3 + x^2 - xy + y = 2 \end{cases}$$

Câu 3. (3,0 điểm)

Một hộp đựng 40 viên bi có cùng khối lượng và kích thước, trong đó có 24 viên bi màu đỏ, 12 viên bi màu xanh và số còn lại là bi màu vàng. Nam lấy ngẫu nhiên một viên bi rồi bỏ lại vào hộp.

a) Tính xác suất để bạn Nam lấy được viên bi màu vàng.

b) Bạn Nam được mẹ cho thêm x viên bi xanh vào trong hộp. Tìm x , biết rằng xác suất để

bạn Nam lấy được viên bi xanh là $\frac{1}{3}$.

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho $\triangle ABC$ có ba góc nhọn, đường cao AD , BE , CF của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Gọi I là trung điểm của AH , K là giao điểm của AH và EF .

$$\sin \angle AFE = \frac{AD}{AC}$$

a) Chứng minh rằng

b) Chứng minh rằng $\triangle DKF$ đồng dạng với $\triangle DEI$.

c) Tia phân giác của góc DIE cắt BC tại M . Chứng minh rằng $HM \parallel CK$.

Câu 5. (1,0 điểm) Cho các số thực dương x, y, z , thỏa mãn:

$$2(xy + yz + zx) = xyz + 16$$

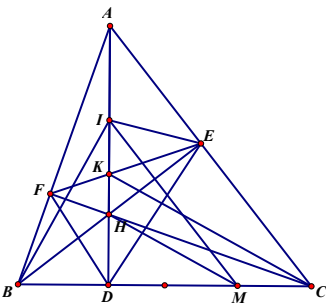
Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $A = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xyz}{2}$

---Hết---

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm!

Họ và tên: Số báo danh:

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
	<p>1. a) 2,5 điểm</p> $A = \left(\frac{2a^2 + 1}{a^3 - 1} - \frac{a}{a^2 + a + 1} \right) \left(\frac{1 + a^3}{1 + a} - a \right) \quad (\text{Với } a \neq 1; a \neq -1)$ $A = \left(\frac{2a^2 + 1}{a^3 - 1} - \frac{a(a-1)}{a^3 - 1} \right) \left(\frac{(1+a)(a^2 - a + 1)}{1 + a} - a \right)$ $A = \left(\frac{a^2 + a + 1}{a^3 - 1} \right) (a^2 - a + 1 - a)$ $A = \left(\frac{a^2 + a + 1}{(a-1)(a^2 + a + 1)} \right) (a^2 - 2a + 1)$ $A = \left(\frac{1}{a-1} \right) (a-1)^2$ $A = a - 1$	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
Bài 1 (5đ)	<p>1.b) 1,5 điểm</p> <p>$A = n^3 - n = n(n-1)(n+1)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên $A \vdots 3$ vì n lẻ nên $n = 2k + 1$ (với k thuộc $\mathbb{Z}$) $A = 2k(2k+1)(2k+2)$ $A = 4.k(k+1)(2k+1)$ vì $k(k+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $k(k+1) \vdots 2$ Ta được $A \vdots 8$, mà $A \vdots 3$ nên $A \vdots 24$</p> <p>1.c) (1,0 điểm)</p> <p>Ta có $3x^2 - x - y^2 = 348$ $2x^2 + x(x-1) - y^2 = 348$ Vì $2x^2 \vdots 2; x(x-1) \vdots 2; 348 \vdots 2$ nên $y^2 \vdots 2$ mà y là số nguyên tố nên $y = 2$ Lúc đó ta có $3x^2 - x - 4 = 348$ hay $3x^2 - x = 352$ $x(3x-1) = 11.2^5$ vì x là số nguyên tố nên $x = 2$ hoặc $x = 11$ Thử lại ta thấy $x = 11$ thỏa mãn Vậy $x = 11; y = 2$</p>	<p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,5</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
Bài 2 (5 điểm)	<p>2a) (2,5 điểm)</p> $(x^2 - 4x + 1)^2 + 4(x^2 - 4x) = 1$ $(x^2 - 4x + 1)^2 + 4(x^2 - 4x + 1) = 5$ <p>Đặt $a = x^2 - 4x + 1$ Ta được phương trình $a^2 + 4a = 5$ suy ra $(a+2)^2 = 9$ ta được $a = 1$ hoặc $a = -5$ + Với $a = 1$ ta được $x^2 - 4x + 1 = 1$ hay $x^2 - 4x = 0$ ta tìm được $x = 0$ hoặc $x = 4$ + với $a = -5$ ta được $x^2 - 4x + 1 = -5$ hay $x^2 - 4x + 4 = -1$ $(x-2)^2 = -1$ phương trình này vô nghiệm</p> <p>2b) (2,5 điểm)</p> <p>Biến đổi phương trình thứ nhất của hệ ta được $(x-1)(x+1) - y(x+1) = 0$</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
	$(x-1-y)(x+1)=0$ Ta được $x=-1$ hoặc $y=x-1$ + TH1: $x=-1$ thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được $2y=2$ suy ra $y=1$ + TH2: $y=x-1$ thay vào phương trình thứ hai và biến đổi ta được $x^3+x^2-x(x-1)+x-1=2$ $x^3+2x-3=0$ $(x-1)(x^2+x+3)=0$ $x-1=0$ (vì $x^2+x+3>0$) $x=1$ ta tính được $y=0$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
Bài 3 (3,0 điểm)	a) Số bi màu vàng có trong hộp là $40 - 24 - 12 = 4$ Xác suất để bạn Nam lấy được viên bi màu vàng là $\frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ b) Khi cho thêm x viên bi màu xanh vào trong hộp thì số viên bi màu xanh là $x+12$ và số viên bi có trong hộp là $x+40$ Xác suất để Nam lấy được viên bi màu xanh là $\frac{x+12}{x+40} = \frac{1}{3}$ Biến đổi ta được $3x+36 = x+40$ $2x = 4$ $x = 2$	0,75 0,75 0,5 0,5 0,5
	 (Vẽ hình đến câu a cho 0,5 đ)	0,5
Bài 4 (6,0 điểm)	a) (2,5 điểm) $\triangle AFC$ vuông tại F nên $\cos \angle FAC = \frac{AF}{AC}$ $\triangle AEB$ vuông tại E nên $\cos \angle EAB = \frac{AE}{AB}$ Suy ra $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ Xét $\triangle AFE$ và $\triangle ACB$ có: $\frac{AF}{AC} = \frac{AE}{AB}$ và chung góc A nên $\triangle AFE$ đồng dạng với $\triangle ACB$ suy ra $\angle AFE = \angle ACB$ Mà $\sin \angle ACB = \frac{AD}{AC}$ nên $\sin \angle AFE = \frac{AD}{AC}$	0,5 0,5 0,5 0,5 0,5
	b) (2,0 điểm) Hoàn toàn tương tự câu a, ta chứng minh được $\triangle BFD$ đồng dạng với $\triangle BCA$ suy ra $\angle BFD = \angle ACB$ mà $\angle AFE = \angle ACB$ và $\angle CFB = \angle CFA = 90^\circ$	0,5

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
	<p>Suy ra FC là tia phân giác của $\angle EFD$ (1)</p> <p>Ta có $\angle CFE + \angle EFA = 90^\circ$ và $\angle ACB + \angle DAC = 90^\circ$</p> <p>Lại do $\angle AFE = \angle ACB$ nên $\angle CFE = \angle CAD$ (2)</p> <p>Từ (1) và (2) Suy ra $\angle DFE = 2\angle DAB = 2\angle IAE$ (3)</p> <p>$\triangle AEH$ vuông tại E có EI là đường trung tuyến nên $EI = IA = IH$</p> <p>Suy ra $\triangle AIE$ cân tại E nên $\angle HIE = 2\angle IAE$ (Tính chất góc ngoài)</p> <p>Ta được $\angle DIE = 2\angle IAE$ (4)</p> <p>Từ (3) và (4) ta được $\angle DIE = \angle DFE = \angle DFK$ (5)</p> <p>Hoàn toàn tương tự (1) ta chứng minh được DA là tia phân giác của $\angle FDE$</p> <p>Suy ra $\angle FDK = \angle EDI$ (6)</p> <p>Từ (5) và (6) ta được $\triangle DKF$ đồng dạng với $\triangle DEI$ (gg)</p> <p>(Các biến đổi hoàn toàn tương tự HS không chứng minh vẫn cho điểm tối đa)</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	<p>c) (1,0 điểm)</p> <p>Ta có $\triangle DKF$ đồng dạng với $\triangle DEI$ suy ra $\frac{DK}{DE} = \frac{DF}{DI}$</p> <p>ta được $DK \cdot DI = DE \cdot DF$ (7)</p> <p>Ta lại có theo câu b) $\angle BFD = \angle ECD$ và $\angle BDF = \angle CDE$ (do DA là tia phân giác của góc FDE và AD vuông góc với BC)</p> <p>Nên ta được $\triangle BFD$ đồng dạng với $\triangle ECD$ (gg)</p> <p>suy ra $\frac{BD}{DE} = \frac{DF}{CD}$ ta được $BD \cdot CD = DE \cdot DF$ (8)</p> <p>Từ (7) và (8) suy ra $DK \cdot DI = DB \cdot DC$ ta được $\frac{DK}{DC} = \frac{DB}{DI}$</p> <p>Xét $\triangle DKC$ và $\triangle DIB$ có $\frac{DK}{DC} = \frac{DB}{DI}$ và $\angle BDI = \angle CDK = 90^\circ$</p> <p>Nên $\triangle DKC \sim \triangle DIB$ (cgc) suy ra $\angle DCK = \angle DIB$ nên $CK \perp BI$ (9)</p> <p>Mặt khác theo câu b) ta có $IH = IE$ nên $\triangle HIE$ cân tại I có IM là phân giác nên IM là đường cao, dẫn đến $IM \perp BE$.</p> <p>$\triangle IBM$ có hai đường cao ID và BE cắt nhau tại H nên H là trực tâm</p> <p>Suy ra $MH \perp BI$ (10). Từ (9) và (10) suy ra $MH \parallel CK$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
Bài 5 (1,0 điểm)	<p>Trong 3 số $x-2$; $y-2$; $z-2$ luôn có hai số có tích không âm, giả sử hai số đó là $x-2$ và $y-2$. Suy ra $(x-2)(y-2) \geq 0$ ta được $xy \geq 2x + 2y - 4$ suy ra $xyz \geq 2xz + 2yz - 4z$</p> <p>Mà $2(xy + yz + zx) = xyz + 16$ nên $2(xy + yz + zx) = xyz + 16 \geq 2xz + 2yz - 4z + 16$</p> <p>Suy ra $2xy + 4z \geq 16$ hay $xy + 2z \geq 8$</p> <p>Ta có $A = x^2 + y^2 + z^2 + \frac{xyz}{2} \geq 2xy + z^2 + \frac{xyz}{2}$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

Câu	Hướng dẫn nội dung	Điểm
	$2A \geq 4xy + 2z^2 + xyz = 4xy + z(xy + 2z) \geq 4xy + 8z = 4(xy + 2z) \geq 4.8 = 32$ Suy ra $A \geq 16$ Vậy giá trị nhỏ nhất của A là 16 khi $x = y = z = 2$	

---Hết---

PHÒNG GD&ĐT

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP HUYỆN

LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2024 - 2025

MÔN: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút (Không kể thời gian giao đề)

(Đề thi có: 04 trang)

Thí sinh làm bài (cả phần trắc nghiệm khách quan và phần tự luận) trên tờ giấy thi.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (4,0 điểm). Thí sinh trả lời câu hỏi từ 1 đến 16. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D trong đó chỉ có 1 phương án đúng.

Câu 1: Cho ba đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1$; $(d_2): y = x + 2$; $(d_3): y = (m^2 + 1)x + 2m - 1$. Tổng các giá trị của m để ba đường thẳng trên đồng quy.

- A. 1 B. 2 C. -2 D. -3

Câu 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 & (1) \\ x + (a-1)y = 2 & (2) \end{cases}$$
 (a là tham số)

Số các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

Câu 3: Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Vận tốc của hai vật là

- A. $3p(\text{cm/s}); 2p(\text{cm/s})$ B. $3p(\text{cm/s}); 4p(\text{cm/s})$
 C. $p(\text{cm/s}); 2p(\text{cm/s})$ D. $5p(\text{cm/s}); 2p(\text{cm/s})$

Câu 4: $x_0 = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} - \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + b^3}} - a$ là nghiệm của phương trình nào dưới đây

- A. $x^3 + 3bx - 3a = 0$ B. $x^3 + 3bx - 2a = 0$
 C. $x^3 + 3bx - a = 0$ D. $x^3 - 3bx + 2a = 0$

Câu 5: Nếu a, b, c là các số thực thỏa mãn $a + b + c + 11 = 6\sqrt{a-2} + 4\sqrt{b-1} + 2\sqrt{c}$ thì $a + b + c$ bằng

- A. 15 B. 16 C. 17 D. 19

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): 2x - y - a^2 = 0$ và Parabol $(P): y = ax^2 (a > 0)$. Số các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B nằm bên phải trục tung là:

- A. 0 B. 1 C. 2 D. vô số

Câu 7: Cho phương trình $mx^2 + 2(m-2)x + m - 2 = 0$ ẩn x . Số các giá trị của m để phương trình có đúng một nghiệm là:

- A. 1 B. 2. C. 3 D. 4.

Câu 8: . Đường thẳng $(d): y = (2 - 2m)x + 8m - 10$ luôn đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m . Khi đó biểu thức $A = x_0^3 + y_0^3$ có giá trị bằng

- A. -56. B. 56. C. 72. D. -72.

Câu 9: Một đoàn tàu gồm ba toa đỗ tại sân ga. Có 5 hành khách lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau. Chọn ngẫu nhiên một toa. Tìm xác suất để mỗi toa có ít nhất 1 hành khách bước lên tàu.

- A. $\frac{50}{81}$. B. $\frac{20}{81}$. C. $\frac{10}{81}$. D. $\frac{20}{243}$.

