

Họ, tên thí sinh:..... Mã số:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án

Câu 1: Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần luyện tập giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

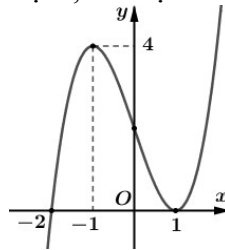
A. 43.

B. 30.

C. 25.

D. 37.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

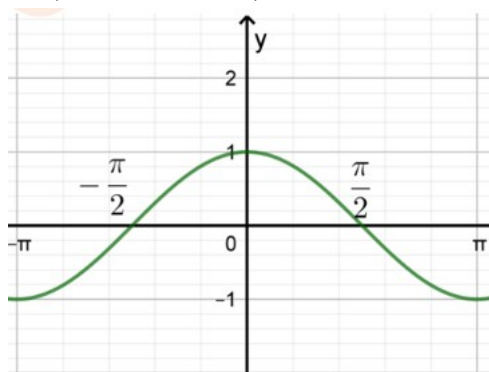
A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \cos x$ (với $x \in [-\pi; \pi]$) như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên $(0; \pi)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên $(0; \pi)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) , sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là:

A. $M(2; -3; 0)$.

B. $M(0; 0; 1)$.

C. $M(4; -5; 0)$.

D. $M(4; 5; 0)$.

Câu 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{2013} + u_6 = 1000$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:

A. 100800.

B. 1009000.

C. 100900.

D. 1008000.

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vectơ.

$$\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k \cdot \overrightarrow{A'A}$$

A. $k = 2$.

B. $k = -1$.

C. $k = -2$.

D. $k = 1$.

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

Đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + 2024x) + 2025}$ có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 3.

B. 2.

C. 1.

D. 4.

Câu 8: Giả sử $x = \frac{a + \sqrt{b}}{c}$ ($b > 0, c > 0$) là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình.

$$\sin \pi x^2 = \sin \pi (x^2 + 2x)$$

Khi đó $S = a + 2b + c$.

A. 2.

B. 7.

C. 9.

D. 1.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(6; -3; 4); B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy); (Oxz)$ và (Oyz) . Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của tổng $a^4 + b^3 + c^2$ là:

A. 175.

B. 187.

C. 178.

D. 157.

Câu 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 3, AA' = 4$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và G là trọng tâm tam giác DCD' .

D. $\frac{33}{2}$.

Câu 11: Cho hàm số

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}.$$

$$S = f\left(\frac{1}{2024}\right) + f\left(\frac{2}{2024}\right) + \dots + f\left(\frac{2023}{2024}\right).$$

D. 2023.

Câu 12: Cho hai cấp số cộng (u_n) và (v_n) có tổng của n số hạng đầu tiên lần lượt là S_n, S'_n . Biết

$$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{7n+1}{4n+27} \quad \text{với mọi } n \in N^*. \text{ Tính } \frac{u_{11}}{v_{11}}$$

D. $\frac{4}{3}$.

Câu 13:

Độ dài quãng đường (km)	[50;100)	[100;150)	[150;200)	[200;250)	[250;300)
Số ngày	5	10	9	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

D. 55,68.

Câu 14: Phòng vấn ³⁰ học sinh lớp ^{11A} về môn thể thao yêu thích thu được kết quả: Có ¹⁹ bạn thích môn Bóng đá, ¹⁷ bạn thích môn bóng bàn và ¹⁵ bạn thích cả hai môn đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh đã phỏng vấn. Tính xác suất để chọn được học sinh thích ít nhất một trong hai môn Bóng đá hoặc Bóng bàn

D. 0,3 .

Câu 15: Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$

$$x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$$

Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2 + y^2)$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên

đương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a + 2b$.

D. 223.

Câu 16: Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ và đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x - 1$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

- A. 4. B. $2\sqrt{2}$. C. 2. D. $\sqrt{2}$.

Câu 17: Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 5, sao cho trong mỗi số đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần.

- A. 112995. B. 72900. C. 14580. D. 58320.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA=SB=SC$ và đáy là tam giác vuông cân tại C có cạnh huyền bằng

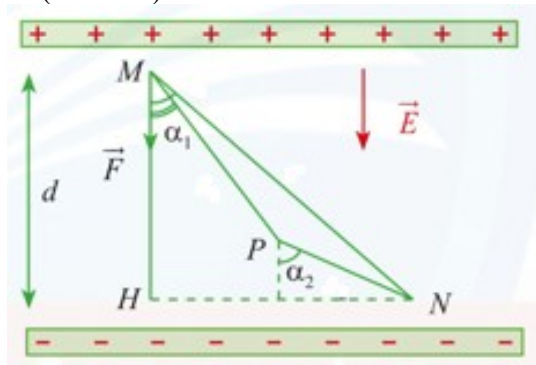
2a. Mặt phẳng (SAC) hợp với đáy một góc α và $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Khoảng cách giữa AC và SB bằng:

- A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$. B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$. C. $\frac{2a}{3}$. D. $\frac{4a}{3}$.

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 3), B(-1; 1; 3), C(3; 6; 9)$ và điểm M thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\overrightarrow{MA} \cdot (2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$ bằng.

- A. 0. B. 3. C. -37. D. -27.

Câu 20: Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN (Hình vẽ).



Biết $q = 2 \cdot 10^{-12} C$, vector điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 N/C$ và $d = MH = 5 mm$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.

- A. $1,8 \cdot 10^{-10} J$. B. $1,8 \cdot 10^{-8} J$. C. $1,8 \cdot 10^{-7} J$. D. $1,8 \cdot 10^{-9} J$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}$

a) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là $y = x - 2$.

b) Điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(a; b)$ với $a^2 + b = 12$.

c) Gọi I là giao điểm hai đường tiệm cận của đồ thị hàm số. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ $x = 2$ cắt hai đường tiệm cận tại A, B . Diện tích tam giác IAB bằng 12.

d) Có tất cả 9 giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = m$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2 < 15$.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật. Gọi K là trung điểm của cạnh SC . Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N .

- a) $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC})$.
- b) $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$.
- c) $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$.
- d) Giá trị lớn nhất của $\frac{SB}{SM} \cdot \frac{SD}{SN}$ là $\frac{9}{4}$.

Câu 3. Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 hai trường X và Y được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	$[6; 7)$	$[7; 8)$	$[8; 9)$	$[9; 10)$	$[10; 11)$
Học sinh trường X	8	10	13	10	9
Học sinh trường Y	4	12	17	14	3

- a) Trong 100 học sinh trên, hiệu số thời gian hoàn thành bài viết của hai học sinh bất kì không vượt quá 5.
- b) Nếu so sánh theo số trung bình thì học sinh trường X viết nhanh hơn.
- c) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì học sinh trường Y có tốc độ viết đồng đều hơn.
- d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh trường X có tốc độ viết đồng đều hơn.

