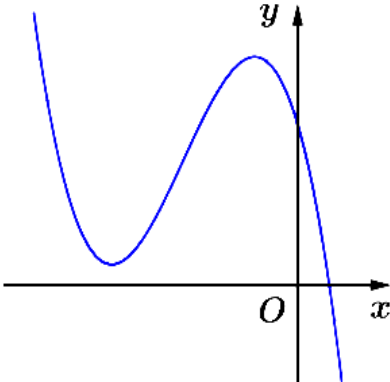


BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN CHƯƠNG ỨNG DỤNG ĐẠO HÀM ĐỂ KHẢO SÁT VÀ VỀ ĐỒ THỊ HÀM SỐ

- Câu 1.** Gọi $I(a; b)$ là tâm của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu?
- Câu 2.** Gọi $M(a; b)$, $M(c; d)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2}$. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng bao nhiêu?
- Câu 3.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = x^3 + 9x^2 - 12$ có đồ thị là đường cong (C) . Điểm $M(a; b)$ là điểm cực đại của đồ thị (C) . Giá trị của $a - b$ bằng bao nhiêu?
- Câu 4.** (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = \frac{3x - 3}{\sqrt{x^2 - 1}}$. Gọi a là số đường tiệm cận đứng và b là số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. Giá trị $20a + 10b^2$ bằng bao nhiêu?
- Câu 5.** (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$ để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$
- Câu 6.** (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x) = x(x - 3)^2$. Tính số nghiệm thực của phương trình $\underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{8 \text{ lần } f} = 0$
- Câu 7.** (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?
- 
- Câu 8.** (THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) và d_1 là khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến gốc tọa độ. Giá trị của $d^2 + d_1^2$ bằng bao nhiêu?

- Câu 9.** (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

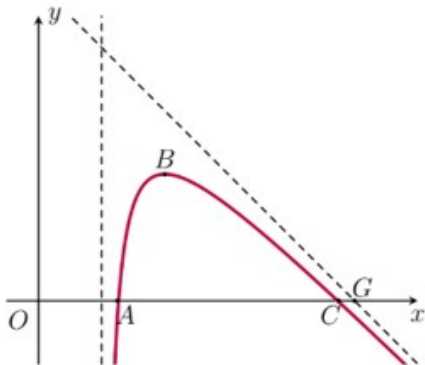
Đặt $g(x) = f\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

- Câu 10.** (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là a và b . Tính $3a + 2b$.

- Câu 11.** (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + 26x + 18}{x + 13}$ có điểm cực tiểu $x = x_1$ và điểm cực đại $x = x_2$. Tính $P = -2x_1 + x_2$.

- Câu 12.** (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025) Trong hệ trục tọa độ (Oxy) cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị (C) . Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

- Câu 13.** (Sở Hà Tĩnh 2025) Một máy bay trình diễn có đường bay gần với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gần với mặt đất.

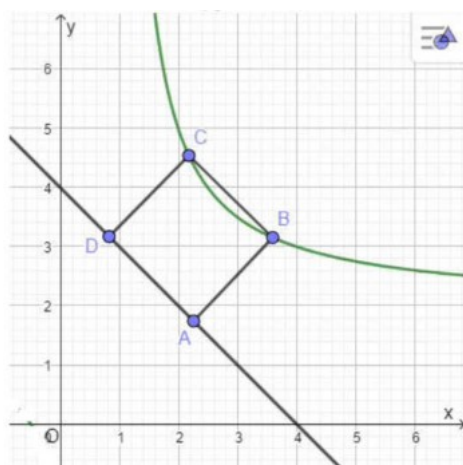


Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm

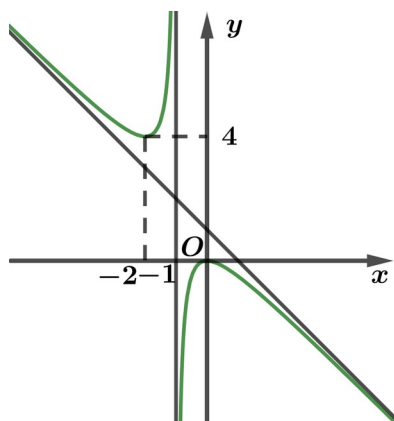
số $y = f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa độ O một khoảng $2,5$ đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát $1,5$ đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất $4,5$ đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

Câu 14. (Chuyên Hạ Long 2025) Tính giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

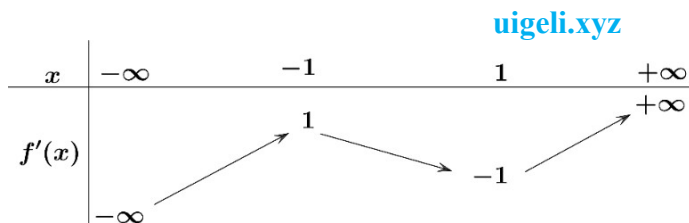
Câu 15. (Chuyên Hạ Long 2025) Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y = -x + 4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 16. (Chuyên Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính $a + b + c + d$.



Câu 17. (Chuyên Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2x) - x$.

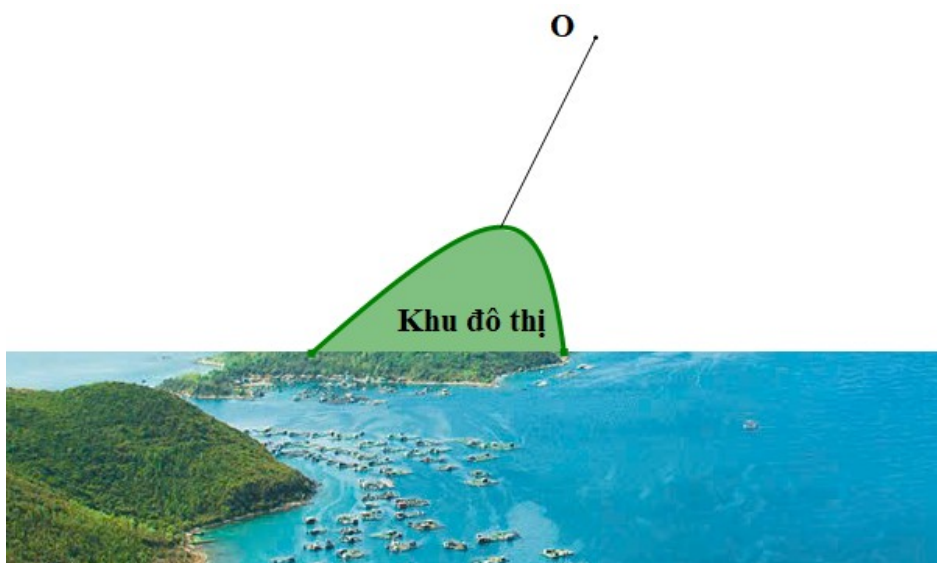


Câu 18. (TRƯỜNG THPT TRẦN PHÚ-VĨNH PHÚC 2025)

Bạn Hoa cần gấp một hộp quà có dạng hình lăng trụ tứ giác đều với diện tích toàn phần là 200cm^2 . Hộp quà mà bạn Hoa gấp được có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu centimet khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

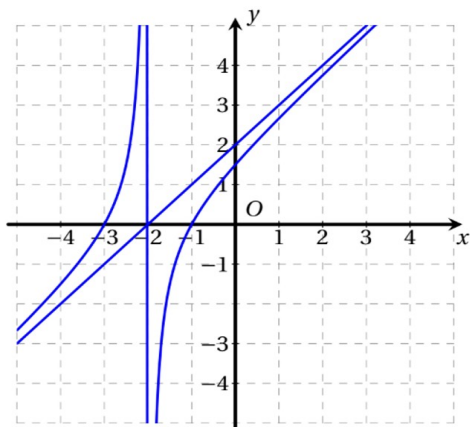
Câu 19. (Chuyên Vinh 2025) Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị đo tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao

của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Câu 20. (Cụm trường Hải Dương 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Gọi I là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có một điểm $M(a; b)$ với $a > 1$ sao cho khoảng cách IM là nhỏ nhất. Tìm a (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

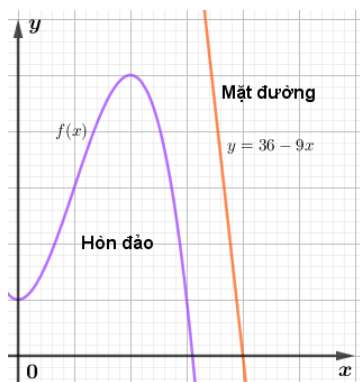
Câu 21. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x + c}$ với $a \neq 0$, có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới



Giá trị $S = a + b + c$ là bao nhiêu?

Câu 22. (THPT Trục Ninh - Nam Định 2025) Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$ có hai cực trị A và B . Phương trình đường thẳng AB là $y = ax + b$ ($a, b \in \mathbb{Q}$). Tính tổng $a + b$.

Câu 23. (THPT Trục Ninh - Nam Định 2025) Một hòn đảo nằm trong một hồ nước. Biết rằng đường cong tạo nên hòn đảo được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ Oxy là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)$.

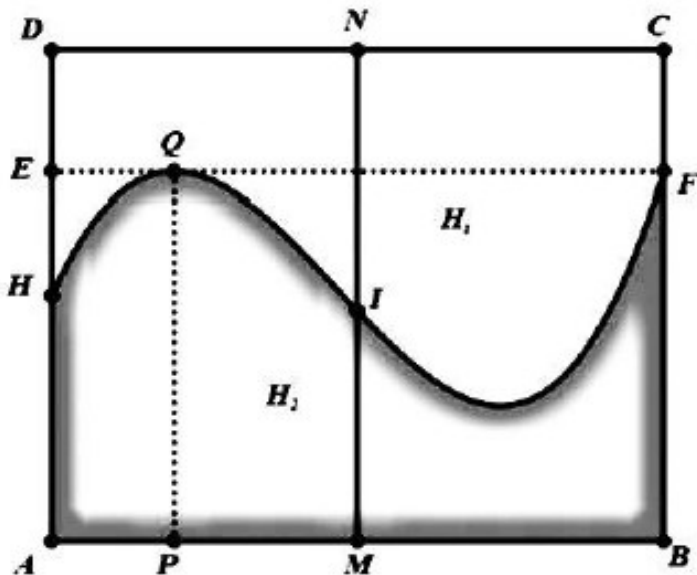


Vị trí điểm cực đại là $(2; 5)$ với đơn vị của hệ trục là $100m$ và vị trí điểm cực tiểu là $(0; 1)$.

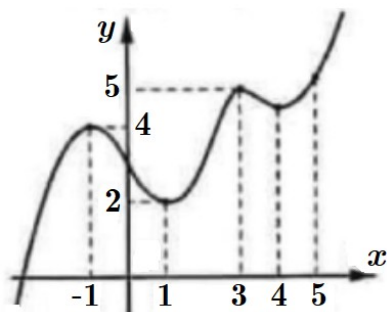
Mặt đường chạy trên một đường thẳng có phương trình $y = 36 - 9x$. Người ta muốn làm một cây cầu có dạng một đoạn thẳng nối từ hòn đảo ra mặt đường. Độ dài ngắn nhất của cây cầu bằng bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần chục)

Câu 24. (Sở Ninh Bình 2025) Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100\text{ m}$; $AD = 80\text{ m}$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (không tô màu) dành cho trẻ em và H_2 (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với $AH = 40\text{ m}$; $AE = 60\text{ m}$; $AP = 20\text{ m}$ và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng.



Câu 25. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = 3f(\log_2 x - 1) + x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ trên đoạn $[1; 4]$. Tính giá trị của biểu thức $T = M + m$.

Câu 26. (Sở Hà Nội 2025) Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$ có hai điểm cực trị A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

Câu 27. (Sở Yên Bái 2025) Gọi $M(a; b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ và có khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = 6a^2 + 7b^2$.

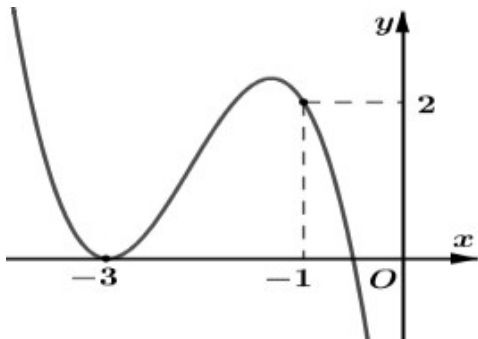
Câu 28. (Sở Đà Nẵng 2025) Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hoá bằng hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số. Trong đó, x ($0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$) là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học, là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

Câu 29. (Sở Quảng Nam 2025) Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ có điểm cực tiểu là $M(x_0; y_0)$, tính $T = x_0 + y_0$.

Câu 30. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025) Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2km$; độ rộng của núi $MN = 3,5km$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 31. (THPT Hoàng Hóa 2-Thanh Hóa 2025) Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2 + 4x + 3)\sqrt{x^2 + x}}{x[f^2(x) - 2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Câu 32. (THPT Tư Nghĩa 1 - Quảng Ngãi 2025) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. (Quy tròn đến hàng phần trăm)

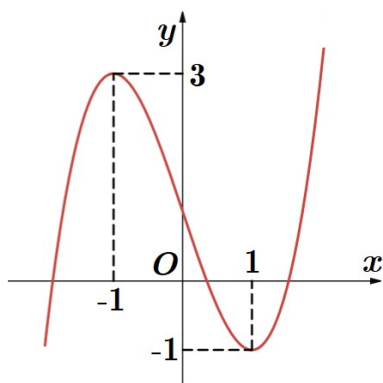
Câu 33. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3 \sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M^2 + m^2 = \frac{b}{c}$, tính $T = b - c$

Trả lời: 37

Câu 34. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Tính tổng $b + 2a$.

