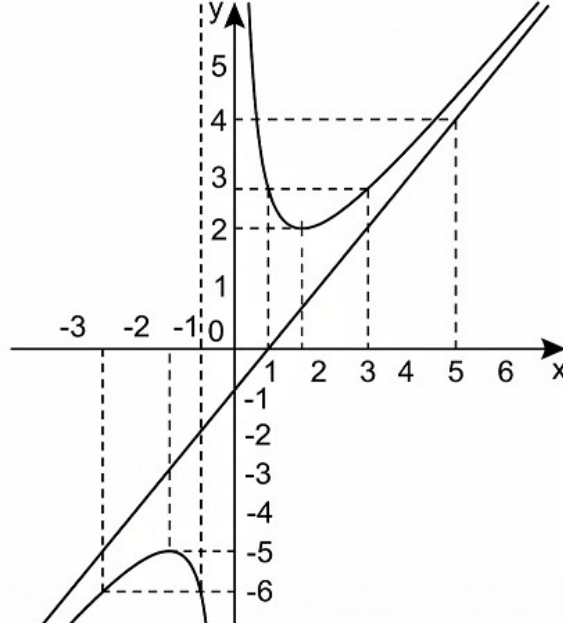


SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO HÀ NỘI
TRƯỜNG THPT PHAN BỘI CHÂU
(Đề thi có 06 trang)

ĐỀ THI HỌC GIỮA HỌC KỲ I
NĂM HỌC 2026-2027
MÔN: TOÁN 12
Thời gian làm bài: 90 phút
(không kể thời gian phát đề)
MÃ ĐỀ: 1108

Phần I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. (3 điểm) Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12.
Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Đường cong dưới đây là đồ thị của hàm số nào



A. $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

B. $y = \frac{2x + 3}{x - 1}$

C. $y = \frac{x^2 - x + 3}{x - 1}$

D.

$y = -x^3 + x^2 - 2x + 1$

Câu 2. Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của đồ thị hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$ là

A. $y = 2x - 3$

B. $y = -2x + 3$

C. $y = 2x + 3$

D. $y = x - 1$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên trên nửa khoảng $[-5; 7)$ như sau:

x	-5	1	7
y'	-	0	+
y	6	2	9

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

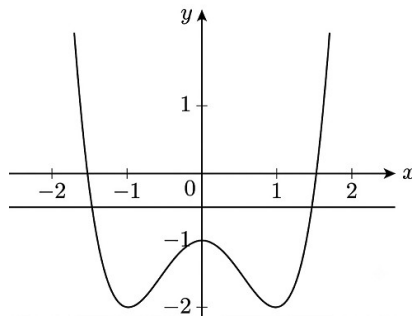
A. $\min_{[-5; 7)} f(x) = 6$

B. $\max_{[-5; 7)} f(x) = 9$

C. $\min_{[-5; 7)} f(x) = 2$

D. $\max_{[-5; 7)} f(x) = 6$

Câu 4. Cho hàm số bậc bốn $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình bên.



Số nghiệm của phương trình $f(x) = -\frac{1}{2}$ là

- A. 3. B. 2. C. $x = 1$. D. 4.

Câu 5. Giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = -x^3 + 3x$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- A. 0. B. -2. C. 4. D. 2.

Câu 6. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
y'	$-$	0	$+$	0	$+$
y	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-2; 0)$. B. $(-\infty; -2)$. C. $(0; +\infty)$. D. $(-1; 1)$.

Câu 7. Số đường tiệm cận của đồ thị hàm số $y = \frac{2x-1}{x+1}$ là

- A. 1. B. 3. C. 2. D. 4.

Câu 8. Tọa độ tâm đối xứng I của đồ thị hàm số $y = \frac{3x-1}{2x+3}$ là

- A. $\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$. B. $\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{2}\right)$. C. $(1; 3)$. D. $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

Câu 9. Hàm số $y = x + \frac{4}{x}$ nghịch biến trên khoảng

- A. $(-2; 2)$. B. $(-2; 0)$. C. $(-\infty; -2)$. D. $(2; +\infty)$.

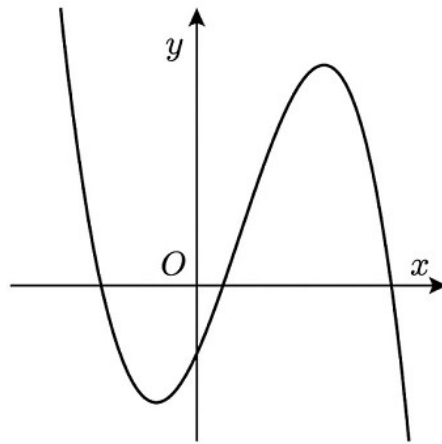
Câu 10. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như sau

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	-2	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. -2. B. -1. C. 1. D. 2.