Câu 4: Cho hai số thực thay đổi $a, b > 1$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình: $\log_a x \cdot \log_b x - 2 \log_a x - 21 = 0$.

- a) Giả sử $a = b = 4$ thì $m \cdot n = 21$.
- b) Khi $a = \sqrt[3]{2}$, không tồn tại số nguyên b để phương trình có nghiệm bằng 2.
- c) Tổng hai nghiệm của phương trình luôn lớn hơn 2.
- d) Giả sử $a + b = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $P = mn + 9a$ là $\frac{4}{4}$.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh bằng $3a$, $SA = SB = SD = a\sqrt{6}$ và tam giác ABD đều. Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua B và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

- a) SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.
- b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) là $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$.
- c) Gọi β là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Khi đó $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{5}$.
- d) Gọi α là góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của $\sin \alpha$ là $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 6. Một lớp học gồm có hai tổ. Tổ 1 có 16 học sinh, tổ 2 có 20 học sinh. Trong kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông năm 2024, tổ 1 có 10 bạn đăng ký thi tổ hợp tự nhiên, 6 bạn đăng ký thi tổ hợp xã hội. Tổ 2 có 8 bạn đăng ký thi tổ hợp tự nhiên và 12 bạn đăng ký thi tổ hợp xã hội. Chọn ngẫu nhiên ở mỗi tổ một bạn để thử nghiệm việc đăng ký dự thi TN THPT.

a) Số phân tử của không gian mẫu là 320 .

b) Xác suất để hai bạn được chọn cùng đăng ký tổ hợp tự nhiên là $\frac{1}{5}$.

c) Số cách chọn hai bạn cùng đăng ký tổ hợp xã hội là 72 cách.

d) Xác suất để hai bạn được chọn đăng ký cùng tổ hợp dự thi tốt nghiệp là $\frac{21}{40}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

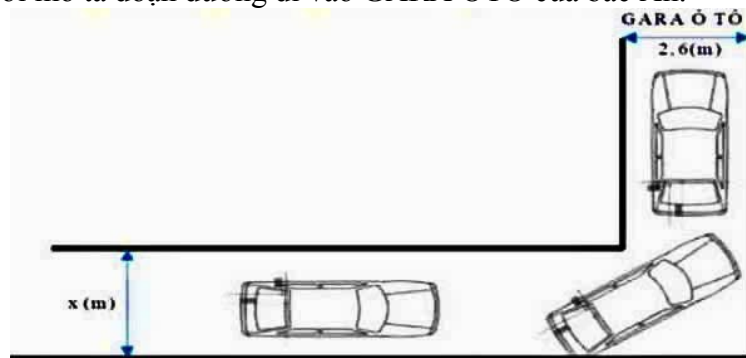
$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{m-6}{4}x^4 - (2m+1)x^3 + 9x^2 + 2022$$

Câu 1: Xét hàm số với m là tham số. Tích các giá trị

của tham số m sao cho tổng độ dài của các khoảng nghịch biến của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; +\infty)$

là 2 . (Kết quả làm tròn đến hàng phần 10)

Câu 2: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ của bác An.



Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x(m)$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6(m)$. Biết kích thước xe ô tô là $5m \times 1,9m$ (chiều dài x chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là $5(m)$, chiều rộng $1,9(m)$. Tìm chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên để ô tô có thể đi vào GARA được? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười; giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng).

Câu 3: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -1; 6)$, $B(1; 1; 2)$, $C(-3; -2; 4)$, $D(6; -4; 1)$. Điểm M di động trên mặt phẳng (Oyz) . Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \left(\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}} \right)^2 - 3 \left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MD}} \right)^2 + \left(\frac{\overline{MC}}{\overline{MD}} \right)^2$$

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình:

$$256^{2 \cos^2 x + \cos x} + 2(4-m) \cos x + 7 - m = 2^{2m \cos x + m + 1} - 8 \cos 2x$$

thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi \right]$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, tam giác ABC vuông tại A , $AB = 2AC$. Gọi E là điểm thỏa mãn $\overline{EC'} = -2\overline{EC}$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BE)$ bằng 12. Gọi α là góc giữa mặt phẳng $(A'BE)$ và mặt (ABC) . Giả sử khi $\cos \alpha = m$ thì thể tích khối lăng trụ

$ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất đó là M . Khi đó $P = m.M$ bằng bao nhiêu.

Câu 6: Trong truyện cổ tích Cây tre trăm đốt (các đốt được đánh thứ tự từ 1 đến 100), khi không vác được cây tre dài tận 100 đốt như vậy về nhà, anh Khoai ngồi khóc, Bụt liền hiện lên, bày cho anh ta: “Con hãy hô câu thần chú khắc xuất, khắc xuất thì cây tre sẽ rời ra, con sẽ mang được về nhà”. Biết rằng cây tre 100 đốt được tách ra một cách ngẫu nhiên thành các đoạn ngắn có chiều dài 2 đốt và 5 đốt (có thể chỉ có một loại). Tính xác suất để số đoạn 2 đốt nhiều hơn số đoạn 5 đốt đúng 1 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

----- **HẾT** -----

SỞ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO
THANH HÓA
CỤM 8 TRƯỜNG THPT

Mã đề thi: 101

ĐÁP ÁN ĐỀ GIAO LƯU ĐỘI TUYỂN HSG CẤP TỈNH
NĂM HỌC 2024 -2025
Môn thi: TOÁN -THPT
Thời gian làm bài: 90 phút;
ngày khảo sát: 21/11/2024
(Đề thi gồm 06 trang)

Họ, tên thí sinh:..... Mã số:

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 20. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án

Câu 1: Dũng là học sinh rất giỏi chơi rubik, bạn có thể giải nhiều loại khối rubik khác nhau. Trong một lần luyện tập giải khối rubik 3×3 , bạn Dũng đã tự thống kê lại thời gian giải rubik trong 25 lần giải liên tiếp ở bảng sau:

Thời gian giải rubik (giây)	[8;10)	[10;12)	[12;14)	[14;16)	[16;18)
Số lần	4	6	8	4	3

Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm bằng $\frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản và $a, b \in \mathbb{N}$. Tính giá trị của biểu thức $P = a + b$.

A. 43.

B. 30.

C. 25.

D. 37.

Lời giải

Chọn D

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_6 + x_7}{2} \in [10;12)$, do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu

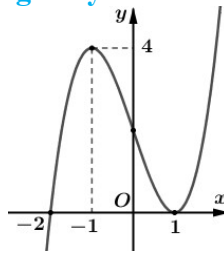
ghép nhóm là: $Q_1 = 10 + \frac{\frac{1.25}{4} - 4}{6} \cdot (12 - 10) = \frac{43}{4}$.