Câu 35. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$, với m là tham số và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Tìm số giá trị nguyên của $m \in [3; 10]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Câu 36. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



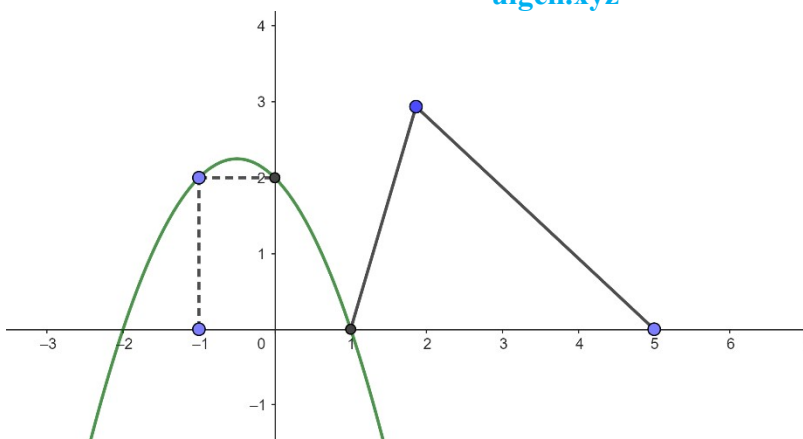
Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $25^{f(x)} + 125m = m \cdot 5^{f(x)} + 5^{f(x)+3}$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt?

Câu 37. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025) Cho hàm số $y = x^3 - 3x$, có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1 và y_2 . Khi đó giá trị của biểu thức $2y_1 - y_2$ bằng bao nhiêu?

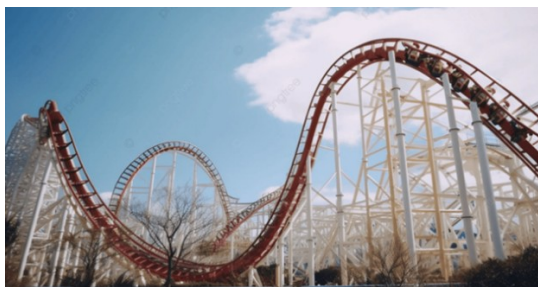
Câu 38. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2025; 2025)$ để hàm số $y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên $(4; +\infty)$.

Câu 39. (Sở Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2 + 1} - bx - 2}{-x^3 + 3x - 2}$ (với a, b là các hằng số). Biết rằng $f(x)$ liên tục tại điểm $x = 1$. Giá trị của $f(1)$ bằng bao nhiêu?

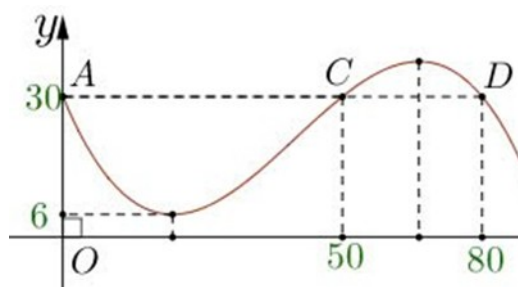
Câu 40. (THPT Phúc Thọ - Hà Nội 2025) Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ trên $[-2; 5]$ như hình vẽ (Phần cong là phần của Parabol $y = ax^2 + bx + c$). Biết $f(-2) = 0$, giá trị của $f(1) + f(3)$ bằng bao nhiêu?



- Câu 41.** (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025) Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($0 \leq x < 90$); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A , đi qua các điểm C, D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là $6m$. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (Kết quả làm tròn đến hàng phân chục).

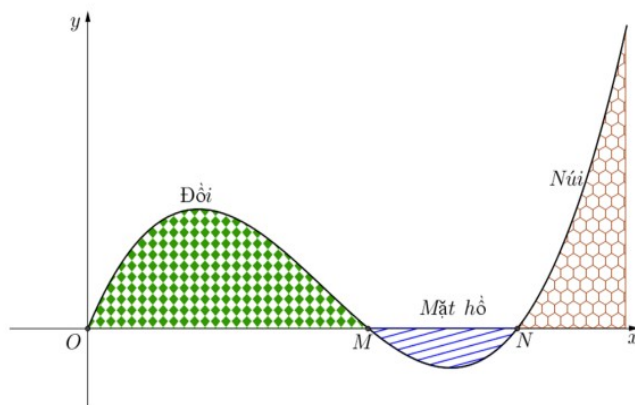


Hình 1



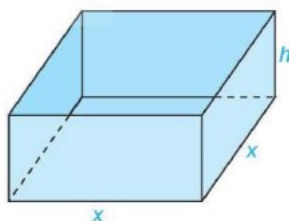
Hình 2

- Câu 42.** (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi d_1 là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) và d_2 là khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C) đến gốc tọa độ. Giá trị của $d_1^2 + 2d_2^2$ bằng bao nhiêu?
- Câu 43.** (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính bình phương của độ dài đoạn thẳng AB .
- Câu 44.** (THPT Cầm trường Hải Dương 2025) Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa là một phần hàm số bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ (đơn vị độ dài trên các trục là kilômét). Biết khoảng cách hai bên chân đồi $OM = 2(km)$, độ rộng của hồ nước $MN = 1(km)$ và ngọn đồi cao $528(m)$. Độ sâu nhất của hồ nước là bao nhiêu mét? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)



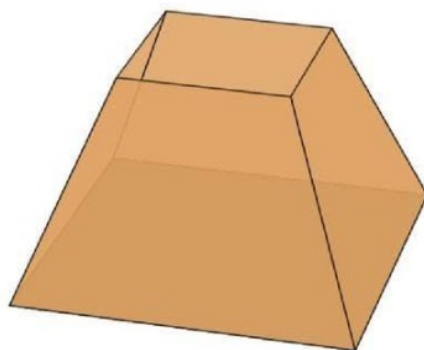
Câu 45. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 24t^2$, $0 \leq t \leq 24$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh và t là thời gian (tuần). Số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó là bao nhiêu người?

Câu 46. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108cm^2 như Hình 1.17. Tìm tích của các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất?

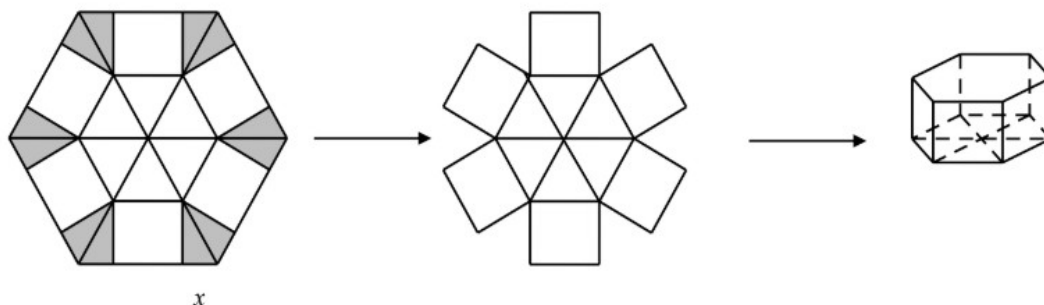


Hình 1.17

Câu 47. (SỞ GIÁO DỤC NGHỆ AN 2025) Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị:dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là $C(x) = x^2 + 108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là $T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



Câu 48. (TRƯỜNG THPT KHOA HỌC GIÁO DỤC – HÀ NỘI) Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm . Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi đập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Câu 49. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng một phòng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu ngàn để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Câu 50. (THPT NGUYỄN VIỆT XUÂN 2025) Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất?

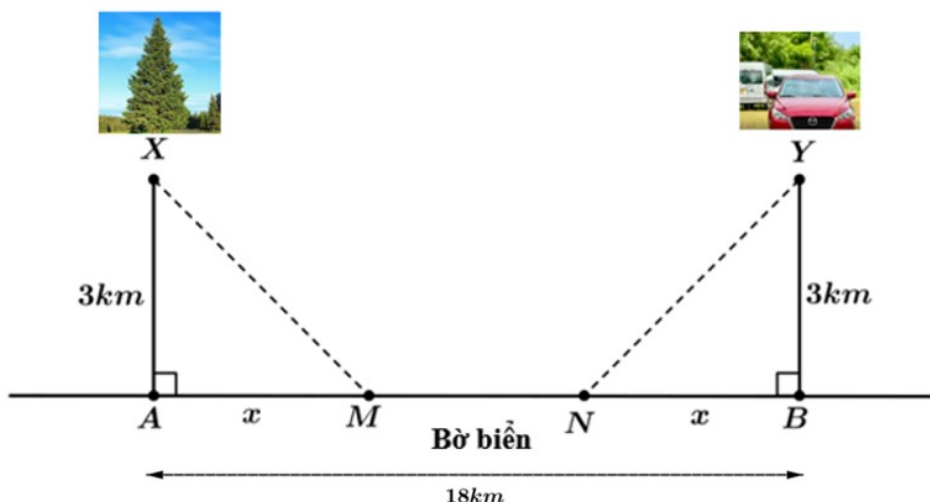
Câu 51. (TRƯỜNG THPT BẾN TRE 2025) Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Thái Lan ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 55 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3 000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

Câu 52. (TRƯỜNG THPT BÌNH XUYỀN 2025)

Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100000 đồng mỗi tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu triệu đồng?

Câu 53. Anh Vinh đang cắm trại dưới tán cây thông ở điểm X cách điểm A một khoảng 3 km . Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Ô tô của anh Vinh đỗ ở vị trí Y cách điểm B

một khoảng 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km (minh hoạ như hình vẽ).



Khi đang dựng trại tại vị trí X , anh Vinh không may bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị rắn cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Anh Vinh cần quay trở lại ô tô ở vị trí Y để lấy thuốc giải độc. Anh chạy từ chỗ cây thông ở điểm X ra thẳng vị trí M với vận tốc là 5 km/h và chạy trên bãi biển từ M tới điểm N với vận tốc là 13 km/h sau đó chạy thẳng đến chỗ ô tô với vận tốc 5 km/h. Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi anh Vinh về đến ô tô (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1. Gọi $I(a; b)$ là tâm của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + x - 2}{x + 3}$. Giá trị của $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Tiệm cận đứng $x = -3$

Tiệm cận xiên $y = x - 2$

Tọa độ tâm đối xứng là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = -3 \\ y = x - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases}$

Suy ra $I(-3; -5)$

Vậy $a + b = -8$

Câu 2. Gọi $M(a;b)$, $M(c;d)$ là hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + x + 2}{x + 2}$. Giá trị của $a + b + c + d$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$y' = \frac{-x^2 - 4x}{(x + 2)^2}$$

Lập bảng biến thiên tìm được hai điểm cực trị $M(-4;9)$, $M(0;1)$

Vậy $a + b + c + d = 6$

Câu 3. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = x^3 + 9x^2 - 12$ có đồ thị là đường cong (C) . Điểm $M(a;b)$ là điểm cực đại của đồ thị (C) . Giá trị của $a - b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: -102 .

$$y = x^3 + 9x^2 - 12$$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

$$y' = 3x^2 + 18x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 18x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -6 \end{cases}$$

Xét

Đồ thị (C) có hai điểm cực trị là: $(0; -12)$ và $(-6; 96)$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-6	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y					

Suy ra điểm cực đại của đồ thị (C) là: $M(-6; 96)$.

Vậy giá trị $a - b = -6 - 96 = -102$

Câu 4. (THPT Lương Tài 2 - Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $y = \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}}$. Gọi a là số đường tiệm cận đứng và b là số đường tiệm cận ngang của đồ thị hàm số đã cho. Giá trị $20a + 10b^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 60

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}} = -\infty \quad \text{nên đồ thị hàm số có 1 tiệm cận đứng là } x = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = 3 \quad \text{và} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-3}{\sqrt{x^2-1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - \frac{3}{x}}{-\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} = -3$$

nên đồ thị hàm số có 2 tiệm cận ngang là $y = 3$ và $y = -3$.

Vậy $a = 1$ và $b = 2$, suy ra $20a + 10b^2 = 60$.

Câu 5. (THPT Văn Giang - Hưng Yên 2025) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$ để hàm số $y = \frac{\sin x + m}{\sin x - 1}$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Lời giải

Đáp án: 2023.

$$y' = \cos x \cdot \frac{-1-m}{(\sin x - 1)^2}$$

Ta có

$$\text{Hàm số nghịch biến trên khoảng } \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \Leftrightarrow y' < 0 \quad \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$$

$$\Leftrightarrow \cos x \cdot \frac{-1-m}{(\sin x - 1)^2} < 0 \quad (*)$$

$$\text{Ta thấy } \forall x \in \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right) \text{ thì } \begin{cases} \cos x < 0 \\ (\sin x - 1)^2 > 0 \end{cases}$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow -1-m > 0 \Leftrightarrow m < -1$$

Mà m thuộc đoạn $[-2024; 2024]$ nên $m \in [-2024; -1]$. Có 2023 giá trị nguyên của tham số m thoả mãn bài toán.

Câu 6. (THPT Chuyên Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $f(x) = x(x-3)^2$. Tính số nghiệm thực của phương trình $f(f(\dots f(x))) = 0$ 8 lần f

Lời giải

Đáp án: 3281.

