

A. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

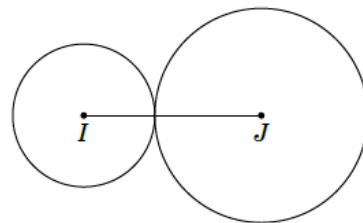
- Xem lại kiến thức trọng tâm từ bài 1 đến bài 8.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI

I. TRẮC NGHIỆM

Câu 1: [TS10 Cần Thơ, 2018-2019]

Cho hai đường tròn $(I; 2 \text{ cm})$ và $(J; 3 \text{ cm})$ tiếp xúc ngoài nhau (như hình bên dưới). Độ dài đoạn nối IJ bằng



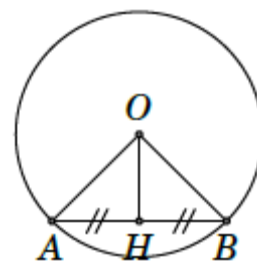
- A.** 1 cm. **B.** 5 cm.
C. 10 cm. **D.** 13 cm.

Lời giải

Độ dài đoạn nối tâm IJ bằng $2 + 3 = 5 \text{ cm}$.

Câu 2: [TS10 Phú Yên, 2018-2019]

Cho đường tròn tâm O đường kính 10 cm. Gọi H là trung điểm của dây AB (hình bên). Tính độ dài đoạn OH , biết $AB = 6 \text{ cm}$.



- A.** $OH = 4 \text{ cm}$. **B.** $OH = 8 \text{ cm}$.
C. $OH = 16 \text{ cm}$. **D.** $OH = 64 \text{ cm}$.

Lời giải

Do (O) có đường kính 10 cm nên $OA = 5 \text{ cm}$.

Xét (O) ta có H là trung điểm của dây cung $AB \Rightarrow OH \perp AB$ tại H (quan hệ đường kính và dây cung).

Áp dụng định lý Py-ta-go cho tam giác $OA H$ vuông tại H có

$$OH^2 = OA^2 - AH^2 = 5^2 - 3^2 = 16 \Rightarrow OH = 4 \text{ cm}.$$

Câu 3: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho đường tròn $(O; 2 \text{ cm})$, hai điểm A, B thuộc đường tròn và số đo $\widehat{AB} = 60^\circ$. Độ dài d của dây cung AB là bao nhiêu?

- A.** $d = 2 \text{ cm}$. **B.** $d = 4 \text{ cm}$. **C.** $d = 5 \text{ cm}$. **D.** $d = 3 \text{ cm}$.

Lời giải

Số đo cung $\widehat{AB}$ bằng số đo góc ở tâm chắn cung đó. Vậy $\widehat{AOB} = 60^\circ$.

Mặt khác $\widehat{AOB}$ cân tại O .

Suy ra $\widehat{AOB}$ đều $\Rightarrow AB = 2 \text{ cm}$.

Câu 4: [TS10 Phú Thọ, 2018-2019]

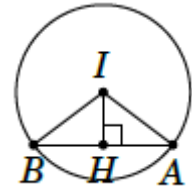
Cho đường tròn tâm I , bán kính $R = 5$ cm và dây cung $AB = 6$ cm. Tính khoảng cách d từ I tới đường thẳng AB .

- A.** $d = 4$ cm. **B.** $d = \sqrt{34}$ cm.
C. $d = 2$ cm. **D.** $d = 1$ cm.

Lời giải

Gọi H là trung điểm $AB \Rightarrow IH \perp AB$ và $HA = 3$ cm.

Xét tam giác vuông IHA có $d = IH = \sqrt{IA^2 - HA^2} = 4$ (cm).



Câu 5: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

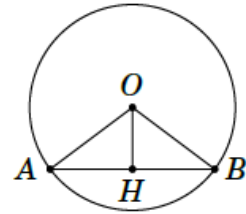
Cho đường tròn $(O, 5 \text{ cm})$ và dây cung $AB = 8$ cm. Tính khoảng cách d từ tâm O đến dây cung AB .

- A.** $d = 3$ cm. **B.** $d = 6$ cm. **C.** $d = 4$ cm. **D.** $d = 5$ cm.

Lời giải

Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow AH = HB = \frac{AB}{2} = 4$ cm.

Xét tam giác AHB vuông tại H nên $OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = 3$ cm.



Câu 6: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho đường tròn $(O; 15 \text{ cm})$, dây $AB = 24$ cm. Một tiếp tuyến của đường tròn song song với AB cắt các tia OA , OB theo thứ tự ở E , F . Tính độ dài EF .

- A.** $EF = 40$ cm. **B.** $EF = 38$ cm. **C.** $EF = 36$ cm. **D.** $EF = 42$ cm.

Lời giải

Dễ thấy rằng $\triangle OAB \sim \triangle OEF \Rightarrow \triangle OEF$ cân tại O .