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_{19} + x_{20}}{2} \in [14;16)$, do đó tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép

nhóm là: $Q_3 = 14 + \frac{\frac{3.25}{4} - (4 + 6 + 8)}{4} \cdot (16 - 14) = \frac{115}{8}$.

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là: $\Delta_Q = \frac{115}{8} - \frac{43}{4} = \frac{29}{8} = \frac{a}{b} \Rightarrow P = a + b = 37$.

Câu 2: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm $f'(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và $f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2; -1)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$.

C. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

D. Hàm số đồng biến trên khoảng $(-\infty; -2)$.

Lời giải

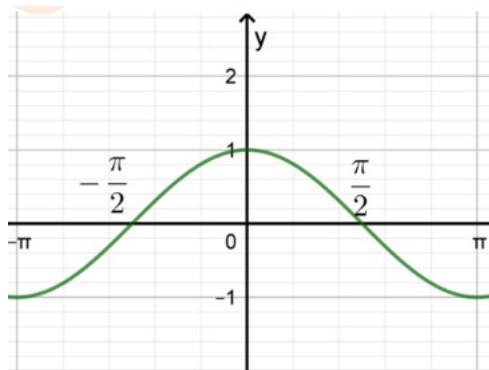
Chọn C

Dựa vào đồ thị hàm số $f'(x)$ có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	+
$f(x)$					

Suy ra hàm số đồng biến trên khoảng $(-2; +\infty)$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $f(x) = \cos x$ (với $x \in [-\pi; \pi]$) như hình vẽ dưới đây



Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; 0)$ và đồng biến trên $(0; \pi)$.

B. Hàm số đồng biến trên $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên $(0; \pi)$.

C. Hàm số nghịch biến trên $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

D. Hàm số đồng biến trên $(-\pi; 0)$ và $(0; \pi)$.

Lời giải

Chọn B

Dựa vào đồ thị đã cho, hàm số $f(x) = \cos x$ đồng biến trên $(-\pi; 0)$ và nghịch biến trên $(0; \pi)$.

Câu 4: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2; -2; 1)$, $B(0; 1; 2)$. Tọa độ điểm M thuộc mặt phẳng (Oxy) , sao cho ba điểm A, B, M thẳng hàng là.

A. $M(2; -3; 0)$.

B. $M(0; 0; 1)$.

C. $M(4; -5; 0)$.

D. $M(4; 5; 0)$.

Đáp án: C

Ta có: $M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0); \overrightarrow{AB} = (-2; 3; 1); \overrightarrow{AM} = (x-2; y+2; -1).$

Để A, B, M thẳng hàng thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương, khi đó: $\frac{x-2}{-2} = \frac{y+2}{3} = \frac{-1}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=-5 \end{cases}$.

Vậy $M(4; -5; 0)$

Câu 5: Cho cấp số cộng (u_n) có $u_{2013} + u_6 = 1000$. Tổng 2018 số hạng đầu tiên của cấp số cộng đó là:
A. 100800. **B.** 1009000. **C.** 100900. **D.** 1008000.

Lời giải**Chọn B**

$$S_{2018} = \frac{u_1 + u_{2018}}{2} \cdot 2018 = \frac{u_6 + u_{2013}}{2} \cdot 2018 = 1009000.$$

Câu 6: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Tìm giá trị của k thích hợp điền vào đẳng thức vector.
 $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k \cdot \overrightarrow{AA'}$

A. $k=2$. **B.** $k=-1$. **C.** $k=-2$. **D.** $k=1$.

Lời giải**Chọn: B**

ta có $\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{D'D} - \overrightarrow{B'D'} = k \cdot \overrightarrow{AA'}$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{D'B} = \overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \overrightarrow{BB'} = k \cdot \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow k = -1$

Câu 7: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới.

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	0	$+\infty$

$$y = \frac{1}{f(x^3 + 2024x) + 2025}$$

Đồ thị hàm số có tất cả bao nhiêu tiệm cận đứng?

A. 3. **B.** 2. **C.** 1. **D.** 4.

Lời giải**Chọn: C**

Số đường tiệm cận đứng của đồ thị hàm số là số nghiệm của phương trình $f(x^3 + 2024x) + 2025 = 0$
 Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$f(x^3 + 2024x) + 2025 = 0 \Leftrightarrow f(x^3 + 2024x) = -2025 \Leftrightarrow x^3 + 2024x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$$

Vì hàm số $y = x^3 + 2024x$ có $y' = 3x^2 + 2024 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó $x^3 + 2024x = x_0; x_0 \in (-\infty; 1)$ có một nghiệm duy nhất.

Vậy đồ thị hàm số $y = \frac{1}{f(x^3 + 2024x) + 2025}$ có 1 tiệm cận đứng.

$$x = \frac{a + \sqrt{b}}{c} \quad (b > 0, c > 0)$$

Câu 8: Giả sử là nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình.

$$\sin \pi x^2 = \sin \pi (x^2 + 2x)$$

Khi đó $S = a + 2b + c$

A. 2.

B. 7.

C. 9.

D. 1.

Lời giải

Chọn B

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x^2 = \pi (x^2 + 2x) + k2\pi \\ \pi x^2 = \pi - \pi (x^2 + 2x) + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k \\ 2x^2 + 2x - 1 - 2k = 0 \end{cases}$$

Phương trình

+ Với $x = -k$ nghiệm dương nhỏ nhất $x = 1$.

+ Với $2x^2 + 2x - 1 - 2k = 0$, phương trình có nghiệm khi $\Delta' = 3 + 4k \geq 0 \Leftrightarrow k \geq -\frac{3}{4}$. Vì $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \geq 0$.

Khi đó các nghiệm

$$x_1 = \frac{-1 - \sqrt{3 + 4k}}{2}; x_2 = \frac{-1 + \sqrt{3 + 4k}}{2}$$

$$x = \frac{-1 + \sqrt{3}}{2}$$

$$a = -1, b = 3, c = 2$$

Từ đó ta có nghiệm dương nhỏ nhất là: suy ra

Vậy $S = a + 2b + c = -1 + 2 \cdot 3 + 2 = 7$

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(6; -3; 4); B(a; b; c)$. Gọi M, N, P lần lượt là giao điểm của đường thẳng AB với các mặt phẳng tọa độ $(Oxy); (Oxz)$ và (Oyz) . Biết rằng M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$. Giá trị của tổng $a^4 + b^3 + c^2$ là:

A. 175.

B. 187.

C. 178.

D. 157.

lời giải

Chọn B.