Ta có $f(x) = x(x-3)^2 = x^3 - 6x^2 + 9x$.

Suy ra $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	1	3	4	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	0	4	0	4	$+\infty$

Ta có

$f(x) = 0$ có 2 nghiệm.

$f(x) = 3$ có 3 nghiệm.

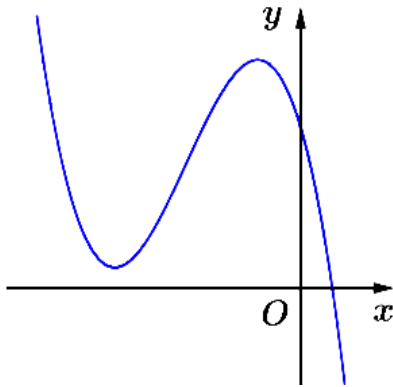
$$\Rightarrow f(f(x)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f(x) = 3 \end{cases} \text{ có } 2 + 3^1 \text{ nghiệm.}$$

$$f(f(f(x))) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(f(x)) = 0 \\ f(f(x)) = 3 \end{cases} \text{ có } 2 + 3^1 + 3^2 \text{ nghiệm.}$$

...

$$f(f(\dots f(x))) = 0 \text{ có } 2 + 3^1 + 3^2 + \dots + 3^7 = 3281 \text{ nghiệm.}$$

Câu 7. (THPT Diễn Châu 5 - Nghệ An 2025) Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) có đồ thị là đường cong trong hình bên. Có bao nhiêu số dương trong các số a, b, c, d ?



Lời giải

Đáp án 1.

Ta có: $y' = 3ax^2 + 2bx + c$

Dựa vào đồ thị ta thấy $a < 0$

$$\begin{cases} \Delta_{y'} > 0 \\ S < 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 9ac > 0 \\ -\frac{2b}{3a} < 0 \\ \frac{c}{3a} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b < 0 \\ c < 0 \end{cases}$$

Hàm số có 2 cực trị âm nên

Đồ thị cắt trục Oy tại điểm $(0; d)$ nên $d > 0$

Vậy có đúng 1 số dương trong các số a, b, c, d .

Câu 8. (THPT Triệu Sơn 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi d là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) và d_1 là khoảng cách từ điểm cực đại của (C) đến gốc tọa độ. Giá trị của $d^2 + d_1^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 25.

Ta có $y' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$

Ta có bảng biến thiên

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

Suy ra hai điểm cực trị của (C) là $A(0; 3)$ và $B(-2; -1)$ nên $d = AB = 2\sqrt{5} \Rightarrow d^2 = 20$.

Điểm cực đại là $B(-2; -1) \Rightarrow d_1^2 = OB^2 = (-2)^2 + (-1)^2 = 5$. Vậy $d^2 + d_1^2 = 25$.

Câu 9. (THPT Triệu Sơn 4 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên của đạo hàm như hình vẽ.

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	-1	3	$-\infty$

Đặt $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$. Tìm số điểm cực trị của hàm số $y = g(x)$.

Lời giải

Đáp án: 6.

Đặt $g'(x) = \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm 1 \\ \frac{x^2+1}{x} = a \ (a < -2) \\ \frac{x^2+1}{x} = b \ (-2 < b < 2) \\ \frac{x^2+1}{x} = c \ (c > 2) \end{cases}$$

$$h(x) = \frac{x^2+1}{x}, h'(x) = \frac{x^2-1}{x^2}, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Xét hàm số

Bảng biến thiên của hàm số $h(x) = \frac{x^2+1}{x}$

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	$+$
$h(x)$		$y=c \ (c>2)$			
				x_3	x_4
				2	
		$y=b \ (-2<b<2)$			
		x_1	-2	x_2	
				$y=a \ (a<-2)$	
	$-\infty$				$-\infty$

Dựa vào bảng biến thiên trên ta thấy phương trình $h(x) = a, h(x) = c$, mỗi phương trình có hai

nghiệm phân biệt khác ± 1 , mà $a \neq c \Rightarrow f'\left(\frac{x^2+1}{x}\right) = 0$ có 4 nghiệm đơn phân biệt x_1, x_2, x_3, x_4 khác ± 1 và phương trình $h(x) = b$ vô nghiệm.

Do đó phương trình $g'(x) = 0$ có 6 nghiệm đơn phân biệt lần lượt theo thứ tự từ nhỏ đến lớn là $x_1, -1, x_2, x_3, 1, x_4$.

Vậy hàm số $g(x) = f\left(\frac{x^2+1}{x}\right)$ có 6 cực trị.

Câu 10. (Chuyên Phan Bội Châu - Nghệ An 2025) Hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$ có giá trị cực đại và giá trị cực tiểu lần lượt là a và b . Tính $3a + 2b$.

Lời giải

Đáp án: 3.

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \Rightarrow y' = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2}$.

Suy ra $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$.

Bảng biến thiên của hàm số

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	$+\infty$	3	$+\infty$	

Vậy giá trị cực đại của hàm số là $a = -1$ và giá trị cực tiểu của hàm số là $b = 3$

$$\Rightarrow 3a + 2b = -3 + 6 = 3.$$

Câu 11. (THPT Lê Xoay - Vĩnh Phúc 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{2x^2 + 26x + 18}{x + 13}$ có điểm cực tiểu $x = x_1$ và điểm cực đại $x = x_2$. Tính $P = -2x_1 + x_2$.

Lời giải

Đáp án: 4.

Ta có:

$$\begin{aligned} y' = f'(x) &= \frac{(4x + 26)(x + 13) - (2x^2 + 26x + 18)}{(x + 13)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 52x + 320}{(x + 13)^2} \end{aligned}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 52x + 320 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -16 \\ x = -10 \end{cases}$$

Hàm số đạt cực tiểu tại $x = x_1 = -10$ và đạt cực đại tại $x = x_2 = -16$.

Khi đó $P = -2x_1 + x_2 = -2(-10) - 16 = 4$.

Câu 12. (Cụm trường THPT Bắc Ninh 2025) Trong hệ trục tọa độ (Oxy) cho đồ thị hàm số $(C): y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ mô tả chuyển động của hai tàu đánh cá A và B (đơn vị trên mỗi trục tọa độ tính bằng km). Biết quỹ đạo chuyển động của hai tàu luôn thuộc về hai nhánh khác nhau của đồ thị (C) . Tính khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 4,39 .

Ta có $y = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = x + \frac{1}{x + 1}, (x \neq -1)$

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng $x = -1$, gồm hai nhánh nằm về hai phía của đường thẳng $x = -1$.

Gọi A là điểm thuộc nhánh trái của đồ thị hàm số, khi đó $x_A < -1$.

Đặt $a = -1 - x_A > 0 \Rightarrow x_A = -1 - a$

$$\Rightarrow y_A = -1 - a + \frac{1}{-1 - a + 1} = -1 - a - \frac{1}{a} \Rightarrow A\left(-1 - a; -1 - a - \frac{1}{a}\right)$$

Gọi B là điểm thuộc nhánh phải của đồ thị hàm số, khi đó $x_B > -1$.

Đặt $b = x_B + 1 > 0 \Rightarrow x_B = b - 1$

$$\Rightarrow y_B = b - 1 + \frac{1}{b - 1 + 1} = b - 1 + \frac{1}{b} \Rightarrow B\left(b - 1; b - 1 + \frac{1}{b}\right)$$

$$\Rightarrow AB^2 = (b + a)^2 + \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)^2 = (b + a)^2 + (b + a)^2 \cdot \left(\frac{1}{ab}\right)^2 = (a + b)^2 \left(2 + \frac{2}{ab} + \frac{1}{a^2 b^2}\right)$$

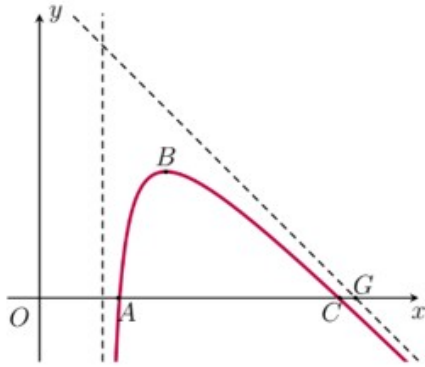
Với $a > 0, b > 0$ ta có
$$\begin{cases} (a + b)^2 \geq 4ab \\ 2 + \frac{1}{a^2 b^2} \geq 2\sqrt{\frac{2}{a^2 b^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{ab} \end{cases}$$

Nên
$$AB^2 \geq 4ab \cdot \left(\frac{2}{ab} + \frac{2\sqrt{2}}{ab}\right) = 8 + 8\sqrt{2} \Rightarrow AB \geq \sqrt{8 + 8\sqrt{2}} \approx 4,39$$

Dấu bằng xảy ra
$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ 2 = \frac{1}{a^2 b^2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

Vậy khoảng cách ngắn nhất (đơn vị km) giữa hai tàu đánh cá A và B là 4,39 (km).

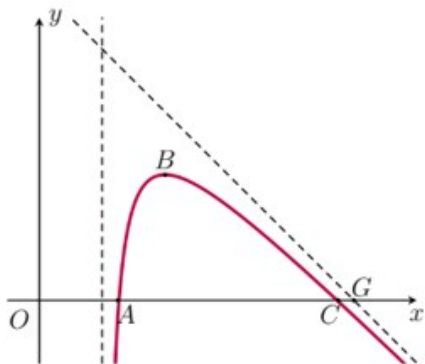
Câu 13. (Sở Hà Tĩnh 2025) Một máy bay trình diễn có đường bay gần với hệ trục Oxy được mô phỏng như hình vẽ, trục Ox gần với mặt đất.



Đường bay có dạng là một phần của đồ thị hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng là $x = 2$. Điểm G là giao điểm của đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ và trục Ox được gọi là điểm giới hạn. Biết máy bay bay từ vị trí A cách tọa độ O một khoảng $2,5$ đơn vị và máy bay khi ở vị trí cao nhất cách điểm xuất phát $1,5$ đơn vị theo phương song song với trục Ox và cách mặt đất $4,5$ đơn vị. Vị trí máy bay tiếp đất cách điểm giới hạn một khoảng bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $0,5$.



Vì tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = f(x)$ (hàm phân thức bậc hai trên bậc nhất) là $x = 2$.

Hàm số có dạng $y = f(x) = ax + b + \frac{c}{x-2} (a < 0)$.

Đồ thị hàm số qua điểm $A\left(\frac{5}{2}; 0\right)$ và nhận $B\left(4; \frac{9}{2}\right)$ làm điểm cực trị, suy ra:

$$\begin{cases} f\left(\frac{5}{2}\right)=0 \\ f(4)=\frac{9}{2} \\ f'(4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}a+b+2c=0 \\ 4a+b+\frac{1}{2}c=\frac{9}{2} \\ a-\frac{1}{4}c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=\frac{21}{2} \\ c=-4 \end{cases}$$

. Khi đó: $f(x) = -x + \frac{21}{2} - \frac{4}{x-2}$.

Đồ thị hàm số có tiệm cận xiên: $y = -x + \frac{21}{2}$. Tọa độ điểm $G\left(\frac{21}{2}; 0\right)$.

Phương trình cho hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với trục Ox là

$$-x + \frac{21}{2} - \frac{4}{x-2} = 0 \Rightarrow -x^2 + \frac{25}{2}x - 25 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = 10 \Rightarrow C(10; 0) \end{cases}$$

$$CG = \frac{21}{2} - 10 = \frac{1}{2}$$

Câu 14. (Chuyên Hạ Long 2025) Tính giá trị cực tiểu của hàm số $y = x^3 - 3x^2 + 1$.

Lời giải

Đáp án: -3 .

Ta có: Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$.

$$y' = 3x^2 - 6x$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

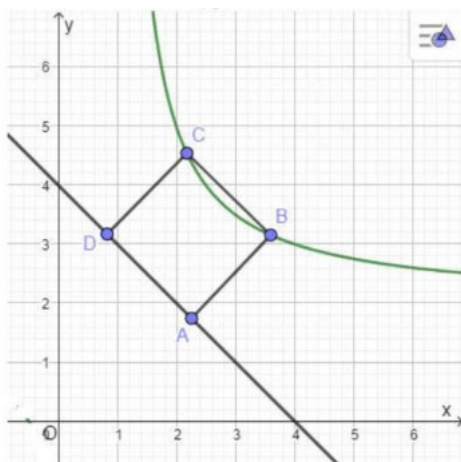
Ta có bảng xét dấu đạo hàm như sau

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
y'		+	0	-	0	+	

Ta thấy đạo hàm y' đổi dấu từ âm sang dương khi qua $x = 2$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$. Khi đó giá trị cực tiểu là $y(2) = -3$.

Câu 15. (Chuyên Hạ Long 2025) Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh

của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y = -x + 4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 1,92.