Gọi tiếp điểm I , gọi M là trung điểm của AB . Ta có

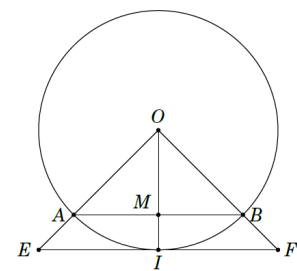
$$OM \perp AB \Rightarrow OI \perp EF.$$

Trong tam giác vuông OMB có

$$OM = \sqrt{OB^2 - MB^2} = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9 \text{ cm}.$$

Vì $MB \parallel IF$ nên theo định lý Ta-lét ta có

$$\frac{OM}{OI} = \frac{AB}{EF} \Leftrightarrow EF = \frac{AB \cdot OI}{OM} = 40 \text{ cm}.$$



Câu 7: [TS10 Cần Thơ, 2018-2019]

Trong một đường tròn, xét các khẳng định sau:

(I): Đường kính là dây cung lớn nhất.

(II): Dây nhỏ hơn thì gần tâm hơn.

(III): Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau.

(IV): Tiếp tuyến vuông góc với bán kính tại tiếp điểm.

Số khẳng định đúng là

- A. 1. B. 2. C. 4. D. 3.

Lời giải

Khẳng định (I), (III), (IV) đúng. Khẳng định (II) sai vì dây lớn hơn thì gần tâm hơn.

Vậy có 3 khẳng định đúng.

Câu 8: [TS10 Hưng Yên, 2018-2019]

Có hai đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và đường tròn $(I; 2 \text{ cm})$, biết $OI = 6 \text{ cm}$. Số tiếp tuyến chung của hai đường tròn đó là

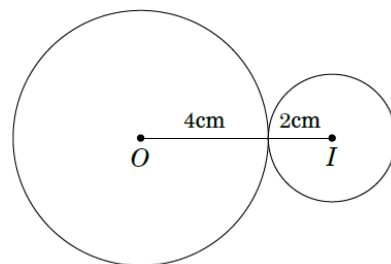
- A. 4. B. 3. C. 2. D. 1.

Lời giải

Ta có $OI = 6 \text{ cm} = 4 + 2 = R + r$.

Suy ra $(O; 4 \text{ cm})$ tiếp xúc ngoài với $(I; 2 \text{ cm})$.

Nên hai đường tròn này có 3 đường tiếp tuyến chung.



Câu 9: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho hai đường tròn $(O; 4 \text{ cm})$ và $(O'; 3 \text{ cm})$ có $OO' = 5 \text{ cm}$. Hai đường tròn trên cắt nhau tại A và B . Tính độ dài AB .

- A. $AB = 3,2 \text{ cm}$. B. $AB = 4,8 \text{ cm}$. C. $AB = 2,4 \text{ cm}$. D. $AB = 3,6 \text{ cm}$.

Lời giải

Áp dụng định lý Pytago đảo cho $\triangle OAO'$ ta có

$$OO'^2 = OA^2 + O'A^2 \Leftrightarrow 5^2 = 4^2 + 3^2.$$

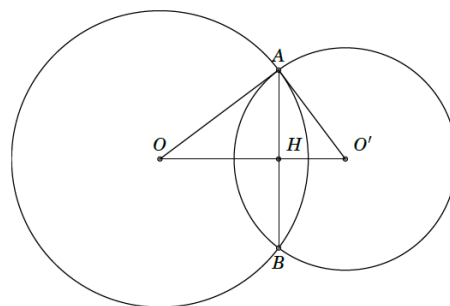
Suy ra $\triangle OAO'$ vuông tại A .

Gọi H là giao của AB và OO' . Dựa vào hai tam

giác đồng dạng $\triangle OAO'$ và $\triangle OBO'$ dễ dàng chứng minh AH là đường cao của $\triangle OAO'$.

$$\text{Ta có } \frac{1}{AH^2} = \frac{1}{4^2} + \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow AH = \frac{12}{5} = 2,4 \text{ cm}.$$

$$\text{Do đó } AB = 2AH = 2 \cdot 2,4 = 4,8 \text{ cm}.$$



Câu 10: [TS10 Hưng Yên, 2018-2019]

Từ một miếng tôn có hình dạng là nửa hình tròn bán kính 1m, người ta cắt ra một hình chữ nhật (phần tô đậm như hình vẽ).

Phần hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể cắt được là

- A.** $1,6\text{m}^2$. **B.** $0,5\text{m}^2$. **C.** 1m^2 . **D.** 2m^2 .

Lời giải

Gọi kích thước của miếng tôn cần cắt như hình vẽ

Áp dụng định lý Pi-ta-go ta có

$$a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 = \frac{4-b^2}{4} \Leftrightarrow a = \frac{\sqrt{4-b^2}}{2}.$$

Khi đó diện tích miếng tôn hình chữ nhật là

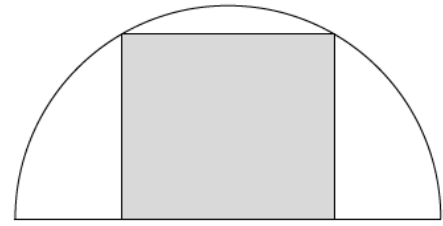
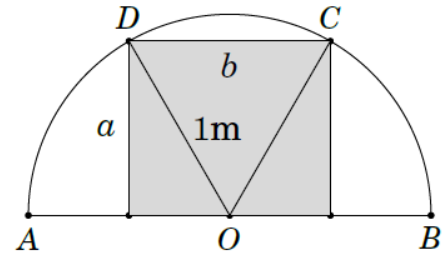
$$S = ab = \frac{b\sqrt{4-b^2}}{2}.$$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số ta có

$$b^2 + \sqrt{(4-b^2)^2} \geq 2b\sqrt{4-b^2} \Leftrightarrow b\sqrt{4-b^2} \leq \frac{b^2 + 4 - b^2}{2} = 2.$$

$$\Rightarrow S = \frac{b\sqrt{4-b^2}}{2} \leq \frac{2}{2} = 1.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow b = \sqrt{4-b^2} \Leftrightarrow b = \sqrt{2}.$$



Câu 11: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho tam giác ABC , biết $\angle B = 60^\circ$, $AB = 6\text{ cm}$, $BC = 4\text{ cm}$. Tính độ dài cạnh AC .