Câu 11. Cho hàm số $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ có đồ thị như hình vẽ bên



Mệnh đề nào sau đây đúng

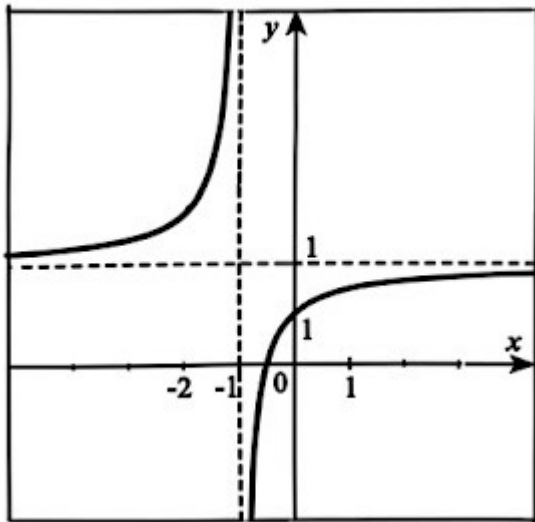
A. $a > 0; b < 0; c < 0; d > 0$

C. $a < 0; b < 0; c > 0; d < 0$

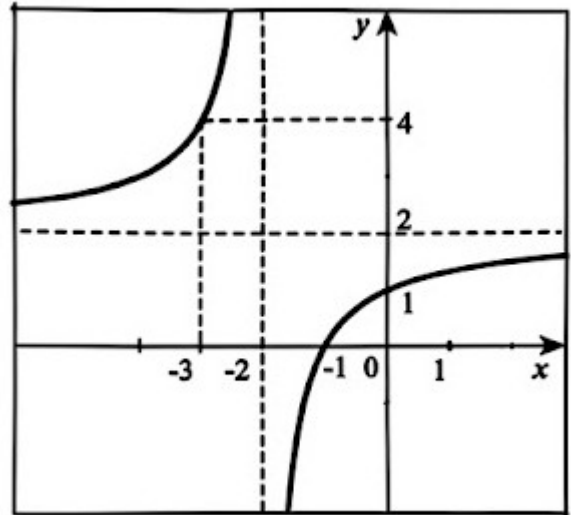
B. $a < 0; b > 0; c < 0; d < 0$

D. $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$

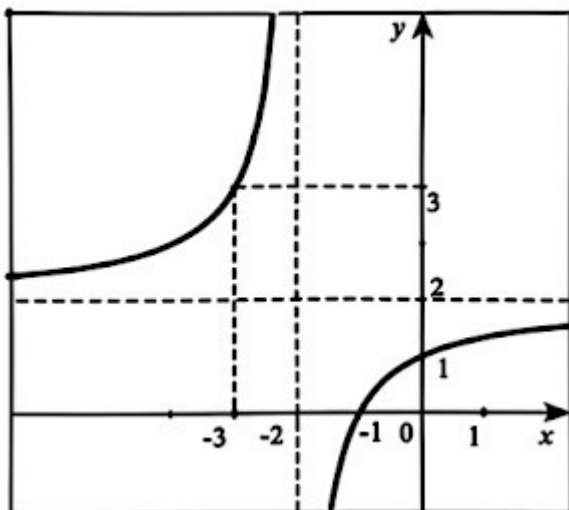
Câu 12. Hàm số $y = \frac{2+2x}{2+x}$ có đồ thị là hình vẽ nào sau đây? Hãy chọn câu trả lời đúng.



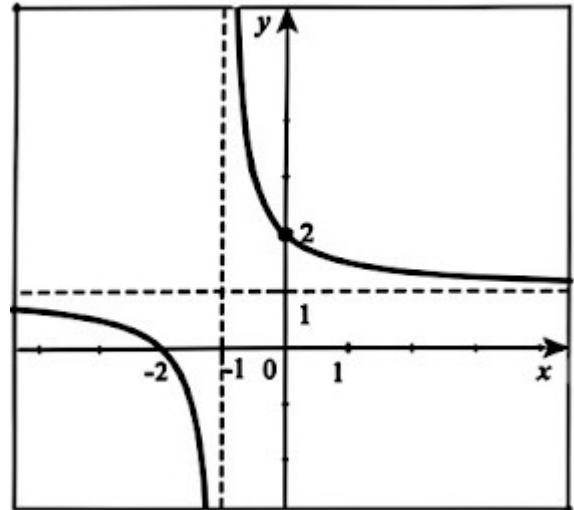
A.



B.



C.



D.

