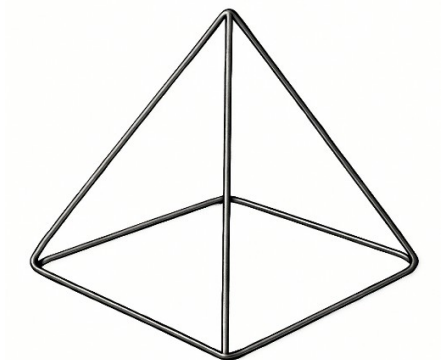


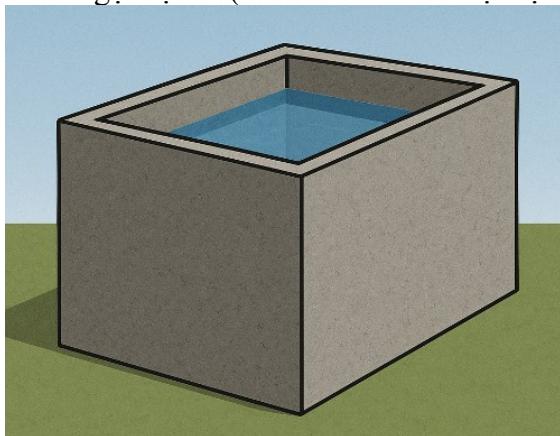
BÀI TOÁN THỰC TẾ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

- Câu 1.** Bạn An có một đoạn dây thép dài 16 dm muốn uốn thành một kim tự tháp có dạng chóp tứ giác đều (đoạn dây thép được uốn thành 4 cạnh bên và 4 cạnh đáy của kim tự tháp). Hỏi thể tích lớn nhất của kim tự tháp bạn An có thể làm được là bao nhiêu? (đơn vị: dm^3 , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

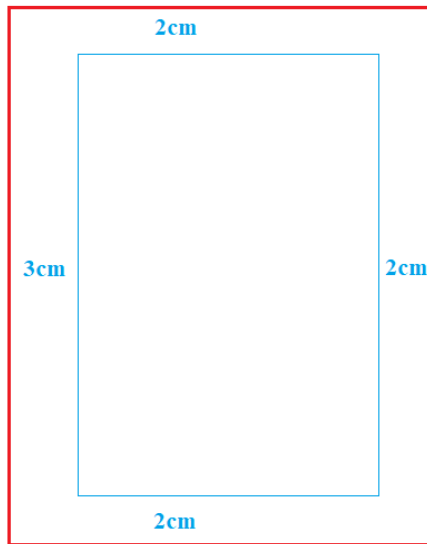


- Câu 2.** Một vật chuyển động theo quy luật $v(t) = \frac{-1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t \text{ (m/s)}$, với t được đo bằng đơn vị giây là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi trong 12 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động vật đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

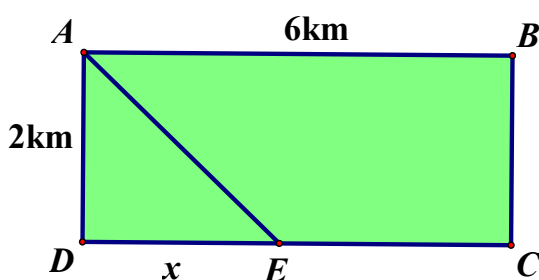
- Câu 3.** Để tích trữ nước ngọt sinh hoạt chuẩn bị cho mùa hạn mặn ở Đồng bằng sông Cửu Long, một hộ dân muốn xây một bể nước không nắp dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng 200 m^3 . Đáy bể là hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết chi phí xây bể là 850 nghìn đồng/ m^2 . Hãy tính chi phí thấp nhất mà hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể chứa nước ngọt dự trữ (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



- Câu 4.** Diện tích một trang của một cuốn sách là 600 cm^2 . Do yêu cầu kĩ thuật, cần để lề trên và lề dưới là 2 cm , lề trái là 3 cm và lề phải là 2 cm . Tính diện tích lớn nhất của phần chữ in vào cuốn sách được (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



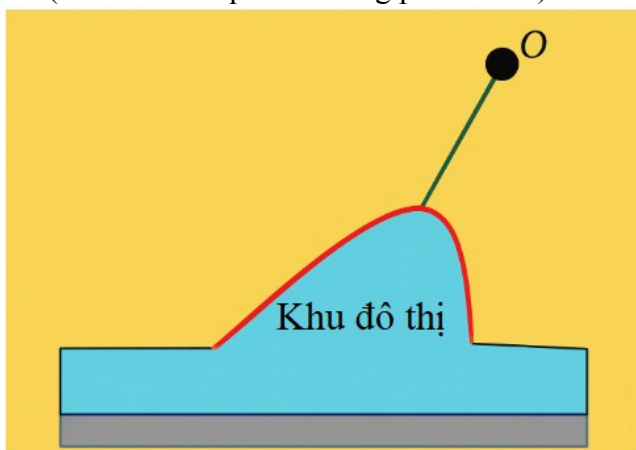
- Câu 5.** Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Thái Lan ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 55 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3 000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?
- Câu 6.** Một hộ gia đình chuyên làm thịt trâu sấy khô để bán, mỗi ngày hộ đó sản xuất được x kg thịt, ($1 \leq x \leq 20$). Tổng chi phí sản xuất x kg thịt trâu khô, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 9x^2 + 345x + 450$. Giả sử hộ gia đình này bán hết số thịt làm ra mỗi ngày với giá 750 nghìn đồng/kg. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt trâu sấy khô. Hỏi lợi nhuận tối đa mà hộ gia đình này thu được trong một ngày?
- Câu 7.** Một người nông dân đang đứng ở góc A của một cánh đồng hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AD = 2$ km và chiều dài $AB = 6$ km. Người đó muốn đi đến góc đối diện C . Người nông dân có thể đi bộ trên cánh đồng cỏ với tốc độ 4 km/h và đi bộ trên đường dọc theo cạnh CD với tốc độ 8 km/h. Để đến C nhanh nhất, người đó nên đi theo đường thẳng từ A đến một điểm E nào đó trên cạnh CD , sau đó đi bộ dọc theo đường từ E đến C . Hỏi điểm E phải cách điểm D bao xa để tổng thời gian di chuyển là ít nhất? (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)



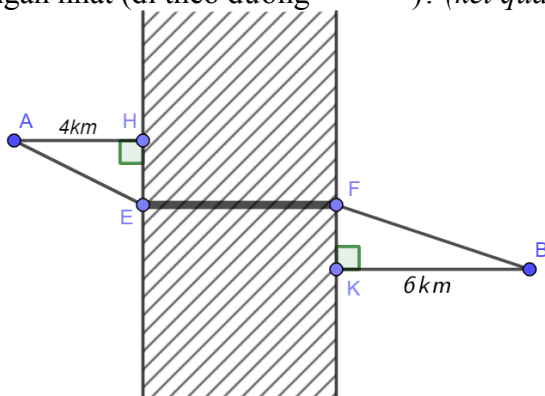
- Câu 8.** Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 1000(t^2 + me^{-t})$ với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, m là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tính tổng các giá trị nguyên âm của m biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm.
- Câu 9.** Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển

$$y = \frac{-x^2 + 2}{x}$$

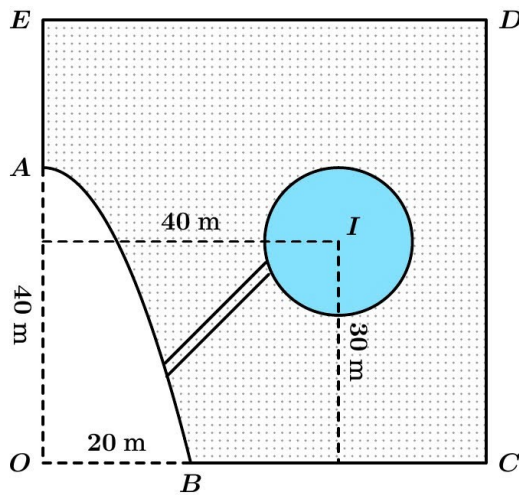
có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 2}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



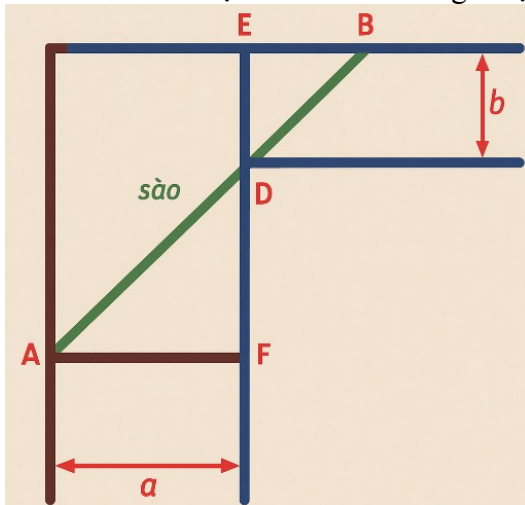
- Câu 10.** Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông. Biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là 4km và thành phố B cách con sông một khoảng là 6km (hình vẽ), biết $HE + KF = 20\text{km}$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu tại vị trí E cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần trăm).



- Câu 11.** Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 10m , người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Hỏi độ dài ngắn nhất l (đơn vị mét) của cây cầu là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số hàng phần chục), biết:
- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
 - Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
 - Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m ;
 - Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40m và 30m .



- Câu 12.** Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$, Biết chiều dài tối thiểu của que sào thỏa mãn điều kiện trên là l . Tính giá trị của l^2 .



- Câu 13.** Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:
- $$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$$

Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới.

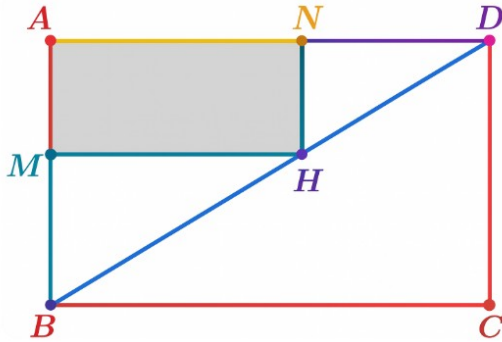
Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày (đơn vị tính nghìn đồng)?

Đáp án: 1200.

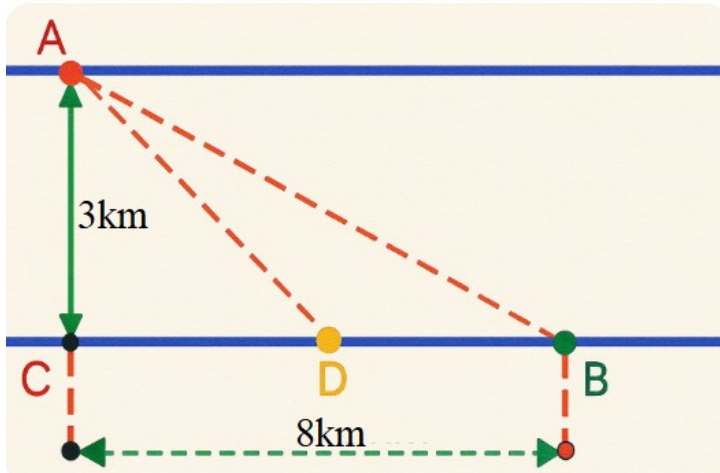
- Câu 14.** Khi sản xuất vỏ lon sữa DUTCH LADY, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Biết rằng lon sữa có hình trụ và thể tích của lon sữa là 530 cm^3 . Khi diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



- Câu 15.** Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2 , người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc cạnh BD . Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/ m^2 ?



- Câu 16.** Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt (như hình vẽ). Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h , chạy với vận tốc 8km/h , $AC = 3\text{km}$, $BC = 8\text{km}$ và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất (đơn vị: giờ) để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



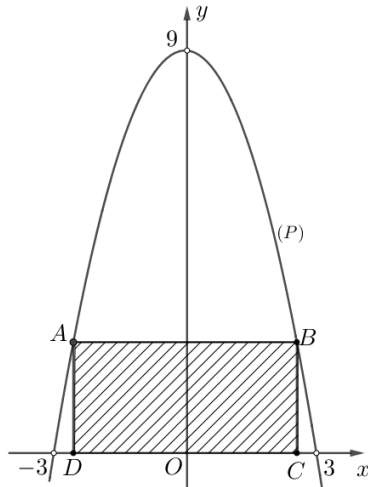
- Câu 17.** Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí

nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ (với $a, b \in \mathbf{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y = P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể đạt mức tối đa.

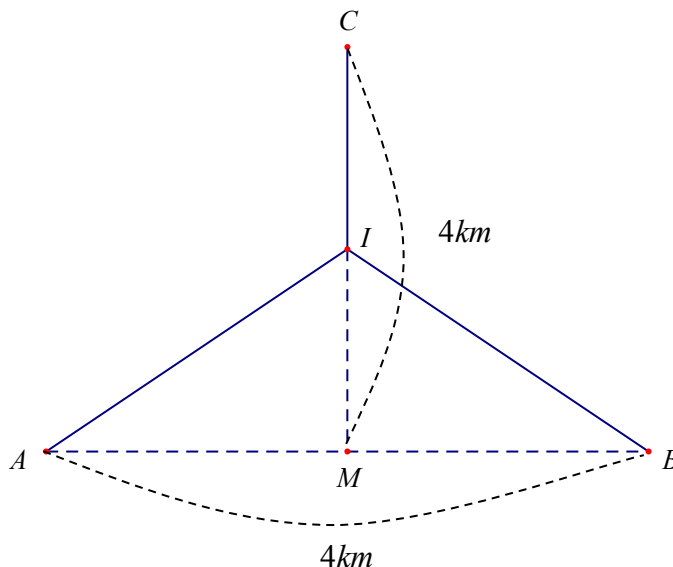
- Câu 18.** Một khu vui chơi giải trí giành cho trẻ em đang có kế hoạch điều chỉnh giá vé để tăng lợi nhuận. Sau khi khảo sát thị trường, người ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 50000/người thì trung bình có 500 người đến. Nhưng nếu tăng thêm 1000/người thì sẽ mất 10 khách hàng hoặc giảm đi 1000/người thì sẽ có thêm 10 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 5000 lợi nhuận trong các dịch vụ đi kèm. Hỏi giá vé vào cửa là bao nhiêu nghìn đồng để thu nhập là lớn nhất?



