

TRẮC NGHIỆM CÔNG THỨC TÍNH GÓC TRONG KHÔNG GIAN

DẠNG 1: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3)$ và $\vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5)$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 90° . **D.** 60° .

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng:
 $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta': \begin{cases} x = 2t \\ y = -2+t \\ z = 1+t \end{cases}$
 bằng:
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc giữa hai đường thẳng:
 $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ và $\Delta': \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$ bằng:
A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. **B.** $-\frac{\sqrt{6}}{18}$. **C.** $\frac{\sqrt{6}}{18}$. **D.** $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Câu 4. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng
 $\Delta_1: \begin{cases} x = -2+t \\ y = -4+2t \\ z = -1+2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2-2m \\ y = 2-2m \\ z = 3+m \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?
A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{9}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{4}{9}$.

Câu 5. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng
 $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+2t \end{cases}$.
 Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?
A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa trục Oz và đường thẳng
 $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ bằng
 (kết quả làm tròn đến độ)
A. 30° . **B.** 48° . **C.** 60° . **D.** 132° .

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng
 $\Delta: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Khi đó góc giữa đường thẳng
 Δ và trục Oy bằng
A. 60° . **B.** 30° . **C.** 45° . **D.** 90° .

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Gọi α là góc giữa d và trục Ox . Tính $\cos \alpha$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. D. $\frac{1}{3}$.

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases}$ và

$$d_2: \begin{cases} x = -2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}$$

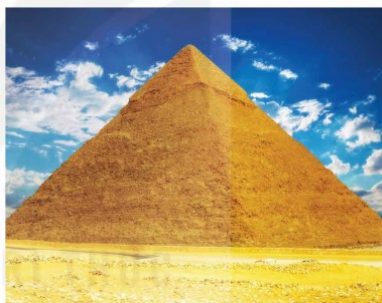
- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{4}$

$$d_2: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Câu 11. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m, các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo britannica.com) (hình vẽ). Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính góc giữa hai đường thẳng BG và SA (làm tròn tới hàng đơn vị độ).



- A. 66° . B. 69° . C. 70° . D. 71° .

DẠNG 2. TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C)$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin(\Delta, (P)) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ B.

$$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$\cos(\Delta, (P)) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

C. $\cos(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$ D.

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $(P): x - y - 2z + 4 = 0$ và mặt phẳng $(P): x - y - 2z + 4 = 0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 161° . B. 109° . C. 71° . D. 19° .

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-8}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 83° . B. 7° . C. 41° . D. 49° .

Câu 15. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng chứa Ox và mặt phẳng $(\alpha): x + y + 12 = 0$. Khi đó φ bằng:

- A. 45° . B. 30° . C. 60° . D. 90° .

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-\sqrt{2}} = \frac{z+\sqrt{2}}{1}$ và mặt phẳng (Oxz) bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(\frac{8}{3}; 0; 0\right)$, $B(0; 2; 0)$, $C\left(0; 0; \frac{8}{5}\right)$ và $\Delta: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$. Khi đó góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 18. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 5 = 0$. Hãy tính cosin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

- A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa đường thẳng d chứa trục Ox và mặt phẳng $(P): 3y - z + 5 = 0$ bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 0° . D. 30° .

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P): -x + 2y + 2z + 5 = 0$. Gọi d là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0; -1)$ cắt đường thẳng Δ và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Vector chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; 1)$. Tính tổng $a + 2b$?

- A. 8. B. 7. C. -6. D. 11.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 4x - 4y + 3z - 2 = 0$. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) , có một vector chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Khi Δ tạo với (Q) một góc lớn nhất thì sin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (Q) bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. D. $\frac{\sqrt{205}}{41}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng trong mặt phẳng (P) có hai đường thẳng d_1, d_2 cùng đi qua điểm $A(1; -1; 1)$ và cùng cách đường thẳng d một khoảng bằng 1. Tính $\sin \varphi$ với φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 .

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{3}{7}$.

DẠNG 3: TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 5 = 0$ và $(Q): 2x + y - 3z - 1 = 0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 20° . B. 22° . C. 25° . D. 27° .

Câu 24. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(\alpha): x + y - 10z + 2025 = 0$. Khi đó $\cos \varphi$ là:

- A. 0. B. $\frac{1}{\sqrt{102}}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{\sqrt{120}}$.

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oyz) và $(\alpha): y + z - 1 = 0$ bằng:

- A. 60° . B. 45° . C. 0° . D. 90° .

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và $(Q): x + y + z - 1 = 0$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 27. Khi đặt hệ tọa độ O_{xyz} vào không gian với đơn vị trên trục tính theo kilômét, người ta thấy rằng một không gian phủ sóng điện thoại có dạng một hình cầu (S) (tập hợp những điểm nằm trong và nằm trên mặt cầu tương ứng). Biết mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Khoảng cách xa nhất giữa hai vùng phủ sóng là bao nhiêu kilômét?

- A. 9. B. 3. C. 6. D. 12.

Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ bằng

- A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $a\sqrt{2}$. D. $a\sqrt{6}$.

Câu 29. Trong không gian O_{xyz} , cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 5 = 0$ và $(Q): 3x - 4y = 1$. Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng trên gần bằng số đo nào dưới đây?

- A. 71° . B. 65° . C. 109° . D. 156° .

Câu 30. Trong không gian O_{xyz} , cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 5 = 0$. Khi đó góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

- A. 60° . B. 30° . C. 45° . D. 90° .

Câu 31. Trong không gian O_{xyz} , đường băng của một sân bay thuộc mặt phẳng (Oxy) . Một máy bay sau khi chạy đà trên đường băng đó đã cất cánh tại điểm $A(1; 2; 0)$ với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian ngắn ban đầu, vector vận tốc $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$. Trong khoảng thời gian ngắn nói trên, góc cất cánh của máy bay bằng:

- A. 30° . B. 45° . C. 60° . D. 90° .

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ O_{xyz} , cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0; 1; 0)$, $B(1; 0; 0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Tính tổng $S = a + b + c$?

- A. $1 + \sqrt{2}$. B. $1 - \sqrt{2}$. C. $2 + \sqrt{2}$. D. $2 - \sqrt{2}$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = 1$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = 1$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

- A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{10}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{30}$. D. $\frac{\sqrt{10}}{30}$.

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) .
A. 30° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 0° .

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 4$. Gọi H là trung điểm của AB , $SH \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng
A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
A	C	C	D	A	B	A	B	B	A	D	B	D	B	A	B	D	C
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
C	C	D	B	B	B	D	B	C	A	A	C	A	D	A	A	B	D

DẠNG 1: TÍNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và đường thẳng d_2 lần lượt có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3)$ và $\vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5)$. Góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 là
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 90° . **D.** 60° .

Lời giải

Ta có
$$\begin{cases} \vec{u}_{d_1} = (1; -2; -3) \\ \vec{u}_{d_2} = (-4; 1; 5) \end{cases}$$

$$\cos(d_1; d_2) = \frac{|\vec{u}_{d_1} \cdot \vec{u}_{d_2}|}{|\vec{u}_{d_1}| \cdot |\vec{u}_{d_2}|} = \frac{|-4 - 2 - 15|}{\sqrt{1+4+9} \cdot \sqrt{16+1+25}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Suy ra $(d_1; d_2) = 30^\circ$

Câu 2. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai đường thẳng:
 $\Delta: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+1}{2}$ và $\Delta': \begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + t \\ z = 1 + t \end{cases}$
 bằng:
A. 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (1; -1; 2)$.

Đường thẳng Δ' có một vector chỉ phương $\vec{u}' = (2; 1; 1)$.

$$\cos(\Delta; \Delta') = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{1}{2}.$$

Nên $(\Delta; \Delta') = 60^\circ$.

Câu 3. Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc giữa hai đường thẳng: $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+3}{1}$ và $\Delta': \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-3}{1}$ bằng:

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $-\frac{\sqrt{6}}{18}$. C. $\frac{\sqrt{6}}{18}$. D. $-\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vector chỉ phương $\vec{u} = (2; -2; 1)$.

Đường thẳng Δ' có một vector chỉ phương $\vec{u}' = (1; 2; 1)$.

$$\cos(\Delta; \Delta') = \left| \cos(\vec{u}; \vec{u}') \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{u}'|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{u}'|} = \frac{|-1|}{3 \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{18}$$

Câu 4. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 2m \\ y = 2 - 2m \\ z = 3 + m \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{1}{9}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{4}{9}$.

Lời giải

Ta có đường $\Delta_1: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = -4 + 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$ có vector chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 2; 2)$, đường $\Delta_2: \begin{cases} x = 2 - 2m \\ y = 2 - 2m \\ z = 3 + m \end{cases}$ có vector

chỉ phương là $\vec{u}_2 = (-2; -2; 1)$. Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{4}{9}$.

Câu 5. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$, cho hai đường thẳng $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ và $\Delta_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$. Gọi φ là góc giữa hai đường thẳng. Tính $\cos \varphi$?

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Ta có đường $\Delta_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1 = (1; 2; 1)$, đường $\Delta_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2+t \\ z = 3+2t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$. Ta có $\cos \varphi = \frac{|\vec{u}_1, \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| |\vec{u}_2|} = \frac{5}{6}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa trục Oz và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-2}$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A.** 30° . **B.** 48° . **C.** 60° . **D.** 132° .

Lời giải

Trục Oz có vectơ chỉ phương là $\vec{j} = (0; 0; 1)$; đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (2; 1; -2)$;

$$\cos(\Delta, Oz) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{j}) \right| = \frac{|2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{2}{3}$$

Ta có:

Nên $(\Delta, Oz) \approx 48^\circ$.

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\sqrt{2}}$. Khi đó góc giữa đường thẳng Δ và trục Oy bằng

- A.** 60° . **B.** 30° . **C.** 45° . **D.** 90° .