Phần II. Câu trắc nghiệm đúng sai. (4 điểm) Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Một công ty có sản xuất một loại sản phẩm với chi phí để sản xuất một loại sản phẩm là 600 nghìn đồng và bán ra mỗi sản phẩm là 900 nghìn đồng. Biết rằng số lượng sản phẩm bán ra tăng theo số tiền chi cho quảng cáo là $n(x) = a + b \cdot \ln(1+x)$ (sản phẩm), trong đó x là số tiền chi cho quảng cáo tính

theo đơn vị triệu đồng. Khi không chi cho quảng cáo thì sẽ bán được 400 sản phẩm, khi chi cho quảng cáo $(e^3 - 1)$ triệu đồng thì bán được 750 sản phẩm. Số tiền quảng cáo luôn đảm bảo số lượng sản phẩm bán được là một số nguyên

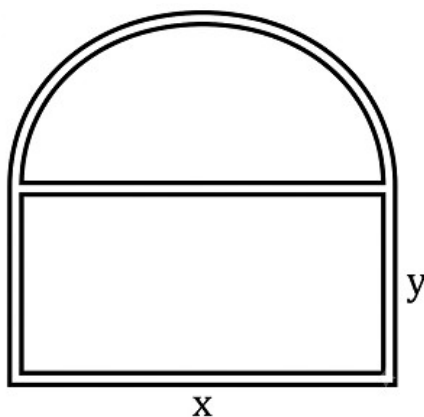
a) Lợi nhuận lớn nhất là 210 triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

b) Lợi nhuận thu được là $120 + 50\ln(1+x) - x$ (triệu đồng)

c) $a + 6b = 1100$

d) Lợi nhuận thu được lớn nhất khi ta sử dụng số tiền cho quảng cáo là 34 triệu đồng.

Câu 2. Để làm một cửa sổ dạng một hình bán nguyệt và một hình chữ nhật ghép lại như hình vẽ bên dưới, người ta dùng 8 m dây thép để làm các đường viền. Gọi x, y là độ dài cạnh của khung hình chữ nhật.



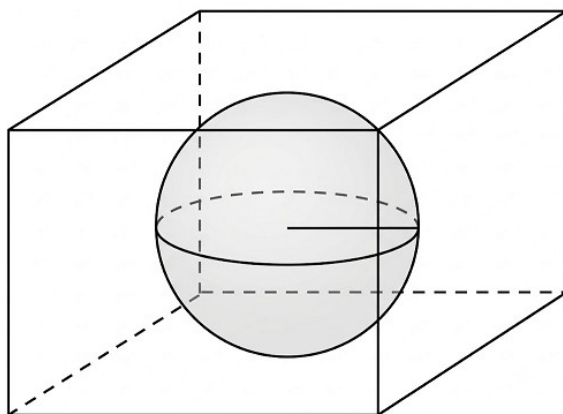
a) Giá trị của y tính theo x là $4 - \frac{x(4+\pi)}{4}$.

b) Khi diện tích của cửa sổ lớn nhất thì $y = \frac{16}{8+\pi}$.

c) Diện tích của cửa sổ là $S = 4x - x^2$.

d) Chiều dài dây để uốn ra hình bán nguyệt là $\frac{\pi x}{2}$.

Câu 3. Một cái bình có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh 50 (cm), cạnh bên bằng 80 (cm) và bên trong đặt một quả cầu sắt có bán kính bằng 20 (cm). Ban đầu bình không chứa nước. Ta tiến hành dùng một vòi nước cho chảy vào bình với lưu lượng không đổi bằng x (cm³/phút). Biết rằng sau khoảng thời gian 120 phút thì nước trong bình đầy. Chọn gốc thời gian là lúc bắt đầu cho nước chảy vào bình.



a) Thời gian để nước chảy vào bình đủ để ngập hết quả cầu là 48 phút.

- b) Sau 24 phút đầu tiên thì mực nước trong bình có chiều cao là 20 (cm) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- c) $x = 1387$ (cm³/phút) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).
- d) Thể tích quả cầu sắt là 33150 cm³ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

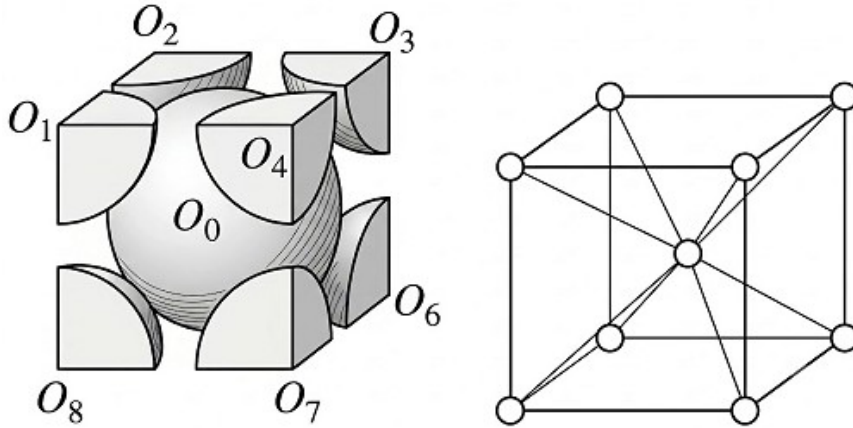
Câu 4. Cho hàm số $y = \frac{x^2 - x + 1}{-x + 1}$

- a) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số là $I(1; -1)$.
- b) Hàm số đồng biến trên khoảng $(0; 2)$.
- c) Đồ thị hàm số có điểm cực tiểu là $A(0; 1)$.
- d) Giá trị lớn nhất của hàm số trên khoảng $(1; +\infty)$ bằng -3 .