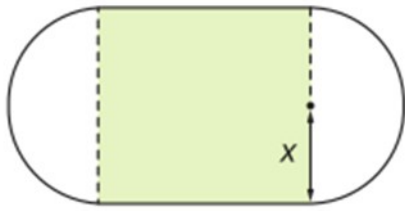
Câu 19. Một hình chữ nhật $ABCD$ được vẽ bên trong parabol (P) sao cho A, B thuộc (P) ; C, D thuộc trục Ox như hình vẽ (đơn vị trên trục Ox, Oy là mét). Hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



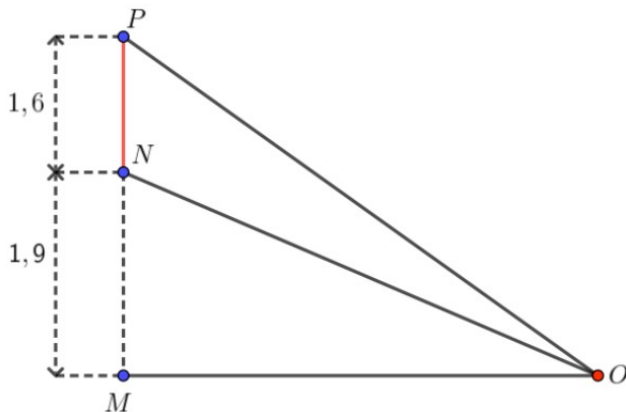
Câu 20. Hai nhà máy sản xuất đặt tại các vị trí A và B cách nhau $4km$. Một nhà máy cung cấp nước được đặt ở vị trí C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB , cách trung điểm M của đoạn thẳng AB một khoảng $4km$. Người ta muốn làm một đường ống dẫn nước từ nhà máy nước C đến một vị trí I nằm giữa đoạn thẳng MC sau đó chia ra hai nhánh dẫn tới hai nhà máy A và B (hình vẽ). Tổng độ dài đường ống dẫn nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu km ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



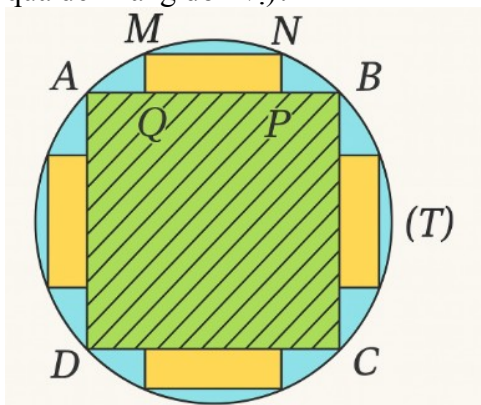
- Câu 21.** Một sân điền kinh gồm hai sân hình bán nguyệt có bán kính $x(\text{m})$ ($x > 0$) và một sân hình chữ nhật như hình vẽ. Biết chu vi của sân điền kinh là 400 m, tìm diện tích lớn nhất của sân hình chữ nhật theo mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



- Câu 22.** Một màn hình NP có chiều cao $1,6$ mét được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng NM bằng $1,9$ mét. Một chiếc đèn chiếu sáng màn hình đặt ở vị trí O trên mặt đất (xem hình minh họa). Để góc chiếu sáng $\widehat{NOP}$ lớn nhất thì độ dài đoạn OM bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



- Câu 23.** Bác Bình sử dụng một khúc gỗ hình trụ có đường kính bằng 32 cm để làm một chiếc xà nhà. Để đảm bảo tính thẩm mỹ thì bác Bình dự định sẽ cho thợ xẻ khúc gỗ thành một chiếc xà có tiết diện ngang (là miền gạch sọc như hình vẽ bên) bao gồm một hình vuông $ABCD$ và 4 miếng phụ là 4 hình chữ nhật bằng nhau. Bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn (T) ; miếng phụ $MNPQ$ có hai đỉnh M, N nằm trên đường tròn (T) và hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh AB . Mặt khác, diện tích của tiết diện ngang càng lớn thì chiếc xà chịu lực càng tốt. Hỏi bác Bình có thể tạo ra một tiết diện ngang có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



- Câu 24.** Trong vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ trong đó A là biên độ của dao động, $\omega(\text{rad/s})$ là tần số góc, $\varphi(\text{rad})$ là pha ban đầu. Động năng (Tiếng Anh: Kinetic energy) của một vật là năng lượng nó có được từ chuyển động của nó, được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2} m \cdot v^2(t)$ (đơn vị J). Trong đó $m(\text{kg})$

là khối lượng của vật, $v(t) (m/s)$ là vận tốc của vật tại thời điểm $t(s)$. Giả sử một vật có khối lượng $m = 100g$ dao động điều hòa với phương trình chuyển động $x(t) = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) (cm)$. Khi đó, động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

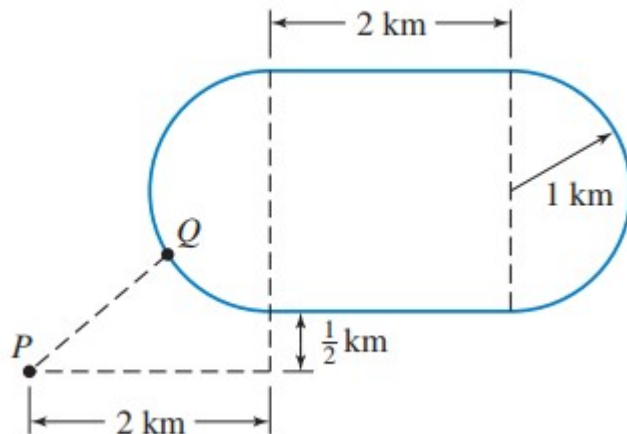
Câu 25. Nếu một điện trở R được nối với một ắc-quy có suất điện động E và điện trở trong r thì công

suất tiêu thụ trên điện trở R là $P = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}$, trong đó R, r được tính bằng ôm (Ω) , E được tính bằng vôn (V) và P được tính bằng oát (W) . Cho $E = 12 (V)$ và $r = 2 (\Omega)$, còn R biến thiên thì công suất P đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu W ?

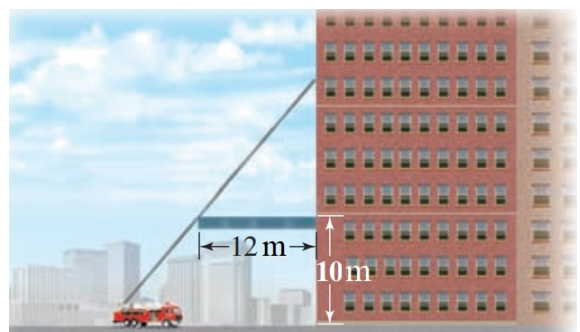
Câu 26. Hiệu quả nhiên liệu E , tính bằng số kilômét đi được trên mỗi lít xăng (km/l) , của một mẫu xe ô tô được mô hình hóa theo tốc độ $v (km/h)$ bằng công thức sau: $E(v) = -0,000025v^3 + 0,003v^2 + 13,5$. Mô hình này được áp dụng cho các tốc độ v từ $20 km/h$ đến $120 km/h$ ($20 \leq v \leq 120$). Tìm giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất (tức là đi được nhiều km nhất trên mỗi lít xăng, làm tròn đến hàng phần mười)?

Câu 27. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Câu 28. Hình cho thấy một mặt bằng đường đua bao gồm hai cạnh của một hình chữ nhật và hai nửa đường tròn. Ngoài ra còn cho vị trí P của một khán giả đang xem đua từ trên nóc xe của mình. Hãy tìm điểm Q trên đường đua sao cho khoảng cách từ P đến đường đua là nhỏ nhất. Tính khoảng cách giữa hai điểm đó.



Câu 29. Hình bên mô tả một mặt cắt ngang của một tòa nhà cao tầng. Một chiếc thang từ xe cứu hỏa lên đến mặt tường phía trước của tòa nhà phải vượt qua phần mái che cao hơn 10m so với mặt đất và vùng mái này nhô ra 12m so với tường. Giả sử, độ cao của xe cứu hỏa là không đáng kể, hãy tìm độ dài ngắn nhất của chiếc thang để các lính cứu hỏa có thể thực hiện nhiệm vụ này (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



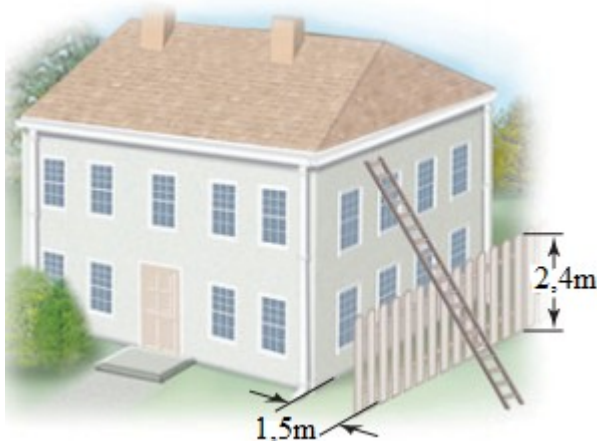
Câu 30. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi

hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2024 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

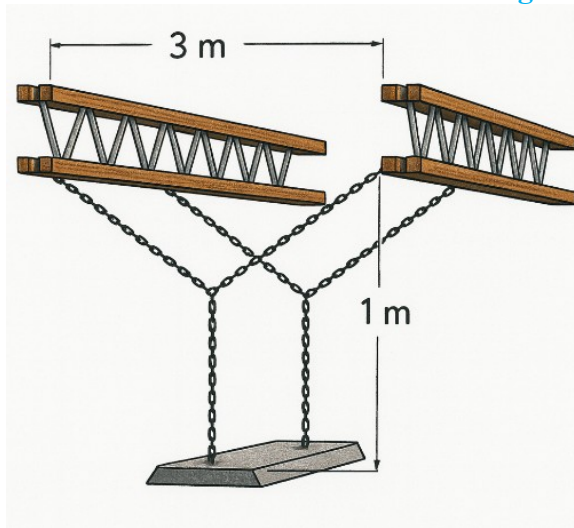
Câu 31. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



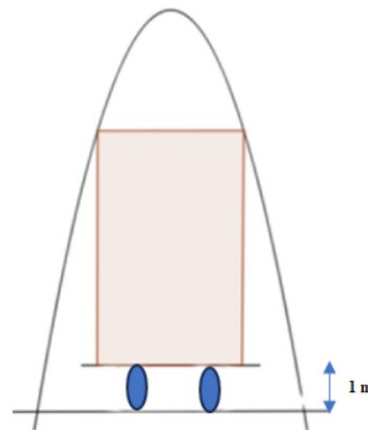
Câu 32. Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (tham khảo hình vẽ). Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dài ngắn nhất của cây thang bao nhiêu centimet (cm) để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)?



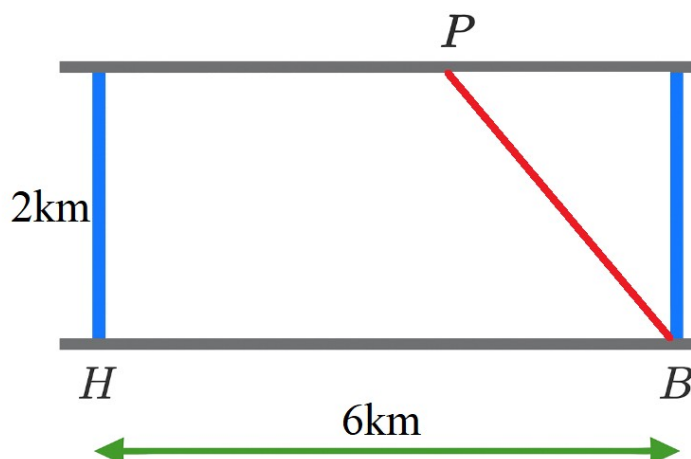
Câu 33. Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a + b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a - b - c$.



Câu 34. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m , khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m . Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m . Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

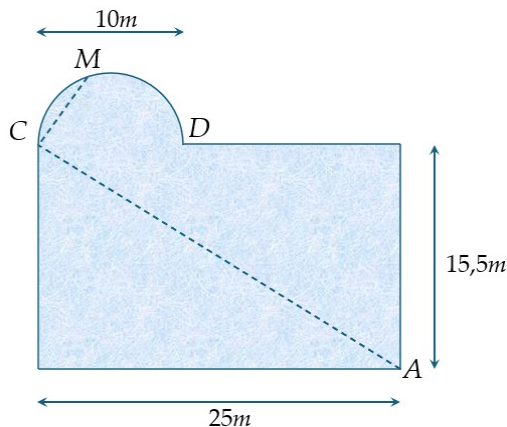


Câu 35. Người ta muốn lắp một ống dẫn dầu từ nhà máy lọc dầu ở vị trí A đến kho chứa dầu đặt ở vị trí B qua một con sông rộng 2 km , dài 6 km . Chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu trên mặt đất để nối từ nhà máy lọc dầu đến trạm trung chuyển tại vị trí P là $4\text{ tỷ VNĐ}/1\text{ km}$ và chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu dưới dòng sông để nối từ P đến kho chứa dầu tại vị trí B là $8\text{ tỷ VNĐ}/1\text{ km}$ (như hình vẽ)



Hỏi chi phí lắp đặt ít nhất, cần đặt vị trí P cách nhà máy lọc dầu là bao nhiêu kilômét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

- Câu 36.** Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng 15,5 m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM , với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng vận tốc bơi của Hoa là 2,4 km/h, vận tốc đi bộ là 4,8 km/h và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

- Câu 37.** Một cửa hàng có bán loại sản phẩm A. Khi cửa hàng bán sản phẩm A với giá 400 ngàn đồng thì mỗi tuần cửa hàng bán được 200 sản phẩm. Cửa hàng dự định có đợt giảm giá bán để kích cầu trong dịp lễ sắp tới. Theo khảo sát thị trường, mỗi lần giảm giá 20 ngàn đồng 1 sản phẩm thì cửa hàng bán thêm được 20 sản phẩm mỗi tuần. Hỏi cửa hàng cần bán một sản phẩm với giá bao nhiêu ngàn đồng thì doanh thu trong 1 tuần lớn nhất.

- Câu 38.** Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa là 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng.

Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50 - 0,0002x^2$ triệu đồng. Trong một tháng nhà máy A phải chi phí cho nhân công và chi cho khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra khi sản xuất mỗi tấn sản phẩm thì nhà máy phải chi phí thêm cho mua nguyên liệu là 35 triệu đồng. Biết rằng nhà máy A phải nộp 5% doanh thu cho cơ quan thuế. Tính lợi nhuận sau thuế (lợi nhuận sau khi đã trừ tiền thuế) lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A (đơn vị tính là tỉ đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

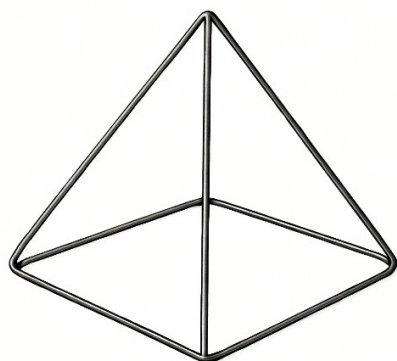
- Câu 39.** Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Nếu giá bán rau là 30000 đồng/kg thì 1 tấn rau thu hoạch được bán hết. Nếu giá bán rau cao hơn 30000 đồng/kg thì không bán hết 1 tấn rau. Cứ bán tăng thêm 1000 đồng cho 1 kg rau, số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được một cơ sở chăn nuôi thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?



- Câu 40.** Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A ($0 \leq x \leq 250$) trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C(x) = 0,00024x^3 - 0,03x^2 + 5x + 30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là $D(x) = -0,01x^2 + 16x - 25$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).
- Câu 41.** Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$; $1 \leq x \leq 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,01x^2 + 300x$ (nghìn đồng), trong khi chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{30000}{x} + 200$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?
- Câu 42.** Doanh thu (Revenue) của một công ty bất động sản khi bán căn hộ thứ n (n nguyên dương, nhỏ hơn 200) được cho bởi hàm số $R(n) = \frac{(n-4)(n-30)^2}{100} + 36$ (triệu đồng). Trong 100 căn hộ đầu tiên được bán ra, căn hộ thứ bao nhiêu cho doanh thu thấp nhất?
- Câu 43.** Giả sử giá của một cổ phiếu nào đó (tính bằng euro) trong một ngày nhất định (có 8 giờ giao dịch) được mô tả bởi hàm số: $f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21}$; $x \in [0; 8]$, trong đó x là thời gian (tính bằng giờ) kể từ khi phiên giao dịch mở cửa. Nếu một người mua 100 cổ phiếu và bán chúng ngay trong ngày này thì người đó có lợi nhuận tối đa là bao nhiêu euro?