- A.** $AC = 2\sqrt{7}\text{ cm}$. **B.** $AC = \sqrt{52}\text{ cm}$. **C.** $AC = 4\sqrt{5}\text{ cm}$. **D.** $AC = 2\sqrt{3}\text{ cm}$.

Lời giải

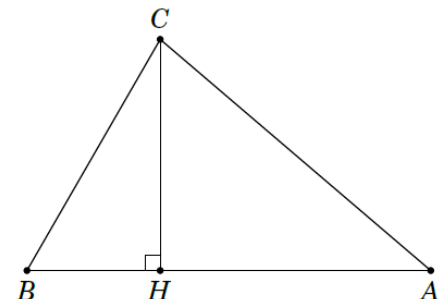
Kẻ $CH \perp AB (H \in AB)$.

Xét tam giác BHC ta có

$$CH = BC \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}; BH = BC \cdot \cos 60^\circ = 2.$$

Từ đó

$$AH = AB - BH = 4 \Rightarrow AC = \sqrt{CH^2 + AH^2} = 2\sqrt{7}.$$



Câu 12: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

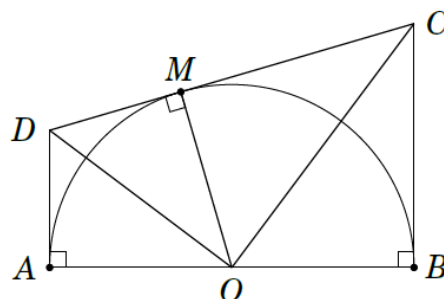
Cho nửa đường tròn tâm O có đường kính $AB = 4$ cm. Vẽ các tiếp tuyến Ax , By (Ax , By và nửa đường tròn thuộc cùng một nửa mặt phẳng bờ AB). Gọi M là một điểm bất kỳ thuộc nửa đường tròn. Tiếp tuyến tại M cắt Ax , By theo thứ tự ở D , C . Tính diện tích của hình thang $ABCD$, biết chu vi của nó bằng 14 cm.

- A.** $S = 20 \text{ cm}^2$. **B.** $S = 10 \text{ cm}^2$. **C.** $S = 12 \text{ cm}^2$. **D.** $S = 16 \text{ cm}^2$.

Lời giải

Xét $\triangle OMD$ và $\triangle OAD$ có

$$\begin{cases} OM = OA \\ OD \text{ chung} \\ \angle OMD = \angle OAD = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle OMD = \triangle OAD.$$



Xét $\triangle OMC$ và $\triangle OBC$ có

$$\begin{cases} OM = OB \\ OC \text{ chung} \\ \angle OMC = \angle OBC = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle OMC = \triangle OBC.$$

Từ $\triangle OMD = \triangle OAD \Rightarrow \angle MOD = \angle AOD = \frac{1}{2} \angle AOM$ và $MD = AD$.

Từ $\triangle OMC = \triangle OBC \Rightarrow \angle MOC = \angle BOC = \frac{1}{2} \angle BOM$ và $MC = BC$.

Chu vi hình thang $ABCD$ là

$$AB + BC + CD + DA = 14 \Leftrightarrow 4 + BC + MC + MD + AD = 14 \Leftrightarrow BC + AD = 5 \text{ cm}.$$

Diện tích hình thang $S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot AB = 10 \text{ cm}^2$.

Câu 13: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho tam giác ABC có $AB = 20$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 16$ cm. Tính chu vi của đường tròn nội tiếp tam giác đã cho

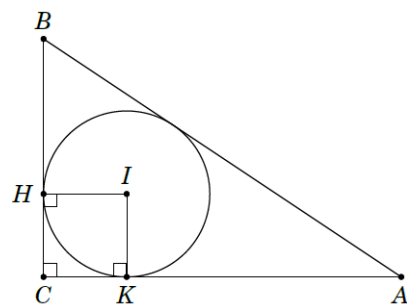
- A.** 16π cm. **B.** 20π cm. **C.** 13π cm. **D.** 8π cm.

Lời giải

Vì $AB^2 = BC^2 + AC^2 \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .

Từ đó dựa vào hình vuông $CHIK$ với I là tâm đường tròn nội tiếp. Ta có

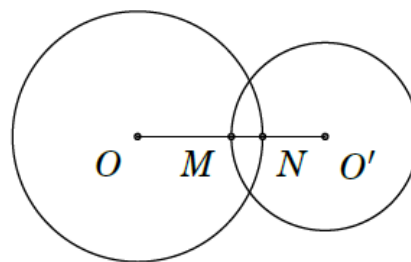
$$r = CH = \frac{CA + CB - AB}{2} = 4$$



Vậy chu vi đường tròn nội tiếp $= 2\pi \cdot 4 = 8\pi$.