Lời giải

$\Delta: \frac{x+1}{-5} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{\sqrt{2}}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-5; 3; \sqrt{2})$

$$\cos(\Delta, Oy) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{j}) \right| = \frac{|-5 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + \sqrt{2} \cdot 0|}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow (\Delta, Oy) = 60^\circ$$

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 1)$. Gọi α là góc giữa d và trục Ox . Tính $\cos \alpha$.

- A.** $\frac{1}{2}$. **B.** $\frac{2}{3}$. **C.** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **D.** $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Trục Ox có VTCP $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Đường thẳng d có VTCP $\vec{u} = (2; 2; 2)$.

$$\cos \alpha = \left| \cos(\vec{i}, \vec{u}) \right| = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Vậy

$$d_1 : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + t \\ z = 5 \end{cases} \quad \text{và}$$

Câu 9. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng

$$d_2 : \begin{cases} x = -2t' \\ y = -3 + t' \\ z = 1 - 2t' \end{cases}$$

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\vec{u}_1 = (-1; 1; 0)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_1 ;

$\vec{u}_2 = (-2; 1; -2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_2 .

$$\cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{|-1 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-2)|}{\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Suy ra

Vậy $(d_1, d_2) = 45^\circ$.

Câu 10. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa hai đường thẳng $d_1 : \frac{x-1}{1} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z}{4}$

$$d_2 : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = -3 \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

và

- A. 60° . B. 90° . C. 30° . D. 45° .

Lời giải

Chọn A.

Ta có $\vec{u}_1 = (1; -1; 4)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_1 ;

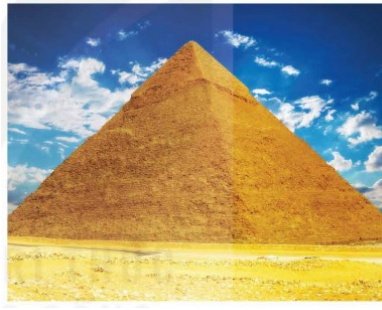
$\vec{u}_2 = (2; 0; -2)$ là vector chỉ phương của đường thẳng d_2 .

$$\cos(d_1, d_2) = \left| \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) \right| = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{18}} = \frac{1}{2}$$

Suy ra

Vậy $(d_1, d_2) = 60^\circ$.

Câu 11. Kim tự tháp Kheops ở Ai Cập có dạng hình chóp $S.ABCD$, có đáy là hình vuông với cạnh dài 230 m , các cạnh bên bằng nhau và dài 219 m (theo britannica.com) (hình vẽ). Gọi G là trọng tâm tam giác SCD . Tính góc giữa hai đường thẳng BG và SA (làm tròn tới hàng đơn vị độ).



A. 66° .

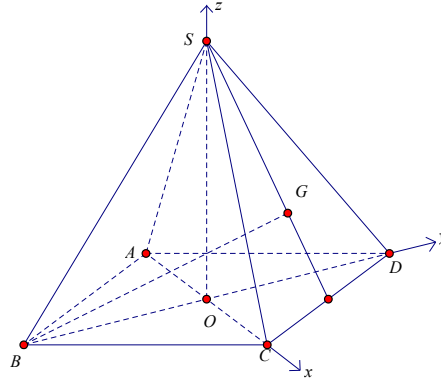
B. 69° .

C. 70° .

D. 71° .

Lời giải

Chọn D.



Gọi $O = AC \cap BD$. Do $S.ABCD$ là hình chóp đều nên ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ.

Đặt $AB = 230 = a$, $SA = 219 = b$.

Ta có $OA = OB = OC = OD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác SAO vuông tại O có $SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = \sqrt{b^2 - \frac{2a^2}{4}} = \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}$.

Do đó: $A\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $B\left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $C\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right)$, $D\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$, $S\left(0; 0; \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}\right)$.

Vì G là trọng tâm tam giác SCD nên $G\left(\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}\right)$.

Ta có $\overrightarrow{SA} = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{2}\right)$, $\overrightarrow{BG} = \left(\frac{a\sqrt{2}}{6}; \frac{2a\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{4b^2 - 2a^2}}{6}\right)$.

$$\cos(SA, BG) = \frac{|\overrightarrow{SA} \cdot \overrightarrow{BG}|}{|\overrightarrow{SA}| \cdot |\overrightarrow{BG}|} = \frac{\left| -\frac{a^2}{6} - \frac{4b^2 - 2a^2}{12} \right|}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 8a^2}}{3}} = \frac{\left| -\frac{a^2}{6} - \frac{2b^2 - a^2}{6} \right|}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 8a^2}}{3}} = \frac{\frac{b^2}{3}}{b \cdot \frac{\sqrt{b^2 + 8a^2}}{3}}$$

Suy ra

$$= \frac{b}{\sqrt{b^2 + 8a^2}} = \frac{219}{\sqrt{471161}}$$

Vậy $(SA, BG) \approx 71^\circ 23' 40''$

DẠNG 2. TÍNH GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng Δ có vector chỉ phương $\vec{u} = (a, b, c)$ và mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (A, B, C)$. Khi đó khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\sin(\Delta, (P)) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

B.