Ta có $\overline{AB} = (a - 6; b + 3; c - 4)$

Vì M, N, P lần lượt là giao điểm của AB với các mặt phẳng $(Oxy); (Oxz)$ và (Oyz) nên

$$M(x_M; y_M; 0); N(x_N; 0; z_N); P(0; y_P; z_P)$$

Vì M, N, P nằm trên đoạn AB sao cho $AM = MN = NP = PB$ nên ta có:

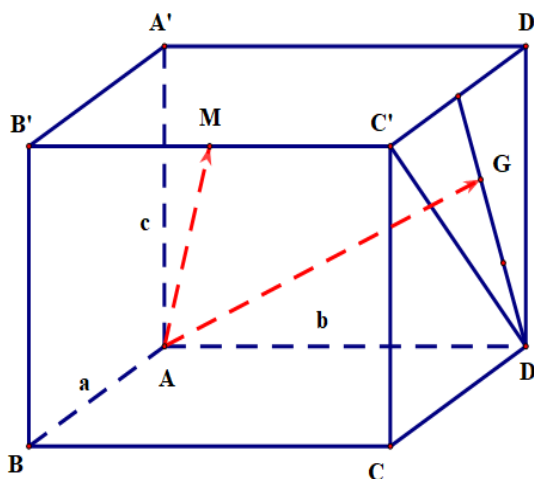
$$4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x_M - 6) = a - 6 \\ 4(y_M + 3) = b + 3 \\ 4(0 - 4) = c - 4 \Leftrightarrow c = -12 \end{cases}$$

$$2\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x_N - 6) = a - 6 \\ 2(0 + 3) = b + 3 \Leftrightarrow b = 3 \\ 2(z_N - 4) = c - 4 \end{cases}$$

$$\frac{4}{3}\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{3}(0 - 6) = a - 6 \Leftrightarrow a = -2 \\ \frac{4}{3}(y_P + 3) = b + 3 \\ \frac{4}{3}(z_P - 4) = c - 4 \end{cases}$$

vậy $a^4 + b^3 + c^2 = 187$

Câu 10: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 2, AD = 3, AA' = 4$. Gọi M là trung điểm của $B'C'$ và G là trọng tâm tam giác DCD' .



A. $\frac{61}{3}$.

B. $\frac{61}{6}$.

C. $\frac{33}{4}$.

D. $\frac{33}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Vì $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'M} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Nên ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

Ta có: $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'} + \overrightarrow{AC'}$ (vì G là trọng tâm tam giác DCD')

Mà $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$ (vì $ADD'A'$ là hình bình hành), $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ (do $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp)

Nên $3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AA'} + 3\overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AD}$

Vì $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AA'} = 0$ (các vector đôi một vuông góc)

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AG} = \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AA'} \right) = \frac{1}{3} AB^2 + \frac{1}{2} AD^2 + \frac{2}{3} AA'^2$$

Nên ta có:

$$\frac{1}{3} \cdot 2^2 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 + \frac{2}{3} \cdot 4^2 = \frac{33}{2}$$

$$f(x) = \frac{4^x}{4^x + 2}$$

$$S = f\left(\frac{1}{2024}\right) + f\left(\frac{2}{2024}\right) + \dots + f\left(\frac{2023}{2024}\right)$$

Câu 11: Cho hàm số

Tính tổng:

A. 1012.

B. 1011.

C. $\frac{2023}{2}$.

D. 2023.

Lời giải:

Chọn C

Dễ chứng minh được: $f(x) + f(1-x) = 1$. Nên:

$$\begin{aligned} S &= f\left(\frac{1}{2024}\right) + f\left(\frac{2}{2024}\right) + \dots + f\left(\frac{2023}{2024}\right) \\ &= \left(f\left(\frac{1}{2024}\right) + f\left(\frac{2023}{2024}\right) \right) + \left(f\left(\frac{2}{2024}\right) + f\left(\frac{2022}{2024}\right) \right) + \dots + \left(f\left(\frac{1011}{2024}\right) + f\left(\frac{1013}{2024}\right) \right) + f\left(\frac{1012}{2024}\right) \\ &= 1 + 1 + \dots + 1 + \frac{1}{2} \\ &= 1011 + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2023}{2}. \end{aligned}$$

Câu 12: Cho hai cấp số cộng (u_n) và (v_n) có tổng của n số hạng đầu tiên lần lượt là S_n, S'_n . Biết

$$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{7n+1}{4n+27} \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}^*. \text{ Tính } \frac{u_{11}}{v_{11}}$$

A. $\frac{78}{71}$.

B. $\frac{7}{4}$.

C. $\frac{71}{67}$.

D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Chọn: D

Giải. Theo giả thiết $\frac{S_{21}}{S'_{21}} = \frac{7 \cdot 21 + 1}{4 \cdot 21 + 27} = \frac{4}{3}$

$$\frac{S_{21}}{S_{21}} = \frac{2u_1 + 20d}{2v_1 + 20d} = \frac{u_1 + 10d}{v_1 + 10d} = \frac{u_{11}}{v_{11}} = \frac{4}{3}$$

Ta có

Câu 13: Một bác tài xế thống kê lại độ dài quãng đường (đơn vị: km) bác đã lái xe mỗi ngày trong một tháng ở bảng sau:

Độ dài quãng đường (km)	[50;100)	[100;150)	[150;200)	[200;250)	[250;300)
Số ngày	5	10	9	4	2

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm có giá trị gần nhất với giá trị nào dưới đây?

- A. 50,34 B. 45,23 C. 56,14 D. 55,68

Lời giải

Chọn D

$$n = 30$$

Cỡ mẫu

Giá trị đại diện	75	125	175	225	275
Số ngày	5	10	9	4	2

$$\bar{x} = \frac{5.75 + 10.125 + 9.175 + 4.225 + 2.275}{30} = 155$$

Số trung bình:

$$\sigma = \sqrt{\frac{5.75^2 + 10.125^2 + 9.175^2 + 4.225^2 + 2.275^2}{30} - 155^2} = \sqrt{3100} \approx 55,68$$

Độ lệch chuẩn:

Câu 14: Phỏng vấn ^{30} học sinh lớp ^{11A} về môn thể thao yêu thích thu được kết quả: Có ^{19} bạn thích môn Bóng đá, ^{17} bạn thích môn bóng bàn và ^{15} bạn thích cả hai môn đó. Chọn ngẫu nhiên một học sinh đã phỏng vấn. Tính xác suất để chọn được học sinh thích ít nhất một trong hai môn Bóng đá hoặc Bóng bàn

- A. 0,5 B. 0,7 C. 0,6 D. 0,3

Lời giải

Chọn B

Gọi A là biến cố: “Học sinh được chọn thích môn Bóng đá”.

B là biến cố: “Học sinh được chọn thích môn Bóng bàn”.

C là biến cố: “Học sinh được chọn thích ít nhất một trong hai môn Bóng đá hoặc Bóng bàn”.

Khi đó ta có: $C = A \cup B$.

Ta có số phần tử của không gian mẫu: $n(\Omega) = 30$.

Vậy xác suất của biến cố C là

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{19}{30} + \frac{17}{30} - \frac{15}{30} = \frac{21}{30} = 0,7$$

Câu 15: Cho 2 số thực x, y thay đổi thỏa mãn $x + y + 1 = 2(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})$.

Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = 3^{x+y-4} + (x+y+1)2^{7-x-y} - 3(x^2+y^2)$ là $\frac{a}{b}$ với a, b là các số nguyên dương và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính giá trị của biểu thức $P = a + 2b$.

A. 151.

B. 101.

C. 154.

D. 223.

Lời giải

Chọn C

Từ giả thiết ta có $(x+y+1)^2 = 4(\sqrt{x-2} + \sqrt{y+3})^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3})$

Áp dụng bất đẳng thức **AM – GM** cho 2 số thực không âm ta có:

$$2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3} \leq x+y+1 \Rightarrow (x+y+1)^2 \leq 8(x+y+1) \Rightarrow -1 \leq x+y \leq 7$$

Mặt khác ta lại có:

$$(x+y+1)^2 = 4(x+y+1+2\sqrt{x-2}\sqrt{y+3}) \geq 4(x+y+1) \Rightarrow \begin{cases} x+y \geq 3 \\ x+y \leq -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 \leq x+y \leq 7 \\ x+y = -1 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } x+y = -1 \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x-2}\sqrt{y+3} = 0 \\ x+y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \Rightarrow S = -\frac{9746}{243}$$

Nếu

Nếu $3 \leq x+y \leq 7$. Đặt $t = x+y (t \in [3; 7])$

Xét hàm số $f(t) = 3^{t-4} + (t+1) \cdot 2^{7-t} (t \in [3; 7])$

$$\Rightarrow f'(t) = 3^{t-4} \ln 3 + 2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2$$

$$\Rightarrow f''(t) = 3^{t-4} \ln^2 3 - 2^{7-t} \ln 2 - \ln 2 (2^{7-t} - (t+1)2^{7-t} \ln 2) \\ = 3^{t-4} \ln^2 3 + ((t+1) \ln^2 2 - 2 \ln 2) 2^{7-t} > 0 \forall t \in [3; 7]$$

Vì $f'(3) < 0, f'(7) > 0$ nên tồn tại số $a \in (3; 7)$ sao cho $f'(a) = 0$. Suy ra $f(t)$ nghịch biến trên $(3; a)$ và đồng biến trên $(a; 7)$. Mặt khác

$$f(3) = \frac{193}{3}; f(7) = 35 \Rightarrow f(t) \leq f(3) = \frac{193}{3} \forall t \in [3; 7]$$

Ta sẽ đi chứng minh $x^2 + y^2 \geq 5$ với $x+y \geq 3, x \geq 2$. Nhận thấy rằng khi:

$$* x \in [2; 3] \Rightarrow y \geq 3-x \geq 0 \Rightarrow y^2 \geq x^2 - 6x + 9 \Rightarrow x^2 + y^2 \geq 2x^2 - 6x + 9 = 2(x-2)(x-1) + 5 \geq 5$$

$$* x > 3 \Rightarrow x^2 + y^2 > 9$$

$$\text{Vậy } x^2 + y^2 \geq 5 \Rightarrow S \leq \frac{148}{3} = \frac{a}{b} \Rightarrow \begin{cases} a = 148 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + 2b = 154.$$

Câu 16: Gọi A, B là hai điểm phân biệt thuộc đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ và đối xứng với nhau qua đường thẳng $y = x-1$. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. 4.

B. $2\sqrt{2}$.

C. 2.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn: C

Ta phải tìm hai điểm A, B thuộc đồ thị sao cho đường thẳng AB vuông góc với đường thẳng $y = x-1$ và trung điểm I của AB phải thuộc đường thẳng $y = x-1$.

Đường thẳng vuông góc với đường thẳng $y = x-1$ có dạng $y = -x + m$

Hoành độ các điểm A, B là nghiệm của phương trình $\frac{x^2}{x-1} = -x + m \Leftrightarrow 2x^2 - (m+1)x + m = 0 \quad (1)$

$$A, B \text{ tồn tại khi phương trình } (1) \text{ có 2 nghiệm phân biệt khác 1} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = m^2 - 6m + 1 > 0 \\ 2 - (m+1) + m \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 3 - 2\sqrt{2} \\ m > 3 + 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Khi đó tọa độ trung điểm I của đoạn AB là:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{m+1}{4} \\ y_1 = -x_1 + m = \frac{3m-1}{4} \end{cases}$$

Điểm I thuộc đường thẳng $y = x - 1 \Leftrightarrow y_1 = x_1 - 1 \Leftrightarrow \frac{3m-1}{4} = \frac{m+1}{4} - 1 \Leftrightarrow m = -1$

Khi đó phương trình (1) trở thành $2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$

Ta tìm được 2 điểm $A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right); B\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$

Độ dài $AB = 2$.

Câu 17: Có bao nhiêu số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 5, sao cho trong mỗi số đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần.

A. 112995.

B. 72900.

C. 14580

D. 58320.

Lời giải:

Đáp án: B

Số tự nhiên có 7 chữ số trong đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần là $C_6^3 \cdot 9^4$

Số tự nhiên có 7 chữ số không chia hết cho 5 trong đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần là $C_5^3 \cdot 9^3 \cdot 8$

Số tự nhiên có 7 chữ số chia hết cho 5 và trong đó chữ số 0 xuất hiện 3 lần là $C_6^3 \cdot 9^4 - C_5^3 \cdot 9^3 \cdot 8 = 72900$

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$, có $SA=SB=SC$ và đáy là tam giác vuông cân tại C có cạnh huyền bằng

2a. Mặt phẳng (SAC) hợp với đáy một góc α và $\sin \alpha = \frac{1}{3}$. Khoảng cách giữa AC và SB bằng:

A. $\frac{a\sqrt{2}}{6}$.

B. $\frac{a\sqrt{2}}{3}$.

C. $\frac{2a}{3}$.

D. $\frac{4a}{3}$.

Lời giải:

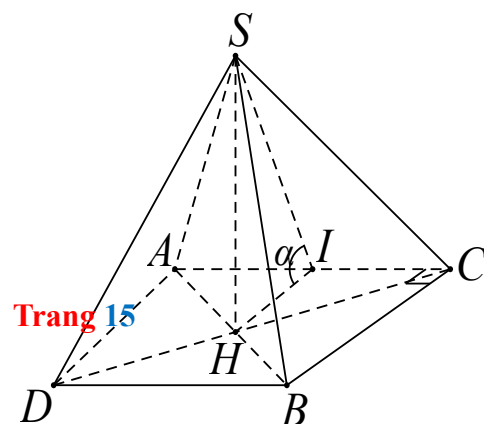
Chọn B

Hạ $SH \perp (ABC)$. Mà $SA = SB = SC \Rightarrow H$ là tâm đường tròn ngoại tiếp $\square ABC$.

Mà $\square ABC$ vuông tại $C \Rightarrow H$ là trung điểm của AB .