Câu 10: Từ một hộp chứa 11 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

- A. $\frac{4}{455}$. B. $\frac{33}{91}$ C. $\frac{4}{165}$ D. $\frac{24}{455}$.

Câu 11: Cho $\triangle ABC$ và 1 điểm O thuộc miền trong của tam giác, đường thẳng đi qua O và song song với AB cắt BC tại D và cắt AC tại G, đường thẳng đi qua O và song song với BC cắt AB tại K và AC tại F, đường thẳng đi qua O và song song với AC cắt AB tại H và

BC tại E. Khi đó tổng $\frac{KH}{AB} + \frac{DE}{BC} + \frac{GF}{AC}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. 2 D. 1

Câu 12: Cho $\triangle ABC$ trên cạnh AC lấy điểm M sao cho $AM = \frac{1}{3}AC$. Kẻ $MN \parallel AB (N \in BC)$,

trên MN lấy điểm $I (I \neq M, I \neq N)$. Tính $\frac{S_{IAC} + S_{IBC}}{S_{ABC}}$.

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{3}{2}$ C. $\frac{2}{3}$ D. $\frac{3}{4}$

Câu 13: Lượng nguyên liệu được dùng để làm một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1(kg)$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13(m^2)$. Hỏi muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường kính vành nón $50cm$, chiều cao $30cm$ thì cần bao nhiêu kg lá (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón).

- A. » 50,04(kg) B. » 50,03(kg) C. » 50,02(kg) D. » 50,00(kg)

Câu 14: Một cách tính khoảng cách giữa hai bờ sông: chọn hai vị trí A và B trên bờ sông và điểm C cố định ở bên kia sông. Từ vị trí A dùng giác kế đo góc trên mặt đất để đo góc $\angle CAB = 60^\circ$, sau

đó chuyển đến vị trí B tiếp tục đo $\angle CBA = 40^\circ$, giả sử $AB = 50m$. Khoảng cách từ C đến AB được coi như tương đương khoảng cách giữa hai bờ sông. Hãy tính khoảng cách giữa hai bờ sông (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân)

- A. 32,5m. B. 32,6m. C. 28,3m. D. 28,2m.

Câu 15: Cho hai đường tròn đồng tâm O có bán kính là R và r ($R > r$). Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm A cố định và một điểm M di động. Qua A vẽ dây BC của đường tròn lớn vuông góc với AM. Tổng $AB^2 + AC^2 + AM^2$ có giá trị

- A. $2r^2 + 2R^2$. B. $r^2 + 2R^2$ C. $2r^2 + R^2$. D. $r^2 + R^2$.

Câu 16: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC trong đó $B \in (O_1), C \in (O_2)$. Độ dài BC là:

- A. $\sqrt{R_1 R_2}$ B. $2\sqrt{R_1 R_2}$ C. $R_1 R_2$ D. $2 R_1 R_2$

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai (2,0 điểm). Thí sinh trả lời Câu 17; Câu 18. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn **đúng** hoặc **sai**.

Câu 17: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{C} < 45^\circ$, đường cao AH.

a) $\sqrt{1 + \sin 2C} = \sin C + \cos C$

b) $\sin^2 \angle BAH + \sin^2 C = 1$.

c) $\frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$

d) $AH = \frac{1}{2} BC \sin 2C$.

Câu 18: Một xe tải có chiều rộng 2,4m và chiều cao 2,5m muốn đi qua một cái cổng có hình Parabol. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi Parabol (P): $y = ax^2$ với $a < 0$ là hình chiếu biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh Parabol) tới chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dày của cổng)

- a). Chiều cao của cổng là 4m
b). Tọa độ 2 chân cổng trên mặt phẳng tọa độ Oxy là (2; -4) và (-2; -4) (1m ứng với 1 đơn vị độ dài trên mặt phẳng tọa độ)
c). $a = -1$
d). Xe tải không thể đi qua cổng.

PHẦN III. Tự luận (14,0 điểm)

Câu 1 (4,0 điểm):

a) Giải phương trình nghiệm nguyên $(x - y)(2x + y + 1) + 9y = 22$

b) Cho hai số tự nhiên $a; b$ thỏa mãn $2024a^2 + a = 2025b^2 + b$.

Chứng minh rằng: $2024(a + b) + 1$ là số chính phương.

c) Cho a, b, c là ba số nguyên. Biết $S = a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3.

Chứng minh rằng: $P = a + b + c + 2025$ chia hết cho 3.

Câu 2. (4,0 điểm):

a) Cho đa thức: $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 13$ biết $P(1) = 1; P(2) = 6; P(3) = 11$.
 Tính $P(10)$.

b) Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 13 = 3\sqrt{9x - 4}$.

Câu 3. (4,0 điểm):

Cho điểm A cố định thuộc $(O; R)$, điểm H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, qua H kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (O) . Lấy điểm B và C thuộc d sao cho H nằm giữa B, C thỏa mãn $AB = AC = R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$).

a) Chứng minh rằng $\triangle OMN$ đồng dạng với $\triangle OCB$.

b) Chứng minh rằng khi H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, thì MN luôn thuộc một đường cố định và tích $OB \cdot OC$ luôn không đổi.

c) Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.

Câu 4 (1,0 điểm).

Trên bảng có ghi 2025 số $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{2025}$. Mỗi lần xoá đi hai số bất kì trên bảng thì ta thay

bằng số $z = \frac{xy}{x+y+1}$ và giữ nguyên các số còn lại. Sau 2024 lần thực hiện thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó?

Câu 5 (1,0 điểm):

Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1$.

Tìm giá trị lớn nhất của $P = \frac{3ab}{\sqrt{36a^2 + 9b^2 + 8c^2}} + \frac{bc}{\sqrt{72a^2 + 9b^2 + 4c^2}} + \frac{2ac}{\sqrt{36a^2 + 18b^2 + 4c^2}}$.

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN TOÁN

(HDC gồm 13 trang)

PHẦN I. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (6,0 điểm)

Từ câu 1 đến câu 16: Mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	D	C	A	B	C	D	B	B
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	A	A	D	C	B	C	A	B

Câu 17 và 18: Hs: lựa chọn chính xác 01 trong 1 câu hỏi được 0,1 điểm; lựa chọn chính xác 02 ý được 0,25 điểm; lựa chọn chính xác 03 ý được 0,5 điểm; lựa chọn chính xác cả 04 ý được 1,0 điểm.

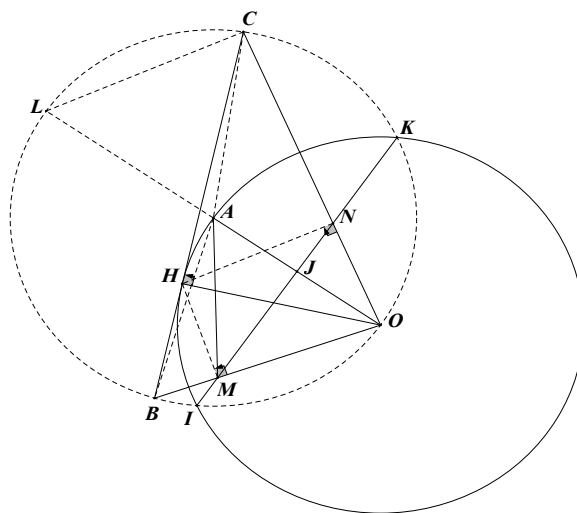
Câu 17				Câu 18			
a - Đ	b - S	c - S	d - Đ	a - Đ	b - Đ	c - Đ	d - S

PHẦN II. ĐÁP ÁN PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

CÂU U	ĐÁP ÁN	ĐIỂM
1.a (1,5)	Giải phương trình nghiệm nguyên $(x-y)(2x+y+1)+9y=22$.	
	$(x-y)(2x+y+1)+9y=22$ $\Leftrightarrow 2x^2+xy+x-2xy-y^2-y+9y=22$ $\Leftrightarrow (2x^2-2xy+6x)+(xy-y^2+3y)-(5x-5y+15)=7$ $\Leftrightarrow (x-y+3)(2x+y-5)=7$	0,25
	Do x, y nguyên nên ta có bốn trường hợp $\begin{cases} x-y+3=1 \\ 2x+y-5=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=-2 \\ 2x+y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=\frac{16}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$ <p>• Trường hợp 1:</p> $\begin{cases} x-y+3=7 \\ 2x+y-5=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{10}{3} \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases} \text{ (loại)}$ <p>• Trường hợp 2:</p>	0,5

	<p>• Trường hợp 3: $\begin{cases} x - y + 3 = -1 \\ 2x + y - 5 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn)</p> <p>* Trường hợp 4: $\begin{cases} x - y + 3 = -7 \\ 2x + y - 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = -10 \\ 2x + y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 8 \end{cases}$ (thỏa mãn)</p>	0,5
	Vậy phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x; y)$ là $(-2; 2)$; $(-2; 8)$	0,25
1.b (1,5)	Cho hai số tự nhiên $a; b$ thỏa mãn $2024a^2 + a = 2025b^2 + b$. Chứng minh rằng $2024(a+b)+1$ là số chính phương.	
	$2024a^2 + a = 2025b^2 + b \Leftrightarrow 2024a^2 - 2024b^2 + a - b = b^2$ $\Leftrightarrow (a-b)(2024a+2024b+1) = b^2$ (1).	0,5
	+ GT suy ra Với $a > b \Rightarrow a - b > 0$ Gọi $(a-b; 2024a+2024b+1) = d$ $\Rightarrow \begin{cases} a-b : d \\ 2024a+2024b+1 : d \end{cases} \Rightarrow b^2 : d^2 \Rightarrow b : d \Rightarrow a : d.$	0,5
	$\Rightarrow 2024a+2024b : d \Rightarrow 1 : d \Rightarrow d = 1. \Rightarrow (a-b; 2024a+2024b+1) = 1$ hay $a-b$ và $2024a+2024b+1$ là hai số nguyên tố cùng nhau. Mặt khác $(a-b)(2024a+2024b+1) = b^2$ là số chính phương nên suy ra $2024(a+b)+1$ là số chính phương (đpcm).	0,5
1.c (1,0)	Cho a, b, c là ba số nguyên. Biết $S = a^3 + b^3 + c^3$ chia hết cho 3. Chứng minh rằng: $P = a + b + c + 2025$ chia hết cho 3.	
	Ta chứng minh $n^3 - n : 3$ với mọi n nguyên. Nên: $a^3 - a : 3; b^3 - b : 3; c^3 - c : 3$	0,5
	$S - P = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) - 2025 : 3$ Vì $S : 3 \Rightarrow P : 3$	0,5
2.a (2,0)	Cho đa thức $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx - 13$ biết $P(1) = 1; P(2) = 6; P(3) = 11$. Tính $P(10)$. Cho các đa thức $P(x) = x^2 + ax + b$, $Q(x) = x^2 + cx + d$ với a, b, c, d là các số thực..	
	Có: $P(1) = 1$ nên $a + b + c = 13$ $P(2) = 6$ nên $8a + 4b + 2c = 3$ $P(3) = 11$ nên $27a + 9b + 3c = -57$	0,5
	Ta có hệ: $\begin{cases} a + b + c = 13 \\ 8a + 4b + 2c = 3 \\ 27a + 9b + 3c = -57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 13 \\ 4a + 2b + c = 1,5 \\ 9a + 3b + c = -19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b + c = 13 \\ 3a + b = -11,5 \\ 8a + 2b = -32 \end{cases}$	1,0

	$\Leftrightarrow a = -\frac{9}{2}, b = 2, c = \frac{31}{2}$	
	<p>Suy ra: $P(x) = x^4 - \frac{9}{2}x^3 + 2x^2 + \frac{31}{2}x - 13$</p> <p>$P(10) = 10^4 - \frac{9}{2} \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + \frac{31}{2} \cdot 10 - 13 = 5842$</p>	0,5
2.b (2,0)	Giải phương trình: $2x^2 - 11x + 13 = 3\sqrt{9x - 4}$	
	<p>ĐKXĐ: $x \geq \frac{4}{9}$</p>	0,25
	<p>Ta có</p> $2x^2 - 11x + 13 = 3\sqrt{9x - 4} \Leftrightarrow 2(x^2 - 7x + 5) + 3(x + 1 - \sqrt{9x - 4}) = 0$ $\Leftrightarrow 2(x^2 - 7x + 5) + \frac{3(x^2 + 2x + 1 - 9x + 4)}{x + 1 + \sqrt{9x - 4}} = 0$ $\Leftrightarrow 2(x^2 - 7x + 5) + \frac{3(x^2 - 7x + 5)}{x + 1 + \sqrt{9x - 4}} = 0$ $\Leftrightarrow (x^2 - 7x + 5) \left(2 + \frac{3}{x + 1 + \sqrt{9x - 4}} \right) = 0$	0,5
	<p>do $x \geq \frac{4}{9}$ nên $2 + \frac{3}{x + 1 + \sqrt{9x - 4}} > 0$</p> <p>suy ra</p> $x^2 - 7x + 5 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 = \frac{29}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{7}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2} \\ x - \frac{7}{2} = -\frac{\sqrt{29}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7 + \sqrt{29}}{2} \\ x = \frac{7 - \sqrt{29}}{2} \end{cases}$	0,5
	<p>Vậy $S = \left\{ \frac{7 \pm \sqrt{29}}{2} \right\}$</p>	0,25
3	<p>Cho điểm A cố định thuộc $(O; R)$, điểm H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, qua H kẻ tiếp tuyến d với đường tròn (O). Lấy điểm B và C thuộc d sao cho H nằm giữa B, C thỏa mãn $AB = AC = R$. Vẽ HM vuông góc với OB ($M \in OB$), vẽ HN vuông góc với OC ($N \in OC$).</p> <p>a) Chứng minh rằng $\triangle OMN$ đồng dạng với $\triangle OCB$.</p> <p>b) Chứng minh rằng khi H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, thì MN luôn thuộc một đường cố định và tích $OB \cdot OC$ luôn không đổi.</p> <p>c) Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.</p>	