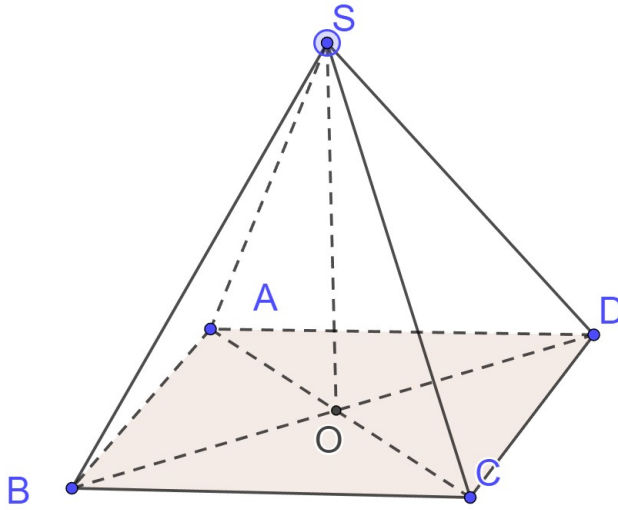
LỜI GIẢI

- Câu 1.** Bạn An có một đoạn dây thép dài 16 dm muốn uốn thành một kim tự tháp có dạng chóp tứ giác đều (đoạn dây thép được uốn thành 4 cạnh bên và 4 cạnh đáy của kim tự tháp). Hỏi thể tích lớn nhất của kim tự tháp bạn An có thể làm được là bao nhiêu? (đơn vị: dm^3 , kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 1.95



Kí hiệu kim tự tháp dạng chóp tứ giác đều là $S.ABCD$ có đáy tâm O như hình vẽ.

Đặt $AB = x$. Khi đó $SA = 4 - x \Rightarrow 0 < x < 4$. Lại có $OC = \frac{x}{\sqrt{2}}$ nên

$$SO = \sqrt{(4-x)^2 - \frac{x^2}{2}} = \sqrt{16 - 8x + \frac{x^2}{2}}$$

Để SO xác định thì $16 - 8x + \frac{x^2}{2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 8 - 4\sqrt{2} \\ x > 8 + 4\sqrt{2} \end{cases}$. Kết hợp với điều kiện $0 < x < 4$ ta có $0 < x < 8 - 4\sqrt{2}$.

Thể tích của chóp là
$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} x^2 \cdot \sqrt{16 - 8x + \frac{x^2}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \sqrt{32x^4 - 16x^5 + x^6}$$

Đặt $f(x) = 32x^4 - 16x^5 + x^6$. Ta xét $f(x)$ trên $[0; 8 - 4\sqrt{2}]$.

Ta có:
$$f'(x) = 128x^3 - 80x^4 + 6x^5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{4(5 - \sqrt{13})}{3} \\ x = \frac{4(5 + \sqrt{13})}{3} (L) \end{cases}$$

Thay vào ta được $f(0) = f(8 - 4\sqrt{2}) = 0$; $f\left(\frac{4(5 - \sqrt{13})}{3}\right) \approx 1.95$

Vậy thể tích lớn nhất của kim tự tháp bạn An có thể làm được là 1.95 .

Câu 2. Một vật chuyển động theo quy luật $v(t) = \frac{-1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ (m/s), với t được đo bằng đơn vị giây là khoảng thời gian từ lúc bắt đầu chuyển động. Hỏi trong 12 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động vật đạt được vận tốc lớn nhất là bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 90

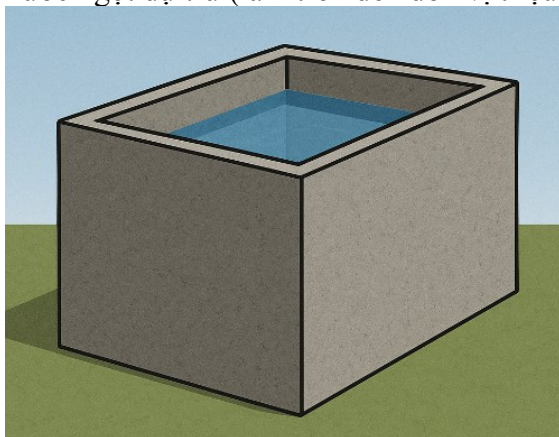
Xét hàm số $v(t) = \frac{-1}{3}t^3 + 4t^2 + 9t$ trên $[0; 12]$.

Ta có: $v'(t) = -t^2 + 8t + 9 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = 9 \end{cases}$.

Lại có: $v(0) = 0; v(9) = 90; v(12) = 9$.

Vậy trong 12 giây đầu tiên kể từ lúc bắt đầu chuyển động vật đạt được vận tốc lớn nhất là 90 (m/s).

Câu 3. Để tích trữ nước ngọt sinh hoạt chuẩn bị cho mùa hạn hán ở Đồng bằng sông Cửu Long, một hộ dân muốn xây một bể nước không nắp dạng khối hộp chữ nhật không nắp có thể tích bằng $200 m^3$. Đáy bể là hình hộp chữ nhật có chiều dài gấp đôi chiều rộng. Biết chi phí xây bể là 850 nghìn đồng/m². Hãy tính chi phí thấp nhất mà hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể chứa nước ngọt dự trữ (làm tròn đến đơn vị triệu đồng).



Lời giải

Trả lời: 144

Gọi x (m) là chiều rộng đáy bể ($x > 0$), chiều dài đáy bể là $2x$ (m)

Diện tích đáy bể: $S = 2x^2$. Thể tích bể chứa nước: $V = S.h \Rightarrow h = \frac{200}{2x^2} = \frac{100}{x^2}$

Diện tích xung quanh bể nước: $S_{xq} = 6x \cdot \frac{100}{x^2} = \frac{600}{x}$. Diện tích xây dựng: $S_{xd} = 2x^2 + \frac{600}{x}$

Chi phí xây dựng bể: $f(x) = 850 \cdot \left(2x^2 + \frac{600}{x} \right)$

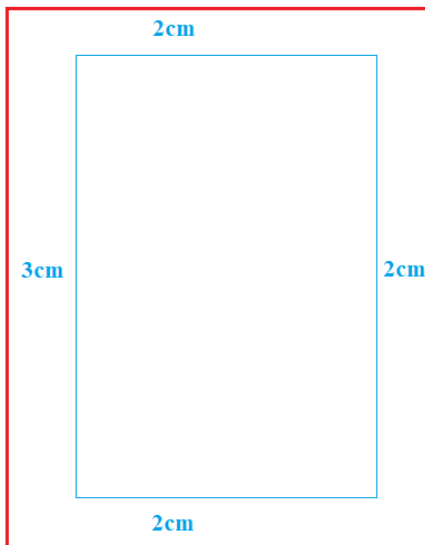
Ta có: $f'(x) = 850 \left(4x - \frac{600}{x^2} \right) = 850 \left(\frac{4x^3 - 600}{x^2} \right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{150}$

x	0	$\sqrt[3]{150}$	$+\infty$	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$				

$$f(\sqrt[3]{150}) \approx 143979$$

Chi phí thấp nhất hộ gia đình cần bỏ ra để xây dựng bể dự trữ nước ngọt là: 144 triệu đồng.

Câu 4. Diện tích một trang của một cuốn sách là 600cm^2 . Do yêu cầu kĩ thuật, cần để lề trên và lề dưới là 2cm , lề trái là 3cm và lề phải là 2cm . Tính diện tích lớn nhất của phần chữ in vào cuốn sách được (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)



Lời giải

Đáp án: 401

Gọi chiều dài của trang giấy là $x\text{cm}$ ta có chiều rộng là $\frac{600}{x}\text{cm}$.

Chiều dài và chiều rộng của phần in chữ lần lượt là $x-4$ và $\frac{600}{x}-5$

Diện tích phần in chữ là $f(x) = \left(\frac{600}{x} - 5\right)(x - 4) = 620 - 5x - \frac{2400}{x}$

$$f'(x) = \frac{2400}{x^2} - 5 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 4\sqrt{30}$$

x	0	$4\sqrt{30}$	$+\infty$
$f(x)$		$620 - 40\sqrt{3}$	
	$-\infty$		$-\infty$

Vậy diện tích lớn nhất của phần in chữ xấp xỉ 401 cm^2 .

Câu 5. Trận bóng đá giao hữu giữa đội tuyển Việt Nam và Thái Lan ở sân vận động Mỹ Đình có sức chứa 55 000 khán giả. Ban tổ chức bán vé với giá mỗi vé là 100 nghìn đồng, số khán giả trung bình đến sân xem bóng đá là 27 000 người. Qua thăm dò dư luận, người ta thấy rằng mỗi khi

giá vé giảm thêm 10 nghìn đồng, sẽ có thêm khoảng 3 000 khán giả. Hỏi ban tổ chức nên đặt giá vé là bao nhiêu để doanh thu từ tiền bán vé là lớn nhất với đơn vị tính giá vé là nghìn đồng?

Lời giải

Đáp án: 95

Gọi x ($x > 0$) nghìn là số tiền giá vé giảm.

Khi đó giá vé sau khi giảm là $100 - x$ (nghìn đồng).

Sau mỗi lần giảm giá thì có thêm $300x$ khán giả.

Do đó tổng số khán giả đến xem là $27000 + 300x$.

Vì sân vận động có sức chứa 55 000 khán giả nên $27000 + 300x \leq 55000 \Leftrightarrow x \leq \frac{280}{3}$

Doanh thu từ tiền bán vé là: $y = (27000 + 300x)(100 - x) = -300x^2 + 3000x + 2700000$

Yêu cầu bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của hàm số $y = -300x^2 + 3000x + 2700000$

Tập xác định $D = \left(0; \frac{280}{3}\right]$

$$y' = -600x + 3000, \quad y' = 0 \Leftrightarrow x = 5$$

Bảng biến thiên:

x	0	5	$\frac{280}{3}$
y'	+	0	-
y	2700000	2707500	2700000

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy ban tổ chức nên đặt giá vé là **95** nghìn đồng thì doanh thu tiền bán vé là lớn nhất.

Câu 6. Một hộ gia đình chuyên làm thịt trâu sấy khô để bán, mỗi ngày hộ đó sản xuất được x kg thịt, ($1 \leq x \leq 20$). Tổng chi phí sản xuất x kg thịt trâu khô, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí: $C(x) = x^3 - 9x^2 + 345x + 450$. Giả sử hộ gia đình này bán hết số thịt làm ra mỗi ngày với giá 750 nghìn đồng/kg. Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt trâu sấy khô. Hỏi lợi nhuận tối đa mà hộ gia đình này thu được trong một ngày?

Lời giải

Số tiền thu về khi bán x kg thịt là: $750x$.

Lợi nhuận thu được khi bán x kg thịt là:

$$L(x) = 750x - (x^3 - 9x^2 + 345x + 450) = -x^3 + 9x^2 + 405x - 450$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 9x^2 + 405x - 450$ với $x \in [1; 20]$

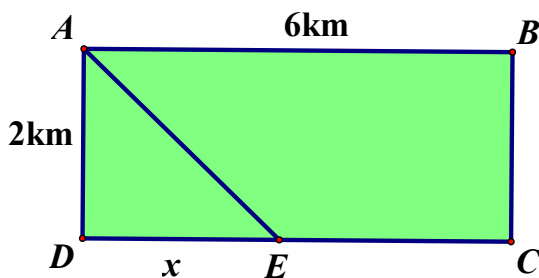
$$L'(x) = -3x^2 + 18x + 405, \quad L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \in [1; 20] \\ x = -9 \notin [1; 20] \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	1	15	20
$L'(x)$	+	0	-
$L(x)$	-37	4275	3250

Vậy hộ gia đình sản xuất thịt khô này thu được lợi nhuận tối đa trong một ngày là 4275 nghìn đồng khi sản xuất 15 kg thịt trâu khô trong một ngày.

Câu 7. Một người nông dân đang đứng ở góc A của một cánh đồng hình chữ nhật $ABCD$ có chiều rộng $AD = 2$ km và chiều dài $AB = 6$ km. Người đó muốn đi đến góc đối diện C . Người nông dân có thể đi bộ trên cánh đồng cỏ với tốc độ 4 km/h và đi bộ trên đường dọc theo cạnh CD với tốc độ 8 km/h. Để đến C nhanh nhất, người đó nên đi theo đường thẳng từ A đến một điểm E nào đó trên cạnh CD , sau đó đi bộ dọc theo đường từ E đến C . Hỏi điểm E phải cách điểm D bao xa để tổng thời gian di chuyển là ít nhất? (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)



Lời giải

Gọi E là điểm trên cạnh CD mà người nông dân đi tới từ A .

Gọi x là khoảng cách DE ($0 \leq x \leq 6$).

Khoảng cách đi bộ trên đường là $EC = DC - DE = 6 - x$.

Ta có $AE^2 = AD^2 + DE^2 = 2^2 + x^2 = 4 + x^2$

Suy ra $AE = \sqrt{4 + x^2}$ (km)

Lại có $EC = 6 - x$ (km)

Thời gian người nông dân đi từ A tới E là $t_{AE} = \frac{\sqrt{4 + x^2}}{4}$ (giờ)

Thời gian người nông dân đi từ E tới C là $t_{EC} = \frac{6-x}{8}$ (giờ)

Tổng thời gian người nông dân đi từ A đến C là tổng của hai khoảng thời gian trên:

$$T(x) = \frac{\sqrt{4+x^2}}{4} + \frac{6-x}{8}$$

Ta có
$$T'(x) = \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{8}$$

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{4\sqrt{4+x^2}} - \frac{1}{8} = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \quad \text{. Vì } 0 \leq x \leq 6 \text{ nên suy ra } x = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ .}$$

Bảng biến thiên

		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	
x	0		6
$T'(x)$		$-$	$+$
$T(x)$			

Vậy để tổng thời gian di chuyển ít nhất thì điểm E phải cách điểm D một khoảng là $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ km
 $\square 1.16$ km.

Câu 8. Giả sử doanh số bán hàng (đơn vị triệu đồng) của một sản phẩm mới trong vòng một số năm nhất định tuân theo quy luật logistic được mô hình hóa bằng hàm số $f(t) = 1000(t^2 + me^{-t})$ với $t \geq 0$ là thời gian tính bằng năm kể từ khi phát hành sản phẩm mới, m là tham số. Khi đó đạo hàm $f'(t)$ sẽ biểu thị tốc độ bán hàng. Tính tổng các giá trị nguyên âm của m biết rằng tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm.

Lời giải

Đáp án: -3

Ta có $f'(t) = 1000(2t - me^{-t}), f''(t) = 1000(2 + me^{-t})$

Tốc độ bán hàng luôn tăng trong khoảng thời gian 10 năm đầu phát hành sản phẩm khi và chỉ khi hàm số $f'(t)$ đồng biến trên $[0; 10] \Leftrightarrow f''(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0; 10]$

$$\Leftrightarrow 2 + me^{-t} \geq 0 \quad \forall t \in [0; 10] \Leftrightarrow m \geq -2e^t \quad \forall t \in [0; 10] \quad (1)$$

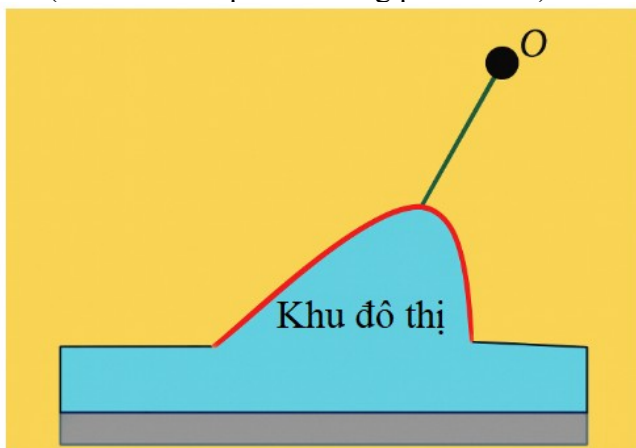
Xét hàm $g(t) = -2e^t$ luôn nghịch biến trên $[0; 10] \Rightarrow \max_{[0; 10]} g(t) = g(0) = -2$

Do đó $(1) \Leftrightarrow m \geq -2$

Suy ra tổng các giá trị nguyên âm của m bằng -3 .