$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

C. $\cos(\Delta, (P)) = \frac{aA + bB + cC}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

D.

$\cos(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Lời giải

$\sin(\Delta, (P)) = \frac{|aA + bB + cC|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng $(P): x - y - 2z + 4 = 0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

A. 161° .

B. 109° .

C. 71° .

D. 19° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 3)$; Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (1; -1; -2)$.

$$\sin(\Delta, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|2 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{\sqrt{21}}{14}$$

Ta có:

Nên $(\Delta, (P)) \approx 19^\circ$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-8}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{2}$ và mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

A. 83° .

B. 7° .

C. 41° .

D. 49° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có vector chỉ phương là $\vec{u} = (-1; 1; 2)$; Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến là $\vec{n} = (6; 2; 3)$.

$$\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|-1.6 + 1.2 + 2.3|}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 2^2} \cdot \sqrt{6^2 + 2^2 + 3^2}} = \frac{\sqrt{6}}{21}$$

Ta có:

Nên $(\Delta, (P)) \approx 7^\circ$.

Câu 15. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng chứa Ox và mặt phẳng $(\alpha): x + y + 12 = 0$. Khi đó φ bằng:

- A.** 45° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Ta có đường thẳng chứa Ox có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = (1; 0; 0)$, mặt phẳng $(\alpha): x + y + 12 = 0$ có

vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 1; 0)$. Gọi φ là góc giữa đường và mặt thì

$$\sin \varphi = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-\sqrt{2}} = \frac{z+\sqrt{2}}{1}$ và mặt phẳng (Oxz) bằng:

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Đường thẳng Δ có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -\sqrt{2}; 1)$.

Mặt phẳng (Oxz) có một vectơ pháp tuyến $\vec{j} = (0; 1; 0)$.

$$\sin(\Delta; (\alpha)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{j}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{j}|}{|\vec{u}| |\vec{j}|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$(\Delta; (Oxz)) = 45^\circ$$

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A\left(\frac{8}{3}; 0; 0\right)$, $B(0; 2; 0)$, $C\left(0; 0; \frac{8}{5}\right)$ và $\Delta: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$. Khi đó góc giữa đường thẳng Δ và mặt phẳng (ABC) bằng

- A.** 60° . **B.** 30° . **C.** 45° . **D.** 90° .

Lời giải

Ta có $(ABC): \frac{x}{\frac{8}{3}} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\frac{8}{5}} = 1$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = \left(\frac{3}{8}; \frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right)$

$\Delta: \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = -1 - 4t \\ z = 5 - 5t \end{cases}$ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-3; -4; -5)$.

$$\sin(\Delta, (P)) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{\left| \frac{3}{8} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot (-4) + \frac{5}{8} \cdot (-5) \right|}{\sqrt{\left(\frac{3}{8}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{8}\right)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + (-5)^2}} = 1 \Rightarrow (\Delta, (P)) = 90^\circ$$

Câu 18. Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-1}{2}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 5 = 0$. Hãy tính cosin góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) .

- A. $\frac{1}{\sqrt{6}}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{\sqrt{30}}{6}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Đường thẳng d có vector chỉ phương là $\vec{u} = (2; -1; 2)$.

(P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (2; -1; -1)$.

Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng (d) và mặt phẳng (P) ($0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$), ta có:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|4 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Khi đó

Câu 19. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, góc giữa đường thẳng d chứa trục Ox và mặt phẳng $(P): 3y - z + 5 = 0$ bằng

- A. 90° . B. 60° . C. 0° . D. 30° .

Lời giải

Chọn C.

Đường thẳng d chứa trục Ox có vector chỉ phương $\vec{u} = (1; 0; 0)$; mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (0; 3; -1)$.

$$\sin \alpha = \left| \cos(\vec{u}, \vec{n}) \right| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = 0$$

Gọi α là góc tạo bởi d và (P) . Ta có, suy ra $\alpha = 0^\circ$.

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + t \\ z = -2 - t \end{cases}$$

Câu 20. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng là đường thẳng đi qua điểm $A(-1; 0; -1)$ cắt đường thẳng Δ và tạo với mặt phẳng (P) một góc nhỏ nhất. Vector chỉ phương $\vec{u}_d = (a; b; 1)$. Tính tổng $a + 2b$?

- A. 8. B. 7. C. -6. D. 11.

Lời giải

Giả sử đường thẳng d cắt đường thẳng Δ tại B , ta có: $B(1+2t; 2+t; -2-t) \in \Delta$.

Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là: $\overrightarrow{AB} = (2t+2; t+2; -t-1)$, mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (-1; 2; 2)$.