Câu 14: [TS10 Phú Yên, 2018-2019]

Cho đường tròn $(O, 6 \text{ cm})$ và đường tròn $(O', 5 \text{ cm})$ có đoạn nối tâm $OO' = 8 \text{ cm}$. Biết đường tròn (O) và (O') cắt OO' lần lượt tại N, M (hình bên). Tính độ dài MN .



- A. $MN = 4 \text{ cm}$. B. $MN = 3 \text{ cm}$.
C. $MN = 2 \text{ cm}$. D. $MN = 1 \text{ cm}$.

Lời giải

- $OM + MN = ON \Rightarrow OM + MN = 6$.
- $O'N + MN = O'M \Rightarrow O'N + MN = 5$.

Suy ra $OM + MN + O'N + MN = 11 \Rightarrow OO' + MN = 11 \Rightarrow MN = 3 \text{ cm}$.

Câu 15: [TS10 Yên Bái, 2018-2019]

Cho hình vuông $ABCD$ cạnh bằng a . Gọi E là trung điểm của cạnh CD . Tính độ dài dây cung chung CF của đường tròn đường kính BE và đường tròn đường kính CD .

- A. $CF = a$. B. $CF = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$. C. $CF = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. D. $CF = \frac{a\sqrt{5}}{5}$.

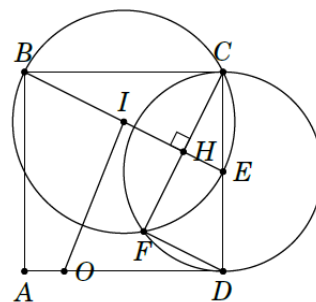
Lời giải

Gọi CF cắt BE tại H .

Tam giác BCE vuông tại C nên ta có

$$\frac{1}{CH^2} = \frac{1}{CE^2} + \frac{1}{CB^2}.$$

Ta có $CE = \frac{a}{2}; BC = a \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{5}a}{5} \Rightarrow CF = 2CH = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$.



BẢNG ĐÁP ÁN

1.B	2.A	3.A	4.A	5.A	6.A	7.D	8.B
9. B	10. C	11.A	12.B	13.D	14.B	15. B	

II. TỰ LUẬN

Bài 1. Cho nửa đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn vẽ các tiếp tuyến Ax, By . Lấy điểm M thuộc nửa đường tròn (M khác A, B). Tiếp tuyến tại M của (O) cắt Ax, By lần lượt tại C, D .

a) Chứng minh $CD = AC + BD$.

b) Tính số đo góc $\widehat{COD}$.

c) Chứng minh $AC \cdot BD = R^2$.

d) Vẽ đường tròn tâm I , đường kính CD . Chứng minh AB là tiếp tuyến của (I) .

Lời giải

a) Ta có tiếp tuyến AC và MC cắt nhau tại C ; tiếp tuyến BD và MD cắt nhau tại D (1)

$$\Rightarrow CM = CA \text{ và } DM = DB$$

$$\Rightarrow CD = CM + MD = AC + BD.$$

b) Từ (1) $\Rightarrow OC$ là tia phân giác của $\widehat{AOM}$ và OD là tia phân giác của $\widehat{MOB}$.

Ta có

$$\widehat{AOM} + \widehat{MOB} = 180^\circ \Rightarrow \frac{\widehat{AOM}}{2} + \frac{\widehat{MOB}}{2} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{COM} + \widehat{MOD} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{COD} = 90^\circ.$$

c) $\triangle COD$ vuông tại O có đường cao MO

$$\Rightarrow MC \cdot MD = MO^2 = R^2$$

$$\Rightarrow AC \cdot BD = R^2 \text{ (do } MC = AC \text{ và } MD = BD).$$

d) Ta có OI là đường trung tuyến trong tam giác vuông COD vuông tại O .

Nên đường tròn đường kính CD ngoại tiếp $\triangle OCD$.

Lại có OI là đường trung bình của hình thang $ABDC \Rightarrow OI \parallel AC \parallel BD$.

Mà $AC \perp AB$ nên $AB \perp OI \Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn (I) .

Bài 2. Cho đường tròn (O) và điểm A nằm ngoài đường tròn (O) . Từ A kẻ các tiếp tuyến AB , AC với (O) (B , C là các tiếp điểm).

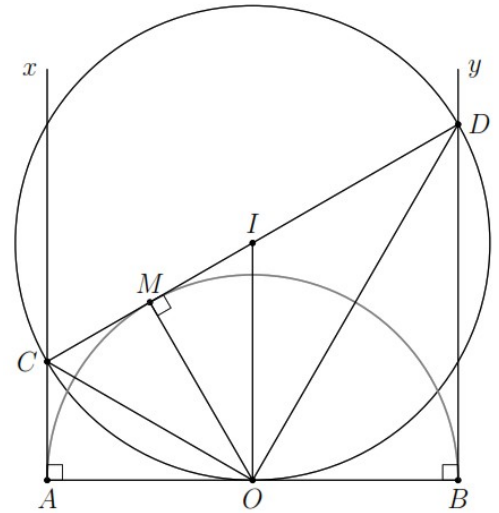
a) Chứng minh A , B , O , C cùng thuộc một đường tròn.