Gọi I là trung điểm của AC . Để chứng minh được $\alpha = \angle SIH$.

Từ $\sin \alpha = \frac{1}{3} \Rightarrow \cot \alpha = 2\sqrt{2} \Rightarrow SH = \frac{HI}{\cot \alpha} = \frac{a}{4}$.



Dựng hình bình hành $ACBD$. Dễ thấy $ABCD$ là hình vuông. Khi đó:

$$d(AC; SB) = d(AC; (SBD)) = d(A; (SBD)) = 2d(H; (SBD)) = 2d$$

$$\frac{1}{d^2} = \frac{1}{HS^2} + \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HD^2} = \frac{18}{a^2} \Rightarrow d = \frac{a\sqrt{2}}{6} \Rightarrow \text{Khoảng cách cần tìm bằng } \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Câu 19: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 2; 3), B(-1; 1; 3), C(3; 6; 9)$ và điểm M thay đổi trong mặt phẳng (Oxy) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $\overrightarrow{MA} \cdot (2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC})$ bằng.

A. 0.

B. 3.

C. -37.

D. -27.

Lời giải

Chọn D

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow$ ta tìm được $I(-5; -4; -3)$.

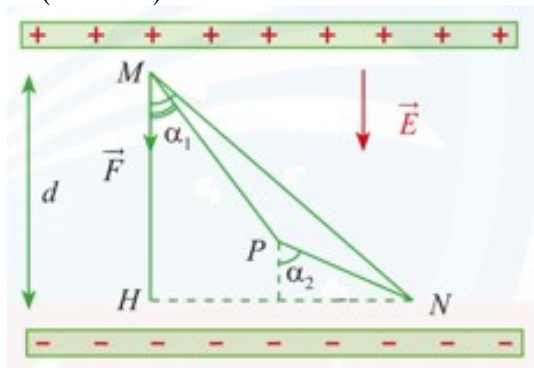
$$P = \overrightarrow{MA} \cdot (2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{MA} \cdot (2\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IC}) = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI}$$

Gọi H là trung điểm đoạn AI . Ta có điểm $H(-2; -1; 0)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) và $AI = 6\sqrt{3}$.

$$P = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MI} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA})(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HI}) = \overrightarrow{MH}^2 - \overrightarrow{HI}^2 = MH^2 - \frac{AI^2}{4} \geq -\frac{AI^2}{4} = -27$$

Vậy, biểu thức P đạt giá trị nhỏ nhất là -27 khi điểm M trùng với điểm $H(-2; -1; 0)$.

Câu 20: Một lực tĩnh điện $\vec{F}$ tác động lên điện tích điểm M trong điện trường đều làm cho M dịch chuyển theo đường gấp khúc MPN (Hình vẽ).



Biết $q = 2 \cdot 10^{-12} C$, vector điện trường có độ lớn $E = 1,8 \cdot 10^5 N/C$ và $d = MH = 5mm$. Tính công A sinh bởi lực tĩnh điện $\vec{F}$.

A. $1,8 \cdot 10^{-10} J$.

B. $1,8 \cdot 10^{-8} J$.

C. $1,8 \cdot 10^{-7} J$.

D. $1,8 \cdot 10^{-9} J$.

Lời giải

Chọn D

Đổi $5mm = 0,005m$.

Gọi K là điểm thuộc MH sao cho $PK \perp MH$, L là điểm thuộc HN sao cho $PL \perp HN$.

Vậy điểm cực tiểu của đồ thị hàm số là $(3;3)$, do đó $a^2 + b = 3^2 + 3 = 12$.

c) Mệnh đề sai, vì

Tiếp cận đứng: $d_1: x = 1$, tiếp cận xiên $d_2: y = x - 2$ nên giao điểm hai tiệm cận là điểm $I(1; -1)$.

Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = 2$ có phương trình:

$$d: y = y'(2)(x - 2) + y(2) = -3(x - 2) + 4 \Leftrightarrow y = -3x + 10$$

Đường thẳng d cắt d_1, d_2 lần lượt tại $A(1; 7), B(3; 1)$.

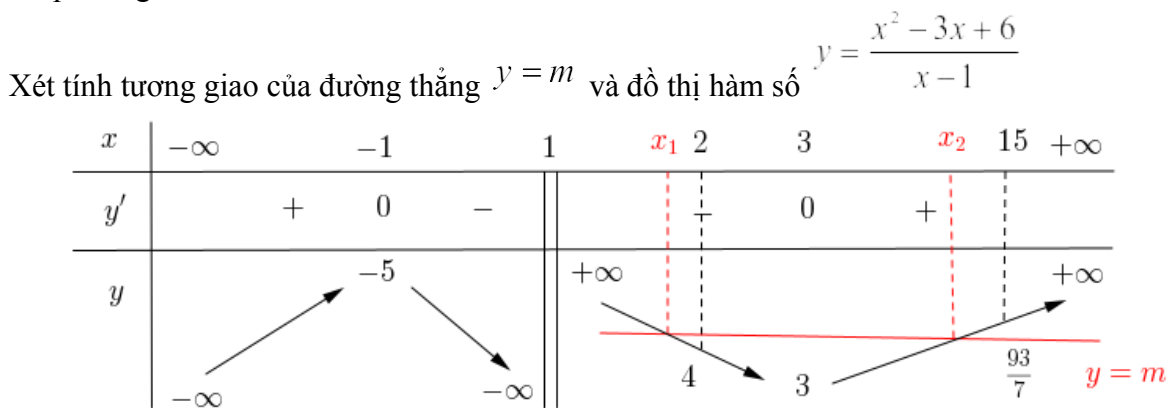
$$\overrightarrow{IA} = (0; 8), \overrightarrow{IB} = (2; 2)$$

$$S_{\triangle IAB} = \frac{1}{2} |0 \cdot 2 - 2 \cdot 8| = 8$$

d) Mệnh đề đúng, vì

$$\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = m$$

Từ phương trình



Ta thấy phương trình $\frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1} = m$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn

$$x_1 < 2 < x_2 < 15 \text{ khi và chỉ khi } 4 < m < \frac{93}{7} \approx 13,29$$

Vậy có các giá trị nguyên là $5, 6, 7, \dots, 13$ nên có 9 giá trị.

Câu 2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là một hình chữ nhật. Gọi K là trung điểm của cạnh SC .

Mặt phẳng qua AK cắt các cạnh SB, SD lần lượt tại M, N .