Phần III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. (3 điểm) Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

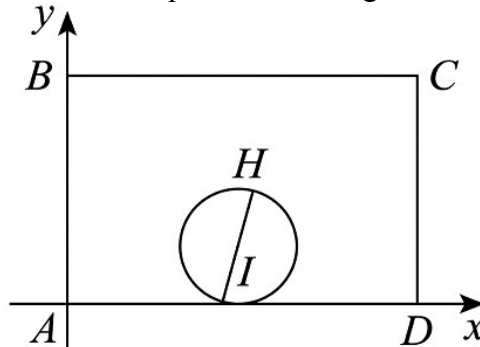
Câu 1. Minh họa hình vẽ bên, ở bên trong hình lập phương cạnh 1, có 8 phần hình cầu

$O_i, (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$ có tâm là các đỉnh của hình lập phương và có bán kính bằng nhau. Có thêm một hình cầu O_0 có tâm là tâm của hình lập phương. Biết O_0 tiếp xúc với mỗi $O_i, (i = 1, 2, 3, \dots, 8)$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của tổng thể tích 9 phần nói trên bằng bao nhiêu? (không làm tròn các kết quả trung gian, chỉ làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 2. Biết giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x) = 2\cos^3 x - \cos 2x$ trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$ là $\frac{a}{b}$ với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Khi đó tích $P = a.b$ bằng bao nhiêu?

Câu 3. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có một cạnh nằm trên trục hoành và hai đỉnh $A(0; 0), C(6; 4)$. Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AC . Đường tròn (C) có tâm $I(3; 1)$ và đi qua H . Người ta muốn thiết kế một dải LED bắt đầu từ điểm A và kết thúc tại C . Dải LED có hình dạng một phần của đồ thị hàm bậc ba $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Biết dải LED tiếp xúc với đường tròn (C) tại H , tính $27a + 3b + c + 9d$.



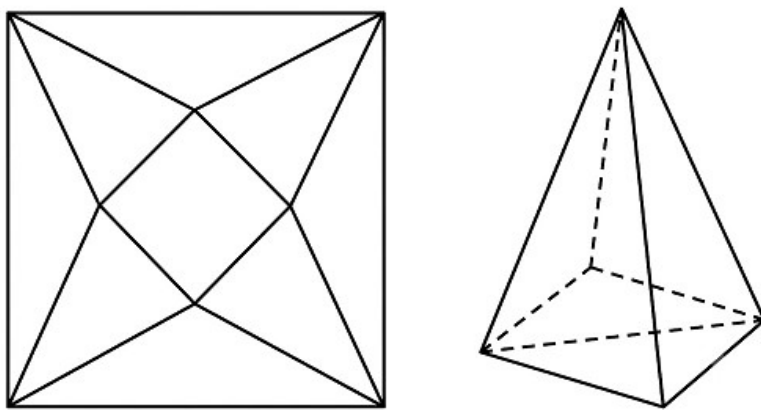
Câu 4. Một con cá bơi ngược dòng nước với khoảng cách là 300 km. Vận tốc dòng nước là 6 (km/h). Nếu vận tốc bơi của cá khi nước đứng yên là v (km/h) thì năng lượng tiêu hao của cá trong t giờ được cho bởi công thức $E(v) = cv^3t$ (trong đó c là hằng số dương, E được tính bằng đơn vị Jun). Cá bơi ngược dòng quãng đường 300 km trên trong khoảng thời gian t với vận tốc bằng bao nhiêu để năng lượng tiêu hao là thấp nhất?

$$y = \frac{3x^2 - x + 5}{x - 1} \quad \text{với } x > 1 \text{ (đơn vị km)}.$$

Câu 5. Một vệ tinh rời quỹ đạo Trái Đất theo đường cong $y = \frac{3x^2 - x + 5}{x - 1}$ với $x > 1$ (đơn vị km). Có 2 chùm tia laser tham chiếu được phóng dọc theo hai đường tiệm cận của quỹ đạo này. Các kỹ sư nhận thấy, cho dù vệ tinh M bay đến đâu trên quỹ đạo, tích khoảng cách từ M đến hai chùm tia laser luôn là

một hằng số an toàn C . Tính giá trị của $\frac{10}{7}C^2$?

Câu 6. Từ một tấm bìa mỏng hình vuông cạnh 6 dm, cắt bỏ bốn tam giác cân bằng nhau có cạnh đáy là cạnh của hình vuông ban đầu và đỉnh là đỉnh của một hình vuông nhỏ phía trong rồi gấp lên, ghép lại tạo thành một khối chóp tứ giác đều như hình sau:



Thể tích của khối chóp có giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu decimet khối (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục)

— HẾT —

ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI THAM KHẢO

BẢNG ĐÁP ÁN

Phần I. Trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	$\frac{1}{1}$	12
Đáp án	A	A	C	B	D	B	C	A	B	A	D	B

Phần II. Trắc nghiệm đúng/sai

Câu	a	b	c	d
1	Đúng	Sai	Đúng	Sai*
2	Đúng	Đúng	Sai	Đúng

Câu	a	b	c	d
3	Đúng	Đúng	Đúng	Sai
4	Đúng	Sai	Đúng	Đúng

Phần III. Trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp số	0,68	513	2	9	7	7,3

PHẦN I. CÂU TRẮC NGHIỆM NHIỀU PHƯƠNG ÁN LỰA CHỌN

Câu 1

Xét phương án A:

$$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = x - 2 + \frac{4}{x - 1}.$$

•

Suy ra đồ thị có tiệm cận đứng $x = 1$ và tiệm cận xiên $y = x - 2$, đúng với hình vẽ.