b) Chứng minh OA là đường trung trực của đoạn thẳng BC .

c) Biết $OA = 10$ cm, $OB = 6$ cm. Tính độ dài đoạn BC .

d) Đường tròn (O) cắt đoạn OA tại I . Chứng minh I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

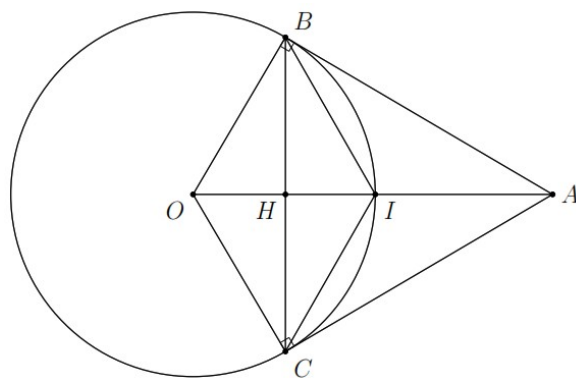
Lời giải



a) $\angle BOA$ vuông tại $B \Rightarrow \angle BOA$ nội tiếp trong đường tròn đường kính OA .

$\angle COA$ vuông tại $C \Rightarrow \angle COA$ nội tiếp trong đường tròn đường kính OA .

Vậy A, B, O, C cùng thuộc đường tròn đường kính OA .



Ta có $\angle BOA = \angle COA$ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)

$\Rightarrow AB = AC$ và $OB = OC$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow A$ nằm trên đường trung trực của đoạn BC và O nằm trên đường trung trực của đoạn BC
 $\Rightarrow OA$ là đường trung trực của đoạn BC .

c) Gọi H là giao điểm của OA và $BC \Rightarrow BH \perp OA$.

$\angle BOA$ vuông tại B có đường cao $BH \Rightarrow OB^2 = OA \cdot OH \Rightarrow OH = \frac{OB^2}{OA} = 3,6$ cm.

$\angle OHB$ vuông tại $H \Rightarrow HB = \sqrt{OB^2 - OH^2} = 4,8$ cm.

$OH \perp BC \Rightarrow H$ là trung điểm của $BC \Rightarrow BC = 2HB = 9,6$ cm.

d) Ta có $\angle BAI = \angle CAI$ (do $\angle BOA = \angle COA$)

$\Rightarrow AI$ là tia phân giác của $\angle BAC$ (1).

Mặt khác $\begin{cases} \angle BAI + \angle IBO = 90^\circ \\ \angle IBH + \angle BIH = 90^\circ \\ \angle IBO = \angle BIH \text{ (do } \angle BOI \text{ cân tại } O) \end{cases} \Rightarrow \angle ABI = \angle IBH \Rightarrow BI$

là tia phân giác của $\angle ABC$ (2)

Từ (1), (2) $\Rightarrow I$ là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle ABC$.

Bài 3. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O), C \in (O')$) với hai đường tròn. Tiếp tuyến chung tại A của (O) và (O') cắt BC tại M .

a) Chứng minh $MA = MB = MC$ và $\angle BAC = 90^\circ$.

b) Tính số đo của $\angle MO'$.

c) Chứng minh OO' tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .

d) Biết $R = 9$ cm, $R' = 4$ cm. Tính độ dài đoạn thẳng BC .

Lời giải

a) Ta có tiếp tuyến MA và MB cắt nhau tại M ; tiếp tuyến MA và MC cắt nhau tại M

$$\Rightarrow MA = MB \text{ và } MA = MC \Rightarrow MA = MB = MC.$$

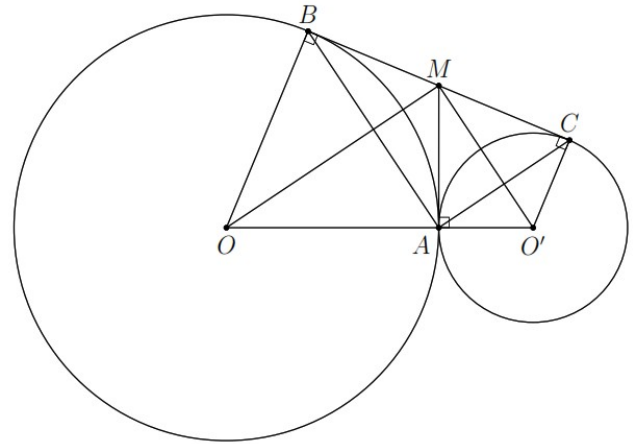
Khi đó ta có $\triangle MAB$ cân tại M và $\triangle MAC$ cân tại M

$$\Rightarrow \angle MBA = \angle MAB \text{ và } \angle MAC = \angle MCA.$$

$\triangle ABC$ có

$$\angle BAC + \angle MBA + \angle MCA = 180^\circ$$

$$\Rightarrow 2(\angle MAB + \angle MAC) = 180^\circ \Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$$



b) Ta có MO là tia phân giác của $\angle BMA$ và MO' là tia phân giác của $\angle CMA$

$$\Rightarrow \angle MOO' = \angle OMA + \angle O'MA = \frac{\angle BMA}{2} + \frac{\angle CMA}{2} = \frac{\angle BMA + \angle CMA}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

c) Ta có $MA = MB = MC \Rightarrow M$ là tâm đường tròn đường kính BC và A cũng thuộc đường tròn (M).

