

ỨNG DỤNG NGUYÊN HÀM GIẢI BÀI TOÁN THỰC TẾ

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Một quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t) = -10t + 16 (m/s)$. Công thức nào sau đây tính độ cao của quả bóng theo thời gian t ?

A. $h(t) = -5t^2 + 16t + C$

B. $h(t) = -5t^2 + 16t + 20$

C. $h(t) = 5t^2 - 16t + 20$

D. $h(t) = 5t^2 - 16t + C$

Lời giải

Gọi $h(t)$ là độ cao của quả bóng tại thời điểm t .

Suy ra: $h'(t) = v(t)$ do đó $h(t)$ là một nguyên hàm của $v(t)$

$$\int (-10t + 16) dt = -5t^2 + 16t + C$$

Ta có:

Do quả bóng được ném lên từ độ cao $20m$ nên tại thời điểm $t = 0$ thì $h = 20$.

Hay $h(0) = 20 \Rightarrow C = 20$ nên $h(t) = -5t^2 + 16t + 20$

Câu 2: Một ô tô đang chạy với vận tốc $70km/h$ thì hãm phanh và chuyển động chậm dần đều với tốc độ $v(t) = -10t + 30 (m/s)$. Tính quãng đường ô tô đi được sau 3 giây kể từ khi hãm phanh?

A. $51(m)$

B. $43(m)$

C. $54(m)$

D. $45(m)$

Lời giải

Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong t giây kể từ khi hãm phanh.

$$s(t) = \int (-10t + 30) dt = -5t^2 + 30t + C$$

Ta có:

Do $s(0) = 0 \Rightarrow C = 0$

Khi đó: $s(t) = -5t^2 + 30t \Rightarrow s(3) = -5.9 + 30.3 = 45(m)$

Câu 3: Sự sản sinh vi rút Zika ngày thứ t có số lượng là $N(t)$ con, biết $N'(t) = \frac{1000}{t}$ và lúc đầu đám vi rút có số lượng 250.000 con. Tính số lượng vi rút sau 10 ngày.

A. 272304 con

B. 212302 con

C. 242102 con

D. 252302 con.

Lời giải

Ta có: $N'(t) = \frac{1000}{t} \Rightarrow N(t) = \int \frac{1000}{t} dt = 1000 \ln|t| + C \Rightarrow N(t) = 1000 \ln|t| + C$

$t = 1 \Rightarrow N(1) = 250000 \Rightarrow C = 250000 \Rightarrow N(t) = 1000 \ln|t| + 250000$

Chọn

Vậy số lượng vi rút sau 10 ngày là: $N(10) = 1000 \ln 10 + 250000 \approx 252302$.

- Câu 4:** Bạn Minh Hiền ngồi trên máy bay đi du lịch thế giới với vận tốc chuyển động của máy bay là $v(t) = 3t^2 + 5 \text{ (m/s)}$. Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là:
A. 36m. **B.** 252m. **C.** 1134m. **D.** 966m.

Lời giải

Ta có: $v(t) = 3t^2 + 5 \Rightarrow s(t) = \int v(t) dt = \int (3t^2 + 5) dt = t^3 + 5t + C \Rightarrow s(t) = t^3 + 5t + C$

$t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = t^3 + 5t$
 Chọn

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 là: $s(4) = 4^3 + 5 \cdot 4 = 84m$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 10 là: $s(10) = 10^3 + 5 \cdot 10 = 1050m$

Quãng đường máy bay bay từ giây thứ 4 đến giây thứ 10 là: $s(10) - s(4) = 966m$

- Câu 5:** Trong một đợt xả lũ, nhà máy thủy điện đã xả lũ trong 40 phút với tốc độ lưu lượng nước tại thời điểm t giây là $h'(t) = 10t + 500 \text{ (m}^3/\text{s)}$. Hỏi sau thời gian xả lũ trên thì hồ thoát nước của nhà máy đã thoát đi một lượng nước là bao nhiêu?



- A.** $5 \cdot 10^4 \text{ (m}^3\text{)}$ **B.** $4 \cdot 10^6 \text{ (m}^3\text{)}$ **C.** $3 \cdot 10^3 \text{ (m}^3\text{)}$ **D.** $6 \cdot 10^6 \text{ (m}^3\text{)}$

Lời giải

Ta có: $h'(t) = 10t + 500 \Rightarrow h(t) = \int (10t + 500) dx = 5t^2 + 500t + C \Rightarrow h(t) = 5t^2 + 500t + C$

$t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = 5t^2 + 500t$
 Chọn

Thủy điện đã xả lũ trong 40 phút = 2400 giây thì thoát đi một lượng nước là:

$$h(2400) = 5 \cdot 2400^2 + 500 \cdot 2400 = 3 \cdot 10^3 \text{ (m}^3\text{)}$$

- Câu 6:** Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt \text{ (m}^3/\text{s)}$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$. Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$. Hỏi thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là bao nhiêu.

A. $8400m^3$

B. $8400m^3$

C. $6000m^3$

D. $4200m^3$

Lời giải

Ta có: $h'(t) = 3at^2 + bt \Rightarrow h(t) = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2 + C$

$$t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = at^3 + \frac{1}{2}bt^2$$

Chọn

Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là $150m^3$: $h(5) = 150 \Leftrightarrow 125a + \frac{25}{2}b = 150$

Sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là $1100m^3$: $h(10) = 1100 \Leftrightarrow 1000a + 50b = 1100$

Ta có hệ:
$$\begin{cases} 125a + \frac{25}{2}b = 150 \\ 1000a + 50b = 1100 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \end{cases} \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2$$

thể tích nước trong bể sau khi bơm được 20 giây là $h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400m^3$

Câu 7: Gọi $h(t)$ (m) là mực nước ở bồn chứa sau khi bơm nước được t giây. Biết rằng $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t}$ (m/s) và lúc đầu bồn không có nước. Tìm mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