Câu 9. Ở một vịnh biển, ngoài khơi xa có một hòn đảo nhỏ. Người ta tiến hành lấn biển để xây dựng khu đô thị và làm một tuyến cáp treo nối khu đô thị với hòn đảo để phát triển du lịch. Xét trong hệ tọa độ Oxy với đơn vị tương ứng 1km có hòn đảo ở O thì đường bao của phần đất lấn biển

có dạng là một phần của đồ thị hàm số $y = \frac{-x^2 + 2}{x}$. Giả sử tuyến cáp treo được thiết kế nối đảo với đường bao của khu đô thị với độ dài ngắn nhất. Độ dài của tuyến cáp treo là bao nhiêu km (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 1,29

Lấy điểm $M\left(x; \frac{-x^2 + 2}{x}\right), x \neq 0$ thuộc đồ thị $(C): y = \frac{-x^2 + 2}{x}$

$$OM^2 = x^2 + \left(\frac{-x^2 + 2}{x}\right)^2 = 2x^2 + \frac{4}{x^2} - 4 \geq 4\sqrt{2} - 4$$

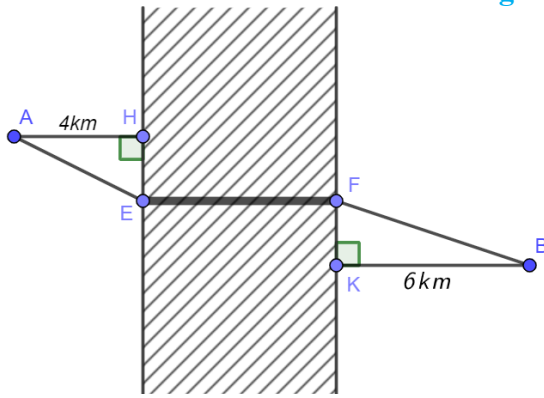
Khi đó

$$\text{Suy ra } OM \geq 2\sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $2x^2 = \frac{4}{x^2} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$

Vậy độ dài tuyến cáp treo ngắn nhất bằng $OM \geq 2\sqrt{\sqrt{2} - 1} \approx 1,29$.

Câu 10. Hai thành phố A và B cách nhau một con sông. Người ta xây dựng một cây cầu EF bắc qua sông. Biết rằng thành phố A cách con sông một khoảng là $4km$ và thành phố B cách con sông một khoảng là $6km$ (hình vẽ), biết $HE + KF = 20km$ và độ dài EF không đổi. Hỏi xây cây cầu tại vị trí E cách thành phố A là bao nhiêu km để đường đi từ thành phố A đến thành phố B là ngắn nhất (đi theo đường $AEFB$)? (kết quả làm tròn đến phần trăm).



Lời giải

Đặt $HE = x$, $FK = y$, với $x, y > 0$

Ta có: $HE + KF = 20 \Rightarrow x + y = 20$,
$$\begin{cases} AE = \sqrt{16 + x^2} \\ BF = \sqrt{36 + y^2} = \sqrt{36 + (20 - x)^2} \end{cases}$$

Nhận xét: Vì EF không đổi nên AB ngắn nhất khi $AE + BF$ nhỏ nhất.

Ta có $AE + BF = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{(20 - x)^2 + 36} = \sqrt{x^2 + 16} + \sqrt{x^2 - 40x + 436} = f(x)$

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} + \frac{x - 20}{\sqrt{x^2 - 40x + 436}}, \forall x \in (0; 20)$$

Cho $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 8$

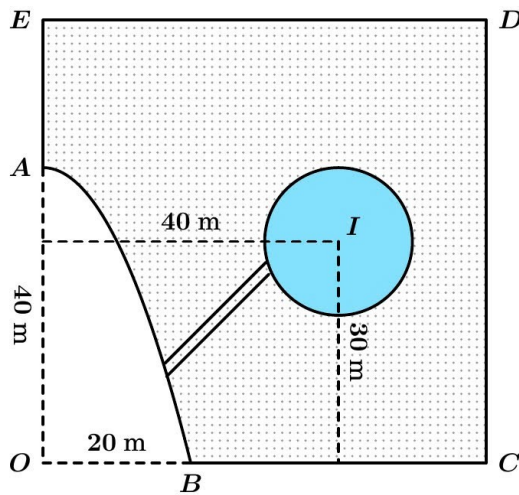
Bảng biến thiên

x	0	8	20	
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$			$10\sqrt{5}$	

Vậy $AE = \sqrt{8^2 + 16} \approx 8,94 \text{ km}$

Câu 11. Một cái ao có hình $ABCDE$ (như hình vẽ), ở giữa ao có một mảnh vườn hình tròn bán kính 10m, người ta muốn bắc một cây cầu từ bờ AB của ao đến vườn. Hỏi độ dài ngắn nhất l (đơn vị mét) của cây cầu là bao nhiêu (làm tròn đến chữ số hàng phần chục), biết:

- Hai bờ AE và BC nằm trên hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai đường thẳng này cắt nhau tại điểm O ;
- Bờ AB là một phần của một parabol có đỉnh là điểm A và có trục đối xứng là đường thẳng OA ;
- Độ dài đoạn OA và OB lần lượt là 40m và 20m;
- Tâm I của mảnh vườn cách đường thẳng AE và BC lần lượt là 40m và 30m.



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Đề các vuông góc như sau: Gốc O, chiều dương trục hoành là tia OC, chiều dương trục tung là tia OE, đơn vị hai trục là đơn vị độ dài (1m).

Khi đó ta có phương trình Parabol là: $y = -\frac{1}{10}x^2 + 40$ và phương trình đường tròn là: $(x-40)^2 + (y-30)^2 = 100$

Đường tròn có tâm $I(40; 30)$ và bán kính $R = 10$

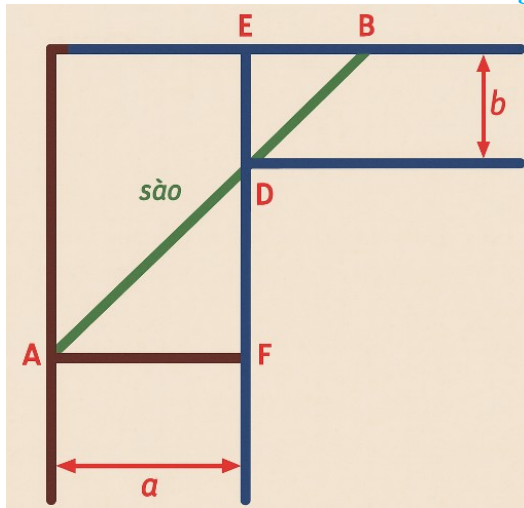
Lấy điểm $M\left(t; -\frac{1}{10}t^2 + 40\right)$ (với $0 \leq t \leq 20$) nằm trên parabol thì khoảng cách ngắn nhất từ M

đến đường tròn là $IM - R = \sqrt{\frac{1}{100}t^4 - t^2 - 80t + 1700} - 10$

Tìm GTNN của hàm số $f(t) = \frac{1}{100}t^4 - t^2 - 80t + 1700$ trên đoạn $[0; 20]$ ta được $\min_{[0; 20]} f(t) \approx 768,0877$

Do đó độ dài ngắn nhất $l \approx \sqrt{768,0877} - 10 \approx 17,7$.

Câu 12. Để chặn đường hành lang hình chữ L, người ta dùng một que sào thẳng dài đặt kín những điểm chạm với hành lang (như hình vẽ). Biết $a = 24$ và $b = 3$, Biết chiều dài tối thiểu của que sào thỏa mãn điều kiện trên là l . Tính giá trị của l^2 .

**Lời giải**

Đặt các điểm như hình vẽ.

Đặt $DF = x$, $x > 0$, ta có $\triangle ADF$ đồng dạng với $\triangle BED$ nên $\frac{EB}{ED} = \frac{AF}{DF} \Rightarrow EB = \frac{ab}{x}$.

Gọi l là chiều dài của que sào, ta có $l^2 = AB^2 = (x+b)^2 + \left(a + \frac{ab}{x}\right)^2 = f(x)$.

$$f'(x) = 2(x+b) - 2\frac{ab}{x^2}\left(a + \frac{ab}{x}\right) = 2(x+b)\left(1 - \frac{a^2b}{x^3}\right); f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{a^2b} = 12.$$

Xét bảng sau:



Vậy giá trị nhỏ nhất của que sào là $l = \sqrt{1125}$. Giá trị $l^2 = 1125$.

Câu 13. Một gia đình đan lưới đánh cá, mỗi ngày đan được x mét lưới ($1 \leq x \leq 18$). Tổng chi phí sản xuất x mét lưới, tính bằng nghìn đồng, cho bởi hàm chi phí:

$$C(x) = x^3 - 3x^2 - 20x + 500$$

Giả sử gia đình làm nghề đan lưới bán hết sản phẩm mỗi ngày với giá 220 nghìn đồng/mét.

Gọi $L(x)$ là lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới.

Hỏi lợi nhuận tối đa của gia đình đan lưới trong một ngày (đơn vị tính nghìn đồng)?

Đáp án: 1200.

Lời giải

Số tiền thu về khi bán x mét lưới là: $220x$.

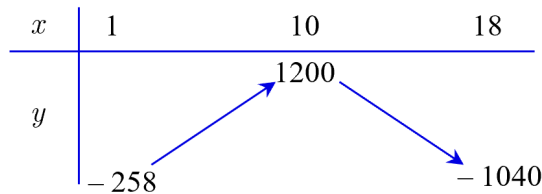
Lợi nhuận thu được khi bán x mét lưới là:

$$L(x) = 220x - (x^3 - 3x^2 - 20x + 500) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$$

Xét hàm số $L(x) = -x^3 + 3x^2 + 240x - 500$ với $x \in [1; 18]$

$$L'(x) = -3x^2 + 6x + 240, \quad L'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \in [1; 18] \\ x = -8 \notin [1; 18] \end{cases}$$

Bảng biến thiên



Vậy gia đình đan lưới trong một ngày thu được lợi nhuận tối đa là 1200 nghìn đồng khi đan 10 mét lưới trong một ngày.

Câu 14. Khi sản xuất vỏ lon sữa DUTCH LADY, các nhà sản xuất luôn đặt tiêu chí sao cho chi phí sản xuất vỏ lon là nhỏ nhất. Biết rằng lon sữa có hình trụ và thể tích của lon sữa là 530 cm^3 . Khi diện tích toàn phần của lon sữa nhỏ nhất thì bán kính đáy của nó bằng bao nhiêu centimet? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp số: 4,39.

Gọi r, h lần lượt là bán kính đáy và chiều cao của lon sữa.

Điều kiện: $r > 0, h > 0$

+ Ta có: $V = 530 \Rightarrow \pi r^2 h = 530 \Rightarrow h = \frac{530}{\pi r^2}$

+ Diện tích toàn phần của lon sữa là:

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2 = \frac{1060}{r} + 2\pi r^2$$

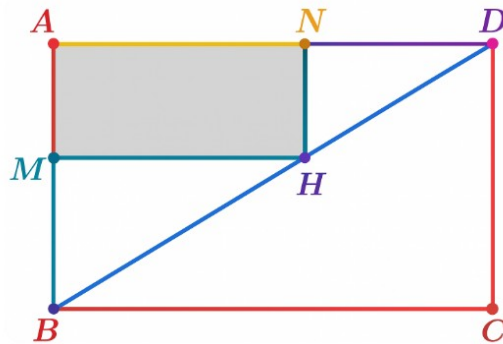
+ Ta có: $S' = -\frac{1060}{r^2} + 4\pi r = 0 \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{265}{\pi}}$

+ Bảng biến thiên:

r	0	$\sqrt[3]{\frac{265}{\pi}}$	$+\infty$
S'	-	0	+
S			

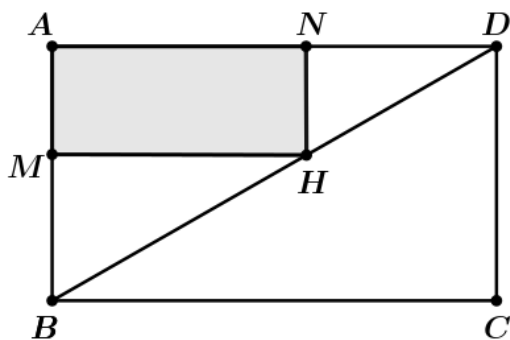
Vậy: $S_{\min} \Leftrightarrow r = \sqrt[3]{\frac{265}{\pi}} \approx 4,39$

Câu 15. Trên mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích 25m^2 , người chủ lấy một phần đất để trồng cỏ. Biết phần đất trồng cỏ này có dạng hình chữ nhật với hai đỉnh đối diện là A và H , với H thuộc cạnh BD . Hỏi số tiền lớn nhất người chủ cần chuẩn bị để trồng cỏ (miền tô đậm) là bao nhiêu (làm tròn đến nghìn đồng) với chi phí trồng cỏ là 70.000 đồng/ m^2 ?



Lời giải

Đáp án: 438



Ta có $AB \cdot AD = 25(\text{m}^2)$; $\frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA}$.

Đặt $\frac{NH}{AB} = \frac{DN}{DA} = x \Rightarrow NH = x \cdot AB; AN = (1-x) \cdot AD$

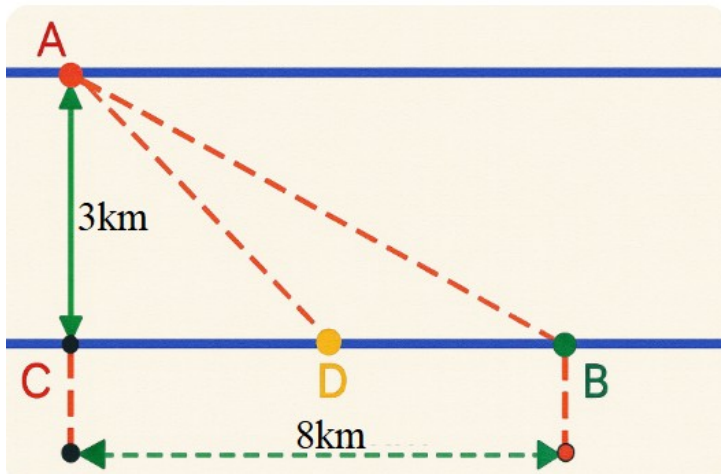
Diện tích đất trồng cỏ là: $S = AN \cdot NH = x \cdot (1-x) \cdot AB \cdot AD = 25 \cdot x \cdot (1-x)$

Diện tích lớn nhất khi $x \cdot (1-x)$ lớn nhất mà $x \cdot (1-x) \leq \frac{(x+1-x)^2}{4} = \frac{1}{4}$

Diện tích đất trồng cỏ lớn nhất $S = \frac{1}{4} \cdot 25 = \frac{25}{4}$

Số tiền lớn nhất để trồng cỏ: $T = \frac{25}{4} \cdot 70000 = 437500$ (đồng) ≈ 438 (nghìn đồng)

- Câu 16.** Anh An muốn di chuyển từ vị trí A đến điểm B càng nhanh càng tốt (như hình vẽ). Để di chuyển từ vị trí A đến điểm B anh An có thể chèo thuyền của mình trực tiếp qua sông để đến C và sau đó chạy đến B , hay có thể chèo thuyền trực tiếp đến B , hoặc anh ta có thể chèo thuyền đến một điểm D nằm giữa B và C sau đó chạy đến B . Biết anh ấy có thể chèo thuyền với vận tốc 6km/h , chạy với vận tốc 8km/h , $AC = 3\text{km}$, $BC = 8\text{km}$ và vận tốc dòng nước là không đáng kể so với vận tốc chèo thuyền của anh An. Tìm khoảng thời gian nhanh nhất (đơn vị: giờ) để anh An đến B (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp số: 1,33

Đặt $CD = x \text{ (km)}$ ($0 \leq x \leq 8$), $AD = \sqrt{9 + x^2}$

Giả sử để đi từ A đến B anh An bơi thuyền từ A tới D sau đó chạy đến B .