Mà $MA \perp OO'$ nên OO' tiếp xúc với đường tròn đường kính BC .

d) $\triangle MOO'$ vuông tại M có đường cao $MA \Rightarrow MA^2 = AO \cdot AO' = 36 \Rightarrow MA = 6 \text{ cm}$

$$\Rightarrow MB = MC = 6 \text{ cm} \Rightarrow BC = MA + MB = 12 \text{ cm}.$$

Bài 4. Cho đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Điểm C nằm trên đường tròn (C khác A, B). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB . Vẽ đường tròn tâm I đường kính HA và đường tròn tâm K đường kính HB . CA cắt (I) tại M (khác A), CB cắt (K) tại N (khác B).

a) Tứ giác $CMHN$ là hình gì? Vì sao?

b) Chứng minh MN là tiếp tuyến chung của (I) và (K).

c) Chứng minh AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .

d) Biết $HA = \frac{R}{2}$. Tính diện tích tứ giác $IMNK$ theo R .

Lời giải

a) $\triangle ABC$ có đường trung tuyến $CO = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle ABC$ vuông tại C .

$\square AMH$ có đường trung tuyến $MI = \frac{1}{2}AH \Rightarrow \square AMH$ vuông tại M .

$\square NHB$ có đường trung tuyến $NK = \frac{1}{2}HB \Rightarrow \square NHB$ vuông tại N .

Vậy $CMHN$ là hình chữ nhật.

b) Gọi P là giao điểm của CH và $MN \Rightarrow PM = PH = PN$ (tính chất hình chữ nhật).

Từ đó suy ra $\square PMI = \square PHI$ (cạnh - cạnh - cạnh) và $\square PHK = \square PNK$ (cạnh - cạnh - cạnh)

$\Rightarrow \square PMH = \square PHI = 90^\circ$ và $\square PNK = \square PHK = 90^\circ$.

Do đó MN là đường tiếp tuyến của đường tròn (I) và (K) .

Hay MN là tiếp tuyến chung của (I) và (K) .

c) $CMHN$ là hình chữ nhật nên $\square MHN = 90^\circ$.

Khi đó tâm đường tròn đường kính MN là P .

Ta có đường tròn này ngoại tiếp $\square MHN$ và $PH \perp AB$.

Do đó AB tiếp xúc với đường tròn đường kính MN .

d) Ta có $HA = \frac{R}{2} \Rightarrow HB = 2R - \frac{R}{2} = \frac{3R}{2} \Rightarrow HI = \frac{R}{4}$ và $HK = \frac{3R}{4}$.

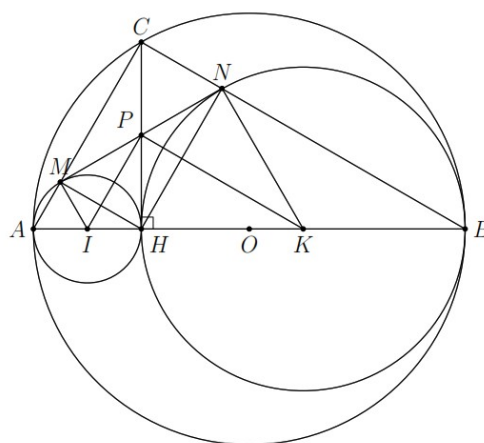
Ta có PI là tia phân giác của $\square MPH$ và PK là tia phân giác của $\square NPH \Rightarrow \square MPI = \square HPI$ và $\square HPK = \square NPK$. Khi đó ta có

$$\square IPK = \square IPH + \square HPK = \frac{\square MPH + \square HPN}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$\square PIK$ vuông tại P có PH là đường cao $\Rightarrow PH = \sqrt{IH \cdot HK} = \frac{R\sqrt{3}}{4} = PM = PN$

$$\Rightarrow MN = 2PM = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

$$S_{IMNK} = \frac{1}{2}MN(MI + NK) = \frac{1}{2} \cdot \frac{R\sqrt{3}}{2} \left(\frac{R}{4} + \frac{3R}{4} \right) = \frac{R^2\sqrt{3}}{4}$$



Bài 5. Cho nửa đường tròn tâm O , đường kính $AB = 2R$. Trên nửa mặt phẳng chứa nửa đường tròn, kẻ tiếp tuyến Ax . Điểm C nằm trên nửa đường tròn sao cho $AC = R$.

a) Tính số đo các góc của tam giác ABC .

b) Tiếp tuyến tại C của (O) cắt Ax tại D . Chứng minh OD song song với BC .

c) Tia BC cắt Ax tại E . Chứng minh $DE = DA$.

d) Kẻ $CH \perp AB$ với H thuộc AB , BD cắt CH tại I . Chứng minh I là trung điểm của CH .

Lời giải

a) $\square ABC$ có trung tuyến $CO = \frac{AB}{2} \Rightarrow \square ABC$ vuông tại $C \Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$.

Lại có $AC = R$ do đó $\square OAC$ là tam giác đều $\Rightarrow \angle CAO = 60^\circ \Rightarrow \angle ABC = 30^\circ$.

b) Do D là giao điểm của hai đường tiếp tuyến Ax và CD nên $OD \perp AC$.

Mà $BC \perp AC$ nên $OD \parallel BC$.

c) $OD \parallel BE \Rightarrow \angle ECD = \angle CDO$ (so le trong).