Ta có

$$y' = 1 - \frac{4}{(x - 1)^2} = \frac{(x - 3)(x + 1)}{(x - 1)^2}.$$

•

Do đó các điểm cực trị có hoành độ $x = -1$ và $x = 3$. Khi đó $y(-1) = -5, y(3) = 3$.

Các điểm cực trị $(-1; -5)$ và $(3; 3)$ cũng khớp với đồ thị đã cho.

Chọn A.

Câu 2

$$y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2} = x - 1 + \frac{4}{x - 2}.$$

Cho

$$y' = 1 - \frac{4}{(x - 2)^2} = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 = 4.$$

Ta có

Suy ra $x = 0$ hoặc $x = 4$.

Hai điểm cực trị là $A(0; -3), B(4; 5)$.

Đường thẳng qua A, B có hệ số góc $k = \frac{5 - (-3)}{4 - 0} = 2$.

Vì đi qua $A(0; -3)$ nên phương trình là $y = 2x - 3$.

Chọn A.

Câu 3

Từ bảng biến thiên, trên nửa khoảng $[-5; 7)$ hàm số giảm từ 6 xuống 2 tại $x = 1$, sau đó tăng và tiến tới 9 khi $x \rightarrow 7^-$. Vì 7 không thuộc miền xét nên giá trị 9 không đạt được.

Do đó $\min_{x \in [-5; 7)} f(x) = 2$.

Chọn C.

Câu 4

Từ đồ thị, hai điểm cực tiểu có tung độ khoảng -2 , còn điểm cực đại ở giữa có tung độ khoảng -1 .

Đường thẳng

$$y = -\frac{1}{2}$$

•

nằm phía trên điểm cực đại ở giữa, nên chỉ cắt hai nhánh ngoài của đồ thị. Vì vậy phương trình có đúng 2 nghiệm.

Chọn B.

Câu 5

Xét $f(x) = -x^3 + 3x, x \in [0; 2]$.

Ta có $f'(x) = -3x^2 + 3 = 3(1 - x^2)$.

Trong đoạn $[0; 2]$, điểm tới hạn là $x = 1$.

Tính $f(0) = 0, f(1) = 2, f(2) = -2$.

Vậy giá trị lớn nhất là $\max_{[0; 2]} f(x) = 2$.

Chọn D.

Câu 6

Từ bảng biến thiên, dấu của đạo hàm là âm trên các khoảng $(-\infty; -2), (0; 2)$.

Trong các phương án chỉ có $(-\infty; -2)$ phù hợp.

Chọn B.

Câu 7

Với $y = \frac{2x-1}{x+1},$

ta có tiệm cận đứng $x = -1$ và tiệm cận ngang $y = 2.$

Vậy đồ thị có 2 đường tiệm cận.

Chọn C.

Câu 8

Với $y = \frac{3x-1}{2x+3},$ tiệm cận đứng là $x = -\frac{3}{2},$

và tiệm cận ngang là $y = \frac{3}{2}.$

Tâm đối xứng của đồ thị là giao điểm hai tiệm cận: $I\left(-\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$

Chọn A.

Câu 9

Cho $y = x + \frac{4}{x}, x \neq 0.$

Ta có $y' = 1 - \frac{4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}.$

Suy ra $y' < 0 \Leftrightarrow 0 < x^2 < 4.$

Suy ra $-2 < x < 0$ hoặc $0 < x < 2.$

Trong các phương án, khoảng nghịch biến phù hợp là $(-2; 0).$

Chọn B.

Câu 10

Từ bảng biến thiên, tại $x = 2$ đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương, nên $x = 2$ là điểm cực tiểu và

$f(2) = -2.$

•

Giá trị cực tiểu của hàm số bằng -2 .

Chọn A.

Câu 11

Với hàm bậc ba

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d,$$

•

quan sát đồ thị:

- Nhánh trái đi lên và nhánh phải đi xuống nên $a < 0$.
- Giao điểm với trục tung nằm dưới trục hoành nên $d = f(0) < 0$.
- Tại $x = 0$ đồ thị đang đi lên nên $f'(0) = c > 0$.
- Hai hoành độ cực trị gồm một số âm có độ lớn nhỏ hơn hoành độ cực trị dương, nên tổng hai nghiệm của $f'(x) = 0$ dương. Mà $x_1 + x_2 = -\frac{2b}{3a} > 0$, với $a < 0$, suy ra $b > 0$.