Gọi φ là góc giữa d và (P) , ta có:
$$\sin \varphi = \frac{|-2t-2+2t+4-2t-2|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} = \frac{|2t|}{3\sqrt{6t^2+14t+9}} \geq 0$$

$\Rightarrow d$ tạo với mặt phẳng (P) một góc φ nhỏ nhất khi $\varphi = 0^\circ$ hay $\sin \varphi = 0 \Rightarrow t = 0$.

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm $A(-1; 0; -1)$ và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (2; 2; -1)$
 $\Rightarrow \vec{u}_d = (-2; -2; 1)$

Vậy $a = -2, b = -2, \Rightarrow a + 2b = -6$.

Câu 21. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 1 = 0$ và mặt phẳng $(Q): 4x - 4y + 3z - 2 = 0$. Đường thẳng Δ song song với mặt phẳng (P) , có một vectơ chỉ phương $\vec{u} = (m; n; 1)$. Khi Δ tạo với (Q) một góc lớn nhất thì sin của góc tạo bởi đường thẳng Δ và mặt phẳng (Q) bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{2\sqrt{41}}{41}$. B. 1. C. $\frac{\sqrt{41}}{41}$. D. $\frac{\sqrt{205}}{41}$.

Lời giải

Ta có $\vec{n}_P = (2; -1; 2)$ và $\vec{n}_Q = (4; -4; 3)$.

Vì $\Delta // (P)$ nên $\vec{u} \perp \vec{n}_P \Rightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2$.

$$\sin(\Delta, (Q)) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}_Q|}{|\vec{u}| |\vec{n}_Q|} = \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1} \cdot \sqrt{41}} = \frac{|4m + 5|}{\sqrt{41} \sqrt{5m^2 + 8m + 5}}$$

Mặt khác:

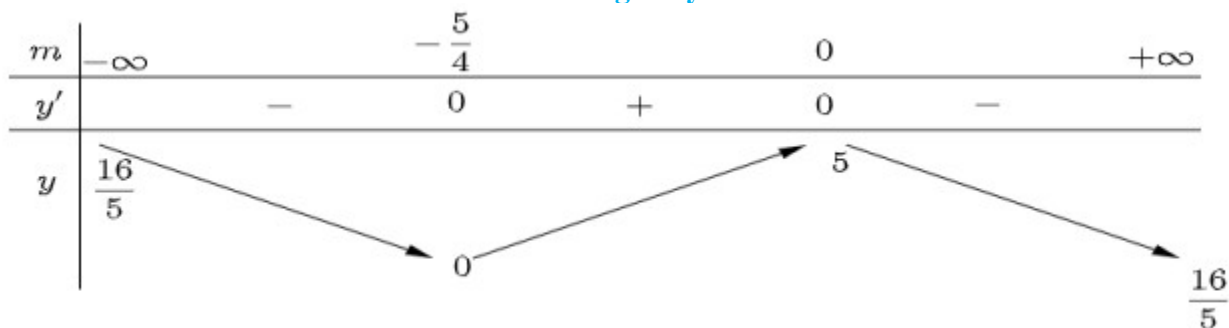
$$= \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}$$

Vì $0^\circ \leq (\Delta, (Q)) \leq 90^\circ$ nên $(\Delta, (Q))$ lớn nhất khi $\sin(\Delta, (Q))$ lớn nhất.

$$f(m) = \frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5} \Rightarrow f'(m) = \frac{-72m^2 - 90m}{(5m^2 + 8m + 5)^2}$$

Xét hàm số

BBT



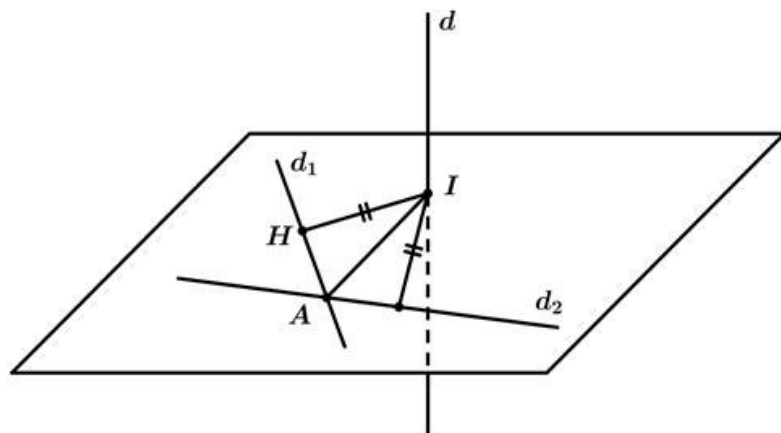
Dựa vào BBT ta có $\max_{m \in \mathbb{R}} f(m) = 5$ tại $m = 0$.

Do đó $(\Delta, (Q))$ lớn nhất khi $m = 0$. Suy ra $\sin(\Delta, (Q)) = \frac{\sqrt{205}}{41}$.