A. $2,64m$

B. $1,22m$

C. $2,22m$

D. $1,64m$

Lời giải

Ta có: $h'(t) = \frac{1}{5}\sqrt[3]{t} \Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{5}\sqrt[3]{t} dt = \frac{1}{5} \int t^{\frac{1}{3}} dt = \frac{1}{5} \frac{t^{\frac{1}{3}+1}}{\frac{1}{3}+1} + C = \frac{3}{20}t\sqrt[3]{t} + C$

$$\Rightarrow h(t) = \frac{3}{20}t\sqrt[3]{t} + C$$

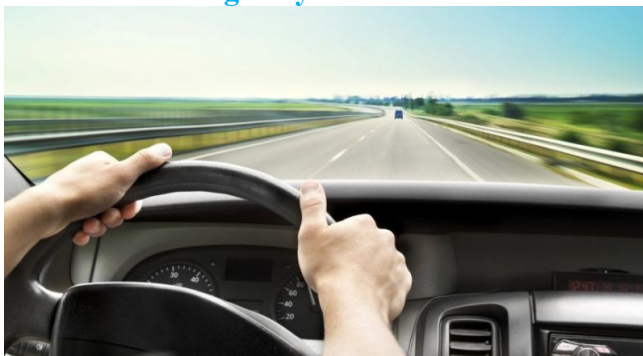
$$t = 0 \Rightarrow h(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = \frac{3}{20}t\sqrt[3]{t}$$

Chọn

$$h(6) = \frac{3}{20} \cdot 6\sqrt[3]{6} \approx 1,64m$$

Vậy mức nước ở bồn sau khi bơm nước được 6 giây:

Câu 8: Một ô tô đang chạy với vận tốc 20 (m/s) thì người người đạp phanh. Sau khi đạp phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -40t + 20$ (m/s), trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Gọi $s(t)$ là quãng đường xe ô tô đi được trong thời gian t (giây) kể từ lúc đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn đi chuyển bao nhiêu mét?



- A. 5(cm). B. 7,5(m). C. $\frac{5}{2}$ (m). D. 5(m).

Lời giải

Ta có: $v(t) = -40t + 20 \Rightarrow s(t) = \int v(t)dt = \int (-40t + 20)dt = -20t^2 + 20t + C$
 $\Rightarrow s(t) = -20t^2 + 20t + C$

$t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = -20t^2 + 20t$
 Chọn

Khi xe dừng hẳn thì $v(t) = 0 \Leftrightarrow -40t + 20 = 0 \Rightarrow t = 0,5$.

Từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được:
 $s(0,5) = -20(0,5)^2 + 20(0,5) = 5m$

Câu 9: Một vật chuyển động với vận tốc $v(t)(m/s)$ có gia tốc $v'(t) = \frac{3}{t+1} (m/s^2)$. Vận tốc ban đầu của vật là $6 m/s$. Hỏi vận tốc của vật sau 10 giây (làm tròn đến kết quả đến chữ số thập phân thứ nhất) có giá trị bằng bao nhiêu?

- A. 5 (m/s). B. $13,2$ (m/s). C. 8 (m/s). D. 7 (m/s).

Lời giải

Giả sử tại thời điểm ban đầu $t = 0; v(0) = 6(m/s)$

Ta có: $v(0) = 6(m/s) \Rightarrow v(t) = \int v'(t)dt = \int \frac{3}{t+1}dt = 3\ln|t+1| + C$

$v(0) = 6 \Rightarrow C = 6 \Rightarrow v(t) = 3\ln|t+1| + 6 \Rightarrow v(10) = 3\ln 11 + 6 \approx 13,2(m/s)$

Câu 10: Người ta bơm nước vào một bồn chứa, lúc đầu bồn không chứa nước, mức nước ở bồn chứa sau khi bơm phụ thuộc vào thời gian bơm nước theo một hàm số $h = h(t)$ trong đó h tính bằng cm, t tính bằng giây. Biết rằng $h'(t) = \sqrt[3]{3t+8}$. Mức nước ở bồn sau khi bơm được 10 giây là bao nhiêu cm? (Làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)

- A. $25,6(cm)$. B. $42,1(cm)$. C. $45(cm)$. D. $27,94(cm)$.

Lời giải

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int \sqrt[3]{3t+8} dt = \frac{1}{4}(3t+8)\sqrt[3]{3t+8} + C$$

Ta có:

$$t=0 \Rightarrow h(0)=0 \Rightarrow C+4=0 \Rightarrow C=-4$$

Lúc đầu, bể không có nước

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{4}(3t+8) \cdot \sqrt[3]{3t+8} - 4 \Rightarrow h(10) \approx 27,94$$

Câu 11: Một bác thợ xây bơm nước vào bể chứa nước. Gọi $h(t)$ là thể tích nước bơm được sau t giây. Cho $h'(t) = 3at^2 + bt$ và ban đầu bể không có nước. Sau 5 giây thì thể tích nước trong bể là 150 m^3 , sau 10 giây thì thể tích nước trong bể là 1100 m^3 . Tính thể tích của nước trong bể sau khi bơm được 20 giây.

- A. $8400(\text{m}^3)$ B. $4200(\text{m}^3)$ C. $7260(\text{m}^3)$ D. $8560(\text{m}^3)$

Lời giải

$$h(t) = \int h'(t) dt = \int (3at^2 + bt) dt = at^3 + b \cdot \frac{t^2}{2} + C$$

Ta có:

$$h(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0 \Rightarrow h(t) = a \cdot t^3 + b \cdot \frac{t^2}{2}$$

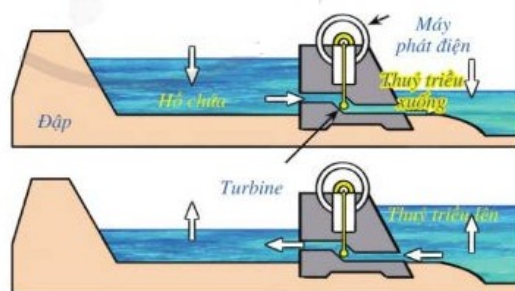
Do ban đầu hồ không có nước nên

$$\text{Lúc 5 giây} \quad h(5) = a \cdot 5^3 + b \cdot \frac{5^2}{2} = 150$$

$$\text{Lúc 10 giây} \quad h(10) = a \cdot 10^3 + b \cdot \frac{10^2}{2} = 1100$$

$$\text{Suy ra} \quad a=1, b=2 \Rightarrow h(t) = t^3 + t^2 \Rightarrow h(20) = 20^3 + 20^2 = 8400(\text{ m}^3)$$

Câu 12: Mức nước trong hồ chứa của nhà máy điện thủy triều thay đổi trong suốt một ngày do nước chảy ra khi thủy triều xuống và nước chảy vào khi thủy triều lên (như hình vẽ). Tốc độ thay đổi của mực nước được xác định bởi hàm số $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60)$, trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 24$), $h'(t)$ tính bằng mét/giờ. Tại thời điểm $t=0$, mực nước trong hồ chứa cao 8m . Mực nước trong hồ cao nhất và thấp nhất bao nhiêu?