Vậy $a < 0; b > 0; c > 0; d < 0$

Chọn D.

Câu 12

Ta biến đổi $y = \frac{2+2x}{2+x} = 2 - \frac{2}{x+2}.$

Suy ra:

- Tiệm cận đứng: $x = -2$.
- Tiệm cận ngang: $y = 2$.
- $y(-3) = 4$.
-

• Đồ thị cắt trục hoành tại $x = -1$.

• Đồ thị cắt trục tung tại $y = 1$.

Hình B thỏa tất cả các đặc điểm trên.

Chọn B.

PHẦN II. CÂU TRẮC NGHIỆM ĐÚNG/SAI

Câu 1

Số sản phẩm bán được là $n(x) = a + b \ln(1+x).$

Khi không quảng cáo, $x = 0$ và bán được 400 sản phẩm: $a = 400$.

Khi chi $x = e^3 - 1$

triệu đồng thì bán được 750 sản phẩm: $400 + b \ln(e^3) = 750$

$$400 + 3b = 750 \Rightarrow b = \frac{350}{3}.$$

•

Lãi trên mỗi sản phẩm là $900 - 600 = 300$ nghìn đồng, tức là $0,3$ triệu đồng. Do đó lợi nhuận là

$$L(x) = 0,3n(x) - x$$

•

$$L(x) = 120 + 35 \ln(1+x) - x.$$

•

a) Lợi nhuận lớn nhất là 210 triệu đồng

Nếu trước hết xét biến liên tục:

$$L'(x) = \frac{35}{1+x} - 1.$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 34.$$

•

Giá trị cực đại liên tục là

$$L(34) = 86 + 35 \ln 35 \approx 210,437.$$

•

Làm tròn đến hàng đơn vị được 210 triệu đồng. Khi thêm điều kiện số sản phẩm phải nguyên, giá trị tối ưu rời rạc vẫn xấp xỉ $210,437$ triệu đồng và cũng làm tròn thành 210 triệu đồng.

Kết luận: Đúng.

b) Lợi nhuận là $120 + 50 \ln(1+x) - x$

Công thức đúng là

$$L(x) = 120 + 35 \ln(1+x) - x.$$

•

Kết luận: Sai.

c) $a + 6b = 1100$

Ta có

$$a + 6b = 400 + 6 \cdot \frac{350}{3} = 1100.$$

•

Kết luận: Đúng.

d) Lợi nhuận lớn nhất khi chi 34 triệu đồng quảng cáo

Điều kiện đề bài yêu cầu số sản phẩm bán được là số nguyên. Tại $x = 34$,

$$n(34) = 400 + \frac{350}{3} \ln 35 \approx 814,791,$$

•

không phải số nguyên, nên $x = 34$ không phải một phương án hợp lệ theo điều kiện đã nêu.

Xét số sản phẩm nguyên gần điểm tối ưu, ta được giá trị tốt nhất tại $n = 815$. Khi đó

$$x = e^{\frac{3(815-400)}{350}} - 1 \approx 34,063$$

•

triệu đồng.

Vì vậy theo đúng điều kiện nguyên của đề, khẳng định $x = 34$ là không chính xác.

Kết luận: Sai.

Câu 2

Khung gồm hình chữ nhật rộng x , cao y và một nửa đường tròn có đường kính x . Dây thép gồm đáy dưới, đường kính phía trên, hai cạnh bên và cung bán nguyệt.

$$2x + 2y + \frac{\pi x}{2} = 8.$$

Ta có

$$y = 4 - \frac{x(4 + \pi)}{4}.$$

Suy ra

a) Công thức trên đúng.

Kết luận: Đúng.

b) Diện tích cửa sổ là

$$S = xy + \frac{1}{2} \pi \left(\frac{x}{2} \right)^2$$

$$S = xy + \frac{\pi x^2}{8}.$$

•

Thay biểu thức của y :

$$S = 4x - \frac{8 + \pi}{8} x^2.$$

$$x = \frac{16}{8 + \pi}.$$

Đây là parabol quay xuống, đạt lớn nhất tại

$$y = 4 - \frac{4(4 + \pi)}{8 + \pi} = \frac{16}{8 + \pi}.$$

Khi đó

Kết luận: Đúng.

c) Ta vừa có

$$S = 4x - \frac{8 + \pi}{8} x^2,$$

•

không phải $S = 4x - x^2$.

Kết luận: Sai.

d) Bán kính bán nguyệt là $x/2$, nên độ dài cung bán nguyệt là

$$\pi \cdot \frac{x}{2} = \frac{\pi x}{2}.$$

•

Kết luận: Đúng.

Câu 3

Thể tích của bình là $V_B = 50^2 \cdot 80 = 200000 \text{ cm}^3$.

Thể tích quả cầu bán kính 20 là $V_C = \frac{4}{3} \pi \cdot 20^3 = \frac{32000\pi}{3} \approx 33510,322 \text{ cm}^3$.