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC}).$$

a)

$$\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}.$$

b)

$$\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2.$$

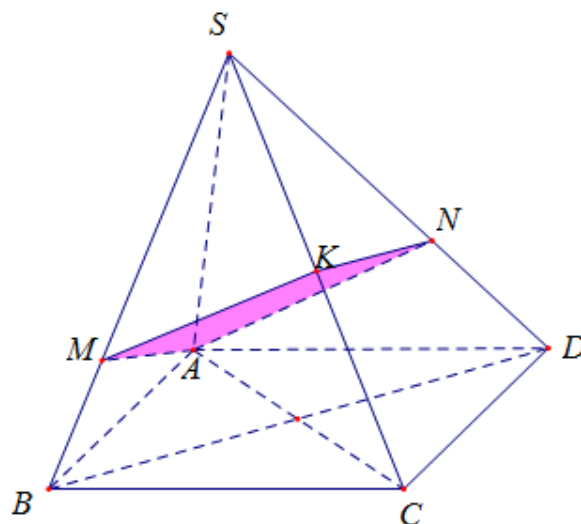
c)

$$\frac{SB}{SM} \cdot \frac{SD}{SN} = \frac{9}{4}$$

d)

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Đúng | c) Đúng | d) Đúng.



a) K là trung điểm $SC \Rightarrow \overrightarrow{KS} + \overrightarrow{KC} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
 $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC})$

Vậy a) **đúng**

b) Gọi $O = AC \cap BD \Rightarrow O$ là trung điểm $AC, BD \Rightarrow \overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = 2\overrightarrow{SO}; \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD} = 2\overrightarrow{SO} \Rightarrow$
 $\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SC} = \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SD}$

Vậy b) **đúng**

c) $\overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OC})^2 = 2SO^2 + OA^2 + OC^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) =$
 $2SO^2 + OA^2 + OC^2$
 $\overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2 = (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OB})^2 + (\overrightarrow{SO} + \overrightarrow{OD})^2 = 2SO^2 + OB^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{SO} \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})$
 $= 2SO^2 + OB^2 + OD^2$
 $\Rightarrow \overrightarrow{SA}^2 + \overrightarrow{SC}^2 = \overrightarrow{SB}^2 + \overrightarrow{SD}^2$

Vậy c) **đúng**

d) Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{SA}, \vec{b} = \overrightarrow{SB}, \vec{d} = \overrightarrow{SD}$ và $\frac{SB}{SM} = m, \frac{SD}{SN} = n, m > 0, n > 0$.

Ta có: $\overrightarrow{SB} = \frac{SB}{SM} \overrightarrow{SM} = m \overrightarrow{SM}; \overrightarrow{SD} = \frac{SD}{SN} \overrightarrow{SN} = n \overrightarrow{SN}$

$\overrightarrow{SK} = \frac{1}{2} \overrightarrow{SC} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{DC}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{SD} + \overrightarrow{SB} - \overrightarrow{SA}) = \frac{n}{2} \overrightarrow{SN} + \frac{m}{2} \overrightarrow{SM} - \frac{1}{2} \overrightarrow{SA}$

Mà ta có A, M, N, K đồng phẳng nên $\frac{m}{2} + \frac{n}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow m + n = 3$. Vậy $\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN} = 3$.

Ta có $4 \frac{SB}{SM} \cdot \frac{SD}{SN} \leq \left(\frac{SB}{SM} + \frac{SD}{SN}\right)^2 = 9 \Rightarrow \frac{SB}{SM} \cdot \frac{SD}{SN} \leq \frac{9}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{SB}{SM} = \frac{SD}{SN} = \frac{3}{2}$.

Vậy giá trị lớn nhất của $\frac{SB}{SM} \cdot \frac{SD}{SN}$ là $\frac{9}{4}$.

Vậy d) **đúng**

Câu 3. Thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của một số học sinh lớp 4 hai trường X và Y được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian (phút)	[6; 7)	[7; 8)	[8; 9)	[9; 10)	[10; 11)
------------------	--------	--------	--------	---------	----------

Học sinh trường X	8	10	13	10	9
Học sinh trường Y	4	12	17	14	3

- a) Trong 100 học sinh trên, hiệu số thời gian hoàn thành bài viết của hai học sinh bất kì không vượt quá 5 .
- b) Nếu so sánh theo số trung bình thì học sinh trường X viết nhanh hơn.
- c) Nếu so sánh theo khoảng tứ phân vị thì học sinh trường Y có tốc độ viết đồng đều hơn.
- d) Nếu so sánh theo độ lệch chuẩn thì học sinh trường X có tốc độ viết đồng đều hơn.

Lời giải

a) Đúng, b) Sai, c) Đúng, d) Sai.

Thời gian (phút)	$[6; 7)$	$[7; 8)$	$[8; 9)$	$[9; 10)$	$[10; 11)$
Giá trị đại diện	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
Học sinh trường X	8	10	13	10	9
Học sinh trường Y	4	12	17	14	3

a) Khẳng định Đúng. Vì thời gian hoàn thành bài của một học sinh bất kỳ tối đa là 11 phút và tối thiểu là 6 phút.

b) Khẳng định Sai.

* Xét mẫu số liệu của học sinh trường X

Cỡ mẫu $n_X = 8 + 10 + 13 + 10 + 9 = 50$

$$\bar{x}_X = \frac{8 \cdot 6,5 + 10 \cdot 7,5 + 13 \cdot 8,5 + 10 \cdot 9,5 + 9 \cdot 10,5}{50} = 8,54$$

Số trung bình của mẫu ghép nhóm là:

* Xét mẫu số liệu của học sinh trường Y

Cỡ mẫu $n_Y = 4 + 12 + 17 + 14 + 3 = 50$

$$\bar{x}_Y = \frac{4 \cdot 6,5 + 12 \cdot 7,5 + 17 \cdot 8,5 + 14 \cdot 9,5 + 3 \cdot 10,5}{50} = 8,5$$

Số trung bình của mẫu ghép nhóm là:

Vì $\bar{x}_X > \bar{x}_Y$ ($8,54 > 8,5$) nên thời gian hoàn thành một bài viết chính tả của trường Y nhanh hơn.

c) Khẳng định Đúng

* Xét mẫu số liệu của học sinh trường X

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{50}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian hoàn thành một bài chính tả của 50 học sinh trường X được xếp theo thứ tự không giảm

Ta có: $x_1, x_2, \dots, x_8 \in [6; 7); x_9, \dots, x_{18} \in [7; 8); x_{19}, \dots, x_{31} \in [8; 9); x_{32}, \dots, x_{41} \in [9; 10); x_{42}, \dots, x_{50} \in [10; 11)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $x_{13} \in [7; 8)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 7 + \frac{\frac{50}{4} - 8}{10} \cdot (8 - 7) = 7,45$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $x_{38} \in [9; 10)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 9 + \frac{3 \cdot \frac{50}{4} - (8 + 10 + 13)}{10} \cdot (10 - 9) = 9,65$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường X là

$$\Delta_{Q_X} = 9,65 - 7,45 = 2,2$$

*Xét mẫu số liệu của học sinh trường Y

Gọi $y_1, y_2, \dots, y_{50}$ là mẫu số liệu gốc gồm thời gian hoàn thành một bài chính tả của 50 học sinh trường Y được xếp theo thứ tự không giảm