Gọi $(d_1): y = -x + m$ (với $m > 4$) song song với $(d): y = -x + 4$ và cắt $(C): y = \frac{2x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt B, C ($x_B, x_C > 1$)

Phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và $(C): \frac{2x+1}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow x^2 + (1-m)x + m+1 = 0$.

$$\Delta = m^2 - 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 3 + 2\sqrt{3} \\ m < 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow m > 3 + 2\sqrt{3} \quad (\text{vì } m > 4) \quad (1)$$

Khi đó ta có:
$$\begin{cases} x_C + x_B = m - 1 \\ x_C \cdot x_B = m + 1 \end{cases}$$

Suy ra:
$$CB = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2} = \sqrt{(x_B - x_C)^2 + (-x_B + m + x_C - m)^2} = \sqrt{2(x_B - x_C)^2}$$

$$\Rightarrow CB^2 = 2(x_B - x_C)^2 = 2(x_B + x_C)^2 - 8x_B x_C = 2m^2 - 12m - 6$$

Mặt khác chọn $I(0; 4) \in (d)$, ta có khoảng cách giữa hai đường thẳng $(d); (d_1)$ bằng

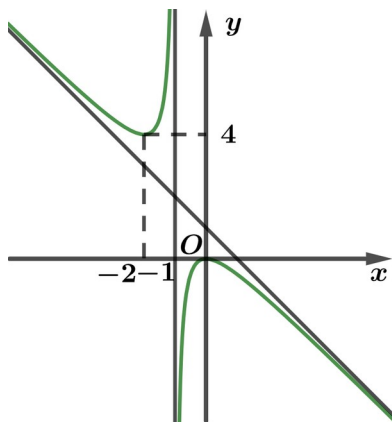
$$AB = d(I; (d_1)) = \frac{|4 - m|}{\sqrt{2}} = \frac{m - 4}{\sqrt{2}}$$

Để $ABCD$ là hình vuông thì $AB^2 = BC^2 \Leftrightarrow \frac{(m-4)^2}{2} = 2m^2 - 12m - 6 \Leftrightarrow m = \frac{8 \pm 2\sqrt{37}}{3}$

Kết hợp điều kiện (1) suy ra $m = \frac{8 + 2\sqrt{37}}{3}$

Vậy khoảng cách giữa hai cột đèn bên bờ hồ bằng $\frac{\frac{8 + 2\sqrt{37}}{3} - 4}{\sqrt{2}} \approx 1,92$.

Câu 16. (Chuyên Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = \frac{ax^2 + bx + c}{x + d}$ có đồ thị như hình vẽ dưới đây. Tính $a + b + c + d$.



Lời giải

Đáp án: 0.

Dựa vào đồ thị ta có tiệm cận đứng $x = -1$ suy ra $d = 1$.

Đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$ suy ra $c = 0$.

Hàm số có dạng $y = \frac{ax^2 + bx}{x + 1}$ có đồ thị đi qua điểm $(-2; 4)$ suy ra $4a - 2b = -4$ (1)

$$y' = \frac{(2ax + b)(x + 1) - (ax^2 + bx)}{(x + 1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax + b}{(x + 1)^2} \text{ đồ thị hàm số có điểm cực đại } O(0;0)$$

Suy ra phương trình $y' = 0$ có nghiệm $x = 0$ suy ra $b = 0$ (2)

Thay (2) vào (1) ta được $a = -1$. Hàm số $y = \frac{-x^2}{x + 1}$.

Do đó $a + b + c + d = -1 + 0 + 0 + 1 = 0$.

Câu 17. (Chuyên Thái Bình 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Hàm số $y = f'(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới. Tìm số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2x) - x$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-\infty$	1	-1	$+\infty$

Lời giải

Đáp án: 3.

Ta có $g'(x) = 2f'(2x) - 1 = 0 \Rightarrow f'(2x) = \frac{1}{2}$

Đặt $2x = t \Rightarrow f'(t) = \frac{1}{2}$, quan sát bảng biến thiên ta thấy

$$f'(t) = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} t = a \ (a < -1) \\ t = b \ (-1 < b < 1) \\ t = c \ (c > 1) \end{cases}$$

Suy ra phương trình $g'(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ Số điểm cực trị của hàm số $g(x) = f(2x) - x$ là 3.

Câu 18. (TRƯỜNG THPT TRẦN PHÚ-VĨNH PHÚC 2025)

Bạn Hoa cần gấp một hộp quà có dạng hình lăng trụ tứ giác đều với diện tích toàn phần là 200cm^2 . Hộp quà mà bạn Hoa gấp được có thể tích lớn nhất bằng bao nhiêu centimet khối (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Gọi độ dài cạnh đáy và chiều cao hộp quà lần lượt là $x(\text{cm})$ và $y(\text{cm})$ ($x > 0, y > 0$).

Theo giả thiết, ta có: $2x^2 + 4xy = 200 \Rightarrow y = \frac{50}{x} - \frac{x}{2}$ và $x < 10$ (vì $y > 0$).

Xét hàm số $V(x) = x^2 \cdot \left(\frac{50}{x} - \frac{x}{2}\right) = 50x - \frac{1}{2}x^3$ ($0 < x < 10$) là thể tích của hộp quà mà bạn Hoa gấp được.

Ta có: $V'(x) = 50 - \frac{3}{2}x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{100}{3}}$. Bảng biến thiên của hàm số $V(x)$ là:

x	0	$\sqrt{\frac{100}{3}}$	10
$V'(x)$	+	0	-
$V(x)$	0	$V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right)$	0

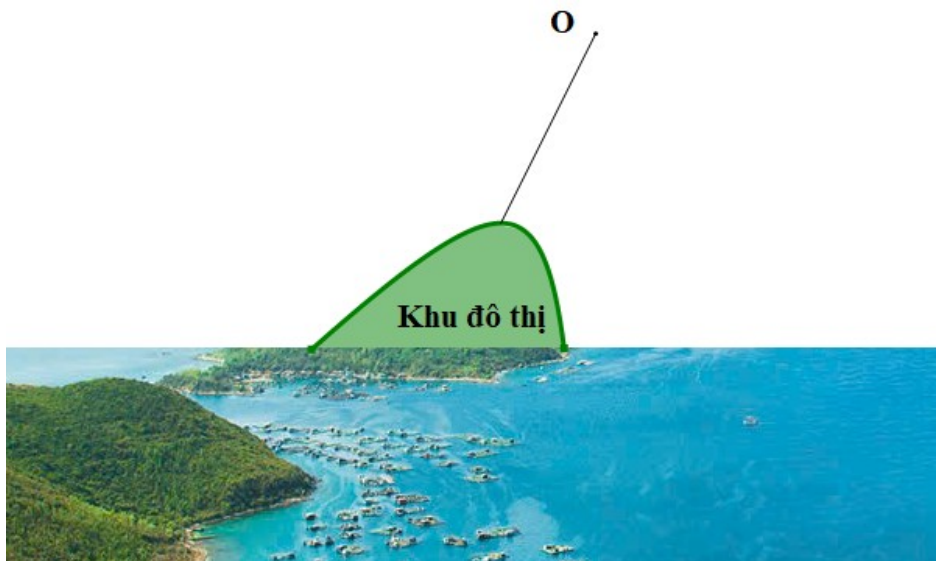
$$V\left(\sqrt{\frac{100}{3}}\right) \approx 192(\text{cm}^3).$$

Vậy bạn Hoa có thể gấp hộp quà có thể tích lớn nhất là

Đáp số: **192**.

Câu 19. (Chuyên Vinh 2025) Ở một vịnh biển, ngoài xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây một khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị đo tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao

của phần đất lấn biển có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 2,2 .

Độ dài ngắn nhất của tuyến cáp treo nối với đường bao của khu đô thị chính là khoảng cách từ

O tới điểm cực đại của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.

Xét hàm số $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ với $x \neq 0$.

Ta có $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	$-\infty$	2	2	$+\infty$	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên, đồ thị hàm số có điểm cực đại là $A(-1; -2)$.

Khi đó $OA = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} \approx 2,2$.

Vậy độ dài của tuyến cáp treo xấp xỉ $2,2$ km.

Câu 20. (Cụm trường Hải Dương 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1}$ có đồ thị là (C) . Gọi l là giao điểm của hai đường tiệm cận của đồ thị (C) . Trên đồ thị (C) có một điểm $M(a; b)$ với $a > 1$ sao cho khoảng cách lM là nhỏ nhất. Tìm a (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 1,84.

Đồ thị (C) có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x - 1$ nên $l(1; 0)$.

Cách 1: Ta có $y = \frac{x^2 - 2x + 2}{x - 1} = x - 1 + \frac{1}{x - 1} \Rightarrow M\left(a; a - 1 + \frac{1}{a - 1}\right)$

$$\begin{aligned}
 lM^2 &= (a - 1)^2 + \left(a - 1 + \frac{1}{a - 1}\right)^2 = 2(a - 1)^2 + \frac{1}{(a - 1)^2} + 2 \\
 &= \left[\sqrt{2}(a - 1)\right]^2 - 2\left[\sqrt{2}(a - 1)\right] \cdot \frac{1}{a - 1} + \left(\frac{1}{a - 1}\right)^2 + 2 + 2\left[\sqrt{2}(a - 1)\right] \cdot \frac{1}{a - 1} \\
 &= \left[\sqrt{2}(a - 1) - \frac{1}{a - 1}\right]^2 + 2 + 2\sqrt{2} \geq 2 + 2\sqrt{2}
 \end{aligned}$$

lM ngắn nhất khi và chỉ khi lM^2 nhỏ nhất hay $lM^2 = 2 + 2\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$\sqrt{2}(a-1) - \frac{1}{a-1} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}(a-1) = \frac{1}{a-1} \Leftrightarrow (a-1)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow a-1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \\ \Leftrightarrow a = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Rightarrow a = 1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \approx 1,84 \quad (\text{vì } a > 1)$$

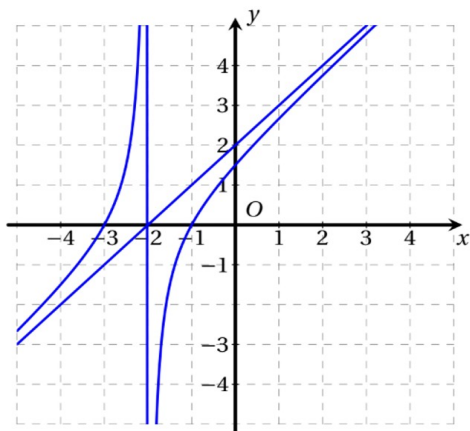
Cách 2: IM ngắn nhất khi và chỉ khi đường tròn $(I; IM)$ tiếp xúc với (C) hay IM vuông góc với tiếp tuyến của (C) tại M .

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2}.$$

Ta có

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow \frac{y_M - y_I}{x_M - x_I} \cdot f'(x_M) = -1 \Leftrightarrow \frac{a^2 - 2a + 2}{(a-1)^2} \cdot \frac{a^2 - 2a}{(a-1)^2} = -1 \Leftrightarrow \frac{(a^2 - 2a + 1 + 1)(a^2 - 2a + 1 - 1)}{(a-1)^4} = -1 \\ \Leftrightarrow \frac{(a-1)^4 - 1}{(a-1)^4} = -1 \Leftrightarrow 2(a-1)^4 = 1 \Leftrightarrow a = 1 + \sqrt[4]{\frac{1}{2}} \approx 1,84.$$

Câu 21. (THPT Sào Nam - Quảng Nam 2025) Cho hàm số $y = f(x) = \frac{ax^2 + bx + 3}{x + c}$ với $a \neq 0$, có đồ thị là đường cong như hình vẽ bên dưới



Giá trị $S = a + b + c$ là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 7.

Dựa vào hình vẽ ta thấy đồ thị hàm số có tiệm cận đứng $x = -2$ và tiệm cận xiên $y = x + 2$.

Từ $x = -2$ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $\Rightarrow c = 2$.

$$\text{Ta có } y = \frac{ax^2 + bx + 3}{x + 2} = ax + b - 2a + \frac{4a - 2b + 3}{x + 2}$$

Từ $y = x + 2$ là tiệm cận xiên là tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $\Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 4 \end{cases}$

Hàm số có đồ thị như hình vẽ là $y = \frac{x^2 + 4x + 3}{x + 2}$.

Vậy $a = 1, b = 4, c = 2 \Rightarrow S = a + b + c = 7$.

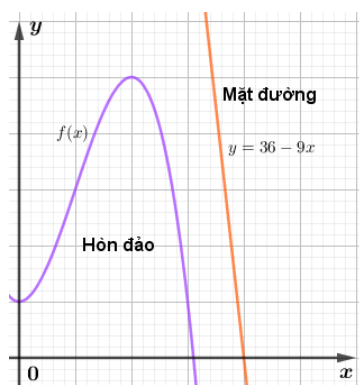
Câu 22. (THPT Trực Ninh - Nam Định 2025) Biết đồ thị hàm số $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 1$ có hai cực trị A và B . Phương trình đường thẳng AB là $y = ax + b (a, b \in \mathbb{Q})$. Tính tổng $a + b$.

Lời giải

Đáp án: - 6.

$y' = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$. Suy ra các điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(1; -6)$ và $B(-3; 26)$. Đường thẳng AB đi qua A nhận véc tơ $\overrightarrow{AB} = (-4; 32)$ làm véc tơ chỉ phương, suy ra $\vec{n} = (8; 1)$ là một véc tơ pháp tuyến của đường thẳng AB nên phương trình đường thẳng AB có dạng: $8(x - 1) + 1(y + 6) = 0 \Leftrightarrow y = -8x + 2 \Rightarrow a = -8; b = 2 \Rightarrow a + b = -6$.

Câu 23. (THPT Trực Ninh - Nam Định 2025) Một hòn đảo nằm trong một hồ nước. Biết rằng đường cong tạo nên hòn đảo được mô hình hóa vào hệ trục tọa độ Oxy là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $f(x)$.



Vị trí điểm cực đại là $(2; 5)$ với đơn vị của hệ trục là $100m$ và vị trí điểm cực tiểu là $(0; 1)$.