- A. $8(\text{m})$ B. $4(\text{m})$ C. $7(\text{m})$ D. $6(\text{m})$

Ta có: $h'(t) = \frac{1}{90}(t^2 - 17t + 60) \Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \int (t^2 - 17t + 60) dt = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + C$

$$h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + C$$

Khi đó

$$t = 0, \text{ mực nước trong hồ chứa cao } 8m \text{ nên } h(0) = 8 \Rightarrow C = 8$$

Tại thời điểm

$$\Rightarrow h(t) = \frac{1}{90} \left(\frac{1}{3}t^3 - \frac{17}{2}t^2 + 60t \right) + 8 \quad (0 \leq t \leq 24)$$

$$h'(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 17t + 60 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 5 \\ t = 12 \end{cases}$$

Ta có:

Lập bảng biến thiên:

t	0	5	12	24			
$h'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(t)$			$\frac{1019}{108}$		$\frac{44}{5}$		$\frac{104}{5}$
	8						

Mực nước trong hồ cao nhất: $\frac{104}{5} = 20,8m$ và thấp nhất $8m$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Vào năm 2014, dân số nước ta khoảng $90,7$ triệu người. Giả sử dân số nước ta sau t năm được xác định bởi hàm số $S(t)$ (đơn vị: triệu người), trong đó tốc độ gia tăng dân số được cho bởi $S'(t) = 1,2698 \cdot e^{0,014t}$, với t là số năm kể từ năm 2014, $S'(t)$ tính bằng triệu người/năm. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$

b) $S(t) = 90,7 \cdot e^{0,014t} + 90,7$

c) Theo công thức trên, tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng phần mười của triệu người/năm) khoảng $1,7$ triệu người/năm

d) Theo công thức trên, dân số nước ta năm 2034 (làm tròn đến hàng đơn vị của triệu người) là khoảng 120 triệu người/năm

Lời giải

a) Đúng: Ta có $S(t)$ là một nguyên hàm của $S'(t)$.

b) Sai: Ta có

$$\int S'(t) dt = \int 1,2698 \cdot e^{0,014t} dt = 1,2698 \int (e^{0,014})^t dt = \frac{1,2698 \cdot e^{0,014t}}{0,014} + C = 90,7 \cdot e^{0,014t} + C$$

Vì $S(0) = 90,7$ nên $C = 0$. Suy ra $S(t) = 90,7 \cdot e^{0,014t}$.

c) Đúng: Tốc độ tăng dân số nước ta năm 2034 là $S'(20) = 1,2698 \cdot e^{0,014 \cdot 20} \approx 1,7$ (tr người/năm).

d) Đúng: Dân số nước ta năm 2034 là $S(20) = 90,7 \cdot e^{0,014 \cdot 20} \approx 120$ (triệu người).

Câu 2: Một vật chuyển động với gia tốc $a(t) = 4 \cos t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tại thời điểm bắt đầu chuyển động vật có vận tốc bằng 0. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Vận tốc của vật được biểu diễn bởi hàm số $v(t) = 4 \cos t \text{ (m/s)}$.

b) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là 2 (m/s)

c) Tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4} \text{ (s)}$ sau khi xuất phát thì vận tốc của vật là $\sqrt{2} \text{ (m/s)}$

d) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4} \text{ (s)}$ là $2\sqrt{2} \text{ (m/s}^2\text{)}$

Lời giải

a) Sai: Ta có $v(t) = \int a(t) dt = \int 4 \cos t dt = 4 \sin t + C$. Mà tại thời điểm bắt đầu chuyển động, vật có vận tốc bằng 0 nên ta có $v(0) = 0$ hay $C = 0$.

Vậy $v(t) = 4 \sin t$.

b) Đúng: Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{6}$ là $v\left(\frac{\pi}{6}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{6} = 2 \text{ (m/s)}$.

c) Sai: Vận tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ là $v\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \sin \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \text{ (m/s)}$

d) Đúng: Gia tốc của vật tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4} \text{ (s)}$ là: $a\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4 \cos \frac{\pi}{4} = 2\sqrt{2} \text{ (m/s}^2\text{)}$

Câu 3: Một chiếc xe đang chuyển động đều với tốc độ $v_0 = 15 \text{ m/s}$ thì gặp chướng ngại vật rồi phanh gấp với gia tốc không đổi là $a = -3 \text{ m/s}^2$. Kí hiệu $v(t)$ là tốc độ của xe, $a(t)$ là gia tốc xe, $s(t)$ là quãng đường xe đi được cho đến thời điểm t giây kể từ lúc phanh xe. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau.

a) $v(t) = a'(t)$.

b) $a(t) = s''(t)$.

c) Tính từ lúc phanh xe, sau 4 giây thì xe dừng hẳn.

d) Quãng đường xe đi được tính từ lúc phanh xe đến khi dừng hẳn nằm trong khoảng từ 35 mét đến 40 mét.

Lời giải

a) Sai: $v(t) = \int a(t) dt$

b) Đúng: $a(t) = v'(t) = s''(t)$.

c) Sai: $v(t) = \int a(t) dt = \int -3 dt = -3t + C$

$v(0) = -3 \cdot 0 + C = 15 \Rightarrow C = 15$. Suy ra $v(t) = -3t + 15$.

Xe dừng hẳn khi $v(t) = 0 \Rightarrow -3t + 15 = 0 \Rightarrow t = 5$ giây.

d) Đúng: $s(t) = \int v(t) dt = \int -3t + 15 dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$

$s(0) = -\frac{3}{2} \cdot 0^2 + 15 \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(5) = 37,5$ mét.