Câu 22. Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): \frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1$ và đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-2}{2}$. Biết rằng trong mặt phẳng (P) có hai đường thẳng d_1, d_2 cùng đi qua điểm $A(1; -1; 1)$ và cùng cách đường thẳng d một khoảng bằng 1. Tính $\sin \varphi$ với φ là góc giữa hai đường thẳng d_1, d_2 .

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3}{7}$.

Lời giải



Theo bài ra ta có: $(P) \perp d$. Và $(P) \cap d = I(1; 0; 0) \Rightarrow AI = \sqrt{2}$.

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d_1 ta có $HI = 1$

$$\sin \hat{A} = \frac{HI}{AI} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \hat{A} = 45^\circ \Rightarrow 2\hat{A} = 90^\circ$$

Trong tam giác vuông HAI ta có

$$\Rightarrow \varphi = 180^\circ - 2\hat{A} = 90^\circ$$

Vậy ta có $\sin \varphi = 1$.

DẠNG 3: TÍNH GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 3z + 5 = 0$ và $(Q): 2x + y - 3z - 1 = 0$ bằng (kết quả làm tròn đến độ)

- A. 20° . B. 22° . C. 25° . D. 27° .

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 2; -3)$ và $\vec{n}_Q = (2; 1; -3)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n}_P, \vec{n}_Q) \right| = \frac{|1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-3)|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-3)^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2}} = \frac{13}{14}$$

Ta có:

Nên $((P), (Q)) \approx 22^\circ$.

Câu 24. Trong hệ tọa độ $(Oxyz)$. Gọi φ là góc giữa mặt phẳng (Oxz) và mặt phẳng $(\alpha): x + y - 10z + 2025 = 0$. Khi đó $\cos \varphi$ là:

- A. 0. B. $\frac{1}{\sqrt{102}}$. C. $\frac{1}{10}$. D. $\frac{1}{\sqrt{120}}$.

Lời giải

Ta có mặt phẳng (Oxz) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (0; 1; 0)$, mặt phẳng $(\alpha): x + y - 10z + 2025 = 0$ có

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{102}}$$

vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (1; 1; -10)$. Gọi φ là góc giữa hai mặt phẳng thì

Câu 25. Trong không gian $Oxyz$, góc giữa hai mặt phẳng (Oyz) và $(\alpha): y + z - 1 = 0$ bằng:

- A. 60° . B. 45° . C. 0° . D. 90° .

Lời giải

Mặt phẳng (Oyz) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 0; 0)$.

Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2 = (0; 1; 1)$.

$$\cos((Oyz); (\alpha)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = 0$$

$$((Oyz); (\alpha)) = 90^\circ$$

Câu 26. Trong không gian $Oxyz$, cosin của góc giữa hai mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 1 = 0$ và $(Q): x + y + z - 1 = 0$ bằng

- A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{9}$. C. $-\frac{\sqrt{3}}{9}$. D. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Hai mặt phẳng $(P), (Q)$ có các vectơ pháp tuyến là $\vec{n}_P = (1; 2; -2)$ và $\vec{n}_Q = (1; 1; 1)$.

$$\cos((P), (Q)) = \left| \cos(\vec{n_P}, \vec{n_Q}) \right| = \frac{|1.1 + 2.1 - 2.1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

Ta có:

Câu 27. Khi đặt hệ tọa độ $Oxyz$ vào không gian với đơn vị trên trục tính theo kilômét, người ta thấy rằng một không gian phủ sóng điện thoại có dạng một hình cầu (S) (tập hợp những điểm nằm trong và nằm trên mặt cầu tương ứng). Biết mặt cầu (S) có phương trình: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0$. Khoảng cách xa nhất giữa hai vùng phủ sóng là bao nhiêu kilômét?

A. 9.

B. 3.

C. 6.

D. 12.

Lời giải

$$\text{Ta có: } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z + 5 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 3^2$$

Khoảng cách xa nhất giữa hai điểm thuộc vùng phủ sóng là đường kính của mặt cầu, tức là $6km$

Câu 28. Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Khoảng cách giữa hai mặt phẳng $(AB'D')$ và $(C'BD)$ bằng

A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

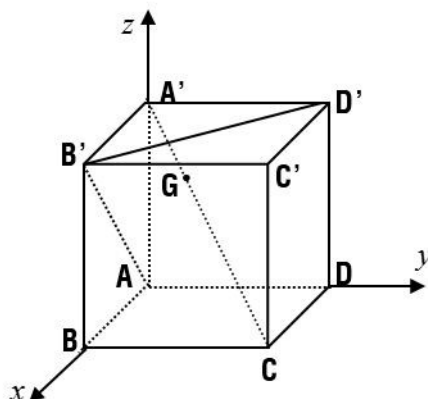
B. $a\sqrt{3}$.

C. $a\sqrt{2}$.

D. $a\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc $Oxyz$ như sau: $O \equiv A(0;0;0)$; $A'(0;0;a)$
 $B(a;0;0)$; $B'(a;0;a)$; $C(a;a;0)$; $C'(a;a;a)$; $D(0;a;0)$; $D'(0;a;a)$.