$OD \parallel BE \Rightarrow \angle CED = \angle ODA$ (đồng vị).

Mà $\angle CDO = \angle ODA$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

Nên $\angle ECD = \angle CED \Rightarrow \square ECD$ cân tại $D \Rightarrow DE = DC$.

Mà $DA = DC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) nên $DE = DA$.

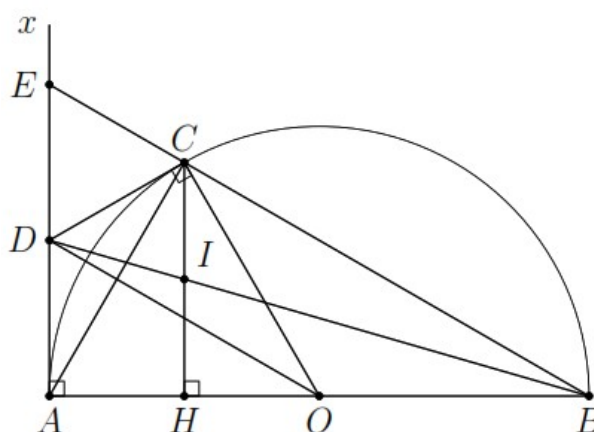
d) Áp dụng định lý Thales vào $\square BAD$ có $IH \parallel AD \Rightarrow \frac{IH}{AD} = \frac{BI}{BD}$.

Áp dụng định lý Thales vào $\square BED$ có $IC \parallel ED \Rightarrow \frac{IC}{ED} = \frac{BI}{BD}$.

Do đó $\frac{IH}{AD} = \frac{IC}{ED}$.

Mà $DA = DE$ (chứng minh ở câu c).

Nên $IH = IC$ hay I là trung điểm của CH .



Bài 6. Cho đường tròn $(O; R)$ đường kính AB . Qua A và B vẽ lần lượt hai tiếp tuyến d và d' với (O) . Đường thẳng Δ thay đổi qua O cắt d tại M và cắt d' tại P . Từ O vẽ một tia vuông góc với MP cắt d' tại N .

a) Chứng minh $OM = OP$ và tam giác MNP cân.

b) Gọi I là hình chiếu vuông góc của O lên MN . Chứng minh $OI = R$ và MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) Chứng minh $MN = AM + BN$.

d) Chứng minh $AM \cdot BN$ không đổi khi đường thẳng Δ quay quanh O .

Lời giải

a) Xét các tam giác vuông $\triangle OAM$ và $\triangle OBP$ có

$$MOA = BOP \text{ (đổi đỉnh).}$$

$OA = OB$ (bán kính).

Do đó $\angle OAM = \angle OBP$ (cạnh góc vuông - góc nhọn kề)

$$\Rightarrow OM = OP \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$
$$\Rightarrow \angle MNO = \angle PNO \text{ (cạnh huyền - cạnh góc vuông)}$$
$$\Rightarrow \widehat{NMO} = \widehat{NPO} \text{ (2 góc tương ứng)}$$
$$\Rightarrow \Box MNP \text{ cân tại } N.$$

b) Ta có $\widehat{AMO} = \widehat{OPB}$ (do $\widehat{OAM} = \widehat{OBP}$) và

$$IMO = OPB \text{ (chứng minh trên).}$$

Do đó $\overline{OMA} = \overline{OMI}$.

Xét hai tam giác vuông $\triangle OIM$ và $\triangle OAM$ có

$$\vartheta_{MI} = \vartheta_{MA} \text{ (chứng minh trên).}$$

OM là cạnh huyền chung.

Do đó $\angle OMI = \angle OMA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

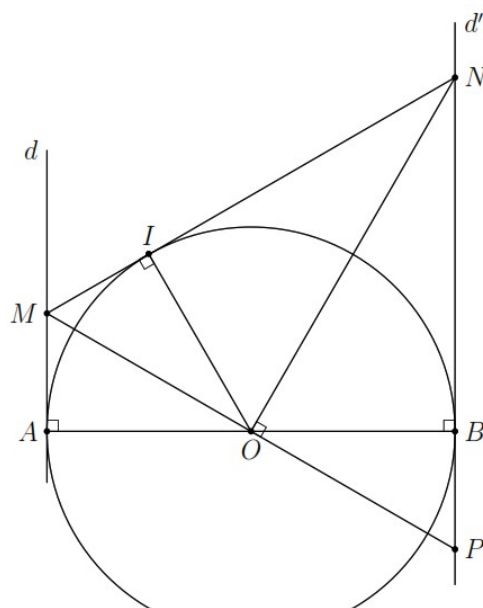
$$\Rightarrow OI = OA = R$$

Mà $OI \perp MN$ tại I nên MN là tiếp tuyến của đường tròn (O) .

c) Ta có $MI = MA$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $IN = BN$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

Do đó $MN = MI + IN = AM + BN$.

d) Ta có $AM \cdot BN = MI \cdot IN = OI^2 = R^2$ (không đổi).



Bài 7. Cho nửa đường tròn (O) , đường kính AB và điểm C là một điểm nằm trên (O) (C khác A, B). Tia phân giác của $\angle ABC$ cắt AC tại K và cắt (O) tại I (I khác B). Gọi D là giao điểm của AI và BC .