3.a (1,5)	Chứng minh rằng $\triangle OMN$ đồng dạng với $\triangle OCB$.	
	Gọi $(A; AO)$ giao d tại B và C . Áp dụng hệ thức lượng vào tam giác $\triangle OHB$; $\angle OHB = 90^\circ$; $HM \perp OB \Rightarrow OM \cdot OB = OH^2$	0,5
	Tương tự có $ON \cdot OC = OH^2$ $\Rightarrow OM \cdot OB = ON \cdot OC \Rightarrow \frac{OB}{OC} = \frac{ON}{OM}$ Suy ra	0,5
	Xét $\triangle OMN$ và $\triangle OCB$ có $\frac{OB}{OC} = \frac{ON}{OM}$ và $\angle MON$ chung $\Rightarrow \triangle OMN \sim \triangle OCB$ (c - g - c)	0,5
3.b (1,5)	Chứng minh rằng khi H di động trên đường tròn sao cho $AH < R$, thì MN luôn đi qua một điểm cố định và tích $OB \cdot OC$ luôn không đổi.	
	Ta có $OM \cdot OB = OH^2 = OA^2 \Rightarrow \triangle MOA \sim \triangle AOB$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle MAO = \angle ABO$ Ta lại có $\angle ABO = \angle AOB$ ($\triangle ABO$ cân tại A) $\Rightarrow \angle MAO = \angle AOB$ $\Rightarrow$ Tam giác $\triangle MAO$ cân tại M	0,5
	Gọi $I; K$ là giao (O) và $(A) \Rightarrow IK$ là trung trực của OA . Tam giác $\triangle MAO$ cân tại M . Suy ra M thuộc IK . Do $(O; R); (A; R)$ cố định. Nên IK cố định. Suy ra MN thuộc đường thẳng IK cố định. Gọi J là giao của OA và IK . Xét tứ giác $OIAK$ có $OI = IA = AK = KO = R$	0,5

	<p>suy ra $OLAK$ là hình thoi. Suy ra $MN \perp OA$ tại J.</p> <p>Gọi OL là đường kính của $(A; R)$. Ta dễ có $\Delta OJN \sim \Delta OCL(g.g)$</p> <p>Mặt khác $\Delta OJN \sim \Delta OHB(g.g)$</p>	
	$\Delta OHB \sim \Delta OCL(g.g) \Rightarrow \frac{OB}{OL} = \frac{OH}{OC} \Rightarrow OB \cdot OC = OH \cdot OL = 2R^2$ <p>Suy ra</p> <p>Vậy khi H di động trên đường tròn thì MN luôn thuộc một đường cố định và tích $OB \cdot OC$ luôn không đổi bằng $2R^2$.</p>	0,5
3.c (1,0)	Tìm vị trí của điểm H để diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.	
	<p>Ta có $\Delta OMN \sim \Delta OCB(c-g-c)$ Suy ra $\frac{S_{OMN}}{S_{OBC}} = \frac{OJ \cdot MN}{OH \cdot BC} = \frac{OJ^2}{OH^2}$</p> <p>Mà $OH = OA = 2OJ$ (Vì $OLAK$ là hình thoi)</p>	0,5
	$\Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{4} S_{OBC} = \frac{OH \cdot BC}{8} = \frac{R \cdot BC}{8} \leq \frac{R \cdot 2R}{8} = \frac{R^2}{4}$ <p>(Hoặc $\Rightarrow S_{OMN} = \frac{1}{4} S_{OBC} = \frac{OB \cdot OC \cdot \sin BOC}{8} \leq \frac{2R^2}{8} = \frac{R^2}{4}$ Khi $\sin BOC = 1 \Leftrightarrow \angle BOC = 90^\circ$)</p> <p>Dấu “=” $\Leftrightarrow BC = 2R \Leftrightarrow H \equiv A$</p> <p>Vậy H trùng với A thì diện tích tam giác OMN đạt giá trị lớn nhất.</p>	0,5
4 (1,0)	<p>Trên bảng có ghi 2025 số $\frac{1}{1}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \dots; \frac{1}{2025}$. Mỗi lần xoá đi hai số bất kì trên bảng thì ta thay bằng số $z = \frac{xy}{x+y+1}$ và giữ nguyên các số còn lại. Sau 2024 lần thực hiện thì trên bảng còn lại một số. Tìm số còn lại đó</p>	
	<p>Ta có $\frac{1}{z} = \frac{x+y+1}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy}$. Khi đó ta được</p> $\frac{1}{z} + 1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} + 1 = \frac{x+y+1}{x} + 1 + \frac{1}{xy} = \frac{x+y+1}{x} + \frac{x+y+1}{y} + 1$ <p>Như vậy sau mỗi lần xoá đi $\frac{1}{x} + 1$ và $\frac{1}{y} + 1$ thì ta thay bằng số</p> $\frac{1}{z} + 1 = \frac{x+y+1}{x} + \frac{x+y+1}{y} + 1$	0,5

	<p>Như vậy tích các số sau mỗi lần xoá và thay số mới là không đổi</p> <p>Do đó nếu k là số cuối cùng thì ta được</p> $\frac{1}{k} + 1 = \frac{1}{1} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{2025} + 1 = \frac{1}{2026!} + 1$ <p>Từ đó ta được $k = \frac{1}{2026! - 1}$</p>	0,5
5 (1,0)	<p>Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1$.</p> <p>Tìm giá trị lớn nhất của:</p> $P = \frac{3ab}{\sqrt{36a^2 + 9b^2 + 8c^2}} + \frac{bc}{\sqrt{72a^2 + 9b^2 + 4c^2}} + \frac{2ac}{\sqrt{36a^2 + 18b^2 + 4c^2}}$	
	<p>$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{3} = 1 \Leftrightarrow 6a + 3b + 2c = 6$</p> <p>đặt</p> <p>$6a = x, 3b = y, 2c = z; x, y, z > 0; x + y + z = 6$</p> $6P = \frac{18ab}{\sqrt{(6a)^2 + (3b)^2 + 2(2c)^2}} + \frac{6bc}{\sqrt{2(6a)^2 + (3b)^2 + (2c)^2}} + \frac{12ac}{\sqrt{(6a)^2 + 2(3b)^2 + (2c)^2}}$ $6P = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2}} + \frac{yz}{\sqrt{2x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{xz}{\sqrt{x^2 + 2y^2 + z^2}}$	0,25
	<p>Áp dụng BĐT Bunhiacopxky cho 2 dãy</p> <p>Dãy 1: $\sqrt{2}; 1; 1$ Dãy 2: $x\sqrt{2}; y; z$ ta có</p> <p>ta có $4(2x^2 + y^2 + z^2) \geq (2x + y + z)^2 \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + y^2 + z^2} \geq \frac{2x + y + z}{2}; (1)$</p> <p>Tương tự: $\sqrt{x^2 + 2y^2 + z^2} \geq \frac{x + 2y + z}{2}; (2); \sqrt{x^2 + y^2 + 2z^2} \geq \frac{x + y + 2z}{2}; (3)$</p>	0,25
	<p>Từ (1); (2); (3)</p> $P \leq \frac{xy}{3} \left(\frac{1}{x + z + y + z} \right) + \frac{yz}{3} \left(\frac{1}{x + y + x + z} \right) + \frac{xz}{3} \left(\frac{1}{x + y + y + z} \right) = Q$ $P \leq Q \leq \frac{1}{12} \left(\frac{xy}{x + z} + \frac{xy}{y + z} + \frac{yz}{x + y} + \frac{yz}{x + z} + \frac{xz}{x + y} + \frac{xz}{y + z} \right)$ $P \leq Q \leq \frac{1}{12} \left(\frac{xy + yz}{x + z} + \frac{xy + xz}{y + z} + \frac{yz + xz}{x + y} \right) = \frac{1}{12} (y + x + z) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$	0,25
	<p>$Min(P) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x, y, z > 0; x + y + z = 6 \\ x = y = z \\ x + y = y + z = z + x \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2 \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3} \\ b = \frac{2}{3} \\ c = 1 \end{cases}$</p>	0,25

ĐÁP ÁN MỘT SỐ CÂU TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho ba đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1$; $(d_2): y = x + 2$; $(d_3): y = (m^2 + 1)x + 2m - 1$. Tổng các giá trị của m để ba đường thẳng trên đồng quy.

A. 1

B. 2

C. -2

D. -3

Lời giải

Để ba đường thẳng trên đồng quy thì

$$\begin{cases} m^2 + 1 \neq 2 \\ m^2 + 1 \neq 1 \\ A \in d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ m \neq 0 \\ 3 = (m^2 + 1).1 + 2m - 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m - 1)(m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 & (\text{Loại}) \\ m = -3 \end{cases}$$

Vậy $m = -3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Sai lầm của học sinh : Quên xét điều kiện (d_3) cắt (d_1) nên không loại giá trị $m = 1$.

Câu 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 & (1) \\ x + (a-1)y = 2 & (2) \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Số các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải:

Từ PT (1) ta có: $y = (a+1)x - (a-1)$ (3) thế vào PT (2) ta được:

$$x + (a+1)[(a+1)x - (a-1)] = 2 \Leftrightarrow x + (a^2 - 1)x - (a^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow a^2 x = a^2 + 1 \quad (4)$$

Với $a \neq 0$, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x = \frac{a^2 + 1}{a^2}$. Thay vào (3) ta có:

$$y = (a+1) \frac{a^2 + 1}{a^2} - (a-1) = \frac{(a+1)(a^2 + 1) - a^2(a-1)}{a^2} = \frac{a^3 + a + a^2 + 1 - a^3 + a^2}{a^2} = \frac{a+1}{a^2}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{a^2 + 1}{a^2}; \frac{a+1}{a^2} \right)$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ y \in \mathbb{Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 + 1}{a^2} \in \mathbb{Q} \\ \frac{a+1}{a^2} \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{Q})$$

Hệ phương trình có nghiệm nguyên:

Điều kiện cần: $x = \frac{a^2+1}{a^2} = 1 + \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Điều kiện đủ:

$$a = -1 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{Q} \text{ (nhận)}$$

$$a = 1 \Rightarrow y = 2 \in \mathbb{Q} \text{ (nhận)}$$

Vậy $a = \pm 1$ hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Câu 3: Hai vật chuyển động đều trên một đường tròn đường kính 20cm, xuất phát cùng một lúc, từ cùng một điểm. Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau. Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau. Hiệu vận tốc của hai vật là

Lời giải:

Gọi x và y là vận tốc các vật ($x, y > 0$, đơn vị cm/s)

Nếu chuyển động cùng chiều thì cứ 20 giây chúng lại gặp nhau

$$\text{Do đó, ta có } \frac{20p}{x-y} = 20$$

Nếu chuyển động ngược chiều thì cứ 4 giây chúng lại gặp nhau

$$\text{Do đó, ta có } \frac{20p}{x+y} = 4$$

Ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{20p}{x-y} = 20 \\ \frac{20p}{x+y} = 4 \end{cases}$$
 Biến đổi hệ ta được
$$\begin{cases} 20p = 20x - 20y \\ 20p = 4x + 4y \end{cases}$$
 và giải hệ
$$\begin{cases} x = 3p \\ y = 2p \end{cases}$$

Câu 5: Nếu a, b, c là các số thực thỏa mãn $a+b+c+11=6\sqrt{a-2}+4\sqrt{b-1}+2\sqrt{c}$ thì $a+b+c$ bằng

A. 15

B. 16

C. 17

D. 19

Lời giải:

$$\begin{aligned} a+b+c+11 &= 6\sqrt{a-2}+4\sqrt{b-1}+2\sqrt{c} \\ \Leftrightarrow (a-2-6\sqrt{a-2}+9) &+ (b-1-4\sqrt{b-1}+4) + (c-2\sqrt{c}+1) = 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=11 \\ b=5 \\ c=1 \end{cases} &\Leftrightarrow a+b+c=17 \end{aligned}$$

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): 2x-y-a^2=0$ và Parabol $(P): y=ax^2 (a>0)$. Số các giá trị của a để đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B nằm bên phải trục tung là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. vô số

Lời giải:

Xét phương trình hoành độ giao điểm $2x - a^2 = ax^2 \Leftrightarrow ax^2 - 2x + a^2 = 0$ (1)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi $\Delta' > 0 \Leftrightarrow a < 1$

Kết hợp $a > 0$ ta có $0 < a < 1$ Khi đó (1) có 2 nghiệm dương nên A, B nằm bên phải trục tung

Câu 7: Cho phương trình ẩn m $mx^2 + 2(m-2)x + m-2 = 0$ ẩn x . Số các giá trị của m để phương trình có đúng 1 nghiệm là:

- A. 1 B. 2. C. 3 D. 4.

Lời giải

TH1: $m = 0$ (tm)

TH2: PT có nghiệm kép $m = 2$

Vậy có 2 giá trị của m

Câu 9: Một đoàn tàu gồm ba toa đỗ sân ga. Có 5 hành khách lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau. Chọn ngẫu nhiên một toa. Tìm xác suất để mỗi toa có ít nhất 1 hành khách bước lên tàu.

- A. $\frac{50}{81}$. B. $\frac{20}{81}$. C. $\frac{10}{81}$. D. $\frac{20}{243}$.

Lời giải

Số phần tử không gian mẫu: $n(\Omega) = 3^5$.

Gọi A là biến cố: Mỗi toa có ít nhất một khách lên tàu .

Có hai trường hợp:

TH1: Một toa có 3 khách 2 toa còn lại mỗi toa có 1 khách.

Trường hợp này có: $C_3^1 C_5^3 2 = 60$ (cách).

TH 2: Một toa có 1 khách 2 toa còn lại mỗi toa có 2 khách.

Trường hợp này có: $C_3^1 C_5^1 C_4^2 = 90$ (cách).

Số kết quả thuận lợi của biến cố A là: $n(A) = 150$ (cách).

Xác suất của biến cố A :

$$P(A) = \frac{150}{3^5} = \frac{50}{81}.$$

Câu 10: Từ một hộp chứa 11 quả cầu màu đỏ và 4 quả cầu màu xanh, lấy ngẫu nhiên đồng thời 3 quả cầu. Xác suất để lấy được 3 quả cầu màu xanh bằng

- A. $\frac{4}{455}$. B. $\frac{33}{91}$ C. $\frac{4}{165}$. D. $\frac{24}{455}$.