Mặt đường chạy trên một đường thẳng có phương trình $y = 36 - 9x$. Người ta muốn làm một cây cầu có dạng một đoạn thẳng nối từ hòn đảo ra mặt đường. Độ dài ngắn nhất của cây cầu bằng bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng phần chục)

Lời giải

Đáp án: 88,3.

Gọi hàm số bậc ba $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $(0; 1) \Rightarrow d = 1$.

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $A(2; 5) \Rightarrow 8a + 4b + 2c + 1 = 5$.

Vì hàm số có hai điểm cực trị $x = 0; x = 2 \Rightarrow \begin{cases} f'(0) = 0 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ 12a + 4b = 0 \end{cases}$.

Suy ra $\begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -x^3 + 3x^2 + 1$ và $f'(x) = -3x^2 + 6x$.

Gọi $M(x_0; y_0), x_0 > 0$, là điểm nằm trên hòn đảo và nối với mặt đường và d là tiếp tuyến của đồ thị hàm số song song với mặt đường. Suy ra M là tiếp điểm của d với $y = f(x)$.

Đường thẳng $y = 36 - 9x$ có hệ số góc $k = -9$

$$\Rightarrow f'(x_0) = -9 \Leftrightarrow -3x_0^2 + 6x_0 = -9 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 3 \\ x_0 = -1 \end{cases} \Rightarrow M(3; 1)$$

Độ dài cây cầu ngắn nhất bằng khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng $9x + y - 36 = 0$.

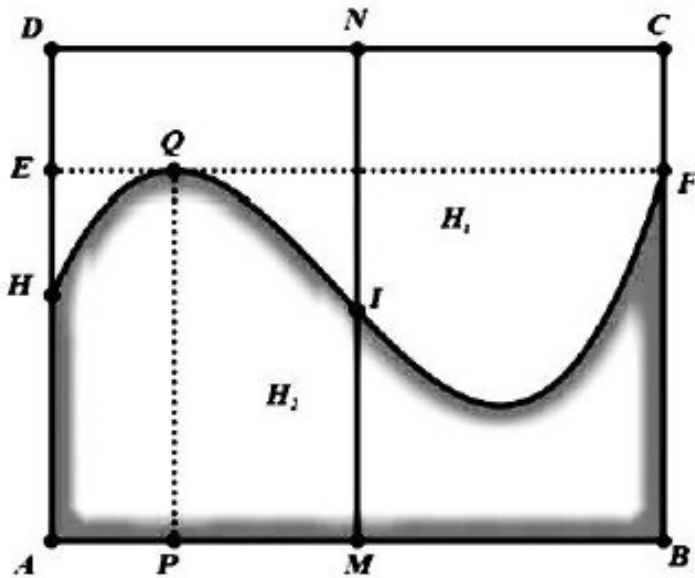
$$h = \frac{|9 \cdot 3 + 1 - 36|}{\sqrt{9^2 + 1^2}} \approx 0,883$$

Vì đơn vị của hệ trục là $100m$ nên độ dài ngắn nhất của cây cầu là 88,3m.

Câu 24. (Sở Ninh Bình 2025) Khuôn viên của một công viên có dạng hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 100\text{ m}$; $AD = 80\text{ m}$. Người ta muốn chia công viên thành hai khu, một khu dành cho trẻ em, một khu dành cho người lớn. Để tạo thiết kế độc đáo và lạ mắt, người ta dùng một đường cong chia khuôn viên thành hai phần H_1 (không tô màu) dành cho trẻ em và H_2 (tô màu) dành cho người lớn như hình vẽ bên với $AH = 40\text{ m}$; $AE = 60\text{ m}$; $AP = 20\text{ m}$ và $EF \parallel AB$; $PQ \parallel AD$.

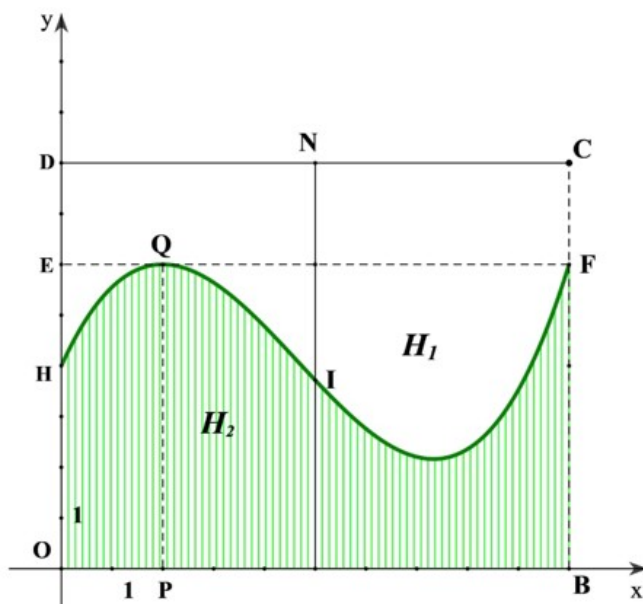
Biết rằng khi xét trong một hệ tọa độ Oxy , đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số bậc ba. Phần chính giữa công viên người ta muốn mắc dây đèn trang trí dọc đoạn thẳng MN như hình. Biết giá tiền mỗi mét dây trang trí của phần dành cho trẻ em là 140 nghìn đồng và

phần dành cho người lớn là 180 nghìn đồng. Tổng số tiền mắc dây đèn trang trí trên đoạn MN là bao nhiêu triệu đồng.



Lời giải

Đáp án: 13,9 .



Xét trục tọa độ Oxy , với gốc tọa độ là điểm A . Tia Ox trùng với tia AB , tia Oy trùng với tia AD thì đường cong ranh giới giữa hai khu vực là đồ thị hàm số bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Theo giả thiết đồ thị hàm số này đi qua các điểm $H(0; 40)$; $Q(20; 60)$; $F(100; 60)$ và có điểm cực trị là $Q(20; 60)$ nên ta có hệ

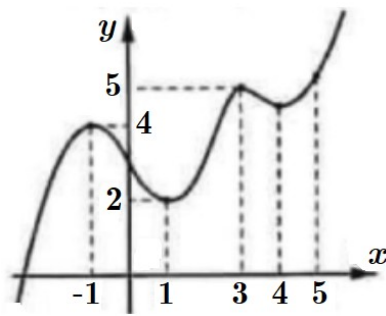
$$\begin{cases} d = 40 \\ 60 = 8000a + 400b + 20c + d \\ 60 = 1000000a + 10000b + 100c + d \\ 3.10000a + 2.100b + c = 0 \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được $a = \frac{1}{10000}; b = \frac{-11}{500}; c = \frac{7}{5}; d = 40$.

Do M là trung điểm của AB nên tọa độ điểm I là $(50; 67,5)$. Do đó chiều dài đoạn dây thuộc phần dành cho người lớn là $67,5 \text{ m}$, chiều dài đoạn dây thuộc phần dành cho trẻ em là $12,5 \text{ m}$.

Tổng số tiền mắc dây đèn là $67,5 \cdot 0,18 + 12,5 \cdot 0,14 = 13,9$ (triệu đồng).

Câu 25. (THPT Nông Công 3 - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ.



Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $h(x) = 3f(\log_2 x - 1) + x^3 - 9x^2 + 15x + 1$ trên đoạn $[1; 4]$. Tính giá trị của biểu thức $T = M + m$.

Lời giải

Đáp án: 7.

Ta có $h'(x) = 3 \cdot \frac{1}{x \ln 2} \cdot f'(\log_2 x - 1) + 3x^2 - 18x + 15$.

Với $x \in [1; 4] \Rightarrow -1 < \log_2 x - 1 < 1 \Rightarrow f'(\log_2 x - 1) < 0 \Rightarrow 3 \cdot \frac{1}{x \ln 2} \cdot f'(\log_2 x - 1) < 0$.

Và $3x^2 - 18x + 15 \leq 0, \forall x \in [1; 4] \Rightarrow h'(x) < 0, \forall x \in [1; 4]$.

Suy ra hàm số nghịch biến trên $[1; 4] \Rightarrow \min_{[1; 4]} h(x) = h(4) = -13; \max_{[1; 4]} h(x) = h(1) = 20 \Rightarrow T = 7$.

Câu 26. (Sở Hà Nội 2025) Đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x+1}$ có hai điểm cực trị A và B . Độ dài đoạn thẳng AB bằng bao nhiêu (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

Lời giải

Đáp án: 4,5.

Đạo hàm:

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}; y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y = 0 \\ x = -2 \Rightarrow y = -4 \end{cases}$$

Theo tính chất hàm hữu tỉ bậc hai trên bậc nhất, ta có hai điểm cực trị của đồ thị hàm số là $A(0; 0); B(-2; -4)$

Do đó, khoảng cách giữa hai điểm cực trị là: $AB = 2\sqrt{5} \approx 4,5$

Câu 27. (Sở Yên Bái 2025) Gọi $M(a; b)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ và có khoảng cách từ M đến đường thẳng $d: y = 3x + 6$ nhỏ nhất. Tính giá trị của biểu thức $T = 6a^2 + 7b^2$.

Lời giải

Đáp số: 13.

Gọi $M\left(a; \frac{2a+1}{a+2}\right)$ là điểm thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{2x+1}{x+2}$ (C), khoảng cách từ M đến d nhỏ nhất khi M là tiếp điểm của tiếp tuyến của (C) sao cho tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = 3x + 6$

Ta có:
$$y'(x) = \frac{3}{(x+2)^2}$$

Do đó:
$$y'(a) = \frac{3}{(a+2)^2} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow M_1 = (-1; -1), M_2 = (-3; 5) \Rightarrow \begin{cases} d(M_1; d) = \frac{4}{\sqrt{10}} \\ d(M_2; d) = \frac{8}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Vậy $\min d(M; d) = \frac{4}{\sqrt{10}}$ khi $M(-1; -1) \Rightarrow a = b = -1 \Rightarrow T = 6a^2 + 7b^2 = 13$.

Câu 28. (Sở Đà Nẵng 2025) Một giáo viên theo dõi sự tiến bộ của học sinh qua thang đo điểm, được mô hình hoá bằng hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ với a, b, c là các hệ số. Trong đó, x ($0 \leq x \leq 9, x \in \mathbb{N}$) là số tháng kể từ đầu năm học và $f(x)$ là điểm trong tháng thứ x . Qua theo dõi, giáo viên ghi nhận tháng đầu tiên học sinh đạt 19 điểm, sau đó giảm trong tháng thứ hai và đến tháng thứ ba học sinh đạt mức điểm thấp nhất trong năm học, là 3 điểm. Kể từ tháng thứ ba trở đi, điểm của học sinh tăng lên. Tính điểm của học sinh đó ở tháng thứ sáu.

Lời giải

Đáp số: 84.

$$f(1) = 19 \Rightarrow a + b + c = 18$$

Ta có:

$$f(3) = 3 \Leftrightarrow 9a + 3b + c = -24$$

Tháng thứ 3 học sinh đạt mức điểm thấp nhất là 3 điểm nên

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

Ta có: . Vì tháng 3 là học sinh đạt điểm thấp nhất nên $x = 3$ là điểm cực

trị của hàm số $f(x) \Rightarrow f'(3) = 0$.

$$\Leftrightarrow 6a + b = -27$$

$$\begin{cases} a + b + c = 18 \\ 9a + 3b + c = -24 \\ 6a + b = -27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -9 \\ c = 30 \end{cases}$$

Ta có hệ phương trình

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 30 \Rightarrow f(6) = 84.$$

Do đó

Câu 29. (Sở Quảng Nam 2025) Biết đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 4x + 5}{x - 2}$ có điểm cực tiểu là $M(x_0; y_0)$, tính $T = x_0 + y_0$.

Lời giải

Đáp án: 5.

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

Ta có

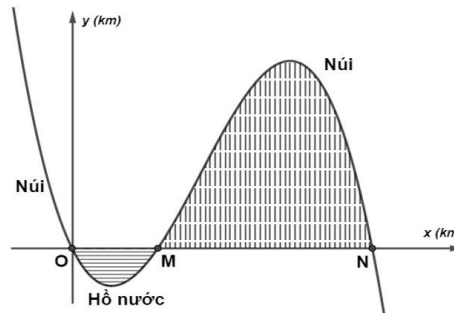
x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		
$f(x)$	$-\infty$		-2		$+\infty$	2		$+\infty$

Do đó điểm cực tiểu là $M(3;2) \Rightarrow T = x_0 + y_0 = 3 + 2 = 5$.

Câu 30. (THPT Ngô Sĩ Liên - Bắc Giang 2025) Lát cắt của một vùng đất được mô hình hóa bởi hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ dưới (đơn vị trên các trục là km). Biết khoảng cách $OM = 2km$; độ rộng của núi $MN = 3,5km$. Độ sâu của hồ nước là 450m. Chiều cao của ngọn núi là bao nhiêu mét? (làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 1191



Hàm số bậc ba $y = f(x)$ có dạng $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ($a \neq 0$)

Ta có: $ON = OM + MN = 2 + 3,5 = 5,5 (km)$

Dựa vào hình vẽ trên, ta thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại các điểm: $O(0;0)$, $M(2;0)$ và $N(5,5;0)$

Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ba nghiệm phân biệt là $x = 0; x = 2; x = 5,5$.