Ta có $(AB'D') \parallel (C'BD)$

Véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng $(C'BD)$ là $\vec{n_2} = [\vec{C'B}, \vec{C'D}] = (-a^2; -a^2; a^2)$ hay $\vec{n_2} = (1; 1; -1)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(C'BD)$ là $x + y - z - a = 0$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng $(AB'D')$ là $x + y - z = 0$.

$$\Rightarrow d((AB'D'), (C'BD)) = d(B, (AB'D')) = \frac{|a + 0 - 0|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

Câu 29. Trong không gian $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): x + 2y + 2z - 5 = 0$ và $(Q): 3x - 4y = 1$. Khi đó số đo góc giữa hai mặt phẳng trên gần bằng số đo nào dưới đây?

A. 71° .

B. 65° .

C. 109° .

D. 156° .

Lời giải

$(P): x + 2y + 2z - 5 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_1 = (1; 2; 2)$.

$(Q): 3x - 4y = 1$ có vector pháp tuyến $\vec{n}_2 = (3; -4; 0)$.

$$\cos((P), (Q)) = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) + 2 \cdot 0|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{1}{3} \Rightarrow ((P), (Q)) \approx 71^\circ$$

Câu 30. Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - 2y + 5 = 0$. Khi đó góc giữa đường thẳng d và mặt phẳng (P) bằng

A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải

$d: \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = -2 + t \\ z = 1 \end{cases}$ có vector chỉ phương $\vec{u} = (5; 1; 0)$.

$(P): 3x - 2y + 5 = 0$ có vector pháp tuyến $\vec{n} = (3; -2; 0)$.

$$\sin(d, (P)) = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|5 \cdot 3 + 1 \cdot (-2) + 0|}{\sqrt{5^2 + 1^2 + 0^2} \cdot \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d, (P)) = 45^\circ$$

Câu 31. Trong không gian $Oxyz$, đường băng của một sân bay thuộc mặt phẳng (Oxy) . Một máy bay sau khi chạy đà trên đường băng đó đã cất cánh tại điểm $A(1; 2; 0)$ với vận tốc không đổi trong khoảng thời gian ngắn ban đầu, vector vận tốc $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$. Trong khoảng thời gian ngắn nói trên, góc cất cánh của máy bay bằng:

A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải

Trong khoảng thời gian ngắn đó, máy bay chuyển động trên đường thẳng Δ đi qua A nhận $\vec{v} = (0; \sqrt{3}; 1)$ làm vector chỉ phương.

Mặt phẳng (Oxy) có một vector pháp tuyến là $\vec{k} = (0; 0; 1)$.

$$\sin(\Delta, (Oxy)) = |\cos(\vec{v}, \vec{k})| = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{k}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{k}|} = \frac{1}{2}$$

Nên $(\Delta, (Oxy)) = 30^\circ$.

Câu 32. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) có phương trình: $ax + by + cz - 1 = 0$ với $c < 0$ đi qua 2 điểm $A(0;1;0)$, $B(1;0;0)$ và tạo với (Oyz) một góc 60° . Tính tổng $S = a + b + c$?
A. $1 + \sqrt{2}$. **B.** $1 - \sqrt{2}$. **C.** $2 + \sqrt{2}$. **D.** $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Mặt phẳng (P) đi qua hai điểm A , B nên $\begin{cases} b - 1 = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$.

Mặt phẳng (P) có vector pháp tuyến $\vec{n} = (a; b; c)$. Mặt (Oyz) có vector pháp tuyến $\vec{i} = (1; 0; 0)$.

Gọi α là góc tạo bởi (P) và (Oyz) suy ra $\alpha = 60^\circ$.

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{i}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{i}|} \Leftrightarrow \frac{|a|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \sqrt{1}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 2|a|$$

Ta có: (*)

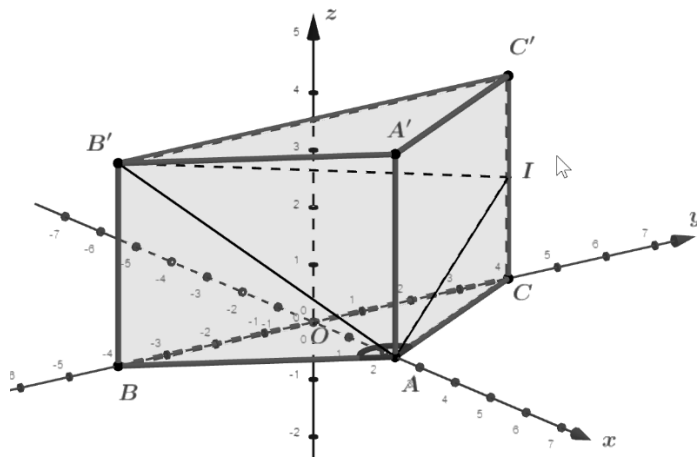
Thay $a = b = 1$ vào phương trình (*) ta được: $\sqrt{2 + c^2} = 2 \Rightarrow c = -\sqrt{2}$.