Thời gian bơi thuyền từ A tới D là: $\frac{\sqrt{9+x^2}}{6}$, thời gian đi từ D tới B là: $\frac{8-x}{8}$.

Tổng thời gian là: $f(x) = \frac{\sqrt{9+x^2}}{6} + \frac{8-x}{8}$;

$$f'(x) = \frac{x}{6\sqrt{9+x^2}} - \frac{1}{8}; \quad f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9}{\sqrt{7}} \in [0; 8]$$

x	0	$\frac{9}{\sqrt{7}}$	8
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$	$\frac{\sqrt{73}}{6}$

Từ bảng biến thiên, ta có $\min_{[0;8]} f(x) = 1 + \frac{\sqrt{7}}{8}$.

Vậy thời gian nhanh nhất để anh An đi từ A đến B là $1 + \frac{\sqrt{7}}{8} \approx 1,33$.

Câu 17. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ (với $a, b \in \mathbf{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ. Đạo hàm của hàm số $y = P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ. Tìm số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm tốc độ sinh trưởng của quần thể đạt mức tối đa.

Lời giải

Đáp số: 30

Theo đề bài ta có tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 20 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 10 tế bào/giờ suy ra $P(0) = 20$ và $P'(0) = 10$, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{a}{b+1} = 20 \\ \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 10 \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{b+1} : \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 20 : 10 \Rightarrow \frac{b+1}{0,75} = 2 \Rightarrow b = \frac{1}{2} \Rightarrow a = 30$$

$$P'(t) = \frac{0,75a \cdot e^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2} = \frac{22,5e^{-0,75t}}{(0,5 + e^{-0,75t})^2}, \forall t \geq 0$$

Xét hàm số

$$\text{Đặt } m = e^{-0,75t}, \forall t \geq 0 \Rightarrow 0 < m \leq 1$$

$$P'(m) = \frac{22,5m}{(0,5 + m)^2} \Rightarrow P'' = \frac{-22,5m^2 + 5,625}{(0,5 + m)^4} = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$$

Bảng biến thiên

m	0	$\frac{1}{2}$	1
P'	0	11,25	-10

Suy ra giá trị lớn nhất của tốc độ sinh trưởng của quần thể khi $m = \frac{1}{2} \Rightarrow t = -\frac{4}{3} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$.

Vậy số lượng tế bào của quần thể nấm men tại thời điểm $t = -\frac{4}{3} \ln\left(\frac{1}{2}\right)$ là $P = 30$ tế bào.

Câu 18. Một khu vui chơi giải trí giành cho trẻ em đang có kế hoạch điều chỉnh giá vé để tăng lợi nhuận. Sau khi khảo sát thị trường, người ta xác định được rằng: nếu giá vé vào cửa là 50000/người thì trung bình có 500 người đến. Nhưng nếu tăng thêm 1000/người thì sẽ mất 10 khách hàng hoặc giảm đi 1000/người thì sẽ có thêm 10 khách hàng trong số trung bình. Biết rằng, trung bình, mỗi khách hàng còn đem lại 5000 lợi nhuận trong các dịch vụ đi kèm. Hỏi giá vé vào cửa là bao nhiêu nghìn đồng để thu nhập là lớn nhất?



Lời giải

Đáp án: 47,5 (nghìn đồng).

Gọi giá vé vào cửa sau khi điều chỉnh là $50 + x$ (nghìn đồng); điều kiện:
 $50 + x > 0 \Leftrightarrow x > -50$.

Số khách hàng đến sau khi điều chỉnh giá vé là $500 - 10x$ (người).

Khi đó tổng thu nhập là:

$$\begin{aligned} f(x) &= (50 + x)(500 - 10x) + 5 \cdot (500 - 10x) \\ &= -10x^2 - 50x + 27500 \end{aligned}$$

Xét hàm số: $f(x) = -10x^2 - 50x + 27500$

Bảng biến thiên:

x	-50		$-\frac{5}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	5000	↗		$\frac{55125}{2}$	↘
					$-\infty$

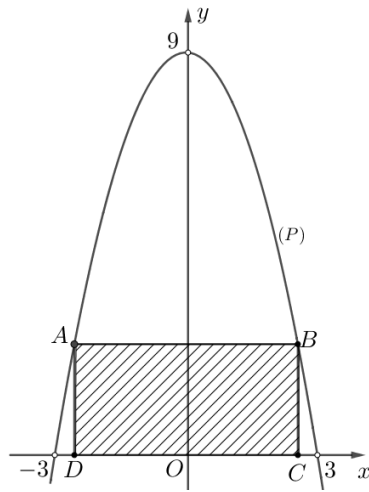
$$f(x) \quad x = -\frac{5}{2}$$

Dựa vào bảng biến thiên, ta có $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = -\frac{5}{2}$.

$$50 - \frac{5}{2} = 47,5$$

Vậy để thu nhập lớn nhất thì giá vé vào cửa là 47,5 (nghìn đồng).

Câu 19. Một hình chữ nhật $ABCD$ được vẽ bên trong parabol (P) sao cho A, B thuộc (P) ; C, D thuộc trục Ox như hình vẽ (đơn vị trên trục Ox, Oy là mét). Hình chữ nhật $ABCD$ có diện tích lớn nhất là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

Đáp án: 20,8.

Đồ thị (P) nhận Oy làm trục đối xứng nên có phương trình $y = ax^2 + c$.

Do (P) đi qua điểm $(0; 9)$ và $(3; 0)$ nên ta có hệ $\begin{cases} c = 9 \\ 9a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 9 \\ a = -1 \end{cases}$.

Ta thu được $(P): y = -x^2 + 9$.

Giả sử $C(m; 0)$, $(0 < m < 3)$, khi đó $B(m; -m^2 + 9)$.

Ta có $AB = 2m$ và $BC = -m^2 + 9$.

Diện tích hình chữ nhật là $S_{ABCD} = AB \cdot BC = 2m(-m^2 + 9) = -2m^3 + 18m$.

Xét hàm số $f(m) = -2m^3 + 18m$ với $m \in (0; 3)$.

Ta có $f'(m) = -6m^2 + 18$, $f'(m) = 0 \Leftrightarrow -6m^2 + 18 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{3}$ (do $m > 0$).

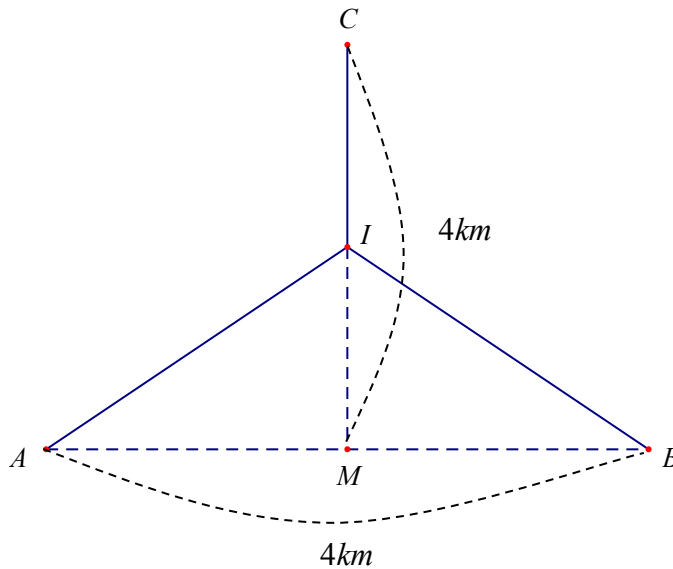
Bảng biến thiên của $f(m)$:

m	0	$\sqrt{3}$	3
$f'(m)$	+	0	-
$f(m)$	0	$12\sqrt{3}$	0

Suy ra $\max S_{ABCD} = 12\sqrt{3} \approx 20,8$.

Vậy diện tích lớn nhất có thể của hình chữ nhật $ABCD$ xấp xỉ $20,8 m^2$.

Câu 20. Hai nhà máy sản xuất đặt tại các vị trí A và B cách nhau $4km$. Một nhà máy cung cấp nước được đặt ở vị trí C nằm trên đường trung trực của đoạn thẳng AB , cách trung điểm M của đoạn thẳng AB một khoảng $4km$. Người ta muốn làm một đường ống dẫn nước từ nhà máy nước C đến một vị trí I nằm giữa đoạn thẳng MC sau đó chia ra hai nhánh dẫn tới hai nhà máy A và B (hình vẽ). Tổng độ dài đường ống dẫn nước nhỏ nhất bằng bao nhiêu km ? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 7,46.

+ Gọi $CI = x(km)$, $(0 \leq x \leq 4) \Rightarrow IM = 4 - x$.

+ Khi đó, $IA = IB = \sqrt{4 + (4 - x)^2} = \sqrt{20 - 8x + x^2}$ (Định lý Pi-ta-go).

Tổng độ dài đường ống dẫn nước là $T = CI + IA + IB = x + 2\sqrt{x^2 - 8x + 20}$.

Xét $T(x) = x + 2\sqrt{x^2 - 8x + 20}$, $0 \leq x \leq 4$.

$$T'(x) = 1 + \frac{2x - 8}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}}$$

$$\text{Xét } T'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 + \frac{2x - 8}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 8x + 20} = -(2x - 8)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ x^2 - 8x + 20 = (2x - 8)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 4 \\ 3x^2 - 24x + 44 = 0 \end{cases}$$

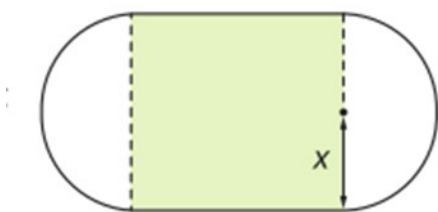
$$\Leftrightarrow x = \frac{12 - 2\sqrt{3}}{3} \quad (\text{thỏa mãn điều kiện})$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	0	$\frac{12-2\sqrt{3}}{2}$	4	$+\infty$
T'			$-$	0	$+$
T				$4 + 2\sqrt{3}$	

Tổng độ dài đường ống dẫn nước nhỏ nhất xấp xỉ bằng $7,46\text{km}$.

Câu 21. Một sân điền kinh gồm hai sân hình bán nguyệt có bán kính $x(\text{m})$ ($x > 0$) và một sân hình chữ nhật như hình vẽ. Biết chu vi của sân điền kinh là 400 m , tìm diện tích lớn nhất của sân hình chữ nhật theo mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 6366.

Chu vi phần hình bán nguyệt là $2\pi x$.

Độ dài cạnh còn lại của hình chữ nhật là $200 - \pi x$.

Diện của sân hình chữ nhật là $S(x) = 2x(200 - \pi x) = 400x - 2\pi x^2$.

$$S'(x) = 400 - 4\pi x$$

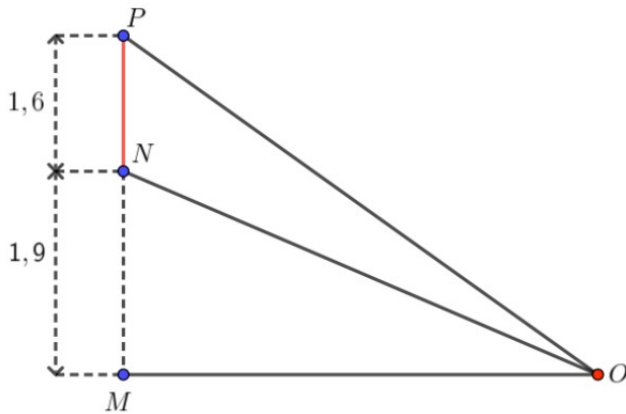
$$S'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{100}{\pi}$$

x	0	$\frac{100}{\pi}$	$+\infty$
$S'(x)$		$+$	0
$S(x)$			$-$

Vậy diện tích lớn nhất của hình chữ nhật là $S\left(\frac{100}{\pi}\right) \approx 6366 \text{ m}^2$.

Câu 22. Một màn hình NP có chiều cao $1,6$ mét được đặt thẳng đứng và mép dưới của màn hình cách mặt đất một khoảng NM bằng $1,9$ mét. Một chiếc đèn chiếu sáng màn hình đặt ở vị trí O trên

mặt đất (xem hình minh họa). Để góc chiếu sáng $\widehat{NOP}$ lớn nhất thì độ dài đoạn OM bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 2,59

Đặt $OM = x(m)$. Ta có:

$$\frac{NP}{\sin \widehat{NOP}} = \frac{ON}{\sin \widehat{OPM}} \Leftrightarrow \sin \widehat{NOP} = \frac{NP \cdot \sin \widehat{OPM}}{ON}$$

$$\Rightarrow \sin \widehat{NOP} = \frac{NP \cdot \frac{OM}{OP}}{ON} = \frac{NP \cdot OM}{\sqrt{OM^2 + MN^2} \cdot \sqrt{OM^2 + MP^2}} = \frac{1,6x}{\sqrt{x^2 + 1,9^2} \cdot \sqrt{x^2 + 3,5^2}}$$

Xét hàm số $y = \frac{1,6x}{\sqrt{x^2 + 1,9^2} \cdot \sqrt{x^2 + 3,5^2}} = \frac{1,6x}{\sqrt{x^4 + 15,86x^2 + 44,2225}}$

$$y' = \frac{1,6(44,2225 - x^4)}{(\sqrt{x^4 + 15,86x^2 + 44,2225})^3}$$

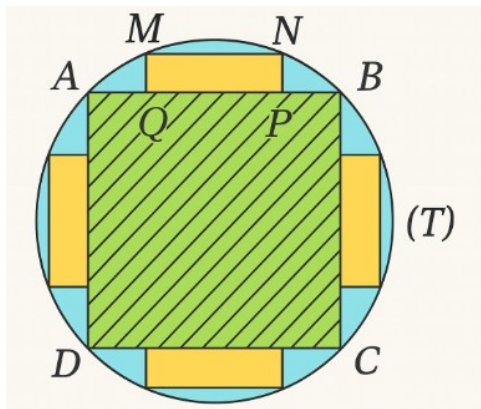
$$y' = 0 \Leftrightarrow x^4 = 44,2225 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{665}}{10} \approx \pm 2,59$$

Lập bảng biến thiên với điều kiện $x > 0$ ta được giá trị lớn nhất của y đạt được tại $x = 2,59$.

Ta thấy $\widehat{NOP}$ lớn nhất khi và chỉ khi $\sin \widehat{NOP}$ lớn nhất hay y lớn nhất.

Vậy $x = OM = 2,59$.

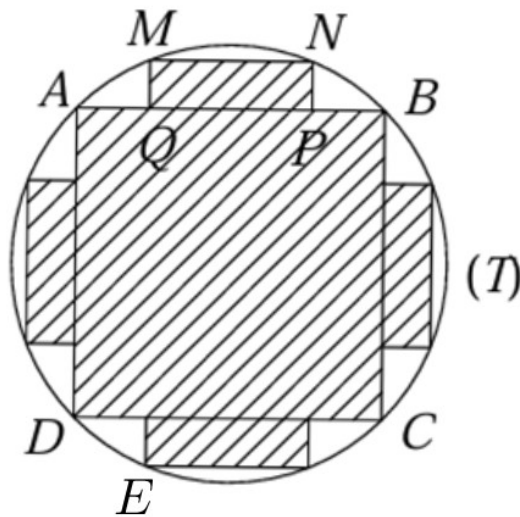
Câu 23. Bác Bình sử dụng một khúc gỗ hình trụ có đường kính bằng 32 cm để làm một chiếc xà nhà. Để đảm bảo tính thẩm mỹ thì bác Bình dự định sẽ cho thợ xẻ khúc gỗ thành một chiếc xà có tiết diện ngang (là miền gạch sọc như hình vẽ bên) bao gồm một hình vuông $ABCD$ và 4 miếng phụ là 4 hình chữ nhật bằng nhau. Bốn điểm A, B, C, D nằm trên đường tròn (T) ; miếng phụ $MNPQ$ có hai đỉnh M, N nằm trên đường tròn (T) và hai đỉnh P, Q nằm trên cạnh AB . Mặt khác, diện tích của tiết diện ngang càng lớn thì chiếc xà chịu lực càng tốt. Hỏi bác Bình có thể tạo ra một tiết diện ngang có diện tích lớn nhất bằng bao nhiêu centimet vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Đáp án: 684.