$\Rightarrow f(x) = k \cdot x(x-2)(x-5,5) = k(x^3 - 7,5x^2 + 11x)$ với đồ thị hàm số $\lim_{x \rightarrow +\infty} = -\infty$ nên $k < 0$

Ta có: $f'(x) = k(3x^2 - 15x + 11)$

Xét $f'(x) = 0 \Leftrightarrow k(3x^2 - 15x + 11) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 15x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{15 \pm \sqrt{93}}{6}$.

Độ sâu của hồ nước là $450m = 0,45km$ nên ta có giá trị cực tiểu của đồ thị hàm số trên là $y_{CT} = -0,45$.

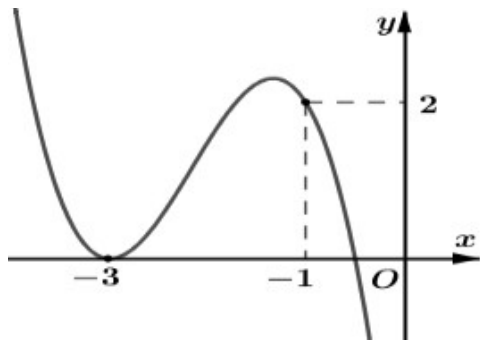
Suy ra, $f\left(\frac{15-\sqrt{93}}{6}\right) = -0,45 \Leftrightarrow k \cdot \frac{-135+31\sqrt{93}}{36} = -0,45 \Leftrightarrow k = \frac{-16,2}{-135+31\sqrt{93}}$

Chiều cao của ngọn núi tương ứng với $y_{CD} = f\left(\frac{15+\sqrt{93}}{6}\right) \approx 1,19106(km) \approx 1191(m)$

Vậy ngọn núi cao khoảng $1191m$.

Câu 31. (THPT Hoàng Hóa 2-Thanh Hóa 2025) Cho hàm bậc ba $y = f(x)$ có đồ thị như hình vẽ bên.

Hỏi đồ thị hàm số $y = \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]}$ có bao nhiêu đường tiệm cận đứng?



Lời giải

$$\begin{cases} x^2+x \geq 0 \\ x \neq 0 \\ f^2(x)-2f(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq -1 \\ x \neq 0 \\ f^2(x)-2f(x) \neq 0 \end{cases}$$

Điều kiện

$$f^2(x)-2f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ f(x)=2 \end{cases};$$

Xét

$$f(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=x_1 \in (-1;0) \end{cases}$$

$$f(x)=2 \Rightarrow \begin{cases} x=x_2 \in (-\infty;-3) \\ x=x_3 \in (-3;-1) \\ x=-1 \end{cases}$$

, hàm số $y = f(x)$ có hệ số $a < 0$

Ta viết lại hàm số

$$\begin{aligned} y &= \frac{(x^2+4x+3)\sqrt{x^2+x}}{x[f^2(x)-2f(x)]} = \frac{(x+1)(x+3)\sqrt{x^2+x}}{x \cdot a \cdot (x+3)^2(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x+1)} \\ &= \frac{\sqrt{x^2+x}}{x \cdot a \cdot (x+3)(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)} \end{aligned}$$

Nghiệm $x = x_1$ không thỏa mãn điều kiện xác định, suy ra đồ thị hàm số có 4 đường tiệm cận
 $x = 0; x = x_2; x = x_3; x = -3$.

Câu 32. (THPT Tư Nghĩa 1 - Quảng Ngãi 2025) Tính giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = 3x + \frac{4}{x^2}$ trên khoảng $(0; +\infty)$. (Quy tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: 6,24.

Ta có $y = 3x + \frac{4}{x^2} = \frac{3x}{2} + \frac{3x}{2} + \frac{4}{x^2} \stackrel{\text{Cauchy}}{\geq} 3\sqrt{\frac{3x}{2} \cdot \frac{3x}{2} \cdot \frac{4}{x^2}} \Rightarrow y \geq 3\sqrt{9}$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\frac{3x}{2} = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x^3 = \frac{8}{3} \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của hàm số là $\min_{(0; +\infty)} y = 3\sqrt[3]{9} \approx 6,24$ khi $x = \frac{2}{\sqrt[3]{3}}$.

Câu 33. (THPT Quế Võ 1 - Bắc Ninh 2025) Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = \frac{3\sin x + 2}{\sin x + 1}$ trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Khi đó giá trị của $M^2 + m^2 = \frac{b}{c}$, tính $T = b - c$

Trả lời: 37

Lời giải

Đặt $t = \sin x, t \in [0; 1]$.

Xét hàm $f(t) = \frac{3t+2}{t+1}$ trên đoạn $[0; 1]$ có $f'(t) = \frac{1}{(t+1)^2} > 0, t \in [0; 1]$.

Suy ra hàm số đồng biến trên $[0; 1]$

$\Rightarrow M = \max_{[0; 1]} f(t) = f(1) = \frac{5}{2}$ và $m = \min_{[0; 1]} f(t) = f(0) = 2$.

Khi đó, $M^2 + m^2 = \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 2^2 = \frac{41}{4} \Rightarrow b - c = 37$.

Câu 34. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Hàm số $y = x^3 + ax^2 + bx + 2$ đạt cực tiểu tại $x = 1$. Tính tổng $b + 2a$.

Lời giải

Trả lời: -3Ta có $y' = 3x^2 + 2ax + b$.Vì hàm số đạt cực tiểu tại $x = 1$ nên $y'(1) = 0 \Leftrightarrow 3 + 2a + b = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -3$.

Câu 35. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Cho các hàm số $f(x) = x^2 - 4x + m$, với m là tham số và $g(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 2)^2(x^2 + 3)^3$. Tìm số giá trị nguyên của $m \in [3; 10]$ để hàm số $g(f(x))$ đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$.

Lời giải**Trả lời: 8**Ta có $g'(x) = 2x(x^2 + 2)(x^2 + 3)^2(6x^4 + 22x^2 + 18)$ và $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$.Đặt $y = g(f(x))$.

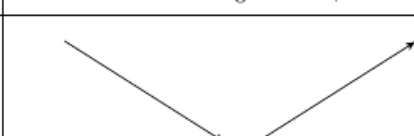
$$\text{Khi đó } y' = (g(f(x)))' = g'(f(x)) \cdot f'(x) \text{ và } y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + m = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Ta xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $m > 4$.Khi đó phương trình $x^2 - 4x + m = 0$ có $\Delta' = 4 - m < 0$ nên phương trình vô nghiệm.

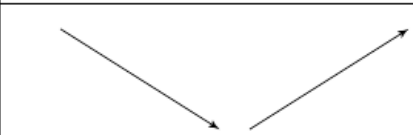
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$	
y'		-	0	+
y				

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số y đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ hay $m > 4$ thỏa yêu cầu.

Trường hợp 2: $m = 4$.Khi đó phương trình $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (nghiệm kép).

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
y'	-	0	+
y			

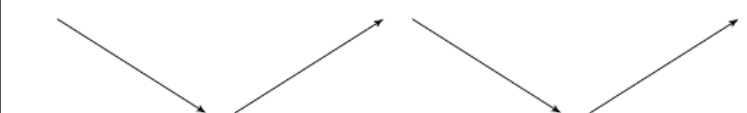
Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số y đồng biến trên khoảng $(2; +\infty)$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ hay $m = 4$ thỏa yêu cầu.

Trường hợp 3: $m = 3$.

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Khi đó phương trình

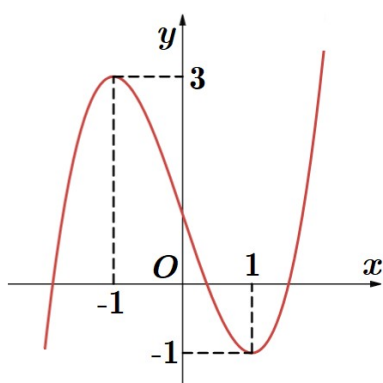
Bảng biến thiên:

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$			
y'		-	0	+	0	-	0	+
y								

Từ bảng biến thiên, ta thấy hàm số y đồng biến trên khoảng $(3; +\infty)$ hay $m = 3$ thỏa yêu cầu.

So với điều kiện $m \in \square$ và $m \in [3; 10]$ ta được $m \in \{3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$ hay có 8 giá trị nguyên của tham số m thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 36. (THPT Triệu Quang Phục - Hưng Yên 2025) Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình bên dưới.



Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $25^{f(x)} + 125m = m \cdot 5^{f(x)} + 5^{f(x)+3}$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt?

Lời giải

Trả lời: 124

$$\begin{aligned}
25^{f(x)} + 125m &= m \cdot 5^{f(x)} + 5^{f(x)+3} \Leftrightarrow 5^{f(x)} \cdot 5^{f(x)} - 125 \cdot 5^{f(x)} + 125m - m \cdot 5^{f(x)} = 0 \\
&\Leftrightarrow 5^{f(x)}(5^{f(x)} - 125) - m(5^{f(x)} - 125) = 0 \Leftrightarrow (5^{f(x)} - m)(5^{f(x)} - 125) = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 5^{f(x)} - m = 0 \\ 5^{f(x)} - 125 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^{f(x)} = m \\ 5^{f(x)} = 125 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \log_5 m \\ f(x) = 3 \end{cases} \text{ với } m > 0.
\end{aligned}$$

Do phương trình $f(x) = 3$ có hai nghiệm nên để phương trình $25^{f(x)} + 125m = m \cdot 5^{f(x)} + 5^{f(x)+3}$ có đúng 5 nghiệm thực phân biệt khi và chỉ khi $-1 < \log_5 m < 3 \Leftrightarrow \frac{1}{5} < m < 125$.

Vậy có tất cả 124 giá trị m thỏa yêu cầu.

Câu 37. (Cụm Chuyên Môn Đắk Lak 2025) Cho hàm số $y = x^3 - 3x$, có giá trị cực đại và cực tiểu lần lượt là y_1 và y_2 . Khi đó giá trị của biểu thức $2y_1 - y_2$ bằng bao nhiêu?

Phương pháp:

Tìm cực trị của hàm bậc ba.

Cách giải:

Ta có:

$$y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 & \Rightarrow y = -2 = y_2 \\ x = -1 & \Rightarrow y = 2 = y_1 \end{cases} \text{ (do hàm bậc ba).}$$

$$\text{Vậy } 2y_1 - y_2 = 6.$$

Câu 38. (THPT Hà Trung - Thanh Hóa 2025) Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m thuộc $(-2025; 2025)$ để hàm số $y = \frac{m \log_2 x - 2}{\log_2 x - m - 1}$ nghịch biến trên $(4; +\infty)$.

Lời giải

Đáp số: 2022

Đặt $t = \log_2 x$.

Ta có $x \in (4; +\infty) \Leftrightarrow t \in (2; +\infty)$.

Hàm số được viết lại $y = \frac{mt - 2}{t - m - 1}$ (1).

Vì $t = \log_2 x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$ nên yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ (1) nghịch biến trên $(2; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m(m+1)+2 < 0 \\ m+1 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 \\ m > 1 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow m < -2$$

Kết hợp điều kiện m thuộc $(-2025; 2025)$ nên có 2022 giá trị m thỏa mãn

Câu 39. (Sở Bắc Ninh 2025) Cho hàm số $f(x) = \frac{\sqrt{ax^2+1}-bx-2}{-x^3+3x-2}$ (với a, b là các hằng số). Biết rằng $f(x)$ liên tục tại điểm $x=1$. Giá trị của $f'(1)$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sqrt{ax^2+1}-(bx+2)}{-x^3+3x-2} = \frac{ax^2+1-(bx+2)^2}{-(x-1)^2(x+2)(\sqrt{ax^2+1}+bx+2)} \\ &= \frac{(a-b^2)x^2-4bx-3}{-(x-1)^2(x+2)(\sqrt{ax^2+1}+bx+2)} = \frac{-3\left[\frac{b^2-a}{3}x^2+\frac{4b}{3}x+1\right]}{-(x-1)^2(x+2)(\sqrt{ax^2+1}+bx+2)}. \end{aligned}$$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (hữu hạn), suy ra

$$\frac{b^2-a}{3}x^2+\frac{4b}{3}x+1=(x-1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b^2-a}{3}=1 \\ \frac{4b}{3}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\frac{3}{4} \\ b=-\frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{(x+2)\left(\sqrt{-\frac{3}{4}x^2+1}-\frac{3}{2}x+2\right)} = 1$$

Khi đó

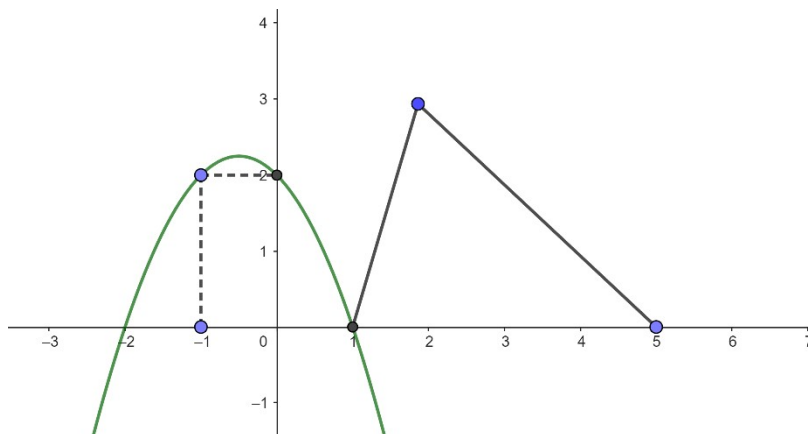
Giá trị của $f'(1)=1$.