Câu 4: Trong thí nghiệm nuôi cấy một loại vi sinh vật, kí hiệu $f(t)$ là tổng số lượng vi sinh vật sau t giờ. Biết rằng sau 3 giờ đầu tiên thì tổng số lượng vi sinh vật là 50 con. Trong 7 giờ tiếp theo, số lượng vi sinh vật thay đổi với tốc độ $f'(t) = t^2 - 8t$ (con/giờ). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Họ nguyên hàm của $f'(t)$ là $\frac{t^3}{3} - 8t^2 + C$ ($C \in \mathbb{R}$).

b) Số lượng vi khuẩn tăng liên tục trong khoảng từ 3 giờ đến 10 giờ sau thời điểm làm thí nghiệm.

c) Số lượng vi khuẩn là nhỏ nhất sau 8 giờ tính từ lúc bắt đầu làm thí nghiệm.

d) Sau 6 giờ thì số lượng vi khuẩn là 5 con.

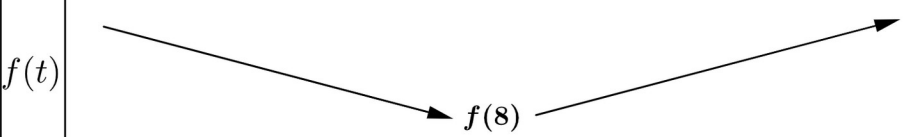
Lời giải

a) Sai: Ta có: $\int (t^2 - 8t) dt = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C$

b) Sai: Ta có: $f'(t) > 0$ khi $8 < t < 10$ và $f'(t) < 0$ khi $3 < t < 8$.

Nên số lượng vi sinh vật giảm trong khoảng từ 3 giờ đến 8 giờ, sau đó tăng dần trong khoảng 8 giờ đến 10 giờ.

c) Đúng: Bảng biến thiên của $f(t)$:

t	3	8	10
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$			

d) Đúng: $f(t) = \frac{t^3}{3} - 4t^2 + C$. Do $f(3) = 50 \Rightarrow \frac{3^3}{3} - 4 \cdot 3^2 + C = 50 \Rightarrow C = 77$.

Suy ra $f(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t^2 + 77 \Rightarrow f(6) = 5$.

Câu 5: Một quả cầu lông được đánh lên từ độ cao $2,2^m$ với vận tốc được tính bởi công thức sau đây $v(t) = -0,8t + 4,16 (m/s)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Công thức tính độ cao của quả cầu theo t là $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2 (m)$.
- b) Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = 5,2 (s)$.
- c) Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $13,016 (m)$.
- d) Thời điểm quả cầu chạm đất là $t = 10,5 (s)$.

Lời giải

a) Đúng: $h(t) = \int v(t) dt = \int (-0,8t + 4,16) dt = -0,4t^2 + 4,16t + C$.

Mà $h(0) = 2,2$ nên $C = 2,2$ nên $h(t) = -0,4t^2 + 4,16t + 2,2 (m)$.

b) Đúng: Quả cầu đạt độ cao cao nhất tại thời điểm $t = -\frac{4,16}{2 \cdot (-0,4)} = 5,2 (s)$.

c) Đúng: Độ cao cao nhất của quả cầu bằng $h(5,2) = 13,016 (m)$.

d) Sai: Quả cầu chạm đất khi $h(t) = 0 \Leftrightarrow -0,4t^2 + 4,16t + 2,2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \approx 10,9 \\ t \approx -0,5 \end{cases}$.

Vì $t > 0$ nên chọn $t \approx 10,9 (s)$.

Câu 6: Cây KEO LAI là một trong các loài cây không chỉ là nguyên liệu giấy quan trọng mà còn là loài cây cung cấp gỗ nguyên liệu cho các ngành khác như chế biến ván nhân tạo, chế biến đồ mộc xuất khẩu, gỗ bao bì, gỗ xây dựng. Cây phát triển với tốc độ nhanh. Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao $8m$

. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{9}{x} (m/năm)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Biểu thức của $h(x)$ là: $h(x) = 9\ln(x) + C$.
- b) Sau 3 năm cây cao $20m$.
- c) Tốc độ phát triển của cây trong 10 năm đầu sẽ giảm dần.
- d). Người ta thường thu hoạch cây KEO LAI khi nó có độ cao trong khoảng từ 26 đến 28 mét. Vậy đó là 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

Lời giải

- a) Đúng: $h'(x) = \frac{9}{x} \Rightarrow h(x) = \int \frac{9}{x} dx = 9\ln|x| + C = 9\ln(x) + C$ (vì $x > 0$)
- b) Sai: Vì sau năm đầu tiên cây cao $8m$ nên $h(1) = 8 \Rightarrow 9\ln(1) + C = 8 \Rightarrow C = 8$
 $\Rightarrow h(x) = 9\ln(x) + 8 \Rightarrow h(3) = 9\ln(3) + 8 \approx 17,89(m)$. Vậy sau 3 năm cây cao khoảng $17,89m$.
- c) Đúng: Ta có tốc độ phát triển của cây là hàm số $h'(x) = \frac{9}{x} \Rightarrow h''(x) = \frac{-9}{x^2} < 0$ nên $h'(x)$ là hàm nghịch biến. Do đó tốc độ phát triển của cây sẽ giảm dần trong 10 năm đầu.
- d) Đúng: Ta có $26 \leq h(x) \leq 28 \Rightarrow 26 \leq 9\ln(x) + 8 \leq 28 \Rightarrow 7,39 \leq x \leq 9,23$
 Vậy sau 8 hoặc 9 năm sau khi trồng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

- Câu 1:** Gọi $h(t)$ là chiều cao của cây keo (tính theo mét) sau khi trồng t năm. Biết rằng năm đầu tiên cây cao 1,5m, trong những năm tiếp theo. Cây phát triển với tốc độ $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}}$ (mét /năm). Sau bao nhiêu năm cây cao được 3m.

Lời giải

Ta có $h'(t) = \frac{1}{\sqrt[4]{t}} \Rightarrow h(t) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{t}} dt = \int t^{-\frac{1}{4}} dt = \frac{t^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + C = \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + C \Rightarrow h(t) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + C$

Mầm đầu tiên cây cao 1m nên $h(1) = 1,5 \Leftrightarrow 1,5 = \frac{4}{3}\sqrt[4]{1} + C \Rightarrow C = \frac{1}{6} \Rightarrow h(t) = \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + \frac{1}{6}$

Vậy cây cao được 3m nên $h(t) = 3 \Leftrightarrow \frac{4}{3}\sqrt[4]{t^3} + \frac{1}{6} = 3 \Leftrightarrow \sqrt[4]{t^3} = \frac{17}{8} \Rightarrow t \approx 2,73$

- Câu 2:** Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1990 được ước tính theo một hàm số theo thời gian $f(t)$ ($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Biết rằng $f'(t) = \frac{34}{t^2 + 4t + 4}$ (nghìn người/năm) biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn. Số dân của thị trấn đó vào năm 2035 là bao nhiêu? (kết quả lấy chính xác đến hàng phần trăm) biết dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người.