Do sau 120 phút bình đầy, lưu lượng nước là $q = \frac{200000 - \frac{32000\pi}{3}}{120} \approx 1387,414 \text{ cm}^3/\text{phút}$.

a) Thời gian để nước vừa ngập hết quả cầu

Quả cầu có đường kính 40 , nên khi vừa ngập hết cầu, mực nước cao 40 cm .

Lượng nước khi đó là $V = 50^2 \cdot 40 - \frac{32000\pi}{3}$.

$$t = \frac{V}{q} \approx 47,923$$

Suy ra phút, làm tròn được 48 phút.

Kết luận: Đúng.

b) Sau 24 phút, mực nước cao khoảng 20 cm

Sau 24 phút, thể tích nước là $V_{24} = 24q \approx 33297,936 \text{ cm}^3$.

Nếu mực nước cao h với $0 < h < 40$, phần quả cầu chìm là một chỏm cầu cao h , có thể tích

$$V_h = \pi h^2 \left(20 - \frac{h}{3} \right).$$

•

$$2500h - \pi h^2 \left(20 - \frac{h}{3} \right) = 33297,936.$$

Ta giải

Suy ra $h \approx 20,043$.

Làm tròn đến hàng đơn vị được 20 cm.

Kết luận: Đúng.

c) $x = 1387 \text{ cm}^3/\text{phút}$

Ta đã tính $q \approx 1387,414$.

Làm tròn đến hàng đơn vị được 1387 $\text{cm}^3/\text{phút}$.

Kết luận: Đúng.

d) Thể tích quả cầu là 33150 cm^3

Thực tế $V_c \approx 33510,322 \text{ cm}^3$.

Kết luận: Sai.

Câu 4

Cho $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{-x + 1} = -x - \frac{1}{x-1}, x \neq 1$.

a) Tâm đối xứng là $I(1; -1)$

Hai tiệm cận là $x = 1, y = -x$.

Chúng cắt nhau tại $I(1; -1)$.

Kết luận: Đúng.

b) Hàm số đồng biến trên $(0; 2)$

$$f'(x) = -1 + \frac{1}{(x-1)^2} = \frac{x(2-x)}{(x-1)^2}.$$

Ta có

Hàm số đồng biến trên $(0; 1)$ và $(1; 2)$, nhưng không xác định tại $x = 1$. Vì vậy không thể nói hàm số đồng biến trên toàn khoảng $(0; 2)$.

Kết luận: Sai.

c) Đồ thị có điểm cực tiểu $A(0; 1)$

Tại $x = 0$, đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương và $f(0) = 1$.

Vậy $A(0; 1)$ là điểm cực tiểu.

Kết luận: Đúng.

d) Giá trị lớn nhất trên $(1; +\infty)$ bằng -3

Trên $(1; +\infty)$, hàm số tăng trên $(1; 2)$ rồi giảm trên $(2; +\infty)$. Do đó giá trị lớn nhất đạt tại $x = 2$:

$$f(2) = -3.$$

•

Kết luận: Đúng.

PHẦN III. CÂU TRẮC NGHIỆM TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1

Gọi bán kính của tám hình cầu có tâm tại các đỉnh hình lập phương là r , bán kính hình cầu ở tâm khối lập phương là R .

Khoảng cách từ tâm khối lập phương cạnh 1 đến một đỉnh là $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Do hình cầu ở tâm tiếp xúc với mỗi hình cầu ở đỉnh: $R + r = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Trong hình lập phương, mỗi hình cầu ở đỉnh chỉ chiếm một phần tám hình cầu. Tổng thể tích của tám

phần này bằng thể tích một hình cầu bán kính r : $V_1 = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Thể tích hình cầu ở tâm là $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Thể tích hình cầu ở tâm là

$$V = \frac{4}{3} \pi (r^3 + R^3).$$

Do đó

Với $r + R$ không đổi, tổng $r^3 + R^3$ nhỏ nhất khi $r = R$. Vì vậy $r = R = \frac{\sqrt{3}}{4}$.

$$V_{\min} = \frac{4}{3} \pi \cdot 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{4} \right)^3 = \frac{\pi \sqrt{3}}{8} \approx 0,68017.$$

Suy ra

Làm tròn đến hàng phần trăm: 0,68.

Câu 2

Đặt $t = \cos x$.

Vì $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right]$, nên $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Ta có $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2t^2 - 1$.

Do đó $f(x) = 2t^3 - 2t^2 + 1 = g(t)$.

Ta có $g'(t) = 6t^2 - 4t = 2t(3t - 2)$.

Trong đoạn $[1/2; 1]$, điểm tới hạn là $t = \frac{2}{3}$.

Tính $g\left(\frac{2}{3}\right) = 2 \cdot \frac{8}{27} - 2 \cdot \frac{4}{9} + 1 = \frac{19}{27}$.

Vậy $\frac{a}{b} = \frac{19}{27}$,

suy ra $P = ab = 19 \cdot 27 = \boxed{513}$.