Đặt $MQ = x$, $MN = y$ (Đk: $0 < x, y < 8\sqrt{2}$)



Có $AC = 32 = NE$ và $AD = \frac{32}{\sqrt{2}} = 16\sqrt{2}$, $ME = 16\sqrt{2} + 2x$.

Xét tam giác MNE : $NE^2 = ME^2 + MN^2$

$$\Rightarrow y = \sqrt{512 - 64\sqrt{2}x - 4x^2}$$

Do đó $S_{MNPQ} = x \cdot y = x\sqrt{512 - 64\sqrt{2}x - 4x^2}$

$$= \sqrt{512x^2 - 64\sqrt{2}x^3 - 4x^4}$$

Xét hàm số $f(x) = 512x^2 - 64\sqrt{2}x^3 - 4x^4$, $x \in (0; 8\sqrt{2})$.

Ta có $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1024x - 192\sqrt{2}x^2 - 16x^3 = 0$

Sử dụng casio, ta tìm được $x_0 \approx 3,17$.

Khi đó: $(S_{MNPQ})_{\max} = \sqrt{f(x_0)} \approx 43,1$

Vậy $S_{\max} = S_{ABCD} + 4\sqrt{f(x_0)} = (16\sqrt{2})^2 + 4.43,1 \approx 684$

- Câu 24.** Trong vật lý, một dao động điều hòa là dao động có phương trình chuyển động $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ trong đó A là biên độ của dao động, $\omega(\text{rad/s})$ là tần số góc, $\varphi(\text{rad})$ là pha ban đầu. Động năng (Tiếng Anh: Kinetic energy) của một vật là năng lượng nó có được từ chuyển động của nó, được xác định bởi công thức $W = \frac{1}{2} m \cdot v^2(t)$ (đơn vị J). Trong đó $m(\text{kg})$ là khối lượng của vật, $v(t)(\text{m/s})$ là vận tốc của vật tại thời điểm $t(\text{s})$. Giả sử một vật có khối lượng $m = 100\text{g}$ dao động điều hòa với phương trình chuyển động $x(t) = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{cm})$. Khi đó, động năng vật đó đạt giá trị lớn nhất bằng bao nhiêu (J) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Lời giải

Đáp án: 3158.

Ta có $v(t) = 40 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{cm}) = 0,4 \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)(\text{m})$

$v(t) = x'(t) = -80\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$

$m = 100\text{g} = 0,1\text{kg}$

Suy ra: $W = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot \left[-80\pi \sin\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)\right]^2 \Leftrightarrow W = 320\pi^2 \sin^2\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$

Ta có: $0 \leq \sin^2\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1 \Rightarrow 0 \leq W \leq 320\pi^2$

$W_{\max} = 320\pi^2 \approx 3158(J) \Leftrightarrow \sin^2\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(200\pi t - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

Vậy động năng đạt giá trị lớn nhất bằng $3158(J)$.

- Câu 25.** Nếu một điện trở R được nối với một ắc-quy có suất điện động E và điện trở trong r thì công suất tiêu thụ trên điện trở R là $P = \frac{E^2 R}{(R+r)^2}$, trong đó R, r được tính bằng ôm (Ω), E được tính bằng vôn (V) và P được tính bằng oát (W). Cho $E = 12(V)$ và $r = 2(\Omega)$, còn R biến thiên thì công suất P đạt giá trị cực đại bằng bao nhiêu W ?

Lời giải

Trả lời: 18

Khi $E = 12(V)$ và $r = 2(\Omega)$, thì $P = \frac{144R}{(R+2)^2}$.

Xét hàm số $P = \frac{144R}{(R+2)^2}$ với $R \in (0; +\infty)$.

$$P'(R) = \frac{144(R+2)(2-R)}{(R+2)^4} = 0 \Leftrightarrow R = 2$$

Ta có

Khi đó $P(R)$ đạt giá trị cực đại tại $R = 2$ và $\max_{(0; +\infty)} P = P(2) = 18$.

Vậy công suất P đạt cực đại bằng $18(W)$.

Câu 26. Hiệu quả nhiên liệu E , tính bằng số kilômét đi được trên mỗi lít xăng (km/l) , của một mẫu xe ô tô được mô hình hóa theo tốc độ $v (km/h)$ bằng công thức sau: $E(v) = -0,000025v^3 + 0,003v^2 + 13,5$. Mô hình này được áp dụng cho các tốc độ v từ $20 km/h$ đến $120 km/h$ ($20 \leq v \leq 120$). Tìm giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất (tức là đi được nhiều km nhất trên mỗi lít xăng, làm tròn đến hàng phần mười)?

Lời giải

Đáp án: 19,9

Ta có: $E'(v) = -0,000075v^2 + 0,006v$

$$E'(v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} v = 0 \\ v = 80 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số $E(v)$ với $20 \leq v \leq 120$ như sau:

v	20	80	120
$E'(v)$	+	0	-
$E(v)$	$E(20)$	$E(80)$	$E(120)$

Do đó giá trị nhiên liệu hiệu quả nhất là $E(80) = 19,9$.

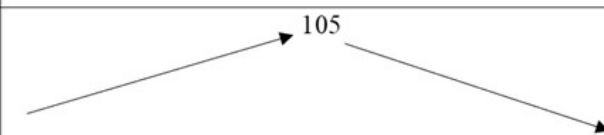
Câu 27. Một vật chuyển động theo quy luật $s = -2t^3 + 24t^2 + 9t - 3$ với t là khoảng thời gian tính từ lúc bắt đầu chuyển động và s là quãng đường vật đi được trong khoảng thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 105.

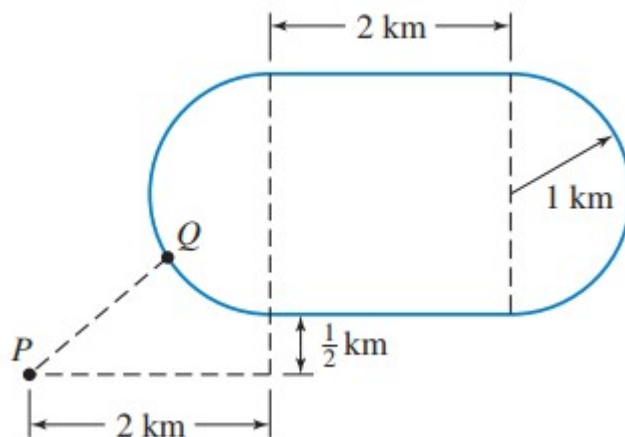
Ta có $v(t) = s'(t) = -6t^2 + 48t + 9 \Rightarrow v'(t) = -12t + 48$

Khi đó $v'(t) = 0 \Leftrightarrow -12t + 48 = 0 \Leftrightarrow t = 4$

t	0	4	10	
$v'(t)$		+	0	-
$v(t)$				

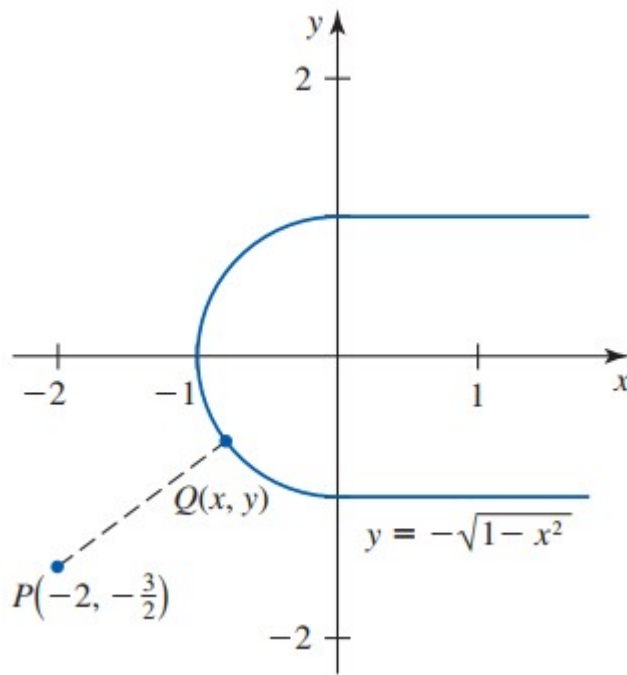
Do đó vận tốc lớn nhất của vật đạt được bằng $v(4) = 105$.

Câu 28. Hình cho thấy một mặt bằng đường đua bao gồm hai cạnh của một hình chữ nhật và hai nửa đường tròn. Ngoài ra còn cho vị trí P của một khán giả đang xem đua từ trên nóc xe của mình. Hãy tìm điểm Q trên đường đua sao cho khoảng cách từ P đến đường đua là nhỏ nhất. Tính khoảng cách giữa hai điểm đó.



Lời giải

Rõ ràng điểm cần tìm phải nằm trên cung nửa đường tròn ở góc dưới bên trái của đường đua. Chúng ta thiết lập hệ tọa độ như ở Hình 8, với tâm của hình tròn ở gốc tọa độ và bán kính bằng 1.



Phương trình của đường tròn là $x^2 + y^2 = 1$

Do chỉ xét nửa dưới bên trái, tức $x \leq 0$ và $y \leq 0$, ta giải được $y = -\sqrt{1-x^2}$, $-1 \leq x \leq 0$ (1)

Gọi D là khoảng cách giữa $P\left(-2, -\frac{3}{2}\right)$ và một điểm $Q(x, y)$ trên cung.

Áp dụng công thức khoảng cách,

$$D = \sqrt{(x - (-2))^2 + \left(y - \left(-\frac{3}{2}\right)\right)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2}$$

Do đó

$$D^2 = (x+2)^2 + \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 4x + 4 + y^2 + 3y + \frac{9}{4} \quad (2)$$

Vì D nhỏ nhất khi và chỉ khi D^2 nhỏ nhất, ta sẽ đi tìm cực tiểu của D^2 .

Thay y từ (1) vào (2):

$$D^2 = x^2 + 4x + 4 + (1 - x^2) - 3\sqrt{1-x^2} + \frac{9}{4} = 4x - 3\sqrt{1-x^2} + \frac{29}{4}$$

Vậy bài toán tương đương với việc tìm $x \in [-1, 0]$ để hàm $f(x) = 4x - 3\sqrt{1-x^2} + \frac{29}{4}$ nhận giá trị nhỏ nhất.

- Tính đạo hàm:

$$f'(x) = \left[4x - 3(1-x^2)^{1/2} + \frac{29}{4} \right]' = 4 - 3 \cdot \frac{1}{2}(1-x^2)^{-1/2} \cdot (-2x) = 4 + \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}}$$

- Giải $f'(x) = 0$:

$$4 + \frac{3x}{\sqrt{1-x^2}} = 0 \Leftrightarrow 3x = -4\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow 9x^2 = 16(1-x^2) \Leftrightarrow 25x^2 = 16$$

cho $x = \pm \frac{4}{5}$. Trong đó chỉ $x = -\frac{4}{5}$ nằm trong $[-1, 0]$.

So sánh giá trị:

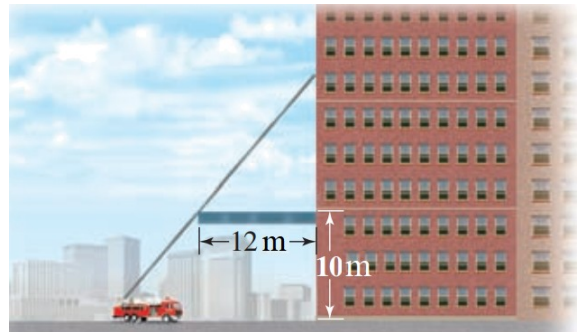
$f(-1)$	$f(-\frac{4}{5})$	$f(0)$
$\frac{13}{4} = 3.25$	$\frac{9}{4} = 2.25$	$\frac{17}{4} = 4.25$

Như vậy f nhỏ nhất bằng 2.25 tại $x = -\frac{4}{5}$. Từ (7) ta có $y = -\sqrt{1 - \left(-\frac{4}{5}\right)^2} = -\frac{3}{5}$

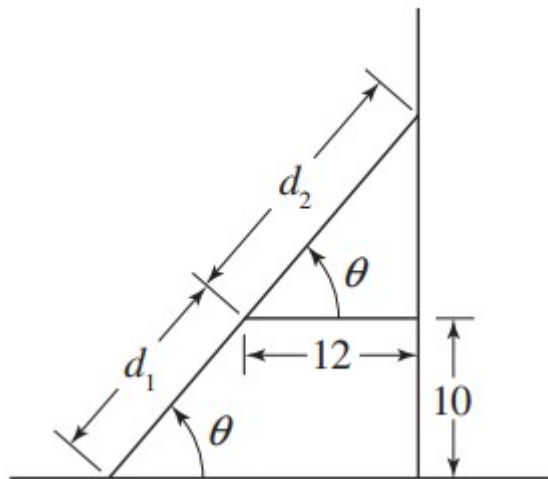
Do đó điểm cần tìm là $Q\left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

Khoảng cách từ P đến Q là $D = \sqrt{f\left(-\frac{4}{5}\right)} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ hay 1,5(km).

Câu 29. Hình bên mô tả một mặt cắt ngang của một tòa nhà cao tầng. Một chiếc thang từ xe cứu hỏa lên đến mặt tường phía trước của tòa nhà phải vượt qua phần mái che cao hơn 10m so với mặt đất và vùng mái này nhô ra 12m so với tường. Giả sử, độ cao của xe cứu hỏa là không đáng kể, hãy tìm độ dài ngắn nhất của chiếc thang để các lính cứu hỏa có thể thực hiện nhiệm vụ này (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải



Đặt L là độ dài của chiếc thang, và θ là góc tạo bởi thang với phương ngang, gọi d_1 là đoạn thẳng từ mặt đất lên tới mái hiên, d_2 là đoạn từ mái hiên tới tường. Khi đó

$$L = d_1 + d_2 = \frac{10}{\sin \theta} + \frac{12}{\cos \theta}$$

Miền xác định của $L(\theta)$ là $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Hàm số $f(\theta) = \frac{10}{\sin \theta} + \frac{12}{\cos \theta}$ liên tục trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Ta tính đạo hàm $f'(\theta) = -\frac{10}{\sin^2 \theta} \cot \theta + \frac{12}{\cos^2 \theta} \tan \theta$

Giải $f'(\theta) = 0$:

$$\frac{12}{\cos \theta} \tan \theta = \frac{10}{\sin \theta} \cot \theta \Rightarrow 12 \frac{1}{\cos \theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = 10 \frac{1}{\sin \theta} \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \Leftrightarrow \frac{\sin^3 \theta}{\cos^3 \theta} = \frac{10}{12} \Leftrightarrow \tan^3 \theta = \frac{5}{6}$$

Do đó $\theta \approx 0,76 \text{ rad}$

Lập bảng xét dấu $f'(\theta)$, ta thấy đây là điểm cực tiểu duy nhất trên $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Cuối cùng $f(0,76) \approx 31,07$ nên độ dài thang ngắn nhất cần thiết là $31,1 \text{ m}$.