Ta có:
$$f'(t) = \frac{34}{t^2 + 4t + 4} = \frac{34}{(t+2)^2} \Rightarrow f(t) = -\frac{34}{t+2} + C$$

Chọn mốc thời gian là năm 1990. Dân số của thị trấn đó năm 1990 là 3 nghìn người nên ta có $f(0) = 3$

Khi đó
$$-\frac{34}{2} + C = 3 \Leftrightarrow C = 20 \quad \text{nên} \quad f(t) = -\frac{34}{t+2} + 20$$

Từ năm 1990 đến năm 2035 là 45 năm nên dân số của thị trấn năm 2035 là

$$f(45) = -\frac{34}{47} + 20 = \frac{906}{47} \approx 19,28 \text{ (nghìn người).}$$

Câu 3: Một quần thể vi khuẩn ban đầu gồm 500 vi khuẩn, sau đó bắt đầu tăng trưởng. Gọi $P(t)$ là số lượng vi khuẩn của quần thể đó tại thời điểm t , trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 10$). Tốc độ tăng trưởng của quần thể vi khuẩn đó cho bởi hàm số $P'(t) = k\sqrt{t}$, trong đó k là hằng số. Sau 1 ngày, số lượng vi khuẩn của quần thể đó đã tăng lên thành 600 vi khuẩn (Nguồn: R. Larson and B. Edwards, Calculus 10e, Cengage 2014). Tính số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày.

Lời giải

Ta có:
$$P(t) = \int P'(t) dt = \int k\sqrt{t} dt = \int kt^{\frac{1}{2}} dt = k \cdot \frac{2}{3} t\sqrt{t} + C$$

$$\begin{cases} P(0) = 500 \\ P(1) = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k \cdot \frac{2}{3} \cdot 0\sqrt{0} + C = 500 \\ k \cdot \frac{2}{3} \cdot 1\sqrt{1} + C = 600 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 500 \\ \frac{2}{3}k = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 500 \\ k = 150 \end{cases}$$

Từ giả thiết suy ra:

$$\Rightarrow P(t) = 100t\sqrt{t} + 500$$

Do đó, số lượng vi khuẩn của quần thể đó sau 9 ngày là: $P(9) = 100 \cdot 9\sqrt{9} + 500 = 3200$

Câu 4: Một đàn côn trùng, ở ngày thứ t có số lượng là $K(t)$. Biết $K'(t) = \frac{4000}{1 + \frac{t}{2}}$ và ban đầu đàn côn trùng có 50.000 con. Hỏi sau 10 ngày thì đàn có khoảng bao nhiêu con? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$K(t) = \int \frac{4000}{1 + \frac{t}{2}} dt = 8000 \ln \left| 1 + \frac{t}{2} \right| + C$$

Số lượng côn trùng ngày thứ t là

Vì ban đầu đàn côn trùng có 50.000 con nên

$$K(0) = 50.000 \Leftrightarrow 8000 \ln \left| 1 + \frac{0}{2} \right| + C = 50.000 \Leftrightarrow C = 50.000$$

$$K(10) = 8000 \ln \left| 1 + \frac{10}{2} \right| + 50.000 \approx 64.334$$

Số lượng côn trùng ngày thứ 10 là con.

Câu 5: Một vật chuyển động với vận tốc ban đầu là $5(m/s)$ và có gia tốc được xác định bởi công thức $a(t) = \frac{2}{t+1}(m/s^2)$. Tính vận tốc của vật tại giây thứ 20 (là tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

$$Ta \text{ có vận tốc của vật tại thời điểm } t \text{ là } v(t) = \int a(t) dt = \int \frac{2}{t+1} dt = 2 \ln |t+1| + C$$

$$Vì \text{ vận tốc ban đầu là } 5(m/s) \text{ nên } v(0) = 5 \Leftrightarrow 2 \ln |0+1| + C = 5 \Leftrightarrow C = 5$$

$$Nên v(t) = 2 \ln |t+1| + 5. \text{ Vậy vận tốc của vật tại giây thứ 20 là } v(20) = 2 \ln |20+1| + 5 \approx 11(m/s)$$

Câu 6: Một chiếc ô tô đang chạy với vận tốc 15m/s thì người lái xe hãm phanh. Sau khi hãm phanh, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -3t + 15(m/s)$, trong đó t (giây). Hỏi từ lúc hãm phanh đến khi dừng hẳn, ô tô di chuyển được bao nhiêu mét?

Lời giải

$$Ta \text{ có quãng đường xe đi được là } s(t) = \int v(t) dt = \int (-3t + 15) dt = -\frac{3}{2}t^2 + 15t + C$$

$$Do s(0) = 0 \text{ nên } C = 0. \text{ Khi xe dừng hẳn thì } v(t) = 0 \Rightarrow t = 5$$

$$Suy \text{ ra quãng đường đi được là } s(5) = 37,5(m)$$

Câu 7: Một viên đạn được bắn lên theo phương thẳng đứng từ mặt đất. Giả sử tại thời điểm t giây (coi là thời điểm viên đạn được bắn lên), vận tốc của nó được cho bởi $v(t) = 24,5 - 9,8t(m/s)$. Tính quãng đường (mét) viên đạn đi sau 2 giây đầu.

Lời giải

$$\text{Quãng đường viên đạn đi được là: } s(t) = \int (24,5 - 9,8t) dt = 24,5t - 4,9t^2 + C$$

$$\Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2 + C. \text{ Chọn } t = 0 \Rightarrow s(0) = 0 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow s(t) = 24,5t - 4,9t^2$$

$$\text{Vậy sau 2 giây đầu quãng đường viên đạn đi là } s(2) = 24,5 \cdot 2 - 4,9 \cdot 2^2 = 29,4m$$

Câu 8: Cường độ dòng điện trong một dây dẫn tại thời điểm t giây là:

$$I(t) = Q'(t) = 3t^2 - 6t + 5,$$

Với $Q(t)$ là điện lượng truyền trong dây dẫn tại thời điểm t . Biết khi $t = 1$ giây, điện lượng truyền trong dây dẫn là $Q(1) = 4$. Tính điện lượng truyền trong dây dẫn khi $t = 3$.