Lời giải

Ta có $n(\Omega) = C_{15}^3$.

Gọi A là biến cố “lấy được 3 quả cầu màu xanh”. $\Rightarrow n(A) = C_4^3$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{4}{455}.$$

Nên

Câu 11: Cho $\triangle ABC$ và 1 điểm O thuộc miền trong của tam giác, đường thẳng đi qua O và // với AB cắt BC tại D và cắt AC tại G, đường thẳng đi qua O và //BC cắt AB tại K và AC tại F, đường thẳng đi qua O

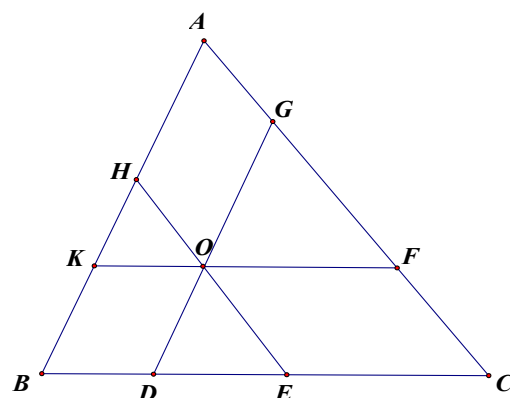
và //AC cắt AB tại H và BC tại E. Khi đó $\frac{KH}{AB} + \frac{DE}{BC} + \frac{GF}{AC}$ bằng

Lời giải:

$$a, \quad \triangle HKO \sim \triangle ABC (g.g) \Rightarrow \frac{KH}{AB} = \frac{KO}{BC}$$

$$\triangle GOF \sim \triangle ABC (g.g) \Rightarrow \frac{GF}{AC} = \frac{OF}{BC}$$

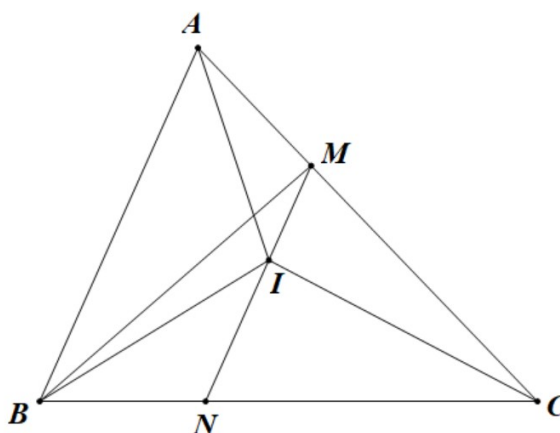
$$Nên \quad \frac{KH}{AB} + \frac{DE}{BC} + \frac{GF}{AC} = \frac{KO}{BC} + \frac{DE}{BC} + \frac{OF}{BC} = 1$$



$$AM = \frac{1}{3} AC \quad MN \parallel AB (N \in BC),$$

Câu 12: Cho $\triangle ABC$ trên cạnh AC lấy điểm M sao cho

trên MN lấy điểm $I (I \neq M, I \neq N)$. Tính $\frac{S_{IAC} + S_{IBC}}{S_{ABC}}$.

Lời giải:

Xét $\triangle IAB$ và $\triangle MAB$ có chung đáy AB , chiều cao hạ từ I xuống AB bằng chiều cao hạ từ M xuống AB (vì $MN \parallel AB$) nên $S_{IAB} = S_{MAB}$

$$S_{MAB} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow S_{LAB} = \frac{1}{3} S_{ABC}$$

Chứng minh

Có
$$S_{LAB} + S_{LAC} + S_{IBC} = S_{ABC} \Rightarrow S_{LAC} + S_{IBC} = \frac{2}{3} S_{ABC}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{LAC} + S_{IBC}}{S_{ABC}} = \frac{2}{3}$$

Câu 13: Lượng nguyên liệu được dùng để làm một chiếc nón lá được ước lượng qua phép tính diện tích xung quanh của mặt nón. Cứ $1(kg)$ lá dùng để làm nón có thể làm ra số nón có tổng diện tích xung quanh là $6,13(m^2)$. Hỏi muốn làm ra 1000 chiếc nón lá giống nhau có đường kính vành nón $50cm$, chiều cao $30cm$ thì cần bao nhiêu kg lá (coi mỗi chiếc nón có hình dạng là một hình nón).

Lời giải:

Theo giả thiết mỗi chiếc nón lá là một hình nón có bán kính đáy $R = \frac{50}{2} = 25(cm) = 0,25(m)$ và đường cao $h = 30(cm) = 0,3(m)$

Gọi l là độ dài đường sinh của hình nón khi đó ta có: $l = \sqrt{h^2 + R^2} = \frac{\sqrt{61}}{20}(m)$.

Diện tích xung quanh của một chiếc nón lá là :

$$S_{xq} = pRl = p.0,25. \frac{\sqrt{61}}{20} = \frac{p.\sqrt{61}}{80} (m^2)$$

Tổng diện tích xung quanh của 1000 chiếc nón lá là:

$$S = 1000. \frac{p.\sqrt{61}}{80} = \frac{25p\sqrt{61}}{2} (m^2)$$

Do đó khối lượng lá cần dùng là: $\frac{S}{6,13} \gg 50,03(kg)$

Câu 14: Một cách tính khoảng cách giữa hai bờ sông: chọn hai vị trí A và B trên bờ sông và điểm C cố định ở bên kia sông. Từ vị trí A dùng giác kế đo góc trên mặt đất để đo góc $\widehat{CAB}=60^\circ$, sau đó chuyển đến vị trí B tiếp tục đo $\widehat{CBA}=40^\circ$, giả sử $AB = 50m$. Khoảng cách từ C đến AB được coi như tương đương khoảng cách giữa hai bờ sông. Hãy tính khoảng cách giữa hai bờ sông (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân)

- A. 32,5m. B. 32,6m. C. 28,3m. D. 28,2m.

Lời giải

Áp dụng định lý hàm sin ta có : $\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin 80^\circ}{50} = \frac{\sin 40^\circ}{AC}$
 $\Rightarrow AC = \frac{50 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{50 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot \sin 60^\circ \approx 28,3$

Câu 15: Cho hai đường tròn đồng tâm O có bán kính là R và r ($R > r$). Trên đường tròn nhỏ lấy một điểm A cố định và một điểm M di động. Qua A vẽ dây BC của đường tròn lớn vuông góc với AM. Tổng $AB^2 + AC^2 + AM^2$ có giá trị

Lời giải

a) Gọi D là giao điểm thứ hai của BC với đường tròn nhỏ.

Vẽ $OH \perp AD$ ta có: $HA = HD, HB = HC$ (đường kính vuông góc với dây).

Xét $\triangle MAD$ có OH là đường trung bình.

Suy ra $AM = 2OH$.

Ta có: $AB^2 + AC^2 = (HB - HA)^2 + (HC + HA)^2$

$$= 2HA^2 + 2HB^2$$

Xét $\triangle HOB$ vuông tại H ta có:

$$OH^2 + HB^2 = OB^2 = R^2.$$

Xét $\triangle HOA$ vuông tại H ta có:

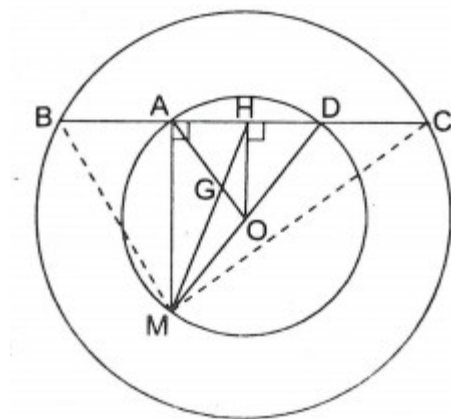
$$OH^2 + HA^2 = OA^2 = r^2$$

Do đó

$$AB^2 + AC^2 + AM^2 = 2HA^2 + 2HB^2 + 4OH^2$$

$$= 2(HA^2 + OH^2) + 2(HB^2 + OH^2)$$

$$= 2r^2 + 2R^2 \text{ (không đổi)}$$



Câu 16: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC trong đó $B \in (O_1), C \in (O_2)$. Độ dài BC là:

A. $\sqrt{R_1 R_2}$

B. $2\sqrt{R_1 R_2}$

C. $R_1 R_2$

D. $2 R_1 R_2$

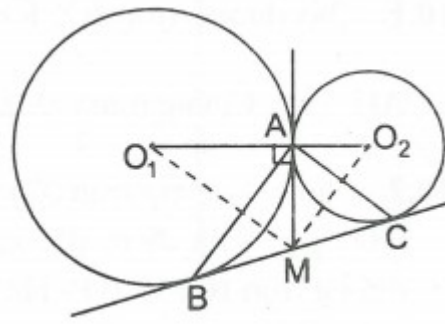
Giải

Qua A vẽ tiếp tuyến chung trong cắt BC tại M.

Ta có $MA = MB; MA = MC$.

Suy ra $MA = MB = MC = \frac{BC}{2}$.

Ta có MO_1 là tia phân giác của góc AMB, MO_2 tia phân giác của góc AMC.



Suy ra $MO_1 \perp MO_2$.

Xét $\triangle MO_1O_2$ vuông tại M có $MA \perp O_1O_2$. Suy ra $MA^2 = AO_1 \cdot AO_2 = R_1 \cdot R_2$.

Do đó $MA = \sqrt{R_1 R_2}$

Vậy $BC = 2\sqrt{R_1 R_2}$.

Câu 18: Một xe tải có chiều rộng 2,4m và chiều cao 2,5m muốn đi qua một cái cổng có hình Parabol. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, gọi Parabol (P): $y = ax^2$ với $a < 0$ là hình chiếu biểu diễn cổng mà xe tải muốn đi qua. Biết khoảng cách giữa hai chân cổng là 4m và khoảng cách từ đỉnh cổng (đỉnh Parabol) tới chân cổng là $2\sqrt{5}$ m (bỏ qua độ dày của cổng)

A. Chiều cao của cổng là 4m

B. Tọa độ 2 chân cổng trên mặt phẳng tọa độ Oxy là (2; -4) và (-2; -4) (1m ứng với 1 đơn vị độ dài trên mặt phẳng tọa độ)

C. $a = -1$

D. Xe tải không thể đi qua cổng

Lời giải:

$$OB = 2\sqrt{5}(m); BC = 4(m) \Rightarrow BH = \frac{BC}{2} = 2$$

Theo đề bài ta có

$$\text{Áp dụng định lý Pytaago ta được: } OH = \sqrt{OB^2 - BH^2} = 4(m)$$

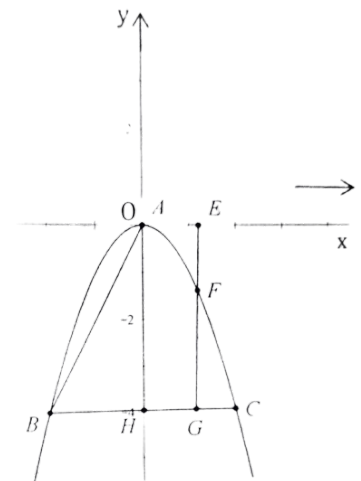
Khi đó cổng cao 4(m) và C(2;-4), B(-2; -4)

Hay tọa độ 2 chân cổng trên mặt phẳng tọa độ Oxy là (2; -4) và (-2; -4)

$$\text{Suy ra } -4 = a \cdot 2^2 \Leftrightarrow a = -1$$

Ô tô đi qua cổng dễ nhất khi nó đi từ chính giữa cổng, khi đó độ rộng mỗi bên của xe tải là

$$HG = \frac{2,4}{2} = 1,2(m)$$



Thay $x = 1,2$ ta được $y = -1,44$ ta được F(1,2; -1,44)

Suy ra $FG = 4 - 1,44 = 2,56(m)$. Ta thấy $2,5(m) < 2,56(m)$ nên ô tô có thể đi qua được cổng

ĐỀ CHÍNH THỨC**Môn: Toán**

Thời gian làm bài: 135 phút (Không kể thời gian giao đề)

(Đề thi có: 03 trang)

Thí sinh làm bài (cả phần trắc nghiệm khách quan và phần tự luận) trên tờ giấy thi.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (4,0 điểm). Thí sinh trả lời câu hỏi từ 1 đến 16. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D trong đó chỉ có 1 phương án đúng.**Câu 1:** Cho ba đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1$; $(d_2): y = x + 2$; $(d_3): y = (m^2 + 1)x + 2m - 1$. Tổng các giá trị của m để ba đường thẳng trên đồng quy.

A. 1

B. 2

C. -2

D. -3

Câu 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 & (1) \\ x + (a-1)y = 2 & (2) \end{cases}$$
 (a là tham số)Số các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Câu 3: Hai vật chuyển động trên một đường tròn có chu vi bằng $200m$, vận tốc vật thứ nhất là $4m/s$, vận tốc vật thứ hai là $6m/s$. Hai vật xuất phát cùng một thời điểm tại một vị trí và chuyển động cùng chiều. Hỏi sau 16 phút vật thứ hai vượt lên trước vật thứ nhất mấy lần? (không kể lúc xuất phát)

A. 9

B. 10

C. 11

D. 12

Câu 4: $x_0 = \sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^2}} - \sqrt[3]{\sqrt{a^2 + b^2} - a}$ là nghiệm của phương trình nào dưới đâyA. $x^3 + 3\sqrt[3]{b^2}x - 3a = 0$ B. $x^3 + 3\sqrt[3]{b^2}x - a = 0$ C. $x^3 + 3\sqrt[3]{b^2}x - 2a = 0$ D. $x^3 - 3\sqrt[3]{b^2}x + 2a = 0$ **Câu 5:**
$$A = \frac{1}{\sqrt[3]{2^2} + \sqrt[3]{2 \cdot 1} + 1} + \frac{1}{\sqrt[3]{3^2} + \sqrt[3]{3 \cdot 2} + \sqrt[3]{2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{2024^2} + \sqrt[3]{2024 \cdot 2023} + \sqrt[3]{2023^2}}$$
 được biểu diễn dưới dạng $\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ với a, b là các số nguyên, giá trị của $a+b$ là

A. 2023.

B. 2022.

C. 2024.

D. 2025.

Câu 6: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng $(d): mx + (2 - 3m)y + m - 1 = 0$ (d). Giá trị của m để khoảng cách từ gốc O đến đường thẳng (d) lớn nhất là:A. $m = \frac{1}{2}$.B. $m = \frac{2}{3}$.C. $m = \frac{-1}{2}$.D. $m = \frac{-2}{3}$.**Câu 7:** Tổng giá trị m để hai đường thẳng $(d_1): y = (m^2 - 3)x - 4, (m \neq \pm\sqrt{3})$ và $(d_2): x - y + m - 2 = 0$ song song với nhau là

A. 0.

B. 2.

C. -2.

D. 4.

Câu 8: Đường thẳng $(d): y = (2 - 2m)x + 8m - 10$ luôn đi qua điểm $M(x_0; y_0)$ với mọi giá trị của m . Khi đó biểu thức $A = x_0^3 + y_0^3$ có giá trị bằng

- A. -56 . B. 56 . C. 72 . D. -72 .