Câu 30. Trong khoảng thời gian từ ngày 01/01/2024 đến hết ngày 30/12/2024 nhóm nghiên cứu đã quan sát sự phát triển của một quần thể sinh vật X. Kết quả nghiên cứu chỉ ra rằng, tại ngày thứ t của năm 2024 (tính từ ngày 01/01/2024) số cá thể sinh vật X trong quần thể được ước lượng bởi

hàm số $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$ (con), $0 \leq t \leq 365$ và ngày 26/09/2024 là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con. Ngày 25/11/2014 số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng bao nhiêu nghìn con? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: 49,6

Năm 2024, tháng một có 31 ngày, tháng hai có 29 ngày, tháng ba có 31 ngày, tháng tư có 30 ngày, tháng năm có 31 ngày, tháng sáu có 30 ngày, tháng bảy có 31 ngày, tháng tám có 31 ngày, tháng chín có 30 ngày, tháng mười có 31 ngày, tháng mười một có 30 ngày.

Ta có $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + bt^2 + ct + 12000$

$$f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + 2bt + c$$

Ngày 26/09/2024 ứng với $t = 270$ là ngày có số lượng cá thể sinh vật X nhiều nhất với 55740 con nên hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

$$f'(270) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{100}270^2 + 540b + c = 0 \Leftrightarrow 540b + c = 729 \quad (1)$$

$$f(270) = 55740 \Leftrightarrow -\frac{1}{300}270^3 + b \cdot 270^2 + 270c + 12000 = 55740 \Leftrightarrow 72900b + 270c = 109350 \quad (2)$$

Từ (1), (2) suy ra $b = \frac{6}{5}, c = 81$, vậy hàm số đã cho là $f(t) = -\frac{1}{300}t^3 + \frac{6}{5}t^2 + 81t + 12000$

$$\text{Thử lại } f'(t) = -\frac{1}{100}t^2 + \frac{12}{5}t + 81, \quad f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 270 \\ t = -30 \end{cases} \quad (t)$$

BBT

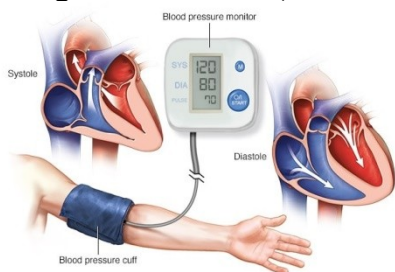
t	0	270	365
$f'(t)$	+	0	-
$f(t)$			

Hàm số đạt cực đại tại $t = 270$.

Ngày 25/11/2014 ứng với $t = 330$, khi đó số lượng cá thể sinh vật X được ước lượng khoảng

bằng:
$$f(330) = -\frac{1}{300}330^3 + \frac{6}{5} \cdot 330^2 + 81 \cdot 330 + 12000 = 49\,620 \quad (\text{con}).$$

Câu 31. Độ giảm huyết áp của một bệnh nhân được cho bởi công thức $G(x) = 0,035x^2(15-x)$, trong đó x là liều lượng thuốc được tiêm cho bệnh nhân (x được tính bằng miligam). Tính liều lượng thuốc cần tiêm (đơn vị miligam) cho bệnh nhân để huyết áp giảm nhiều nhất.



Lời giải

Đáp số 10.

Đk: $x \in [0; 15]$. (vì độ giảm huyết áp không thể là số âm)

Có
$$G'(x) = 0,035[2x(15-x) - x^2] = 0,105x(10-x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 10 \end{cases}$$

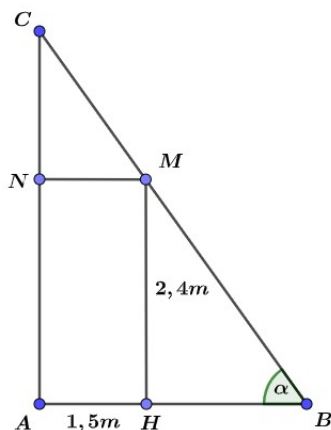
$$G(0) = 0; \quad G(10) = \frac{35}{2}; \quad G(15) = 0.$$

Vậy huyết áp bệnh nhân giảm nhiều nhất khi tiêm cho bệnh nhân liều $x = 10$ miligam.

Câu 32. Một ông chủ nhà muốn làm một cái thang cứu hộ khi có nguy hiểm xảy ra. Ông ta muốn làm cái thang để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (tham khảo hình vẽ). Với hàng rào cao 2,4 mét được đặt song song và cách bức tường của ngôi nhà một khoảng bằng 1,5 mét. Chiều dài ngắn nhất của cây thang bao nhiêu centimet (cm) để nó đứng dưới đất vươn qua hàng rào tựa vào ngôi nhà (làm tròn đến hàng đơn vị)?



Đáp án: 547 .



Gọi góc hợp bởi thang và mặt đất là $\alpha \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \right)$. Chiều dài thang là $BC = BM + MC$.

Tam giác vuông MHB có $BM = \frac{2,4}{\sin \alpha}$. Tam giác vuông MNC có $MC = \frac{1,5}{\cos \alpha}$.

$BC = BM + MC = \frac{2,4}{\sin \alpha} + \frac{1,5}{\cos \alpha}$. Xét hàm số $y = \frac{2,4}{\sin x} + \frac{1,5}{\cos x}$ với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right)$

$$y' = \frac{-2,4 \cdot \cos x}{\sin^2 x} + \frac{1,5 \cdot \sin x}{\cos^2 x} = \frac{-2,4 \cdot \cos^3 x + 1,5 \cdot \sin^3 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x},$$

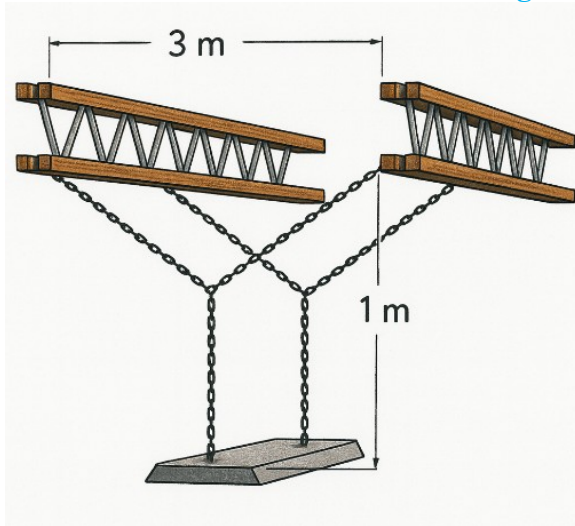
$$y' = 0 \Leftrightarrow 2,4 \cdot \cos^3 x = 1,5 \cdot \sin^3 x \Leftrightarrow \tan^3 x = \frac{2,4}{1,5} \Leftrightarrow \tan x = \sqrt[3]{\frac{8}{5}}, \text{ do } x \in \left(0; \frac{\pi}{2} \right) \text{ nên } x \approx 0,863 \text{ rad}$$

Ta có bảng biến thiên

x	0	0,863	$\frac{\pi}{2}$
y'	-	0	+
y		5,47	

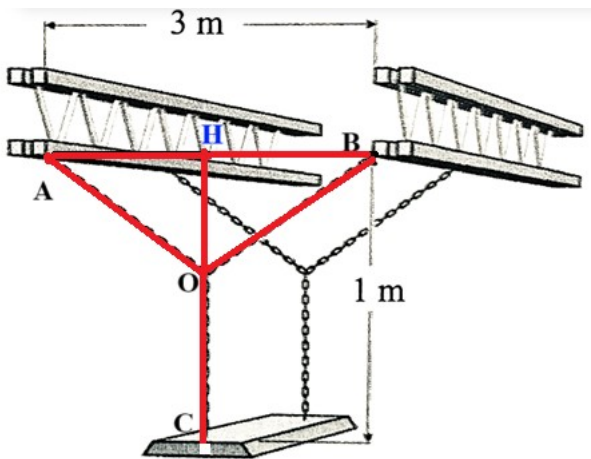
Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy chiều dài thang bé nhất xấp xỉ 5,47 mét hay 547 cm.

Câu 33. Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a + b\sqrt{c}$ (trong đó a, b, c là các số tự nhiên). Tính $a - b - c$.



Lời giải

Đáp án: -4.



Đặt $OH = x (0 \leq x \leq 1)$ ta có $OA = OB = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + x^2}$ và $OC = 1 - x$.

Tổng độ dài các dây xích là

$$L(x) = 2(OA + OB + OC) = 2\left(2\sqrt{\frac{9}{4} + x^2} + 1 - x\right) = 4\sqrt{\frac{9}{4} + x^2} + 2 - 2x$$

$$L'(x) = \frac{4x}{\sqrt{\frac{9}{4} + x^2}} - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{9}{4} + x^2} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 = x^2 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	0	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$L'(x)$	-	0	+
$L(x)$		$2 + 3\sqrt{3}$	

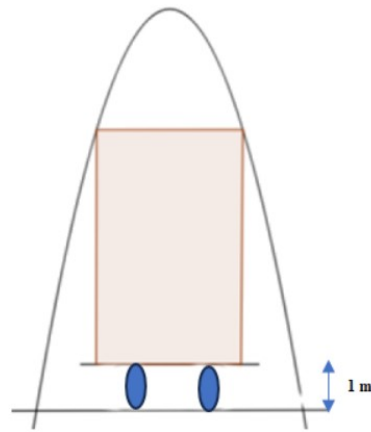
$$L\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + 3\sqrt{3}$$

Vậy chiều dài tối thiểu của dây xích là

$$\begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \Rightarrow a - b - c = -4 \\ c = 3 \end{cases}$$

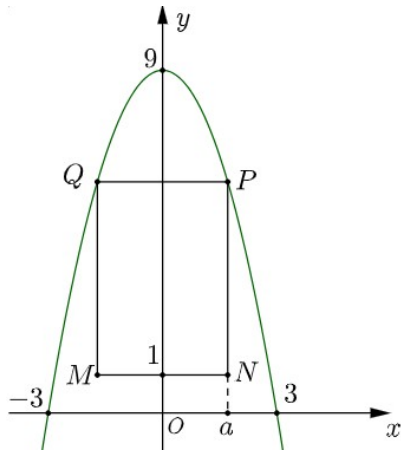
Suy ra

Câu 34. Một chiếc cổng hình Parabol có chiều cao 9 m , khoảng cách giữa hai chân cổng là 6 m . Để vận chuyển thùng hàng hình chữ nhật qua cổng, người ta dùng một xe kéo có chiều cao 1 m . Biết rằng mặt cắt của thùng hàng qua cổng là hình chữ nhật, hỏi diện tích hình chữ nhật đó lớn nhất là bao nhiêu m^2 để xe chở thùng hàng có thể đi qua được cổng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 17,4

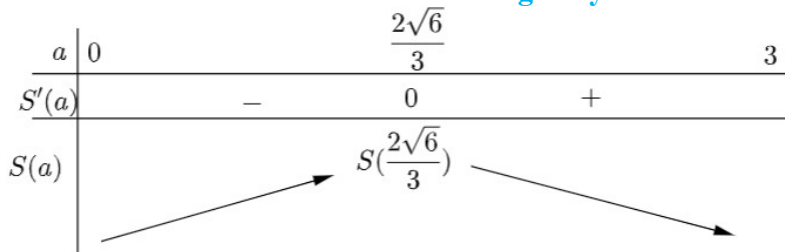


Trong hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, chiếc cổng hình parabol có phương trình $y = -x^2 + 9$. Xe chở hàng có thể đi qua được cổng nếu điểm P thuộc parabol với hoành độ điểm P bằng a , $a \in (0; 3)$. Khi đó tung độ của điểm P bằng $-a^2 + 9$ và

$$\begin{cases} MN = 2a \\ NP = -a^2 + 9 - 1 = -a^2 + 8 \end{cases}$$

Diện tích của hình chữ nhật là $S = MN \cdot NP = 2a \cdot (-a^2 + 8) = -2a^3 + 16a$

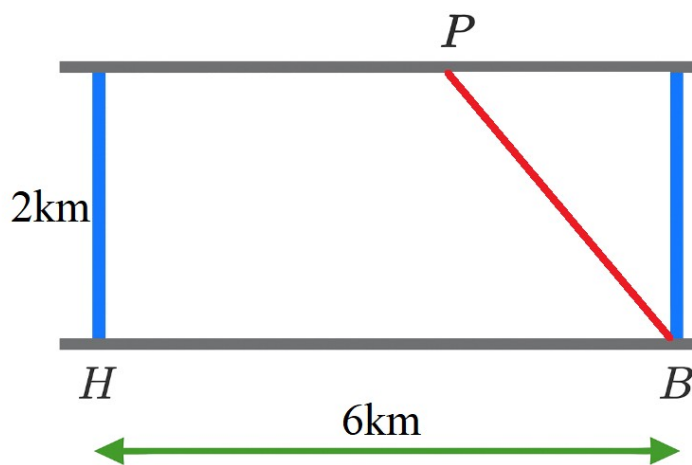
Ta có: $S' = -6a^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow a = \pm \frac{2\sqrt{6}}{3}$. Do $a \in (0; 3)$ nên $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$.



$$S_{\max} = S\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}\right) \approx 17,4 (m^2)$$

Khi đó

- Câu 35.** Người ta muốn lắp một ống dẫn dầu từ nhà máy lọc dầu ở vị trí A đến kho chứa dầu đặt ở vị trí B qua một con sông rộng 2 km , dài 6 km . Chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu trên mặt đất để nối từ nhà máy lọc dầu đến trạm trung chuyển tại vị trí P là 4 tỷ VNĐ/km và chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu dưới dòng sông để nối từ P đến kho chứa dầu tại vị trí B là 8 tỷ VNĐ/km (như hình vẽ)

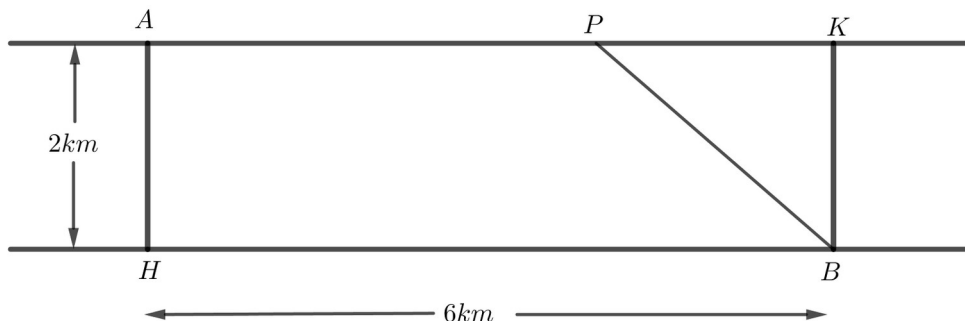


Hỏi chi phí lắp đặt ít nhất, cần đặt vị trí P cách nhà máy lọc dầu là bao nhiêu kilômét? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Đáp án: $4,85$.

Đặt $AP = x$ ($0 \leq x \leq 6$, km).



Khi đó, chiều dài quãng đường $PK = 6 - x$.

Tổng chi phí lắp đặt đường ống dẫn dầu là: $T = 4x + 8\sqrt{(6-x)^2 + 2^2}$.

Ta có $T'(x) = 4 + 8 \frac{x-6}{\sqrt{x^2-12x+40}}$;

$$T'(x) = 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2-12x+40} + 8x - 48 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-12x+40} = 12-2x \text{ (ĐK: } 0 < x \leq 6)$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 - 36x + 104 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{18 \pm 2\sqrt{3}}{3}$$

Kết hợp đk ta thấy: $x = \frac{18-2\sqrt{3}}{3} \approx 4,85$ là nghiệm của pt.