Lời giải

Ta có: $Q(t) = \int Q'(t) dt = \int (3t^2 - 6t + 5) dt = t^3 - 3t^2 + 5t + C$

Do $Q(1) = 4$ nên $1^3 - 3 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + C = 4 \Rightarrow C = 1$

Như vậy $Q(t) = t^3 - 3t^2 + 5t + 1$ nên $Q(3) = 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 5 \cdot 3 + 1 = 16$

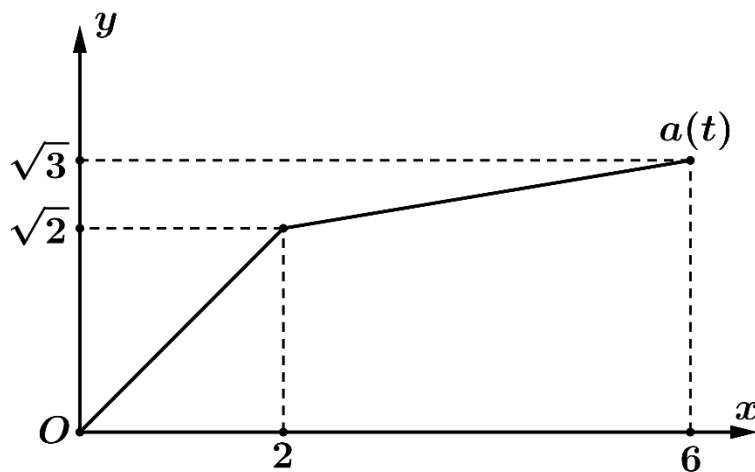
Câu 9: Một chất điểm đang chuyển động với vận tốc $v_0 = 15 \text{ (m/s)}$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính vận tốc chất điểm đó tại giây thứ 3 kể từ lúc bắt đầu tăng vận tốc.

Lời giải

Ta có $a(t) = t^2 + 4t \Rightarrow v(t) = \int a(t) dt = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + C \text{ (} C \in \mathbb{R} \text{)}$

Theo giả thiết $v(0) = 15 \Rightarrow C = 15 \Rightarrow v(t) = \frac{t^3}{3} + 2t^2 + 15$ nên $v(3) = \frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 + 15 = 41 \text{ (m/s)}$

Câu 10: Một vật chuyển động với hàm số gia tốc là $a(t)$. Biết rằng đồ thị hàm số $a(t)$ trên đoạn $[0; 6]$ được cho như hình dưới đây và vận tốc tại thời điểm $t = 0$ là $v(0) = 1 \text{ (m/s)}$.



Tại thời điểm $t = 6$ giây, vận tốc của vật là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần nghìn).

Lời giải

$$a(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2}t & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}t + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

Từ đồ thị ta có

$$v(t) = \int a(t) dt = \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{4} t^2 + 1 & , 0 \leq t \leq 2 \\ \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{8} t^2 + \frac{3\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2} t + C & , 2 \leq t \leq 6 \end{cases}$$

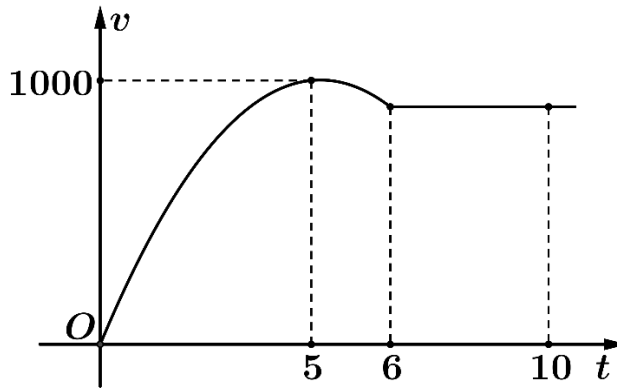
Mà $v(0) = 1 \text{ (m/s)}$ nên

Vì vận tốc là hàm số liên tục nên

$$\lim_{t \rightarrow 2^-} v(t) = \lim_{t \rightarrow 2^+} v(t) \Leftrightarrow \sqrt{2} + 1 = \frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} + C \Leftrightarrow C = \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{2} + 2}{2}$$

Do đó $v(6) = 1 + 3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \approx 8,707 \text{ (m/s)}$

Câu 11: Một xe ô tô sau khi chờ hết đèn đỏ đã bắt đầu chuyển động với vận tốc được biểu thị bằng đồ thị là đường cong parabol như hình bên dưới. Biết rằng sau 5 phút thì xe đạt đến vận tốc cao nhất 1000 m/phút và bắt đầu giảm vận tốc, đi được 6 phút thì xe chuyển động đều.



Hỏi quãng đường xe đã đi được trong khoảng 10 phút đầu tiên là bao nhiêu?

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có phương trình vận tốc của ô tô là $v(t) = -40t^2 + 400t$ với $t \in [0; 6]$ và $v = 960$ với $t > 6$. Trong khoảng 6 phút đầu phương trình quãng đường là

$$S(t) = \int (-40t^2 + 400t) dt = -\frac{40}{3} t^3 + 200t^2 + C$$

Tại thời điểm xe ô tô xuất phát ta có $t_0 = 0$ và $S(t_0) = 0$ suy ra $C = 0$ nên phương trình quãng

đường là
$$S(t) = -\frac{40}{3} t^3 + 200t^2$$

Trong khoảng 6 phút đầu ô tô đi được quãng đường là $S(6) = 4320m$ và 4 phút tiếp theo ô tô đi được quãng đường là $960 \times 4 = 3840m$

Vậy quãng đường ô tô đi được trong 10 phút đầu là $4320 + 3840 = 8160m$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Ký hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo m) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau một năm đầu tiên cây cao 2 m. Trong 10 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{1}{x} \text{ (m/năm)}$.

a) Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1 \leq x \leq 11$).

$$\text{Ta có } h(x) = \int h'(x) dx = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

$$\text{Vì } h(1) = 2 \text{ nên } \ln 1 + C = 2 \Rightarrow C = 2$$

Chiều cao của cây sau x năm ($1 \leq x \leq 11$) là $h(x) = \ln x + 2$.

b) Sau bao nhiêu năm cây cao 3 m.

$$\text{Ta có } h(x) = 3 \Leftrightarrow \ln x + 2 = 3 \Leftrightarrow x = e \approx 2,72 \text{ (năm)}.$$

Vậy sau $e \approx 2,72$ (năm) thì cây cao 3m.