Câu 9: Có hai hộp, mỗi hộp chứa ba tấm thẻ được đánh số $1, 2, 3$. Rút ngẫu nhiên từ mỗi hộp một thẻ và các con số trên hai thẻ được nhân với nhau. Xác suất để kết quả đó là số chẵn?

- A. $\frac{2}{9}$. B. $\frac{5}{9}$. C. $\frac{4}{9}$. D. $\frac{1}{2}$.

Câu 10: Trong giải cầu lông kỉ niệm 25 năm tái thành lập huyện Phù Ninh có 8 người tham gia trong đó có hai bạn Việt và Nam, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung bảng đầu là:

- A. $\frac{6}{7}$. B. $\frac{5}{7}$. C. $\frac{4}{7}$. D. $\frac{3}{7}$.

Câu 11: Cho ΔABC , M là điểm tùy ý nằm trong tam giác các đường thẳng AM, BM, CM lần lượt cắt các cạnh BC, AC, AB tại A', B', C'. Khi đó tổng $\frac{AM}{AA'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{CM}{CC'}$ bằng:

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. 3 . D. 2 .

Câu 12: Cho tam giác ABC có $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm, D và E lần lượt trên các cạnh AB và AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của DE và BC thì tỉ số $\frac{KE}{KD}$ bằng

- A. $1,25$. B. $0,75$. C. 1 . D. $0,8$.

Câu 13: Người ta định xây kim tự tháp bằng xi măng hình chóp tứ giác đều đáy là hình vuông. Kim tự tháp có cạnh đáy bằng 4 m, chiều cao bằng 3 m. Nguyên liệu được chở đến bằng xe ô tô, mỗi chuyến chở được nhiều nhất $2,5$ m³. Hỏi phải chở ít nhất bao nhiêu chuyến xe để đủ nguyên vật liệu cho công trình đó?

- A. 6 (chuyến) B. 7 (chuyến) C. 8 (chuyến) D. 9 (chuyến)

Câu 14: Một cách tính khoảng cách giữa hai bờ sông: chọn hai vị trí A và B trên bờ sông và điểm C cố định ở bên kia sông. Từ vị trí A dùng giác kế đo góc trên mặt đất để đo góc $\widehat{CAB} = 60^\circ$, sau đó chuyển đến vị trí B tiếp tục đo $\widehat{CBA} = 40^\circ$, giả sử $AB = 50$ m. Khoảng cách từ C đến AB được coi như tương đương khoảng cách giữa hai bờ sông. Hãy tính khoảng cách giữa hai bờ sông (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân)

- A. $32,5$ m. B. $32,6$ m. C. $28,3$ m. D. $28,2$ m.

Câu 15: Cho tam giác ABC đều có độ dài một cạnh là 5 cm nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Chu vi đường tròn $(O; R)$ bằng

- A. $5\pi cm$. B. $10\sqrt{3}\pi cm$. C. $\frac{10\pi}{\sqrt{3}} cm$. D. $75\pi cm$.

Câu 16: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC trong đó $B \in (O_1), C \in (O_2)$. Độ dài BC là:

- A. $\sqrt{R_1 R_2}$ B. $2\sqrt{R_1 R_2}$ C. $R_1 R_2$ D. $2 R_1 R_2$

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai (2,0 điểm). Thí sinh trả lời Câu 17; Câu 18. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 17: Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{C} < 45^\circ$, đường cao AH.

a) $\tan B \cdot \cot HAC = 1$.

b) $\sin^2 BAH + \sin^2 C = 1$.

c) $\sin^2 C = \frac{1}{1 + \tan^2 C}$.

d) $AH = \frac{1}{2} BC \sin 2C$.

Câu 18: Gieo một con súc sắc cân đối và đồng chất. Giả sử súc sắc xuất hiện mặt b chấm.

A. Xác suất để phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm kép là 0.

B. Xác suất để phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ vô nghiệm là $\frac{1}{6}$.

C. Xác suất để phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có hai nghiệm phân biệt là $\frac{2}{3}$.

D. Xác suất để phương trình $x^2 + bx + 2 = 0$ có nghiệm là $\frac{2}{3}$.

PHẦN III. Tự luận (14,0 điểm)

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Cho x, y, z là các số nguyên sao cho $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$. Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 27.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

c) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{85}{13}$.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $f(3) \cdot f(4) = 7$. Chứng minh rằng đa thức $f(x) - 12$ không có nghiệm nguyên.

b) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

Câu 3 (4,0 điểm). Cho đường tròn $(O; 3cm)$ và A là 1 điểm cố định thuộc đường tròn. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại A. Trên d lấy điểm M (với M khác A). Kẻ dây cung AB vuông góc với OM tại H.

a) Chứng minh tam giác MBA cân và MB là tiếp tuyến của (O)

b) Kẻ đường kính AD, đoạn thẳng DM cắt đường tròn tại E. Chứng minh $MH.MO = ME.MD$. Từ đó suy ra $\widehat{EHM} = \widehat{ODM}$

c) Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác HOA lớn nhất

Câu 4 (1,0 điểm). Trong một lô hàng có 12 sản phẩm khác nhau, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm được lấy ra có không quá 1 phế phẩm

Câu 5 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a^2 + 3} + \frac{b}{b^2 + 3} + \frac{c}{c^2 + 3}$.

.....**HẾT**.....

Họ và tên thí sinh:.....Số báo danh:.....

Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHÍNH THỨC MÔN TOÁN

(HDC gồm 8 trang)

PHẦN I. ĐÁP ÁN TRẮC NGHIỆM KHÁCH QUAN (6,0 điểm)

Từ câu 1 đến câu 16: Mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8
Đáp án	D	C	A	C	A	A	B	B
Câu	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	B	D	D	D	B	C	C	B

Câu 17 và 18: Hs: lựa chọn chính xác 01 trong 1 câu hỏi được 0,1 điểm; lựa chọn chính xác 02 ý được 0,25 điểm; lựa chọn chính xác 03 ý được 0,5 điểm; lựa chọn chính xác cả 04 ý được 1,0 điểm.

Câu 17				Câu 18			
A - Đ	B - S	C - S	D - Đ	A - Đ	B - S	C - Đ	D - Đ

PHẦN II. ĐÁP ÁN PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Cho x, y, z là các số nguyên sao cho $(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z$. Chứng minh rằng $x+y+z$ chia hết cho 27.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố p để $2^p + p^2$ cũng là số nguyên tố.

c) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa $\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{85}{13}$.

Câu	Nội dung	Điểm
a)	TH1: Nếu 3 số x, y, z chia 3 có số dư khác nhau $\Rightarrow x+y+z \div 3$ Khi đó $(x-y); (y-z); (z-x)$ đều không chia hết cho 3 nên $(x-y)(y-z)(z-x)$ không chia hết cho 3 nghĩa là $x+y+z$ không chia hết cho 3 (trái với giả sử).	0,5
	TH2: Nếu 3 số x, y, z chia 3 có 2 số có cùng dư: Tương tự trường hợp 1 suy ra trái giả sử.	0,5
	Do đó 3 số x, y, z chia 3 có cùng dư suy ra $(x-y); (y-z); (z-x)$ đều chia hết cho 3 nên $(x-y)(y-z)(z-x) \div 27 \Rightarrow x+y+z \div 27$.	0,5
b)	$2^p + p^2 = 2^2 + 2^2 = 8$ +) Với $p = 2$ ta có không phải số nguyên tố nên không thỏa mãn bài toán.	0,25

	<p>+) Với $p = 3$ ta có $2^p + p^2 = 2^3 + 3^2 = 17$ là số nguyên tố nên thỏa mãn bài toán.</p>	
	<p>+) Với p là số nguyên tố lớn hơn 3 ta có ta có p lẻ và p không chia hết cho 3.</p> <p>Ta có $2^p + p^2 = (2^p + 1) + (p^2 - 1) = (2^p + 1) + (p - 1)(p + 1)$</p>	0,25
	<p>Ta có $p - 1; p; p + 1$ là ba số nguyên liên tiếp nên trong 3 số này phải có 1 số chia hết cho 3 mà p không chia hết cho 3 nên trong hai số $p - 1$ và $p + 1$ phải có một số chia hết cho 3 suy ra $(p - 1)(p + 1) : 3, (*)$</p>	0,5
	<p>Do p lẻ nên $2^p + 1 = 2^p + 1^p = (2 + 1)(2^{p-1} - 2^{p-2} + 2^{p-3} - \dots + 1) : 3, (**)$</p> <p>Từ (*) và (**) ta có $(2^p + 1) + (p - 1)(p + 1)$ chia hết cho 3 nên $2^p + p^2$ chia hết cho 3</p> <p>mà $2^p + p^2 > 17$ nên $2^p + p^2$ không là số nguyên tố.</p> <p>+) Vậy số nguyên tố thỏa mãn bài toán là $p = 3$.</p>	0,5
c)	<p>$\frac{x^2 + y^2}{x + y} = \frac{85}{13} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{5.17.(x + y)}{13} \quad (1)$</p> <p>Vì 5.17 không chia hết cho $13 \Rightarrow (x + y) = 13k (k \in \mathbb{Z})$</p> <p>$\Rightarrow y = 13k - x \quad (2)$</p> <p>Thay (2) vào (1) ta có: $x^2 + (13k - x)^2 = 85k$</p> <p>$\Leftrightarrow 2x^2 - 26kx + 169k^2 - 85k = 0 \quad (*)$</p>	0,25
	<p>Ta có $\Delta' = (13k)^2 - 2(169k^2 - 85k) = k(170 - 169k)$</p> <p>Để (*) có nghiệm thì</p> <p>$\Delta' \geq 0$</p> <p>$\Leftrightarrow k(170 - 169k) \geq 0$</p> <p>$\Leftrightarrow 0 \leq k \leq \frac{170}{169} = 1 + \frac{1}{169}$</p> <p>$\Leftrightarrow k = 1$</p>	0,25
	<p>Với $k = 1$ ta có hệ phương trình $\begin{cases} x + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 85 \end{cases}$</p> <p>Giải hệ phương trình này, ta được $x = 6; y = 7$ hoặc $x = 7; y = 6$.</p> <p>Vậy các cặp số $(x; y)$ thỏa mãn là $x = 6; y = 7$ hoặc $x = 7; y = 6$</p>	0,5

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Cho đa thức $f(x)$ với các hệ số nguyên thỏa mãn $f(3).f(4) = 7$. Chứng minh rằng đa thức $f(x) - 12$ không có nghiệm nguyên.

b) Giải phương trình: $\sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} + 3x^2 - 14x - 8 = 0$

Câu	Nội dung	Điểm
-----	----------	------

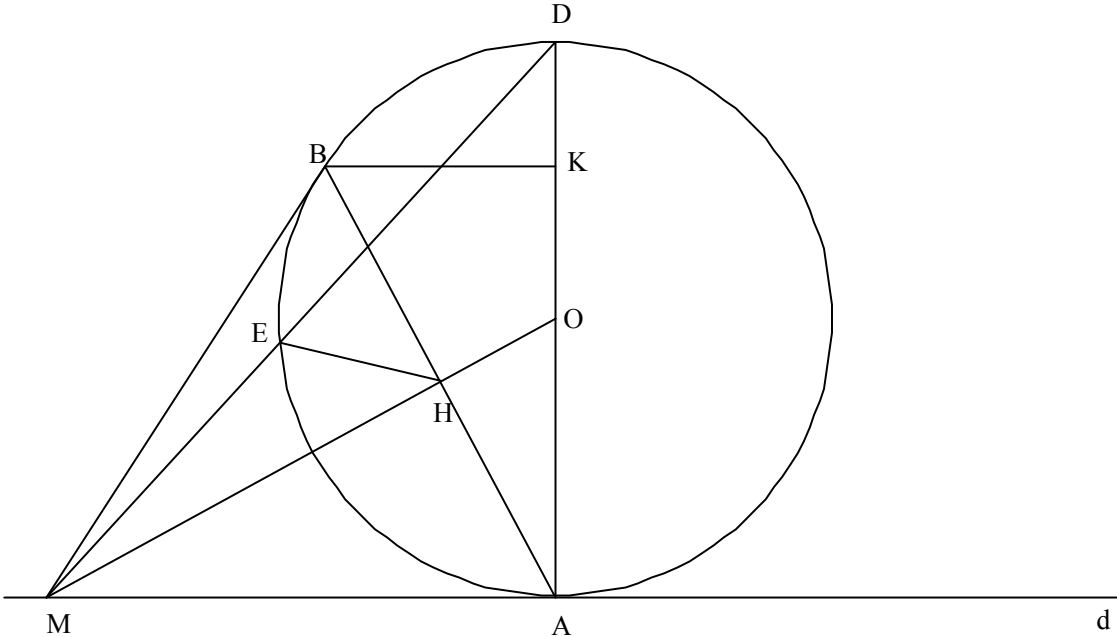
a)	+) Giả sử đa thức $f(x) - 12$ có nghiệm nguyên a . Khi đó $f(x) - 12 = (x - a) \cdot Q(x)$ với $Q(x)$ là đa thức có hệ số nguyên.	0,5
	Suy ra $f(3) = (3 - a) \cdot Q(3) + 12$ và $f(4) = (4 - a) \cdot Q(4) + 12$ (1)	0,5
	+) Ta có: $f(3) \cdot f(4) = 7$ $\Leftrightarrow [(3 - a) \cdot Q(3) + 12] \cdot [(4 - a) \cdot Q(4) + 12] = 7$ $\Leftrightarrow (3 - a) \cdot (4 - a) \cdot Q(3) \cdot Q(4) + 12(3 - a) \cdot Q(3) + 12(4 - a) \cdot Q(4) + 144 = 7$ (2)	0,5
	+) Do $3 - a$ và $4 - a$ là hai số nguyên liên tiếp nên $(3 - a)(4 - a)$ là số chẵn. Do đó VT của (2) là số chẵn, nhưng VP của (2) là số lẻ, điều này mâu thuẫn. Vậy giả sử trên sai. Suy ra đa thức $f(x) - 12$ không có nghiệm nguyên.	0,5
b)	+) Điều kiện: $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$ +) Phương trình $\Leftrightarrow (\sqrt{3x+1} - 4) - (\sqrt{6-x} - 1) + (3x^2 - 14x - 5) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{3x+1} - 4)(\sqrt{3x+1} + 4)}{\sqrt{3x+1} + 4} - \frac{(\sqrt{6-x} - 1)(\sqrt{6-x} + 1)}{\sqrt{6-x} + 1} + (3x^2 - 14x - 5) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{3x+1-16}{\sqrt{3x+1}+4} - \frac{6-x-1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x^2 - 14x - 5) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{\sqrt{6-x}+1} + (x-5)(3x+1) = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow (x-5) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1) \right] = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5(n) \\ \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{\sqrt{6-x}+1} + (3x+1) = 0(*) \end{cases}$	0,25
	+) Vì $3x+1 \geq 0 \Rightarrow VT_{(*)} > 0 \Rightarrow PT(*)$ vô nghiệm. +) Kết luận: Phương trình có tập nghiệm là: $S = \{5\}$.	0,25