Cách 2: Đặt $g(x) = \sqrt{ax^2+1}-bx-2 \Rightarrow g'(x) = \frac{ax}{\sqrt{ax^2+1}}-b$

Hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x=1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ (hữu hạn).

Do $x=1$ là nghiệm kép của mẫu nên $\begin{cases} g(x)=0 \\ g'(x)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{a+1}-b-2=0 \\ \frac{a}{\sqrt{a+1}}-b=0 \end{cases}$. Giải được $a=-\frac{3}{4}, b=-\frac{3}{2}$.

Câu 40. (THPT Phúc Thọ - Hà Nội 2025) Cho hàm số $f(x)$. Đồ thị hàm số $f'(x)$ trên $[-2;5]$ như hình vẽ (Phần cong là phần của Parabol $y=ax^2+bx+c$). Biết $f(-2)=0$, giá trị của $f(1)+f(3)$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Xét trên $[-2;1]$ ta có: $f'(x)=ax^2+bx+c$. Do đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua các điểm $(-2;0), (-1;2), (1;0)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a-2b+c=0 \\ a-b+c=2 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-1 \\ c=2 \end{cases}$$

Suy ra $f'(x)=-x^2-x+2$ trên $[-2;1]$

Khi đó $f(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+C$. Do $f(-2)=0$ nên $\frac{8}{3}-\frac{4}{2}-4+C=0 \Leftrightarrow C=\frac{10}{3}$

Vậy $f(x)=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{10}{3}$ trên $[-2;1]$ suy ra $f(1)=-\frac{1^3}{3}-\frac{1^2}{2}+2.1+\frac{10}{3}=\frac{9}{2}$.

Tương tự:

Xét trên $[1;2]$ ta có: $f'(x)=px+q$. Do đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua các điểm $(2;3), (1;0)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2p + q = 3 \\ p + q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 3 \\ q = -3 \end{cases}$$

Suy ra $f'(x) = 3x - 3$ trên $[1; 2]$

Khi đó $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x + C_1$. Do $f(1) = \frac{9}{2}$ nên $\frac{3}{2} - 3 + C_1 = \frac{9}{2} \Leftrightarrow C_1 = 6$

Vậy $f(x) = \frac{3x^2}{2} - 3x + 6$ trên $[1; 2]$. suy ra $f(2) = \frac{3 \cdot 2^2}{2} - 3 \cdot 2 + 6 = 6$

Xét trên $[2; 5]$ ta có: $f'(x) = mx + n$. Do đồ thị hàm số $f'(x)$ đi qua các điểm $(2; 3), (5; 0)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2m + n = 3 \\ 5m + n = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ n = 5 \end{cases}$$

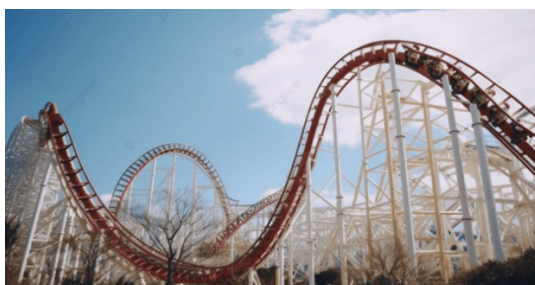
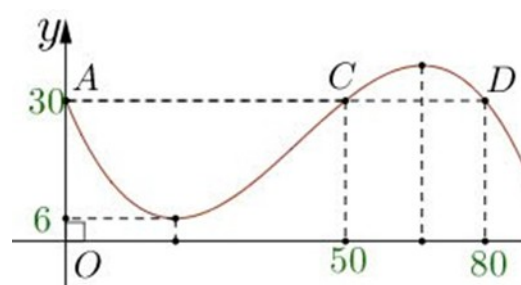
Suy ra $f'(x) = -x + 5$ trên $[2; 5]$

Khi đó $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x + C_2$. Do $f(2) = 6$ nên $-\frac{4}{2} + 10 + C_2 = 8 \Leftrightarrow C_2 = 0$

Vậy $f(x) = -\frac{x^2}{2} + 5x$ trên $[2; 5]$. $f(3) = -\frac{3^2}{2} + 5 \cdot 3 = -\frac{9}{2} + 15$

Kết luận: $f(1) + f(3) = \frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 15 = 15$

Câu 41. (THPT Lê Quý Đôn - Hà Nội 2025) Một phần đường chạy của tàu lượn siêu tốc (hình 1) khi gắn hệ trục tọa độ Oxy được mô phỏng ở hình 2, đơn vị trên mỗi trục là mét. Biết đường chạy của nó là một phần đồ thị hàm bậc ba $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($0 \leq x < 90$); tàu lượn siêu tốc xuất phát từ điểm A , đi qua các điểm C, D đồng thời đạt độ cao nhỏ nhất so với mặt đất là $6m$. Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là bao nhiêu mét so với mặt đất? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Hình 1

Hình 2

Lời giải

Đáp án: 39,9

Dựa vào hình 2 ta thấy đồ thị hàm số $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a < 0$) và đường thẳng $y = 30$ cắt nhau tại 3 điểm phân biệt có hoành độ $x = 0; x = 50; x = 80$.

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d = 30 \Leftrightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - 30 = 0 \quad \text{có 3 nghiệm phân biệt}$$

$$x = 0; x = 50; x = 80.$$

$$\Rightarrow ax^3 + bx^2 + cx + d - 30 = ax(x - 50)(x - 80) = a(x^3 - 130x^2 + 4000x)$$

Suy ra $f(x) = a(x^3 - 130x^2 + 4000x) + 30 \Rightarrow f'(x) = a(3x^2 - 260x + 4000)$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \text{ (TM)} \\ x = \frac{200}{3} \text{ (TM)} \end{cases}$$

Theo bài ra độ cao nhỏ nhất bằng 6 hay $f(20) = 6 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{1500}$

Độ cao lớn nhất mà tàu lượn siêu tốc đạt được là $f\left(\frac{200}{3}\right) = \frac{3230}{81} \approx 39,9$.

Câu 42. (THPT Nguyễn Quốc Trinh - Hà Nội 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi d_1 là khoảng cách giữa hai điểm cực trị của (C) và d_2 là khoảng cách từ điểm cực tiểu của (C) đến gốc tọa độ. Giá trị của $d_1^2 + 2d_2^2$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 38

Hàm số $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 1}$

+) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

$$y' = \frac{x^2 + 2x}{(x + 1)^2}, \forall x \neq -1$$

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	-1	$-\infty$	$+\infty$	3	$+\infty$

+) C6 $d_1 = MN = 2\sqrt{5}$; $d_2 = ON = 3$

Câu 43. (Chuyên Lam Sơn - Thanh Hóa 2025) Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Gọi A, B là hai điểm cực trị của đồ thị (C) . Tính bình phương của độ dài đoạn thẳng AB .

Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

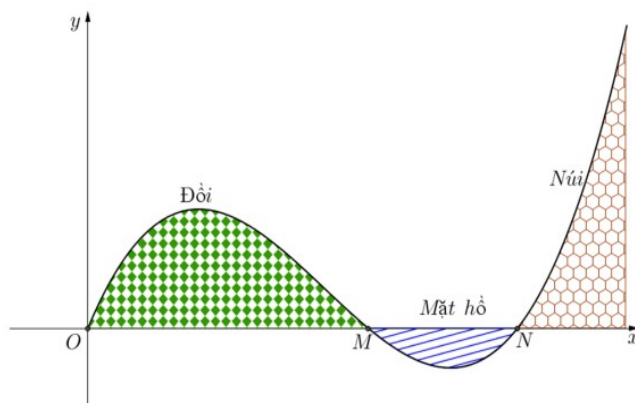
$$y' = \frac{(2x-2)(x+1) - (x^2-2x-2)}{(x+1)^2} = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

Hai điểm cực trị của đồ thị (C) là $A(-2; -6), B(0; -2)$

$$\overline{AB} = (2; 4) \Rightarrow AB^2 = 20$$

Trang 45



Lời giải

Đáp án: 158.

$$\text{Đồi } 528(m) = 0,528(km)$$

$$\text{Ta có: } ON = OM + MN = 3km \Rightarrow M(2;0), N(3;0)$$

Từ đồ thị hàm số suy ra:

$$f(x) = kx(x-2)(x-3) = k(x^3 - 5x^2 + 6x) \Rightarrow f'(x) = k(3x^2 - 10x + 6)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 10x + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{7}}{3} \\ x = \frac{5-\sqrt{7}}{3} \end{cases}$$

Gọi $h(h > 0)$ là độ sâu của hồ khi đó $\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}; 0,528\right)$ là đỉnh đồi, $\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}; -h\right)$ là đáy hồ

$$\text{Ta có: } k \left[\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{5-\sqrt{7}}{3}\right) \right] = 0,528 \Leftrightarrow k \approx 0,25$$

$$f(x) = 0,25(x^3 - 5x^2 + 6x) \Rightarrow -h = \left[\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 5\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 6\left(\frac{5+\sqrt{7}}{3}\right) \right] \Leftrightarrow h \approx 0,15778(km)$$

$$\Rightarrow h \approx 158(m)$$

Câu 45. Giả sử sự lây lan của một loại virus ở một địa phương có thể được mô hình hóa bằng hàm số $N(t) = -t^3 + 24t^2$, $0 \leq t \leq 24$, trong đó N là số người bị nhiễm bệnh và t là thời gian (tuần). Số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó là bao nhiêu người?

Lời giải

Đáp án: 2048

Xét hàm số: $f(t) = -t^3 + 24t^2$, với $0 \leq t \leq 24$.

Ta có: $f'(t) = -3t^2 + 48t$.

Khi đó: $f'(t) = 0 \Leftrightarrow -3t^2 + 48t = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 16 \end{cases}$.

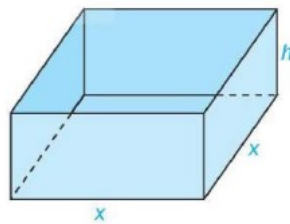
Ta có bảng biến thiên sau:

x	0	16	24
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$	0	2048	0

Từ bảng biến thiên, ta thấy $\max_{[0,24]} f(t) = 2048$ hay $\max_{[0,24]} N(t) = 2048$.

Vậy số người tối đa bị nhiễm bệnh ở địa phương đó là 2048 người.

Câu 46. Một nhà sản xuất muốn thiết kế một chiếc hộp có dạng hình hộp chữ nhật không có nắp, có đáy là hình vuông và diện tích bề mặt bằng 108cm^2 như Hình 1.17. Tìm tích của các kích thước của chiếc hộp sao cho thể tích của hộp là lớn nhất?



Hình 1.17

Lời giải

Trả lời: 108

Hình hộp trên có độ dài cạnh đáy là x (cm, $x > 0$) và chiều cao là h (cm, $h > 0$)

Diện tích bề mặt của hình hộp là 108cm^2 nên $x^2 + 4xh = 108 \Rightarrow h = \frac{108 - x^2}{4x}$ (cm) (điều kiện $0 < x < \sqrt{108}$).

Thể tích của hình hộp là: $V = x^2 \cdot h = x^2 \cdot \frac{108 - x^2}{4x} = \frac{108x - x^3}{4} \text{ (cm}^3\text{)}$. Bài toán trở thành tìm giá trị lớn

nhất của hàm số $V = -\frac{x^3}{4} + 27x \quad (0 < x < \sqrt{108})$

Ta có: $V' = \frac{-3x^2 + 108}{4}, V' = 0 \Leftrightarrow x = 6$ (do $0 < x < \sqrt{108}$)

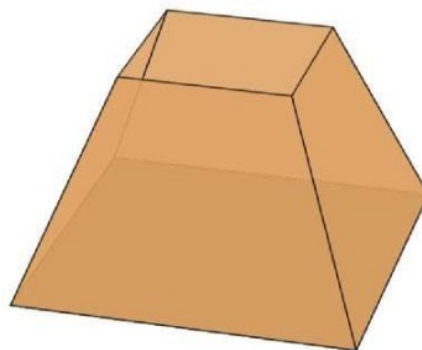
Lập bảng biến thiên của hàm số

x	0	6	$\sqrt{108}$
V'		+	0
V	0	108	$V(\sqrt{108})$

Do đó, thể tích của hình hộp là lớn nhất khi độ dài cạnh đáy $x = 6 \text{ cm}$

Khi đó, chiều cao của hình hộp là: $\frac{108 - 6^2}{4 \cdot 6} = 3 \text{ (cm)}$.

Câu 47. (SỞ GIÁO DỤC NGHỆ AN 2025) Một xưởng thủ công mỹ nghệ sản xuất loại chụp đèn trang trí dạng hình chóp cụt tứ giác đều. Gọi x là độ dài cạnh đáy lớn (đơn vị: dm). Tính toán cho thấy tổng chi phí vật liệu (tính bằng nghìn đồng) cho một chụp đèn là $C(x) = x^2 + 108$ (nghìn đồng). Thời gian sản xuất cho một chụp đèn được xác định là $T(x) = x + 6$ (giờ). Xưởng muốn xác định kích thước x để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất, nhằm tối ưu hóa hiệu quả sử dụng thời gian và vật liệu. Hãy tìm giá trị của x .



Lời giải

Đáp án: 6

Gọi hàm chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là $f(x) = \frac{C(x)}{T(x)} = \frac{x^2 + 108}{x + 6}, x > 0$.