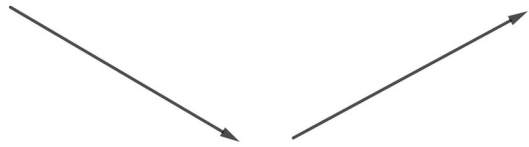
$$T'(x) < 0 \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2-12x+40} + 8x - 48 < 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-12x+40} < 12-2x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12-2x > 0 \\ x^2-12x+40 < 144-48x+4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 6 \\ 3x^2-36x+104 > 0 \end{cases}$$

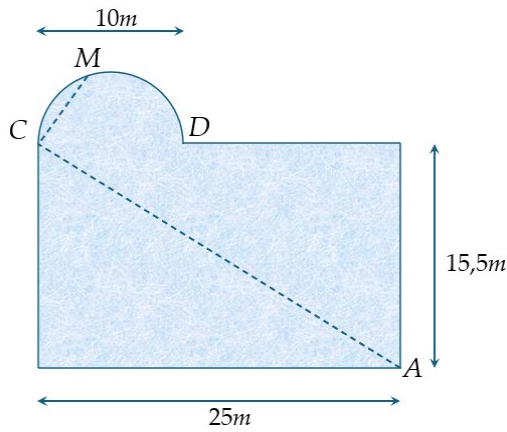
$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{18-2\sqrt{3}}{3} \approx 4,85$$

Từ đây ta có bảng biến thiên

x	0	4,85	6
$T'(x)$	-	0	+
$T(x)$			

Từ bảng biến thiên ta suy ra chi phí thấp nhất khi $x = 4,85$.

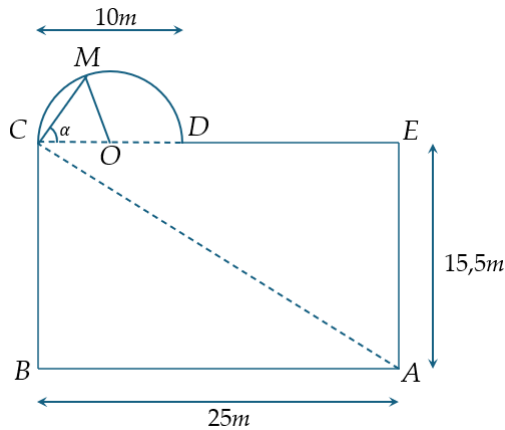
Câu 36. Bạn Hoa thường đi bơi ở hồ Sky Garden cạnh nhà, hồ bơi có thiết kế là một hình chữ nhật với chiều dài 25 m, chiều rộng 15,5 m và bên cạnh đó là một hình bán nguyệt đường kính 10 m. Trong một lần bể bơi vắng người nên Hoa đã thực hiện một chu trình là bơi theo đoạn thẳng AC rồi bơi tiếp đoạn thẳng CM , với M là một vị trí bất kỳ trên hình bán nguyệt. Ngay sau đó bạn đi bộ theo một hướng qua điểm D dọc bờ của hồ bơi để quay lại vị trí A và kết thúc chu trình. (tham khảo hình vẽ).



Biết rằng vận tốc bơi của Hoa là $2,4 \text{ km/h}$, vận tốc đi bộ là $4,8 \text{ km/h}$ và tốc độ bơi, vận tốc đi bộ không thay đổi trong một chu trình. Hỏi thời gian chậm nhất để Hoa thực hiện xong chu trình trên là bao nhiêu phút? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp số: $1,4$ phút.



$$2,4 \text{ km/h} = \frac{2}{3} \text{ m/s}; \quad 4,8 \text{ km/h} = \frac{4}{3} \text{ m/s}.$$

Đổi

Quãng đường Hoa đi hết một chu trình là $AC + CM + MD + DE + EA$.

$$T = \frac{AC + CM}{\frac{2}{3}} + \frac{MD + DE + EA}{\frac{4}{3}}.$$

Tổng thời gian Hoa thực hiện một chu trình là

$$\frac{CM}{\frac{2}{3}} + \frac{MD}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{2}CM + \frac{3}{4}MD$$

Do AC, DE, EA không đổi nên $T_{\max}$ khi đạt giá trị lớn nhất.

$$\angle MCD = \alpha, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \angle MOD = 2\alpha.$$

Đặt

$$CM = 10 \cos \alpha, \quad MD = 10 \alpha \Rightarrow \frac{3}{2}CM + \frac{3}{4}MD = 15 \cos \alpha + \frac{15}{2}\alpha.$$

Suy ra

$$f(\alpha) = 15 \cos \alpha + \frac{15}{2} \alpha, \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$$

Xét hàm số

$$f'(\alpha) = -15 \sin \alpha + \frac{15}{2}, f'(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -15 \sin \alpha + \frac{15}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{6} \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right).$$

Ta có

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(\alpha)$ trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ta có $\max_{\alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)} f(\alpha) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

$$T_{\max} = \frac{3\sqrt{25^2 + 15,5^2}}{2} + \frac{15}{2} \left(\sqrt{3} + \frac{\pi}{6}\right) + \frac{3(15 + 15,5)}{4} \approx 83,9 \approx 1,4$$

Vậy

giờ phút.

Câu 37. Một cửa hàng có bán loại sản phẩm A. Khi cửa hàng bán sản phẩm A với giá 400 ngàn đồng thì mỗi tuần cửa hàng bán được 200 sản phẩm. Cửa hàng dự định có đợt giảm giá bán để kích cầu trong dịp lễ sắp tới. Theo khảo sát thị trường, mỗi lần giảm giá 20 ngàn đồng 1 sản phẩm thì cửa hàng bán thêm được 20 sản phẩm mỗi tuần. Hỏi cửa hàng cần bán một sản phẩm với giá bao nhiêu ngàn đồng thì doanh thu trong 1 tuần lớn nhất.

Lời giải

Đáp án: 300.

Gọi x là số lần giảm giá ($0 \leq x \leq 20$).

Suy giá bán một sản phẩm là: $(400 - 20x)$.

Số sản phẩm bán ra trong tuần là: $200 + 20x$

Doanh thu trong tuần là $f(x) = (200 + 20x) \cdot (400 - 20x)$, $0 < x < 20$

$$f(x) = (200 + 20x) \cdot (400 - 20x) = 20 \cdot 20 \cdot (10 + x)(20 - x) = 400 \cdot (-x^2 + 10x + 200)$$

Ta có $f'(x) = 400 \cdot (-2x + 10) = 0 \Leftrightarrow x = 5$.

$f(x)$ đạt GTLN trên $(0; 20)$ khi $x = 5$.

Vậy giá bán sản phẩm của cửa hàng để doanh thu trong 1 tuần lớn nhất là $400 - 20 \cdot 5 = 300$ (ngàn đồng)

Câu 38. Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa là 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $50 - 0,0002x^2$ triệu đồng. Trong một tháng nhà máy A phải chi phí cho nhân công và chi cho khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra khi sản xuất mỗi tấn sản phẩm thì nhà máy phải chi phí thêm cho mua nguyên liệu là 35 triệu đồng. Biết rằng nhà máy A phải nộp 5% doanh thu cho cơ quan thuế. Tính lợi nhuận sau thuế (lợi nhuận sau khi đã trừ tiền thuế) lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A (đơn vị tính là tỉ đồng và kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp án: 1,08.

Doanh thu của nhà máy A khi bán x ($0 < x \leq 200$) tấn sản phẩm trong 1 tháng là:
 $D(x) = x \cdot (50 - 0,0002x^2)$

Chi phí cho x tấn sản phẩm là: $C(x) = 150 + 35x$

Tiền thuế phải nộp của nhà máy A khi bán x tấn sản phẩm là $T(x) = x \cdot (50 - 0,0002x^2) \cdot 5\%$

Suy ra lợi nhuận sau thuế của nhà máy A là:

$$L(x) = D(x) - C(x) - T(x) = x \cdot (50 - 0,0002x^2) - (150 + 35x) - x \cdot (50 - 0,0002x^2) \cdot 5\%$$

$$\Rightarrow L(x) = -0,00019x^3 + 12,5x - 150$$

$$L'(x) = -0,00057x^2 + 12,5$$

$$L'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,00057x^2 + 12,5 = 0 \Leftrightarrow x \approx 148,09 \quad (\forall x > 0).$$

$$L(0) = -150; L(148,09) \approx 1084,06; L(200) = 830$$

Vậy lợi nhuận sau thuế lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A là $1084,06$ triệu đồng hay $\approx 1,08$ tỉ đồng.

Câu 39. Một trang trại rau sạch ở Đà Lạt mỗi ngày thu hoạch được 1 tấn rau. Nếu giá bán rau là 30000 đồng/kg thì 1 tấn rau thu hoạch được bán hết. Nếu giá bán rau cao hơn 30000 đồng/kg thì không bán hết 1 tấn rau. Cứ bán tăng thêm 1000 đồng cho 1 kg rau, số rau thừa lại tăng thêm 20 kg. Số rau thừa này được một cơ sở chăn nuôi thu mua hết để làm thức ăn chăn nuôi với giá 2000 đồng/kg. Hỏi để mỗi ngày thu được số tiền bán rau lớn nhất thì trang trại đó nên bán rau với giá bao nhiêu nghìn đồng?



Lời giải

Đáp án: 41.

Gọi x (nghìn đồng) là số tiền cần tăng giá bán của mỗi kg rau.

Suy ra giá bán mỗi kg rau là $30 + x$ (nghìn đồng)

Khi đó mỗi ngày trang trại bán được $1000 - 20x$ kg rau.

Điều kiện $0 < x < 50$ và x là số tự nhiên.

Mỗi ngày trang trại thu được số tiền bán rau là:

$$L(x) = (1000 + 20x)(30 + x) + 20 \cdot x \cdot 2 \quad (\text{nghìn đồng})$$

Hay $L(x) = -20x^2 + 440x + 30000$

$L(x)$ là hàm bậc hai có hệ số $a = -20 < 0$ và đỉnh là $I(11; 32420)$ nên $L(x)$ đạt giá trị lớn nhất tại $x = 11$

Vậy giá bán mỗi kg rau là 41 (nghìn đồng) thì số tiền bán rau của trang trại trong mỗi ngày là lớn nhất

Câu 40. Tại một nhà máy, khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A ($0 \leq x \leq 250$) trong một tháng thì tổng chi phí mà nhà máy phải trả là $C(x) = 0,00024x^3 - 0,03x^2 + 5x + 30$ (triệu đồng) và doanh thu tương ứng là $D(x) = -0,01x^2 + 16x - 25$ (triệu đồng). Hỏi trong một tháng, lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy đó có thể thu được nhờ vào sản xuất và bán sản phẩm A bằng bao nhiêu triệu đồng? (Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 1237.

Lợi nhuận trong một tháng của doanh nghiệp khi sản xuất và bán ra x sản phẩm A là

$$\begin{aligned} R(x) &= D(x) - C(x) \\ &= (-0,01x^2 + 16x - 25) - (0,00024x^3 - 0,03x^2 + 5x + 30) \\ &= -0,00024x^3 + 0,02x^2 + 11x - 55 \end{aligned}$$

Xét hàm số $R(x) = -0,00024x^3 + 0,02x^2 + 11x - 55$ với $x \in [0; 250]$, ta có

$$R'(x) = -0,00072x^2 + 0,04x + 11;$$

$$R'(x) = 0 \Leftrightarrow -0,00072x^2 + 0,04x + 11 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{100\sqrt{130} + 250}{9} \\ x = \frac{-100\sqrt{130} + 250}{9} \end{cases}$$

Với $x \in [0; 250]$ ta được $x = \frac{100\sqrt{130} + 250}{9} = 154,463\dots$

Hàm $R(x)$ liên tục trên $[0; 250]$ và ta có

$$R(0) = -55; \quad R\left(\frac{100\sqrt{130} + 250}{9}\right) = 1236,796\dots \approx 1237 \approx R(154) \approx R(155); \quad R(250) = 195.$$

Suy ra lợi nhuận lớn nhất mà nhà máy thu được vào khoảng 1237 (triệu đồng) khi $x = 154$ hoặc $x = 155$.

Câu 41. Nếu một doanh nghiệp sản xuất x sản phẩm trong một tháng ($x \in \mathbb{N}^*$; $1 \leq x \leq 4500$) thì doanh thu nhận được khi bán hết số sản phẩm đó là $F(x) = -0,01x^2 + 300x$ (nghìn đồng), trong khi

chi phí sản xuất bình quân cho mỗi sản phẩm là $G(x) = \frac{30000}{x} + 200$ (nghìn đồng). Giả sử số sản phẩm sản xuất ra luôn được bán hết. Trong một tháng, doanh nghiệp đó cần sản xuất ít nhất bao nhiêu sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng?

Lời giải

Trả lời: 1536

Tổng chi phí sản xuất x sản phẩm là: $C(x) = x \cdot G(x) = x \cdot \left(\frac{30000}{x} + 200 \right) = 30000 + 200x$

Lợi nhuận $P(x)$ thu được khi bán x sản phẩm là:

$$P(x) = F(x) - C(x) = -0,01x^2 + 100x - 30000$$

Để lợi nhuận lớn hơn 100 triệu đồng thì $P(x) > 100000 \Leftrightarrow -0,01x^2 + 100x - 130000 > 0$
 $\Leftrightarrow 1535,9 < x < 8464,1$

Kết hợp với điều kiện $x \in \mathbb{N}^*$; $1 \leq x \leq 4500$

Suy ra $1536 \leq x \leq 4500$

Vậy doanh nghiệp cần sản xuất ít nhất 1536 sản phẩm để lợi nhuận thu được lớn hơn 100 triệu đồng.

Câu 42. Doanh thu (Revenue) của một công ty bất động sản khi bán căn hộ thứ n (n nguyên dương, nhỏ hơn 200) được cho bởi hàm số $R(n) = \frac{(n-4)(n-30)^2}{100} + 36$ (triệu đồng). Trong 100 căn hộ đầu tiên được bán ra, căn hộ thứ bao nhiêu cho doanh thu thấp nhất?

Lời giải

Đáp án: 1.

$$R(n) = \frac{1}{100}(n-4)(n^2 - 60n + 900) + 36 = \frac{1}{100}(n^3 - 64n^2 + 1140n - 3600) + 36$$

Có $R'(n) = \frac{1}{100}(3n^2 - 128n + 1140) \Leftrightarrow n = \frac{38}{3}; n = 30$

n	1	$\frac{38}{3}$	30	100
$R'(n)$	+	0	-	0
$R(n)$	10,77	$\frac{41876}{675}$	36	4740

Dựa vào bảng biến thiên ta có $n = 1$

Câu 43. Giả sử giá của một cổ phiếu nào đó (tính bằng euro) trong một ngày nhất định (có 8 giờ giao dịch) được mô tả bởi hàm số: $f(x) = 35,7 \frac{x+2}{x^2+21}; x \in [0;8]$, trong đó x là thời gian (tính bằng

giờ) kể từ khi phiên giao dịch mở cửa. Nếu một người mua 100 cổ phiếu và bán chúng ngay trong ngày này thì người đó có lợi nhuận tối đa là bao nhiêu euro?

Lời giải

Đáp án: 255

$$f'(x) = 35,7 \cdot \frac{x^2 + 21 - 2x(x+2)}{(x^2 + 21)^2} = 35,7 \cdot \frac{-x^2 - 4x + 21}{(x^2 + 21)^2}$$

Ta có

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -7 \end{cases}$$

Xét

Kết hợp với $x \in [0; 8]$ thì $x = -7$ (loại)

x	0	3	8
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	3,4	5,95	4,2

Giá thấp nhất để mua 1 cổ phiếu là 3,4 và giá cao nhất để bán 1 cổ phiếu là 5,95.

Vậy lợi nhuận tối đa của 1 cổ phiếu là $5,95 - 3,4 = 2,55$.

Vì người đó mua 100 cổ phiếu nên người đó có lợi nhuận tối đa là 255 euro