Câu 3 (4,0 điểm). Cho đường tròn $(O; 3cm)$ và A là 1 điểm cố định thuộc đường tròn. Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn tại A. Trên d lấy điểm M (với M khác A). Kẻ dây cung AB vuông góc với OM tại H.

a) Chứng minh tam giác MBA cân và MB là tiếp tuyến của (O)

b) Kẻ đường kính AD, đoạn thẳng DM cắt đường tròn tại E. Chứng minh: $\angle EHM = \angle ODM$

c) Tìm vị trí của điểm M trên d sao cho diện tích tam giác HOA lớn nhất

Câu	Nội dung	Điểm
		
a)	Với tam giác MAB cân vì MH là trung tuyến vừa là đường cao	0,5
	Chỉ ra được $\Delta MAO = \Delta MB$	0,5
	$\Rightarrow MB \perp OB$	0,5
	$\Rightarrow MB$ là tiếp tuyến của (O)	0,5
b)	Chứng minh $MH.MO = MA^2$	0,5
	Chứng minh $ME.MD = MA^2$	0,5
	Từ đó chứng minh được $\Delta EHM \sim \Delta ODM$ (c - g - c)	0,5
	$\Rightarrow \angle EHM = \angle ODM$	0,5
c)	Kẻ $BK \perp AD$ Ta có $S_{HOA} = \frac{1}{4} S_{ABD} = \frac{1}{8} BK.AD$	0,5
	Vì $BK \leq 3 \Rightarrow S_{HOA}$ lớn nhất khi B là điểm chính giữa cung AD, khi đó $AM = OA = 3\text{cm}$	0,5

Câu 4 (1,0 điểm). Trong một lô hàng có 12 sản phẩm khác nhau, trong đó có đúng 2 phế phẩm. Lấy ngẫu nhiên 6 sản phẩm từ lô hàng đó. Hãy tính xác suất để trong 6 sản phẩm được lấy ra có không quá 1 phế phẩm

Câu	Nội dung	Điểm
4	Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_{12}^6 = 924$	0,25
	Gọi X là biến cố: “trong 6 sản phẩm được lấy ra có không quá 1 phế phẩm”	0,25
	TH1: Trong 6 sản phẩm được lấy ra chỉ có 1 phế phẩm. Số cách lấy là: $C_2^1.C_{10}^5 = 504$	

TH2: Trong 6 sản phẩm được lấy ra không có phế phẩm. Số cách lấy là: $C_{10}^6 = 210$ Số kết quả thuận lợi là: $504 + 210 = 714$	0,25
Vậy xác suất cần tính là $P(X) = \frac{714}{924} = \frac{17}{22}$	0,25

Câu 5 (1,0 điểm). Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 4$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a}{a^2 + 3} + \frac{b}{b^2 + 3} + \frac{c}{c^2 + 3}$.

Câu	Nội dung	Điểm
	$a^2 + b^2 + c^2 = 4 \Leftrightarrow a^2 = 4 - (b^2 + c^2) \leq 4 \Leftrightarrow a^2 \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 2$ <p>Từ giả thiết</p> $0 \leq b; c \leq 2$ <p>Tương tự ta cũng có</p>	0,25
	$(2 - a)(a^2 + 2a + 7) \geq 0 \Leftrightarrow 14a \geq a^2(a^2 + 3) \Leftrightarrow \frac{a}{a^2 + 3} \geq \frac{a^2}{14}$ <p>Suy ra a</p>	0,25
	$\frac{b}{b^2 + 3} \geq \frac{b^2}{14}; \frac{c}{c^2 + 3} \geq \frac{c^2}{14}$ <p>Tương tự ta cũng có</p>	0,25
	$P \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{14} = \frac{2}{7}$ <p>Do đó</p> $\frac{2}{7} \quad (a; b; c) \quad (0; 0; 2)$ <p>Giá trị nhỏ nhất của P bằng $\frac{2}{7}$. Đạt được khi là các hoán vị của $(0; 0; 2)$.</p>	0,25

ĐÁP ÁN MỘT SỐ CÂU TRẮC NGHIỆM

Câu 1: Cho ba đường thẳng $(d_1): y = 2x + 1$; $(d_2): y = x + 2$; $(d_3): y = (m^2 + 1)x + 2m - 1$. Tổng các giá trị của m để ba đường thẳng trên đồng quy.

A. 1

B. 2

C. -2

D. -3

Lời giải

Để ba đường thẳng trên đồng quy thì

$$\begin{cases} m^2 + 1 \neq 2 \\ m^2 + 1 \neq 1 \\ A \in d_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq \pm 1 \\ m \neq 0 \\ 3 = (m^2 + 1).1 + 2m - 1 \end{cases} \quad (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m=1 & (\text{Loại}) \\ m=-3 \end{cases}$$

Vậy $m=-3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Sai lầm của học sinh : Quên xét điều kiện (d_3) cắt (d_1) nên không loại giá trị $m=1$.

Câu 2: Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (a+1)x - y = a+1 & (1) \\ x + (a-1)y = 2 & (2) \end{cases} \quad (a \text{ là tham số})$$

Số các số nguyên a để hệ phương trình có nghiệm nguyên là:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải:

Từ PT (1) ta có: $y = (a+1)x - (a+1)$ (3) thế vào PT (2) ta được:

$$x + (a+1)[(a+1)x - (a+1)] = 2 \Leftrightarrow x + (a^2 - 1)x - (a^2 - 1) = 2 \Leftrightarrow a^2 x = a^2 + 1 \quad (4)$$

Với $a \neq 0$, phương trình (4) có nghiệm duy nhất $x = \frac{a^2 + 1}{a^2}$. Thay vào (3) ta có:

$$y = (a+1) \frac{a^2 + 1}{a^2} - (a+1) = \frac{(a+1)(a^2 + 1) - a^2(a+1)}{a^2} = \frac{a^3 + a + a^2 + 1 - a^3 - a^2}{a^2} = \frac{a+1}{a^2}$$

Suy ra hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{a^2 + 1}{a^2}; \frac{a+1}{a^2} \right)$

$$\begin{cases} x \in \mathbb{Q} \\ y \in \mathbb{Q} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2 + 1}{a^2} \in \mathbb{Q} \\ \frac{a+1}{a^2} \in \mathbb{Q} \end{cases} \quad (a \in \mathbb{Q})$$

Hệ phương trình có nghiệm nguyên:

Điều kiện cần: $x = \frac{a^2 + 1}{a^2} = 1 + \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} \in \mathbb{Q} \Leftrightarrow a^2 = 1 \Leftrightarrow a = \pm 1$

Điều kiện đủ:

$a = -1 \Rightarrow y = 0 \in \mathbb{Q}$ (nhận)

$a = 1 \Rightarrow y = 2 \in \mathbb{Q}$ (nhận)

Vậy $a = \pm 1$ hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên.

Câu 3: Hai vật chuyển động trên một đường tròn có chu vi bằng $200m$, vận tốc vật thứ nhất là $4m/s$, vận tốc vật thứ hai là $6m/s$. Hai vật xuất phát cùng một thời điểm tại một vị trí và chuyển động cùng chiều. Hỏi sau 16 phút vật thứ hai vượt lên trước vật thứ nhất mấy lần? (không kể lúc xuất phát)

Lời giải

Gọi t là thời gian để hai vật gặp nhau tính từ lúc xuất phát. Quãng đường mỗi vật đi được đến lúc gặp nhau là $S_1 = v_1 t = 4t$, $S_2 = v_2 t = 6t$. Vì hai vật đi cùng chiều nên $S_2 - S_1 = S \Rightarrow 6t - 4t = 200 \Rightarrow t = 100$ (giây).

Do đó cứ sau 100 giây chúng gặp nhau một lần. Vậy sau 16 phút = 960 giây thì chúng gặp nhau số lần là $\left[\frac{960}{100} \right] = 9$. Vậy vật thứ hai vượt lên trước 9 lần.

Câu 10: Trong giải cầu lông kỉ niệm 25 năm tái thành lập huyện Phù Ninh có 8 người tham gia trong đó có hai bạn Việt và Nam, mỗi bảng gồm 4 người. Giả sử việc chia bảng thực hiện bằng cách bốc thăm ngẫu nhiên. Xác suất để cả hai bạn Việt và Nam nằm chung bảng đầu là:

Lời giải

Số phần tử của không gian mẫu là: $n(\Omega) = C_8^4 = 70$

Gọi X là biến cố: “cả hai bạn Việt và Nam nằm chung một bảng đầu”

- Vì có 2 bảng nên số cách chọn 2 bạn Việt và Nam cùng 1 bảng là: $C_2^1 = 2$

- Số cách chọn 2 bạn nữa trong 6 bạn còn lại để cùng bảng với Việt và Nam là $C_6^2 = 15$

Vậy xác suất cần tính là $P(X) = \frac{30}{70} = \frac{3}{7}$

Câu 11: Cho $\triangle ABC$, M là điểm tùy ý nằm trong tam giác các đường thẳng AM , BM , CM lần

lượt cắt các cạnh BC , AC , AB tại A' , B' , C' . Khi đó tổng $\frac{AM}{AA'} + \frac{BM}{BB'} + \frac{CM}{CC'}$ bằng:

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{1}{2}$.

C. 3.

D. 2.

Lời giải

Từ A , M vẽ $AH, MK \perp BC \Rightarrow AH \parallel MK$

$$\triangle A'AH \text{ có: } \frac{A'M}{A'A} = \frac{MK}{AH} = \frac{MK \cdot BC}{AH \cdot BC} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$$

$$\frac{A'M}{A'A} = \frac{AA' - AM}{AA'} = 1 - \frac{AM}{AA'} = \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$$

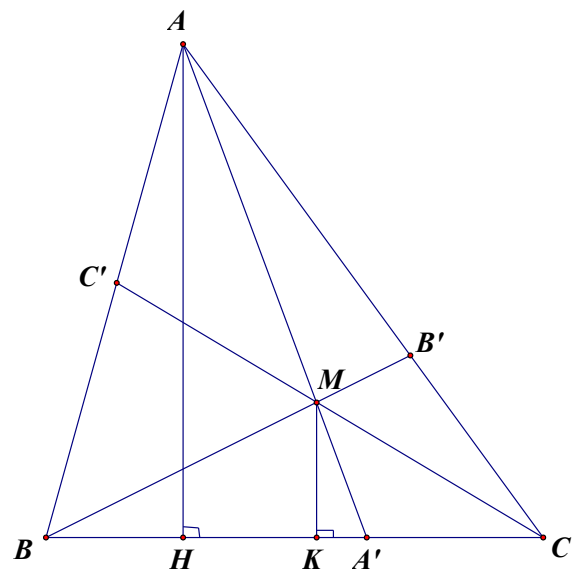
Mặt khác:

$$\Rightarrow \frac{AM}{A'A} = 1 - \frac{S_{MBC}}{S_{ABC}}$$

Chúng minh tương tự:

$$\frac{BM}{BB'} = 1 - \frac{S_{MAC}}{S_{ABC}}, \quad \frac{CM}{CC'} = 1 - \frac{S_{MAB}}{S_{ABC}}$$

Cộng theo vế ta được tổng bằng 2



Câu 12: Cho tam giác ABC có $AB = 12$ cm, $AC = 15$ cm, D và E lần lượt trên các cạnh AB và

AC sao cho $BD = CE$. Gọi K là giao điểm của DE và BC thì tỉ số $\frac{KE}{KD}$ bằng

A. 1,25. B. 0,75. C. 1. D. 0,8.

Lời giải

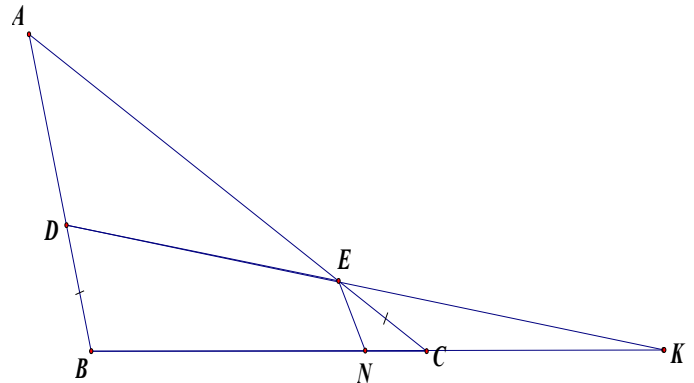
Từ E vẽ $EN \parallel AB$ (N nằm trên BC)

$$\Delta KBD \text{ có } EN \parallel BD \Rightarrow \frac{KE}{KD} = \frac{NE}{BD} \quad (1)$$

tương tự ta có: ΔABC có $EN \parallel AB$

$$\Rightarrow \frac{NE}{AB} = \frac{CE}{CA} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{NE}{CE} = \frac{NE}{BD} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ Đáp án D



Câu 13: Người ta định xây kim tự tháp bằng xi măng hình chóp tứ giác đều đáy là hình vuông. Kim tự tháp có cạnh đáy bằng 4 m, chiều cao bằng 3 m. Nguyên liệu được chở đến bằng xe ô tô, mỗi chuyến chở được nhiều nhất $2,5 \text{ m}^3$. Hỏi phải chở ít nhất bao nhiêu chuyến xe để đủ nguyên vật liệu cho công trình đó?