- Chứng minh tam giác ABD cân.
- Chứng minh DK vuông góc với AB .
- Gọi E là điểm đối xứng của K qua I . Tứ giác $AEDK$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh EA là tiếp tuyến của (O) .

Lời giải

- $\triangle ABI$ có trung tuyến $OI = \frac{1}{2} AB \Rightarrow \triangle AIB$ vuông tại I .

Khi đó ta có BI vừa là đường cao vừa là đường phân giác trong tam giác $ABD \Rightarrow \triangle ABD$ cân tại B .

- Chứng minh tương tự ta suy ra $AC \perp BD$.

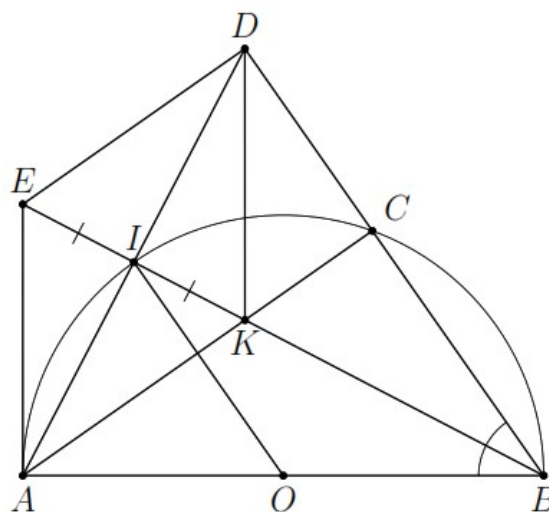
Mà BI và AC cắt nhau tại K nên K là trực tâm của $\triangle ABD \Rightarrow DK \perp AB$.

- $\triangle ABD$ cân tại B có BI là đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến nên $IA = ID$.

Tứ giác $AEDK$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường và hai đường chéo này vuông góc với nhau nên tứ giác $AEDK$ là hình thoi.

- $AEDK$ là hình thoi $\Rightarrow EA \parallel DK$.

Mà $DK \perp AB$ nên $EA \perp AB \Rightarrow EA$ là tiếp tuyến của (O) .



Bài 8. Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ tiếp xúc ngoài tại A . Kẻ tiếp tuyến chung ngoài BC ($B \in (O), C \in (O')$) với hai đường tròn. Tiếp tuyến chung ngoài tại A của (O) và (O') cắt BC tại D .

- Chứng minh $\triangle ODO'$ là tam giác vuông.
- Gọi E là giao điểm của OD và AB , gọi F là giao điểm của $O'D$ và AC . Tứ giác $AEDF$ là hình gì? Vì sao?
- Chứng minh BC tiếp xúc với đường tròn đường kính OO' .
- Chứng minh $BC = 2\sqrt{R \cdot R'}$.

Lời giải

a) Ta có OD là tia phân giác của $\angle BDA$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau) và $O'D$ là tia phân giác của $\angle ADC$ (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

$$\angle ODO' = \angle ODA + \angle ADO' = \frac{1}{2}\angle BDA + \frac{1}{2}\angle ADC = \frac{1}{2}\angle BDA = 90^\circ$$

Do đó $\angle ODO'$ vuông tại D .

b) Ta có $OD \perp AB$ tại E và $O'D \perp AC$ tại F (tính chất 2 tiếp tuyến cắt nhau).

Do đó $AEDF$ là hình chữ nhật.

c) Gọi K là trung điểm của OO' , ta có

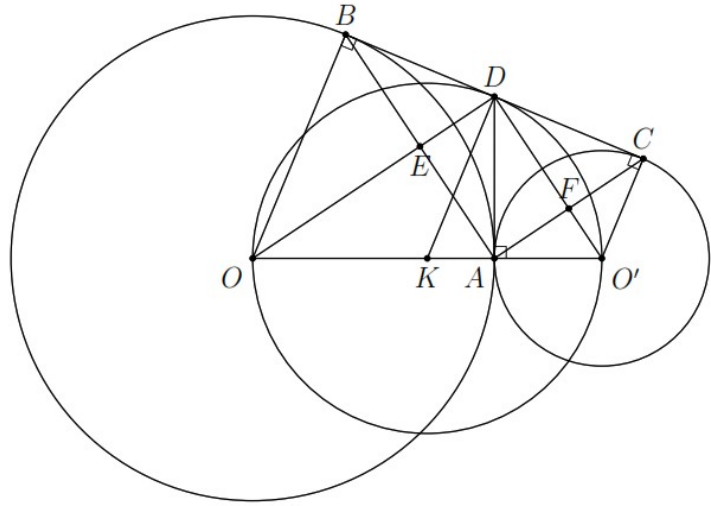
KD là đường trung bình của hình thang $OO'CB \Rightarrow KD \perp OB$. Mà $OB \perp BC$ nên

$KD \perp BC$ tại D và $KD = \frac{1}{2}(R + R')$ nên $D \in (K)$.

Vậy BC tiếp xúc với đường tròn đường kính OO' .

d) $\angle DOO'$ vuông tại D có đường cao $AD \Rightarrow AD = \sqrt{AO \cdot AO'} = \sqrt{R \cdot R'}$.

Vậy $BC = 2AD = 2\sqrt{R \cdot R'}$.



--- HẾT ---