Bài tập 2: Một chiếc xe đạp đang chạy với vận tốc $v_0 = 10 \text{ (m/s)}$ thì tăng tốc với gia tốc không đổi là $a = 2 \text{ (m/s}^2\text{)}$. Tính quãng đường xe đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

$$\text{Ta có } v(t) = \int a(t) dt = \int 2 dt = 2t + C$$

$$\text{Vì } v(0) = 10 \text{ nên } C = 10 \Rightarrow v(t) = 2t + 10$$

$$\text{Khi đó } s(t) = \int v(t) dt = \int (2t + 10) dt = t^2 + 10t + D$$

$$\text{Vì } s(0) = 0 \text{ nên } D = 0 \Rightarrow s(t) = t^2 + 10t \text{ m}$$

Quãng đường xe đi được trong 3 giây kể từ khi bắt đầu tăng tốc là $s(3) = 3^2 + 10 \cdot 3 = 39 \text{ m}$.

Bài tập 3: Một đám vi trùng tại ngày thứ t có số lượng là $N(t)$. Biết rằng $N'(t) = \frac{2000}{1+2t}$ và lúc đầu đám vi trùng có 300000 con. Ký hiệu L là số lượng vi trùng sau 10 ngày. Tìm L .

Lời giải

$$\text{Ta có } N(t) = \int N'(t) dt = \int \frac{2000}{1+2t} dt = 1000 \ln|1+2t| + C$$

$$N(0) = 300000 \Leftrightarrow 1000 \ln|1| + C = 300000 \Leftrightarrow C = 300000$$

$$\Rightarrow N(t) = 1000 \ln|1+2t| + 300000 \Rightarrow N(10) = 1000 \ln|1+2 \cdot 10| + 300000 \approx 303044$$

Bài tập 4: Một quần thể virus Corona P đang thay đổi với tốc độ $P'(t) = \frac{5000}{1+0,2t}$, trong đó t là thời gian tính bằng giờ. Quần thể virus Corona P ban đầu có số lượng là 1000 con. Tìm số lượng virus Corona sau 3 giờ.

Lời giải

$$P(t) = \int P'(t) dt = \int \frac{5000}{1+0,2t} dt = 5000 \cdot \frac{1}{0,2} \ln(1+0,2t) + C = 25000 \cdot \ln(1+0,2t) + C$$

Ta có

$$P(0) = 1000 \Leftrightarrow C = 1000$$

Vậy biểu thức tính số lượng virus Corona với thời gian t bất kỳ là

$$P(t) = 25000 \cdot \ln(1+0,2t) + 1000$$

Với $t = 3$ giờ ta có $P(3) = 25000 \cdot \ln(1+0,2 \cdot 3) + 1000 \approx 12750,09$

Vậy số lượng virus khi $t = 3$ giờ khoảng 12750 con.

$$a(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Bài tập 5: Một vật chuyển động với gia tốc phụ thuộc vào thời gian theo công thức

Biết tại thời điểm $t = 0$ thì vận tốc và quãng đường đi được của vật đều bằng 0. Xác định công thức tính quãng đường đi được của vật đó theo thời gian

Lời giải

Ta có vận tốc của vật tại thời điểm t là:

$$v(t) = \int a(t) dt = \int \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) dt = -\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + C$$

$$Ta \text{ có } v(0) = 0 \Leftrightarrow C = \frac{1}{4} \Rightarrow v(t) = -\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow s(t) = \int \left(-\frac{1}{2} \cos\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}\right) dt = -\frac{1}{4} \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}t + D \quad \text{và} \quad s(0) = 0 \Leftrightarrow D = \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$Vậy \quad s(t) = -\frac{1}{4} \sin\left(2t + \frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{4}t + \frac{\sqrt{3}}{8}$$

Bài tập 6: Một vật đang chuyển động đều với gia tốc $v_0 = 15m/s$ thì tăng tốc với gia tốc $a(t) = t^2 + 4t (m/s^2)$. Tính quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian 3 giây từ lúc bắt đầu tăng tốc.

Lời giải

$$Ta \text{ có } v(t) = \int a(t) dt = \int (t^2 + 4t) dt = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + C$$

$$Mà \quad v(0) = 15 \Rightarrow C = 15 \quad \text{nên} \quad v(t) = \frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15$$

$$S(t) = \int \left(\frac{1}{3}t^3 + 2t^2 + 15\right) dt = \frac{t^4}{12} + \frac{2t^3}{3} + 15t + C_1; \quad S(0) = \frac{0^4}{12} + \frac{2 \cdot 0^3}{3} + 15 \cdot 0 + C_1 = 0 \Leftrightarrow C_1 = 0$$

$$Vậy \quad S(3) = 69,75m$$

Bài tập 7: Kí hiệu $h(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 3 m. Trong 15 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $h'(x) = \frac{1}{x+1}$ (m/năm). Xác định chiều cao của cây sau x năm ($1 \leq x \leq 16$).

Lời giải

Chiều cao của cây sau x năm là $h(x) = \int \frac{1}{x+1} dx = \ln|x+1| + C = \ln(x+1) + C$, do $1 \leq x \leq 16$.

Sau năm đầu tiên cây cao 3 m do đó ta có $h(1) = 3 \Leftrightarrow \ln(1+1) + C = 3 \Leftrightarrow C = 3 - \ln 2$.

Vậy $h(x) = \ln(x+1) + 3 - \ln 2$.

Bài tập 8: Kí hiệu $F(x)$ là chiều cao của một cây (tính theo mét) sau khi trồng x năm. Biết rằng sau năm đầu tiên cây cao 4 m. Trong 16 năm tiếp theo cây phát triển với tốc độ $f'(x) = \frac{1}{2x+1}$ (m/năm). Xác định chiều cao của cây sau 5 năm.