A. 6 (chuyến) B. 7 (chuyến) C. 8 (chuyến) D. 9 (chuyến)

Thể tích kim tự tháp hình chóp tứ giác đều là:

$$V = \frac{1}{3} \cdot 4^2 \cdot 3 = 16 \text{ m}^3$$

Vậy thể tích nguyên liệu cần để đắp kim tự tháp là 16 m^3 .

Vì nguyên liệu được chở đến bằng xe ô tô, mỗi chuyến chở được nhiều nhất 2 m^3 nên số chuyến xe cần để chở đủ nguyên vật liệu là: $16 : 2,5 = 6,4$ (chuyến).

Vậy phải chở ít nhất 7 chuyến

Câu 14: Một cách tính khoảng cách giữa hai bờ sông: chọn hai vị trí A và B trên bờ sông và điểm C cố định ở bên kia sông. Từ vị trí A dùng giác kế đo góc trên mặt đất để đo góc $\widehat{CAB} = 60^\circ$, sau đó chuyển đến vị trí B tiếp tục đo $\widehat{CBA} = 40^\circ$, giả sử $AB = 50 \text{ m}$. Khoảng cách từ C đến AB được coi như tương đương khoảng cách giữa hai bờ sông. Hãy tính khoảng cách giữa hai bờ sông (kết quả làm tròn đến 1 chữ số thập phân)

A. 32,5m. B. 32,6m. C. 28,3m. D. 28,2m.

Lời giải

Áp dụng định lý hàm sin ta có :

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \Rightarrow \frac{\sin C}{AB} = \frac{\sin B}{AC} \Leftrightarrow \frac{\sin 80^\circ}{50} = \frac{\sin 40^\circ}{AC}$$

$$\Rightarrow AC = \frac{50 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin 60^\circ = \frac{50 \sin 40^\circ}{\sin 80^\circ} \cdot \sin 60^\circ \approx 28,3$$

Câu 16: Cho hai đường tròn $(O_1; R_1)$ và $(O_2; R_2)$ tiếp xúc ngoài tại A. Vẽ tiếp tuyến chung ngoài BC trong đó $B \in (O_1), C \in (O_2)$. Độ dài BC là:

A. $\sqrt{R_1 R_2}$ B. $2\sqrt{R_1 R_2}$ C. $R_1 R_2$ D. $2 R_1 R_2$

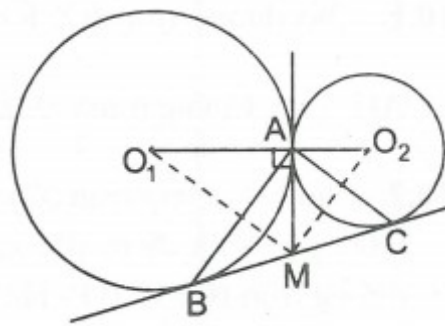
Giải

Qua A vẽ tiếp tuyến chung trong cắt BC tại M.

Ta có $MA = MB; MA = MC$.

Suy ra $MA = MB = MC = \frac{BC}{2}$.

Ta có MO_1 là tia phân giác của góc AMB, MO_2 tia phân giác của góc AMC.



Suy ra $MO_1 \perp MO_2$.

Xét $\triangle MO_1O_2$ vuông tại M có $MA \perp O_1O_2$. Suy ra $MA^2 = AO_1 \cdot AO_2 = R_1 \cdot R_2$.

Do đó $MA = \sqrt{R_1 R_2}$

Vậy $BC = 2\sqrt{R_1 R_2}$.

PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO TAM NÔNG

ĐỀ CHÍNH THỨC

ĐỀ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2024 - 2025

Môn: TOÁN

Thời gian làm bài: 150 phút, không kể giao đề

(Đề thi có 03 trang)

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (4,0 điểm).

Thí sinh trả lời câu hỏi từ 1 đến 16. Mỗi câu hỏi có 4 phương án trả lời A, B, C, D trong đó chỉ có 1 phương án đúng.

Câu 1. Hàm số bậc nhất $y = \frac{(m-1)^2}{m-2}x + 21$ là hàm số nghịch biến khi
A. $m < 2$. **B.** $m < 1$. **C.** $m > 2$. **D.** $m < 2$ và $m \neq 1$.

Câu 2. Trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) lấy hai điểm $A(1; 18)$ và $B(19; -4)$, M là trung điểm của AB . Đường thẳng OM vuông góc với đường thẳng nào sau đây

A. $y = \frac{-7}{15}x + 4$. **B.** $y = \frac{7}{15}x + 4$. **C.** $y = \frac{15}{7}x + 6$. **D.** $y = \frac{-15}{7}x - 4$.

Câu 3. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy lấy hai điểm $A(3; 4)$, $B(8; 4)$ thì tam giác OAB có chu vi bằng
A. $10 + 4\sqrt{5}$ (đvdd). **B.** $5 + 4\sqrt{5}$ (đvdd). **C.** 15 (đvdd). **D.** $8\sqrt{5}$ (đvdd).

Câu 4. Số các giá trị của tham số m để phương trình $x^2 - mx - 1 = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_2^2} = 2$ là

A. 2. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 0.

Câu 5. Biết $\sqrt{9 - 4\sqrt{2}} + 4 = a + b\sqrt{2}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó giá trị $a^3 - b^3$ là

A. -2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 2.

Câu 6. Trên Parabol $(P): y = x^2$ lấy ba điểm A, B, C lần lượt có hoành độ $-3, \frac{5}{4}, -1$. Khi đó $\angle ACB = 30^\circ$. **A.** $\angle ACB = 30^\circ$. **B.** $\angle ACB = 45^\circ$. **C.** $\angle ACB = 90^\circ$. **D.** $\angle ACB = 60^\circ$.

Câu 7. Phương trình $(x + \sqrt{x} - 2)(x + \sqrt{x})(x + \sqrt{x} + 1)(x + \sqrt{x} + 2) = 0$ có tổng giá trị các nghiệm là
A. 0. **B.** 2. **C.** 4. **D.** 1.

Câu 8. Số giá trị của tham số m để hai phương trình $x^2 + 3x + m = 0$ và $x^2 - 2x - 2m = 0$ có nghiệm chung
A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Câu 9. Lớp 9^A có 37 học sinh có học lực khá ít nhất một trong hai môn Toán và Ngữ Văn, trong đó 25 em có học lực khá môn Toán, 22 em có học lực khá môn Ngữ Văn. Chọn ngẫu nhiên một em trong 37 học sinh đó. Xác suất để chọn được học sinh có học lực khá cả môn Toán và môn Ngữ Văn là
A. $\frac{10}{37}$. **B.** $\frac{12}{37}$. **C.** $\frac{15}{37}$. **D.** $\frac{8}{37}$.

Câu 10. Lấy ngẫu nhiên hai quả bóng từ một hộp chứa 9 quả bóng được đánh số từ 1 đến 9. Xác suất để lấy được hai quả bóng có tổng các số trên chúng bằng một số chẵn là
A. $\frac{4}{9}$. **B.** $\frac{5}{18}$. **C.** $\frac{1}{6}$. **D.** $\frac{8}{9}$.

Câu 11. Cho hình chữ nhật $ABCD$, đặt $\frac{AB}{AD} = k$. Gọi M là trung điểm của BC , N là trung điểm của CD , $\cos \angle MAN = \frac{5\sqrt{34}}{34}$ khi
A. $k = \frac{\sqrt{6}}{2}$. **B.** $k = \frac{3}{2}$. **C.** $k = 2$. **D.** $k = 3$.

Câu 12. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh DC, BC ; AM cắt DN tại O . Khi đó $\frac{OD}{ON} \cdot \frac{OA}{OM}$ là
A. $\frac{7}{3}$. **B.** $\frac{12}{5}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Câu 13. Một hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Mặt đáy có $AB = a$ (cm), $AD = b$ (cm), $(0 < a < b)$. Biết diện tích xung quanh của hình hộp chữ nhật bằng 4 lần diện tích đáy. Thể tích hình hộp chữ nhật trên là
A. $\frac{a^2b^2}{a+b}$ (cm³). **B.** $\frac{2a^2b^2}{a+b}$ (cm³).
C. $\frac{a^2b^2}{(a+b)^2}$ (cm³). **D.** $2a^2b^2(a+b)$ (cm³).

Câu 14. Cho tứ giác $ABCD$ có $\angle A > \angle C = 90^\circ$, kẻ $CH \perp BD$, ($H \in BD$). Biết $\angle ADH = \angle HAB$, khi đó
A. $AB^2 + CD^2 = \frac{1}{2}BD^2$. **B.** $AB^2 + CD^2 = BD^2$.
C. $AB^2 + CD^2 = 2BD^2$. **D.** $AB^2 + CD^2 = 4BD^2$.

Câu 15. Cho đường tròn $(O; R)$, hai dây cung AB, CD vuông góc với nhau tại P . Khi đó
A. $AB^2 + CD^2 = 4(R^2 - OP^2)$. **B.** $AB^2 + CD^2 = 8R^2 - 4OP^2$.
C. $AB^2 + CD^2 = 8(R^2 - OP^2)$. **D.** $AB^2 + CD^2 = 4(R^2 + OP^2)$.

Câu 16. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi H là trọng tâm tam giác ABC , khi đó $AH^2 + BC^2$ là
A. $4R^2$. **B.** $8R^2$. **C.** $4,5R^2$. **D.** $3R^2$.

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai (2,0 điểm)

Thí sinh trả lời Câu 17; Câu 18. Trong mỗi ý **A). B). C). D)** ở mỗi câu, thí sinh chọn **đúng** hoặc **sai**.

Câu 17. Cho hình bình hành $ABCD$, $\angle A < 90^\circ$. Đường thẳng đi qua B và vuông góc với BC cắt đường thẳng AD tại O và cắt đường thẳng CD tại E . Kẻ BH vuông góc với đường thẳng EC ($H \in EC$). Khi đó

A) $\frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BC^2} = \left(\frac{DC}{S_{ABCD}} \right)^2$.

B) $DE \cdot DA = 3EC \cdot OD$.

C) $\frac{HE}{HC} = \frac{AD^2}{EB^2}$.

D) $\sin^2 C = \frac{BH \cdot BE}{CE \cdot CB}$.

Câu 18. Một hộp có 5 viên bi xanh, 6 viên bi đỏ và 7 viên bi vàng. Chọn ngẫu nhiên ba viên bi

A) Xác suất chọn được ba viên bi đỏ là $\frac{1}{272}$.

B) Xác suất chọn được ba viên bi có màu khác nhau là $\frac{35}{136}$.

C) Xác suất chọn được ba viên bi trong đó có nhiều nhất 2 viên bi xanh là $\frac{403}{408}$.

D) Xác suất chọn được ba viên bi trong đó không có viên bi vàng là $\frac{55}{816}$.

PHẦN III. Tự luận (14,0 điểm).

Câu 1 (4,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $4^x = y^2 + 2y + 13$.

b) Cho các số nguyên a, b, c thỏa mãn $a + b - c \vdots 3$. Chứng minh $4a^3 - 2b^3 - 26c^3 + (a + b)^3 \vdots 3$.

c) Cho $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ thỏa mãn $a^2 = \frac{bc}{2}$. Chứng minh $a^2 + b$ không là số chính phương.

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Tìm đa thức $P(x)$ bậc ba biết khi chia $P(x)$ cho $x - 1, x - 2, x - 3$ đều dư 2030 và $P(-1) = 2006$.

b) Giải phương trình $2\sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{2}{x + 1} = x + 4$.

c) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 y + x = 2y^2 \\ x^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + 6 = 8\left(\frac{x}{y}\right)^2 \end{cases}$$

Câu 3 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác AHB , J là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác AHC .

a) Chứng minh $CJ \perp AI$ và $\frac{IA}{IH} = \frac{JC}{JH}$.

b) Đường thẳng IJ cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N . Chứng minh rằng tứ giác $HIMB$ là tứ giác nội tiếp.

c) Chứng minh $S_{AMN} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$.

Câu 4 (1,0 điểm). Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{xy + yz} + \frac{1}{yz + zx} + \frac{1}{zx + xy} \geq \frac{9}{4 + 2xyz}.$$

-----Hết-----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu;

- Giám thị không giải thích gì thêm.

**PHÒNG GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
TAM NÔNG**

**HDC THI CHỌN HỌC SINH GIỎI HUYỆN
LỚP 9 THCS NĂM HỌC 2024 - 2025
Môn: TOÁN**

Lưu ý: Nếu học sinh làm cách khác, tổ chấm thống nhất cho điểm. Học sinh không vẽ hình hoặc vẽ sai không tính điểm.

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn (4,0 điểm).