Khi đó $a + b + c = 2 - \sqrt{2}$.

Câu 33. Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác cân với $AB = AC = 1$ và góc $\widehat{BAC} = 120^\circ$ và cạnh bên $BB' = 1$. Gọi I là trung điểm của CC' . Tính cosin góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(AB'I)$.

A. $\frac{\sqrt{30}}{10}$. **B.** $\frac{\sqrt{3}}{10}$. **C.** $\frac{\sqrt{30}}{30}$. **D.** $\frac{\sqrt{10}}{30}$.

Lời giải



• Gọi O là trung điểm của BC . Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ.

Ta có: $OB = AB \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $OA = AB \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$.

• Suy ra $A(0;0;0)$, $B(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0; 0)$, $C(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; 0)$, $I(0; \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2})$, $B'(0; 0; 1)$.

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, n_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ta có:

$$\cos a = \frac{|n_1 \cdot n_2|}{|n_1| \cdot |n_2|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{30}}{10}$$

• Gọi a là góc giữa (ABC) và $(AB\phi)$. Suy ra:

Câu 34. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai mặt phẳng $(P): 2x - y - z - 3 = 0$ và $(Q): x - z - 2 = 0$. Góc giữa hai mặt phẳng (P) và (Q) bằng

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Ta có $(P): 2x - y - z - 3 = 0 \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_1 = (2; -1; -1)$.

$(Q): x - z - 2 = 0 \Rightarrow \text{VTPT } \vec{n}_2 = (1; 0; -1)$.

$$\cos((P), (Q)) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot (-1)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Khi đó

Do đó $((P), (Q)) = 30^\circ$.

Câu 35. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, tính góc giữa mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ và mặt phẳng (Oxy) .

- A.** 30° . **B.** 90° . **C.** 60° . **D.** 0° .

Lời giải

Chọn B.

Mặt phẳng $(P): 2x - 3y - 4 = 0$ có vector pháp tuyến là $\vec{n}_1 = (2; -3; 0)$.

Mặt phẳng (Oxy) có phương trình $z = 0$ nên có vector pháp tuyến là $\vec{n}_2 = (0; 0; 1)$.

$$\cos((P), (Oxy)) = \left| \cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2) \right| = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = 0$$

Do đó,

suy ra $((P), (Oxy)) = 90^\circ$.

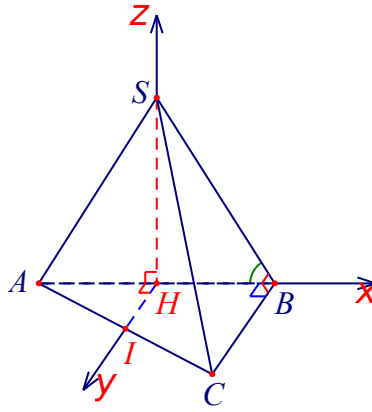
Vậy góc giữa mặt phẳng (P) và mặt phẳng (Oxy) bằng 90° .

Câu 36. Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B có $AB = BC = 4$. Gọi H là trung điểm của AB , $SH \perp (ABC)$. Mặt phẳng (SBC) tạo với mặt đáy một góc 60° . Côsin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng

- A.** $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{\sqrt{5}}{4}$. **C.** $\frac{\sqrt{10}}{5}$. **D.** $\frac{1}{\sqrt{7}}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\begin{cases} AB \perp BC \\ SH \perp BC \Rightarrow BC \perp (SAB) \end{cases}$.

Vì $\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SAB) \perp BC \\ (SAB) \cap (SBC) = SB \\ (SAB) \cap (ABC) = AB \end{cases}$ nên $((SBC), (ABC)) = (SB, AB) = \angle SBA = 60^\circ$.

Suy ra $SH = BH \tan 60^\circ = 2\sqrt{3}$.

Chọn hệ tọa độ $Hxyz$ như hình vẽ.

Ta có $H(0; 0; 0)$, $A(-2; 0; 0)$, $B(2; 0; 0)$, $C(2; 4; 0)$, $S(0; 0; 2\sqrt{3})$, $I(0; 2; 0)$ với I là trung điểm của AC .

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $z = 0$.

Mặt phẳng (SAC) cắt ba trục Hx , Hy , Hx lần lượt tại các điểm $A(-2; 0; 0)$, $I(0; 2; 0)$,

$S(0; 0; 2\sqrt{3})$ nên có phương trình: $\frac{x}{-2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2\sqrt{3}} = 1 \Leftrightarrow -3x + 3y + \sqrt{3}z - 6 = 0$.

Gọi φ là góc giữa (SAC) và (ABC) , ta có $\cos \varphi = \frac{|1 \cdot \sqrt{3}|}{1 \cdot \sqrt{9 + 9 + 3}} = \frac{1}{\sqrt{7}}$.

Vậy cosin góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và (ABC) bằng $\frac{1}{\sqrt{7}}$.