Ta có
$$f'(x) = \frac{x^2 + 12x - 108}{(x+6)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -18(L) \\ x = 6 \end{cases}$$

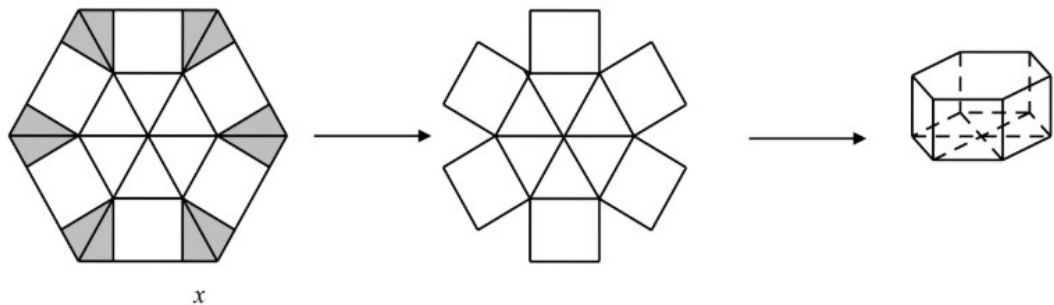
Ta có bảng biến thiên :

x	0	6	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	18	12	$+\infty$

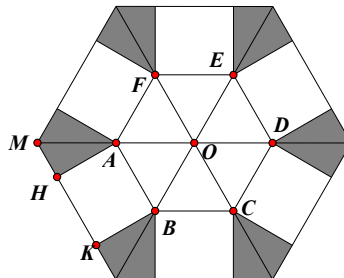
Từ bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt GTNN bằng 12 khi $x = 6$.

Vậy để chi phí vật liệu trung bình trên một giờ sản xuất là thấp nhất thì $x = 6$.

Câu 48. (TRƯỜNG THPT KHOA HỌC GIÁO DỤC – HÀ NỘI) Cho một tấm nhôm hình lục giác đều cạnh 90 cm . Người ta cắt ở mỗi đỉnh của tấm nhôm hai hình tam giác vuông bằng nhau, biết cạnh góc vuông nhỏ bằng x (cm) (cắt phần tô đậm của tấm nhôm) rồi đập tấm nhôm như hình vẽ để được một hình lăng trụ lục giác đều không có nắp. Tìm x để thể tích của khối lăng trụ lục giác đều trên là lớn nhất (Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Lời giải



Điều kiện $0 < x < 45$

Cạnh đáy của lăng trụ lục giác đều: $AB = HK = 90 - 2x$

Chiều cao của lăng trụ lục giác đều: $HA = MH \cdot \tan 60^\circ = x\sqrt{3}$

Diện tích đáy của lăng trụ lục giác đều: $S_{ABCDEF} = 6S_{ABO} = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(90-2x)^2$

Thể tích của khối lăng trụ lục giác đều: $V(x) = HA \cdot S_{ABCDEF} = \frac{9}{2}x(90-2x)^2$

Hay $V(x) = 18x^3 - 1620x^2 + 36450x$

Xét hàm số $V(x) = 18x^3 - 1620x^2 + 36450x$ trên khoảng $(0; 45)$.

$$V'(x) = 54x^2 - 3240x + 36450$$

$$V'(x) = 0 \Leftrightarrow 54x^2 - 3240x + 36450 = 0 \Leftrightarrow x = 15 \text{ hoặc } x = 45 \text{ (loại)}.$$

Bảng biến thiên:

x	0	15	45
$V'(x)$		+	-
$V(x)$	0	243000	0

Từ bảng biến thiên ta có: $\max_{(0; 45)} V(x) = 243000 \text{ (cm}^3\text{)}$ khi và chỉ khi $x = 15 \text{ cm}$

Vậy thể tích của khối lăng trụ lục giác đều lớn nhất khi và chỉ khi $x = 15 \text{ cm}$.

Câu 49. Một khách sạn có 50 phòng. Hiện tại mỗi phòng cho thuê với giá 400 ngàn đồng một ngày thì toàn bộ phòng được thuê hết. Biết rằng cứ mỗi lần tăng giá thêm 20 ngàn đồng một phòng thì có thêm 2 phòng trống. Giám đốc phải chọn giá phòng mới là bao nhiêu ngàn để thu nhập của khách sạn trong ngày là lớn nhất?

Lời giải

Trả lời: 450

Gọi x (ngàn đồng) là giá phòng khách sạn cần đặt ra, $x > 400$ (đơn vị: ngàn đồng).

Giá chênh lệch sau khi tăng $x - 400$.

Số phòng cho thuê giảm nếu giá là x : $\frac{(x-400) \cdot 2}{20} = \frac{x-400}{10}$.

Số phòng cho thuê với giá x là $50 - \frac{x-400}{10} = 90 - \frac{x}{10}$.

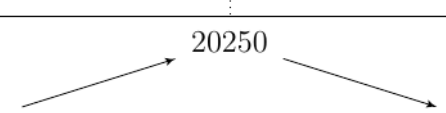
Tổng doanh thu trong ngày là:

$$f(x) = x \left(90 - \frac{x}{10} \right) = -\frac{x^2}{10} + 90x$$

$$f'(x) = -\frac{x}{5} + 90$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 450$$

Bảng biến thiên:

x	400	450	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$			

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 450$.

Vậy nếu cho thuê với giá 450 ngàn đồng thì sẽ có doanh thu cao nhất trong ngày là 20.250.000 đồng.

Câu 50. (THPT NGUYỄN VIẾT XUÂN 2025) Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung vào chiến lược kinh doanh xe X với chi phí mua vào một chiếc là 27 triệu đồng và bán ra với giá 31 triệu đồng. Với giá bán này, số lượng xe mà khách hàng đã mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang bán chạy này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán. Bộ phận nghiên cứu thị trường ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm sẽ tăng thêm 200 chiếc. Hỏi theo đó, giá bán mới là bao nhiêu triệu đồng thì lợi nhuận thu được cao nhất?

Lời giải

Đáp số: 30,5

Gọi giá bán mới là x (triệu đồng) với $27 \leq x \leq 31$

Khi đó số xe bán ra là $600 + (31 - x) \cdot 200$

Lợi nhuận thu được là: $f(x) = [600 + (31 - x) \cdot 200](x - 27) = (-200x + 6800)(x - 27)$

$$= -200x^2 + 12200x - 183600 = -200 \left(x - \frac{61}{2} \right)^2 + 2450 \leq 2450$$

Dấu "=" xảy ra khi $x - \frac{61}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 30,5$

Vậy giá bán mới là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận lớn nhất thu được là 2450 triệu đồng.

Câu 51. (TRƯỜNG THPT BẾN TRE 2025) Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Thái Lan ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 55 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100

Gọi x ($x > 0$) là số lần giảm giá vé.

Khi đó giá vé sau khi giảm là $100 - 10x$ (nghìn đồng).

Sau mỗi lần giảm giá thì có thêm $3000x$ khán giả.

Do đó tổng số khán giả đến xem là $27000 + 3000x$.

Vì sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả nên

$$27000 + 3000x \leq 55000$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{28}{3}$$

Doanh thu từ tiền bán vé là:

$$y = (27000 + 3000x)(100 - 10x) = -30000x^2 + 30000x + 2700000$$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số

$$y = -30000x^2 + 30000x + 2700000 \quad (x > 0)$$

Tập xác định $D = (0; +\infty)$.

$$v' = -60000x + 30000$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{28}{3}$
y'		+	0
y	2700000	2707500	2700000

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy ban tổ chức nên đặt giá vé là **95** nghìn đồng thì doanh thu tiền bán vé là lớn nhất.

Câu 52. (TRƯỜNG THPT BÌNH XUYỀN 2025)

Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100000 đồng mỗi

tháng thì có thêm 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu triệu đồng?

Lời giải

ĐS: 2,25.

Gọi x là giá thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x : đồng; $x \geq 2\,000\,000$ đồng).

Tăng giá 100 000 đồng thì có 2 căn hộ bị bỏ trống. Tăng giá $x - 2\,000\,000$ đồng thì số căn hộ bị bỏ trống

$$\frac{2(x - 2\,000\,000)}{100\,000} = \frac{x - 2\,000\,000}{50\,000}$$

là:

Do đó khi cho thuê với giá x đồng thì số căn hộ cho thuê là:

$$50 - \frac{x - 2\,000\,000}{50\,000} = -\frac{x}{50\,000} + 90$$

Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng).

$$F(x) = \left(50 - \frac{x - 2\,000\,000}{50\,000} \right) x = -\frac{1}{50\,000}x^2 + 90x$$

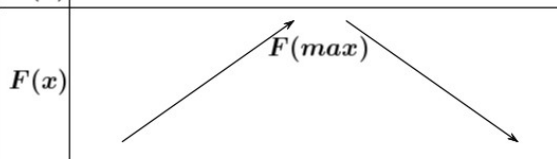
Ta có: (bảng số căn hộ cho thuê nhân với giá cho thuê mỗi căn hộ).

$$F(x) = -\frac{1}{50\,000}x^2 + 90x, \quad x \geq 2\,000\,000$$

Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của

$$F(x) = -\frac{1}{50\,000}x^2 + 90x \quad F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25\,000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2\,250\,000$$

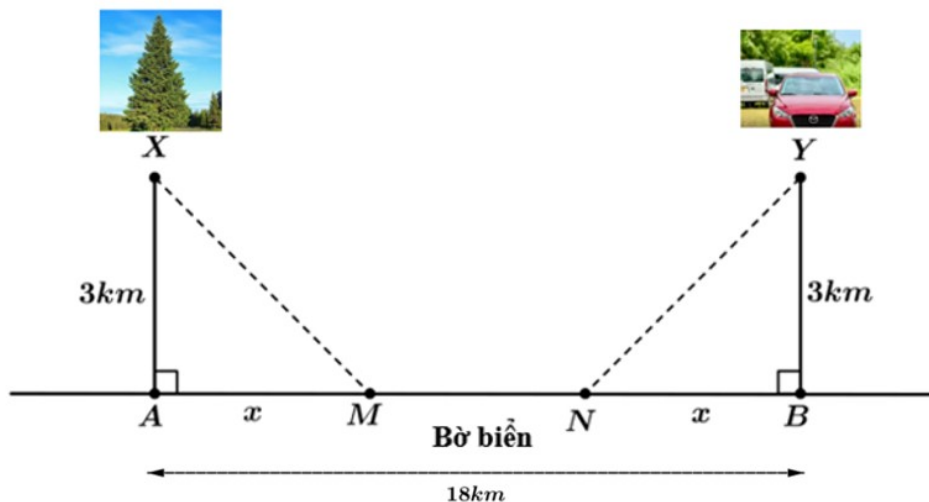
Bảng biến thiên:

x	2 000 000	2 250 000	$+\infty$
$F'(x)$	+	0	-
$F(x)$			

Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2\,250\,000$.

Vậy công ty phải cho thuê với giá 2,25 triệu đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.

Câu 53. Anh Vinh đang cắm trại dưới tán cây thông ở điểm X cách điểm A một khoảng 3 km. Điểm A nằm trên đường bờ biển (đường bờ biển là đường thẳng). Ô tô của anh Vinh đỗ ở vị trí Y cách điểm B một khoảng 3 km. Điểm B cũng thuộc đường bờ biển. Biết rằng $AB = 18$ km, $AM = NB = x$ km và $AX = BY = 3$ km (minh họa như hình vẽ).



Khi đang dựng trại tại vị trí X , anh Vinh không may bị rắn cắn, chất độc lan vào máu. Sau khi bị rắn cắn, nồng độ chất độc trong máu tăng theo thời gian được tính theo phương trình $y = 50 \log(t + 2)$. Trong đó, y là nồng độ, t là thời gian tính bằng giờ sau khi bị rắn cắn. Anh Vinh cần quay trở lại ô tô ở vị trí Y để lấy thuốc giải độc. Anh chạy từ chỗ cây thông ở điểm X ra thẳng vị trí M với vận tốc là 5 km/h và chạy trên bãi biển từ M tới điểm N với vận tốc là 13 km/h sau đó chạy thẳng đến chỗ ô tô với vận tốc 5 km/h . Tính nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi anh Vinh về đến ô tô (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 32,6

Để nồng độ chất độc trong máu thấp nhất khi thời gian di chuyển về đến ô tô thấp nhất.

Vậy nên quãng đường anh Vinh di chuyển về đến ô tô phải thấp nhất.

Theo bài ra ta có: anh Vinh sẽ đi qua các quãng đường $XM + MN + NY$.

Ta có: $XM = NY = \sqrt{9 + x^2}$; $MN = 18 - 2x$

Thời gian anh Vinh chạy đến ô tô là: $T(x) = 2 \left(\frac{\sqrt{9 + x^2}}{5} + \frac{9 - x}{13} \right)$ với $x \in (0; 9)$

Xét $T'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5}{4}$ (thỏa mãn)

Bảng biến thiên:

x	0	$\frac{5}{4}$	9
$T'(x)$	—	0	+
$T(x)$	$\frac{168}{65}$	$\frac{162}{65}$	$\frac{6\sqrt{10}}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy giá trị của $T(x)$ nhỏ nhất khi $x = \frac{5}{4}$.

$$\Rightarrow \min_{x \in (0,9)} T(x) = T\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{162}{65}$$

Vậy nồng độ chất độc trong máu thấp nhất là: $\min_{(0,+\infty)} y = 50 \log\left(\frac{162}{65} + 2\right) \approx 32,6$