Mỗi câu trả lời đúng được 0,25 điểm

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
Đáp án	D	D	A	A	B	C	D	C	A	A	C	D	B	B	B	A

PHẦN II. Trắc nghiệm đúng sai (2,0 điểm). Thí sinh trả lời Câu 17; Câu 18. Trong mỗi ý a). b). c). d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Thí sinh chỉ lựa chọn chính xác 01 trong 1 câu hỏi được 0,1 điểm; lựa chọn chính xác 02 ý được 0,25 điểm; lựa chọn chính xác 03 ý được 0,5 điểm; lựa chọn chính xác cả 04 ý được 1,0 điểm

Câu 17	Câu 18
a) Đúng	a) Sai
b) Sai	b) Đúng
c) Sai	c) Đúng
d) Đúng	d) Sai

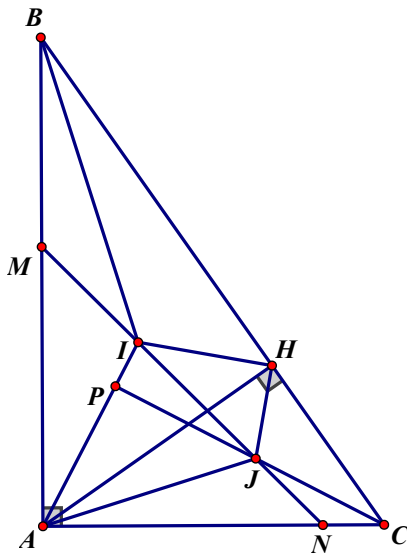
II. PHẦN TỰ LUẬN (14 điểm)

Câu 1 4,0 điểm	Điểm
a) Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $4^x - y^2 - 2y = 13$. b) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b - c \vdots 3$. Chứng minh: $4a^3 - 2b^3 - 26c^3 + (a + b)^3 \vdots 3$.	

	c) Cho a, b, c là các số nguyên dương thỏa mãn $a^2 = \frac{bc}{2}$. Chứng minh: $a^2 + b$ không là số chính phương.	
a	a) PT $\Leftrightarrow (2^x)^2 - y^2 - 2y - 1 = 12$ $\Leftrightarrow (2^x)^2 - (y+1)^2 = 12 \Leftrightarrow (2^x + y + 1)(2^x - y - 1) = 12$	0,25 0,25
	x, y nguyên dương nên $2^x + y + 1 \in N^*$ mà $12 > 0 \Rightarrow 2^x - y - 1 \in N^*$ Ta thấy $(2^x - y - 1) + (2^x + y + 1) = 2 \cdot 2^x$ chẵn Nên $2^x + y + 1, 2^x - y - 1$ là các ước dương của 12, chúng cùng chẵn hoặc cùng lẻ.	0,25
	$\Rightarrow \begin{cases} 2^x - y - 1 = 2 \\ 2^x + y + 1 = 6 \end{cases}$	0,25
	$\begin{cases} 2^x - y - 1 = 2 \\ 2^x + y + 1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2^x = 8 \\ 2y + 2 = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases}$	0,25 0,25
	Vậy phương trình có nghiệm là $(x; y) = (2; 1)$.	
b	b) Cho a, b, c là các số nguyên thỏa mãn $a + b - c \vdots 3$. Chứng minh: $4a^3 - 2b^3 - 26c^3 + (a + b)^3 \vdots 3$	
	$4a^3 - 2b^3 - 26c^3 + (a + b)^3$ $= (3a^3 - 3b^3 - 24c^3) + (a^3 + b^3 - c^3) + (a + b)^3 - c^3$	0,5
	$3a^3 - 3b^3 - 24c^3 \vdots 3$ (1)	0,25
	Ta có: $a^3 + b^3 - c^3 = (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca) - 3abc$ Với a, b, c là các số nguyên $a + b - c \vdots 3 \Rightarrow (a + b - c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab + bc + ca) - 3abc \vdots 3$ (2)	0,25
	$(a + b)^3 - c^3 = (a + b - c)((a + b)^2 + (a + b)c + c^2) \vdots 3$ (3)	0,25
	Từ (1), (2), (3): $\Rightarrow 4a^3 - 2b^3 - 26c^3 + (a + b)^3 \vdots 3$	0,25
c	Giả sử $a^2 + b$ là số chính phương $a^2 + b = k^2$ ($k \in N$) $a^2 = \frac{bc}{2} \Rightarrow 2a^2 = bc \Rightarrow b = \frac{2a^2}{c}$	0,25
	$a^2 + b = k^2 \Rightarrow a^2 + \frac{2a^2}{c} = k^2 \Rightarrow a^2(c + 2) = ck^2$	0,25
	$\Rightarrow a^2(c^2 + 2c) = (ck)^2$. Mà $\Rightarrow a^2, (ck)^2$ đều là số chính phương nên $c^2 + 2c$ cũng là số chính phương	0,25
	c là số nguyên dương nên $c^2 < c^2 + 2c$ $c^2 + 2c < c^2 + 2c + 1 = (c + 1)^2$	

	$\Rightarrow c^2 < c^2 + 2c < (c+1)^2 \Rightarrow c^2 + 2c$ không thể là số chính phương (Mâu thuẫn) $\Rightarrow$ điều giả sử sai $\Rightarrow a^2 + b$ là không là số chính phương	0,25
Câu 2. 4,0 điểm		
a) 1,5 điểm	a) Tìm đa thức $f(x)$ bậc ba biết rằng khi chia $f(x)$ cho $x-1, x-2, x-3$ đều dư 2030 và $f(-1) = 2006$.	
	$f(x)$ là đa thức bậc ba nên: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}; a \neq 0$)	
	Chia $f(x)$ cho $x-1$ dư 6 nên $f(1) = 2030$ $\Rightarrow a + b + c + d = 2030$ (1)	0,25
	Chia $f(x)$ cho $x-2$ dư 6 nên $f(2) = 2030$ $\Rightarrow 8a + 4b + 2c + d = 2030$ (2)	0,25
	Chia $f(x)$ cho $x-3$ dư 6 nên $f(3) = 2030$ $\Rightarrow 27a + 9b + 3c + d = 2030$ (3)	0,25
	$f(-1) = 2006$ nên $-a + b - c + d = 2006$ (4)	0,25
	Từ (1), (2), (3), (4) ta có hệ $\begin{cases} a + b + c + d = 2030 \\ 8a + 4b + 2c + d = 2030 \\ 27a + 9b + 3c + d = 2030 \\ -a + b - c + d = 2006 \end{cases}$	
	Giải hệ ta được $a = 1, b = -6, c = 11, d = 2024$. $\Rightarrow f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x + 2024$	0,5
b) 1,5 điểm	b) Giải phương trình $2\sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{2}{x+1} = x + 4$.	
	ĐKXD: $x \neq -1$	0,25
	$2\sqrt{x^2 + x + 2} + \frac{2}{x+1} = x + 4$. $\Leftrightarrow (2x+2)\sqrt{x^2 + x + 2} = x^2 + 5x + 2$ Bình phương 2 vế được: $(2x+2)^2(x^2 + x + 2) = (x^2 + 5x + 2)^2$	0,25
	$\Leftrightarrow 4x^4 + 12x^3 + 20x^2 + 20x + 8 = x^4 + 10x^3 + 29x^2 + 20x + 4$ $\Leftrightarrow 3x^4 + 2x^3 - 9x^2 + 4 = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \\ x = -\frac{2}{3} \end{cases}$ $\Leftrightarrow (x-1)^2(x+2)(3x+2) = 0$ $S = \{1; -2\}$	0,5 0,25
	Thử lại: phương trình có tập nghiệm	

	$\begin{cases} x^2y + x = 2y^2 \\ x^3 + \left(\frac{1}{y}\right)^3 + 6 = 8\left(\frac{x}{y}\right)^2 \end{cases}$	
c) Giải hệ phương trình	ĐK: $y \neq 0$	
c)1đ	<p>Đặt: $\frac{1}{y} = z$ ta được hệ</p> $\begin{cases} x^2 \cdot \frac{1}{z} + x = 2 \frac{1}{z^2} \\ x^3 + (z)^3 + 6 = 8(xz)^2 \end{cases}$ $\begin{cases} xz(x+z) = 2 \\ x^3 + z^3 + 6 = 8x^2z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xz(x+z) = 2 \\ (x+z)^3 - 3xz(x+z) + 6 = 8x^2z^2 \end{cases}$	0,25
	$+) xz = 0 \Rightarrow \begin{cases} 0 = 2 \\ (x+z)^3 + 6 = 0 \end{cases} \text{ (Vô lí)}$	0,25
	$+) xz \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x+z = \frac{2}{xz} \\ \frac{8}{x^3z^3} - 3xz \frac{2}{xz} + 6 = 8x^2z^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x+z = \frac{2}{xz} \\ \frac{8}{x^3z^3} = 8x^2z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = \frac{2}{xz} \\ (xz)^5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+z = 2 \\ xz = 1 \end{cases}$	0,25
	$\Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-x \\ x(2-x) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-x \\ x^2 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 2-x \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$ <p>Vậy hệ có nghiệm (x;y): (1;1)</p>	0,25
Câu 3 5,0 điểm	<p>Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Gọi I là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác AHB, J là giao điểm các đường phân giác trong của tam giác AHC.</p> <p>a) Chứng minh $CJ \perp AI$ và $\frac{IA}{IH} = \frac{JC}{JH}$.</p> <p>b) Đường thẳng IJ cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M và N. Chứng minh rằng tứ giác $HIMB$ là một tứ giác nội tiếp.</p> <p>c) Chứng minh rằng: $S_{AMN} \leq \frac{1}{2} S_{ABC}$.</p>	



a) 2,0 điểm	<p>Chứng minh $CJ \perp AI$ và $\frac{IA}{IH} = \frac{JC}{JH}$.</p> <p>Gọi giao điểm của CJ và AI là P.</p>	
	<p>CJ là phân giác $\angle ACH \Rightarrow \angle JCA = \angle JCH = \frac{1}{2} \angle ACH$</p>	0,25
	<p>AI là phân giác $\angle BAH \Rightarrow \angle IAB = \angle IAH = \frac{1}{2} \angle BAH$</p> <p>$\angle BAH = \angle HCA \Rightarrow \angle JCA = \angle JCH = \angle IAB = \angle IAH$</p>	0,25
	<p>$\angle PAC + \angle PCA = \angle IAH + \angle HAC + \angle PCA = \angle JCH + \angle PCA + \angle HAC = \angle HCA + \angle HAC = 90^\circ$</p>	0,25
	<p>$\Rightarrow \angle APC = 90^\circ \Rightarrow CJ \perp AI$</p>	0,25
	<p>Xét tam giác AIH và CJH có</p>	
	<p>$\angle JCH = \angle IAH$ (cmt)</p>	0,25
	<p>HJ, HI lần lượt là phân giác của $\angle AHC$ và $\angle AHB$</p> <p>$\angle AHC = \angle AHB = 90^\circ \Rightarrow \angle BHI = \angle IHA = \angle AHJ = \angle JHC = 45^\circ$</p>	0,25
	<p>$\Rightarrow \triangle AIH \sim \triangle CJH$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AI}{IH} = \frac{CJ}{JH}$</p>	0,5
	<p>Chứng minh tương tự phần a: $\triangle AJH \sim \triangle BIH \Rightarrow \frac{AH}{BH} = \frac{HJ}{HI}$</p>	0,5
	<p>$\angle IHJ = \angle IHA + \angle AHJ = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ = \angle BHA$</p>	0,25
	<p>Xét tam giác IHJ và BAH có</p> <p>$\frac{AH}{BH} = \frac{HJ}{HI}$ (cmt)</p> <p>$\angle IHJ = \angle BHA$ (cmt)</p> <p>$\Rightarrow \triangle IHJ \sim \triangle BAH$ (c.g.c)</p>	0,25
	<p>$\Rightarrow \angle JIH = \angle HBA$</p>	
	<p>$\Rightarrow \angle JIH = \angle HBA \Rightarrow$ Tứ giác IMBH nội tiếp</p>	0,5
	<p>$S_{ABC} = \frac{AH \cdot BC}{2} = \frac{AH \cdot (HB + HC)}{2} \geq \frac{AH \cdot 2\sqrt{HB \cdot HC}}{2} = AH \cdot \sqrt{AH^2} = AH^2$</p>	0,25
	<p>Tứ giác IMBH nội tiếp $\Rightarrow \angle AMI = \angle HIB = 45^\circ \Rightarrow \triangle AMN$ vuông cân tại A</p>	0,25

	$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM \cdot AN = \frac{1}{2} AM^2$	0,25
	Chứng minh được $\triangle MAI = \triangle HAI (g.c.g) \Rightarrow AM = AH$	0,5
	$\Rightarrow S_{\triangle AMN} = \frac{1}{2} AM^2 = \frac{1}{2} AH^2 \leq \frac{1}{2} S_{\triangle ABC}$ Dấu “=” xảy ra khi HB=HC	0,25
Câu 4 1,0 điểm	Cho $x, y, z > 0$ thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Chứng minh rằng $\frac{1}{xy + yz} + \frac{1}{yz + zx} + \frac{1}{zx + xy} \geq \frac{9}{4 + 2xyz}.$	
	$\frac{1}{xy + yz} + \frac{1}{yz + zx} + \frac{1}{zx + xy} \geq \frac{(1+1+1)^2}{2xy + 2yz + 2zx} = \frac{9}{2xy + 2yz + 2zx}$	0,25
	Ta chứng minh : $\frac{9}{2xy + 2yz + 2zx} \geq \frac{9}{4 + 2xyz} \Leftrightarrow 2 + xyz \geq xy + yz + zx$	
	Theo nguyên lí Dirichle trong ba số $x-1, y-1, z-1$ có ít nhất 2 số cùng dấu Giả sử: $(x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy + 1 \geq x + y$ $\Rightarrow xyz + z \geq xz + yz \Rightarrow 2xz + 2yz \leq 2xyz + 2z$ $\Rightarrow 2xz + 2yz + 2xy \leq 2xyz + 2z + 2xy$	0,25
	$2xyz + 2z + 2xy = 2xyz + 2z \cdot 1 + 2xy \leq 2xyz + z^2 + 1 + x^2 + y^2$ (đpcm) $\Rightarrow 2xz + 2yz + 2xy \leq 2xyz + x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2xyz + 4$ (Do $x^2 + y^2 + z^2 = 3$) $\Rightarrow 2 + xyz \geq xy + yz + zx$ (ĐPCM) Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=1$	0,25 0,25