Lời giải

Chiều cao của cây sau x năm là

$$F(x) = \int \frac{1}{2x+1} dx = \frac{1}{2} \ln|2x+1| + C = \frac{1}{2} \ln(2x+1) + C, \text{ do } 1 \leq x \leq 17$$

Sau năm đầu tiên cây cao 4 m do đó ta có $F(1) = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \ln(2 \cdot 1 + 1) + C = 4 \Leftrightarrow C = 4 - \frac{1}{2} \ln 3$.

Vậy $F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x+1) + 4 - \frac{1}{2} \ln 3$

$$F(5) = \frac{1}{2} \ln(2 \cdot 5 + 1) + 4 - \frac{1}{2} \ln 3 \approx 4,65$$

Chiều cao của cây sau 5 năm là năm.

Bài tập 9: Một vườn ươm cây cảnh bán một cây sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Tốc độ tăng trưởng trong suốt 6 năm được tính xấp xỉ bởi công thức $h'(t) = 1,5t + 5$, trong đó $h(t)(cm)$ là chiều cao của cây khi kết thúc t (năm)

(Nguồn: R.Larson and B. Edwards, Calculus 10e Cengage 2014). Cây con khi được trồng cao 12 cm.

a) Tìm công thức chỉ chiều cao của cây sau t năm.

b) Khi được bán, cây cao bao nhiêu centimét?

Lời giải

a) $h(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $h'(t) = 1,5t + 5$.

$$\text{Do } \int (1,5t + 5) dt = \int 1,5t dt + \int 5 dt = \frac{3}{4} \int 2t dt + \int 5 dt = \frac{3}{4} \int (t^2)' dt + \int (5t)' dt = \frac{3}{4} t^2 + 5t + C$$

$$\text{Khi đó } h(t) = \frac{3}{4} t^2 + 5t + C$$

Vì cây con khi được trồng cao 12 cm nên $h(0) = 12$ suy ra $C = 12$ nên $h(t) = \frac{3}{4} t^2 + 5t + 12$.

- b) Sau 6 năm trồng và uốn tạo dáng. Cây có chiều cao là: $h(6) = \frac{3}{4}6^2 + 5.6 + 12 = 69 \text{ (cm)}$.
 Vậy khi được bán, cây cao 69 cm.

Bài tập 10: Tại một lễ hội dân gian, tốc độ thay đổi lượng khách tham dự được biểu diễn bằng hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$. Trong đó t tính bằng giờ ($0 \leq t \leq 15$), $B'(t)$ được tính bằng khách/giờ. (Nguồn: A. Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-I*, Cornelesen 2016). Sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội.

- a) Viết công thức của hàm số $B(t)$ biểu diễn số lượng khách tham dự lễ hội với $0 \leq t \leq 15$.
 b) Sau 3 giờ sẽ có bao nhiêu khách tham dự lễ hội?
 c) Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là bao nhiêu?
 d) Tại thời điểm nào thì tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất?

Lời giải

- a) Ta có $B(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$.

$$\text{Do đó } B(t) = \int (20t^3 - 300t^2 + 1000t) dt = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$$

$$\text{Nên } B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + C$$

$$\text{Vì sau một giờ, 500 người đã có mặt tại lễ hội nên } B(1) = 405 + C = 500 \Rightarrow C = 95$$

$$\text{Vậy } B(t) = 5t^4 - 100t^3 + 500t^2 + 95, \quad 0 \leq t \leq 15$$

- b) Số lượng khách tham dự lễ hội sau 3 giờ là: $B(3) = 5.3^4 - 100.3^3 + 500.3^2 + 95 = 2300$ (khách).

- c) Giá trị lớn nhất của hàm số $B(t)$ trên đoạn $[0; 15]$. Ta có:

$$B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 5 \\ t = 10 \end{cases}$$

$$\text{Ta có: } B(0) = 95; B(5) = 3220; B(10) = 95; B(15) = 28220$$

Vậy Số lượng khách tham dự lễ hội lớn nhất là 28220 khách sau 15 giờ,

- d) Ta tìm t để hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ đạt giá trị lớn nhất trên đoạn $[0; 15]$. Ta có:

$$B''(t) = 60t^2 - 600t + 1000 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{15 - 5\sqrt{3}}{3} \\ t = \frac{15 + 5\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

$$B'(0) = 0; B'\left(\frac{15-5\sqrt{3}}{3}\right) \approx 962,25; B'\left(\frac{15+5\sqrt{3}}{3}\right) \approx -962,25; B'(15) = 15000$$

Ta có:

Khi đó, giá trị lớn nhất của hàm số $B'(t) = 20t^3 - 300t^2 + 1000t$ trên đoạn $[0;15]$ bằng 15000 tại $t = 15$.

Vậy tốc độ thay đổi lượng khách tham dự lễ hội là lớn nhất tại thời điểm 15 giờ.

Bài tập 11: Đối với các dự án xây dựng, chi phí nhân công lao động được tính theo số ngày công. Gọi $m(t)$ là số lượng nhân công được sử dụng ở ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Gọi $M(t)$ là số ngày công nhân được tính đến hết ngày thứ t (kể từ khi khởi công dự án). Trong kinh tế xây dựng, người ta đã biết rằng $M'(t) = m(t)$. Một công trình xây dựng dự kiến hoàn thành trong 400 ngày. Số lượng công nhân được sử dụng cho bởi hàm số $m(t) = 800 - 2t$. Trong đó t tính theo ngày ($0 \leq t \leq 400$), $m(t)$ tính theo người (Nguồn: A.Bigalke et al., *Mathematik, Grundkurs ma-I, Cornelesen 2016*). Đơn giá cho một ngày công lao động là 400000 đồng. Tính chi phí nhân công lao động của công trình đó (cho đến lúc hoàn thành).

Lời giải

Ta có $M'(t) = m(t)$ nên $M(t)$ là một nguyên hàm của hàm số $m(t) = 800 - 2t$.

Do đó: $M(t) = \int (800 - 2t) dt = 800t - t^2 + C$

Suy ra: $M(t) = 800t - t^2 + C, 0 \leq t \leq 400$. Vì $M(0) = 0 \Rightarrow C = 0$.

Vậy $M(t) = 800t - t^2$.

Số ngày công được tính đến hết ngày thứ 400 là: $M(400) = 800 \cdot 400 - 400^2 = 160000$.

Chi phí nhân công lao động của công trình đó là: $400000 \cdot 160000 = 64000000000$ (đồng).