Câu 3

Ta có $A(0; 0), C(6; 4)$.

Trung điểm của AC là

$$H(3; 2).$$

•

Đường tròn có tâm $I(3; 1)$ đi qua H , nên bán kính IH thẳng đứng. Vì thế tiếp tuyến của đường tròn tại H là đường thẳng nằm ngang.

Dải LED có dạng $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Vì dải LED bắt đầu tại A và kết thúc tại C :

$$f(0) = 0 \Rightarrow d = 0, \quad f(6) = 4.$$

•

Vì đi qua H : $f(3) = 2$.

Vì tiếp xúc với đường tròn tại H và tiếp tuyến tại H nằm ngang:

$$f'(3) = 0.$$

•

Ta được hệ
$$\begin{cases} 27a + 9b + 3c = 2, \\ 216a + 36b + 6c = 4, \\ 27a + 6b + c = 0. \end{cases}$$

Giải hệ được $a = \frac{2}{27}, b = -\frac{2}{3}, c = 2, d = 0$.

Vậy $27a + 3b + c + 9d = 2 - 2 + 2 = \boxed{2}$.

Câu 4

Gọi v là vận tốc của cá khi nước đứng yên. Khi bơi ngược dòng, vận tốc thực tế của cá là $v - 6$, với $v > 6$.

Thời gian bơi hết quãng đường 300 km là $t = \frac{300}{v - 6}$.

Năng lượng tiêu hao trong một giờ là $E(v) = cv^3$.

Vậy tổng năng lượng tiêu hao là $W(v) = cv^3 \cdot \frac{300}{v - 6} = 300c \frac{v^3}{v - 6}$.

Vì $300c > 0$, ta chỉ cần tìm cực tiểu của $g(v) = \frac{v^3}{v - 6}$.

Ta có

$$g'(v) = \frac{3v^2(v - 6) - v^3}{(v - 6)^2} = \frac{2v^2(v - 9)}{(v - 6)^2}.$$

•

Với $v > 6$, hàm số giảm trên $(6; 9)$ và tăng trên $(9; +\infty)$. Do đó năng lượng nhỏ nhất khi $v = \boxed{9}$ km/h.

Câu 5

Quỹ đạo là $y = \frac{3x^2 - x + 5}{x - 1}, x > 1$.

Chia đa thức: $y = 3x + 2 + \frac{7}{x - 1}$.

Hai đường tiệm cận là $x = 1$ và $y = 3x + 2$.

Lấy điểm $M(x; y)$ trên quỹ đạo.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng $x = 1$ là $d_1 = x - 1$.

Khoảng cách từ M đến đường thẳng $3x - y + 2 = 0$ là $d_2 = \frac{|3x - y + 2|}{\sqrt{10}}$.

Do $y = 3x + 2 + \frac{7}{x - 1}$, nên $|3x - y + 2| = \frac{7}{x - 1}$.

Vì $x > 1$: $C = d_1 d_2 = (x - 1) \cdot \frac{7}{(x - 1)\sqrt{10}} = \frac{7}{\sqrt{10}}$.

Suy ra $C^2 = \frac{49}{10}$.

Do đó $\frac{10}{7} C^2 = \frac{10}{7} \cdot \frac{49}{10} = \boxed{7}$.

Câu 6

Gọi O là tâm tấm bìa hình vuông cạnh 6. Gọi x là khoảng cách từ O đến mỗi đỉnh của hình vuông đáy ở giữa sau khi cắt. Khi đó $0 < x < 3$.

Hình vuông đáy có hai đường chéo cùng bằng $2x$, nên cạnh đáy là $a = x\sqrt{2}$, và diện tích đáy là $S = a^2 = 2x^2$.

Xét một cạnh bên của khối chóp. Trên tấm bìa, độ dài cạnh này bằng khoảng cách từ một góc của hình vuông lớn đến một đỉnh kề của hình vuông đáy: $l^2 = 3^2 + (3 - x)^2$.

Trong khối chóp tứ giác đều, khoảng cách từ tâm đáy đến một đỉnh đáy bằng x . Nếu h là chiều cao khối chóp thì $l^2 = h^2 + x^2$.

Suy ra $h^2 = 9 + (3 - x)^2 - x^2 = 18 - 6x$,

Nên $h = \sqrt{18 - 6x}$.

Thể tích khối chóp là $V(x) = \frac{1}{3} \cdot 2x^2 \sqrt{18 - 6x}$.

Để tìm cực đại, xét bình phương thể tích: $V^2(x) = \frac{8}{3} x^4 (3 - x)$.

Vì $V > 0$, cực đại của V tương ứng với cực đại của $F(x) = x^4 (3 - x)$.

Ta có $F'(x) = x^3 (12 - 5x)$.

Trong $(0; 3)$, điểm cực đại là $x = \frac{12}{5}$.

Khi đó $V_{\max} = \frac{288\sqrt{10}}{125} \approx 7,2859$.

Làm tròn đến hàng phần mười: $\boxed{7,3}$ dm³.