Ta có: $y_1, \dots, y_4 \in [6; 7); y_5, \dots, y_{16} \in [7; 8); y_{17}, \dots, y_{33} \in [8; 9); y_{34}, \dots, y_{47} \in [9; 10); y_{48}, y_{49}, y_{50} \in [10; 11)$.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $y_{13} \in [7; 8)$. Do đó, tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 7 + \frac{\frac{50}{4} - 4}{12} \cdot (8 - 7) = \frac{185}{24}$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $y_{38} \in [9; 10)$. Do đó, tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_3 = 9 + \frac{3 \cdot \frac{50}{4} - (4 + 12 + 17)}{14} \cdot (10 - 9) = \frac{261}{28}$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường Y là

$$\Delta_{Q_Y} = \frac{261}{28} - \frac{185}{24} = \frac{271}{168}$$

Vì $\Delta_{Q_X} > \Delta_{Q_Y} \left(2,2 > \frac{271}{168} \right)$ nên học sinh trường Y có tốc độ viết đồng đều hơn.

d) Khẳng định Sai

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường X là

$$S_X^2 = \frac{1}{50} (8 \cdot 6,5^2 + 10 \cdot 7,5^2 + 13 \cdot 8,5^2 + 10 \cdot 9,5^2 + 9 \cdot 10,5^2) - 8,54^2 = 1,7584$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_X = \sqrt{1,7584}$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm của học sinh trường Y là

$$S_Y^2 = \frac{1}{50} (4 \cdot 6,5^2 + 12 \cdot 7,5^2 + 17 \cdot 8,5^2 + 14 \cdot 9,5^2 + 3 \cdot 10,5^2) - 8,5^2 = 1,08$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là $S_Y = \sqrt{1,08}$

Vì $S_X > S_Y \left(\sqrt{1,7584} > \sqrt{1,08} \right)$ nên học sinh trường Y có tốc độ viết đồng đều hơn.

Câu 4: Cho hai số thực thay đổi $a, b > 1$. Gọi m, n là hai nghiệm của phương trình:

$$\log_a x \cdot \log_b x - 2 \log_a x - 21 = 0.$$

a) Giả sử $a = b = 4$ thì $m \cdot n = 21$.

b) Khi $a = \sqrt[3]{2}$, không tồn tại số nguyên b để phương trình có nghiệm bằng 2.

c) Tổng hai nghiệm của phương trình luôn lớn hơn 2.

d) Giả sử $a + b = 10$. Giá trị nhỏ nhất của $P = mn + 9a$ là $\frac{17}{4}$.

Lời giải:

a) sai, b) đúng, c) đúng, d) sai

a) Với $a = b = 4$, ta có phương trình: $\log_4^2 x - 2\log_4 x - 21 = 0$. Khi đó
 $m.n = 4^2 = 16$ suy ra mệnh đề **sai**.

b) $(\log_a x)(\log_b x) - 2\log_a x - 21 = 0 \Leftrightarrow \log_b a (\log_a x)^2 - 2\log_a x - 21 = 0$
 Với $a = \sqrt[3]{2}, x = 2$ thay vào phương trình ta được:
 $3\log_b 2 - 6 - 21 = 0 \Leftrightarrow \log_b 2 = 9 \Leftrightarrow b = \sqrt[9]{2}$ suy ra mệnh đề **đúng**.

c) Đặt $t = \log_a x$, ta có phương trình: $\log_b a \cdot t^2 - 2t - 21 = 0$.

Ta có a, c trái dấu, nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Khi đó $m + n = a^{t_1} + a^{t_2} \geq 2\sqrt{a^{t_1+t_2}} = 2\sqrt{a^{2\log_a b}} = 2b > 2$. (Vì $b > 1$). Suy ra mệnh đề đúng.

d) Ta có: $m.n = a^{t_1+t_2} = a^{2\log_a b} = b^2$ suy ra $P = b^2 + 9a = b^2 + 9(10 - b) = b^2 - 9b + 90 \geq \frac{279}{4}$.
 Suy ra mệnh đề **sai**.

Câu 5: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O cạnh bằng $3a$, $SA = SB = SD = a\sqrt{6}$ và tam giác ABD đều. Giả sử (P) là mặt phẳng thay đổi, luôn đi qua B và vuông góc với mặt phẳng (SCD) .

a) SO vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$.

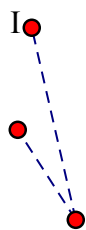
b) Khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SCD) là $\frac{3a\sqrt{6}}{4}$.

c) Gọi β là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) . Khi đó $\cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

d) Gọi α là góc giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (P) . Giá trị lớn nhất của $\sin \alpha$ là $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải

a) sai, b) đúng, c) đúng, d) đúng



- a) Vì $SA = SB = SD$ nên hình chiếu của S trên mặt phẳng $(ABCD)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABD . Vì tam giác ABD đều nên tâm của đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABD là trọng tâm H của tam giác ABD suy ra mệnh đề **sai**.

- b) Gọi K là hình chiếu của H lên SD , $\Rightarrow HK \perp (SCD)$

$$d(A; (SCD)) = \frac{3}{2} d(H; (SCD)) = \frac{3}{2} HK$$

$$HD = \frac{AB}{\sqrt{3}} = \frac{3a}{\sqrt{3}} = a\sqrt{3}; SH = \sqrt{SD^2 - DH^2} = \sqrt{6a^2 - 3a^2} = a\sqrt{3}$$

$$\text{Suy ra } HK = \frac{SH \cdot HD}{SD} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$d(A; (SCD)) = \frac{3a\sqrt{6}}{4}$$

Vậy

Suy ra mệnh đề **đúng**.

- c) Tương tự như trên. Gọi I là hình chiếu của H trên SB . Khi đó $HI \perp (SBC)$

$$d[A; (SBC)] = \frac{3}{2} d[H; (SBC)] = \frac{3}{2} HI$$

$$\text{Ta có } HB = a\sqrt{3} \Rightarrow HI = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow d[A; (SBC)] = \frac{3}{2} d[H; (SBC)] = \frac{3}{2} HI = \frac{3a\sqrt{6}}{4}$$

$$\text{Ta có } S_{\Delta SAB} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} \text{ Suy ra khoảng cách } d[A; SB] = \frac{2S_{\Delta SAB}}{SB} = \frac{3a\sqrt{10}}{4}$$

$$\text{Suy ra } \sin \beta = \frac{d[A; (SBC)]}{d(A; SB)} = \frac{\sqrt{15}}{5} \Rightarrow \cos \beta = \frac{\sqrt{10}}{5} \text{ suy ra mệnh đề đúng.}$$

- d) $B \in (P) \perp (SCD), (P) \cap (SCD) = \Delta$

Gọi E là hình chiếu của B lên $\Delta \Rightarrow BE \perp (SCD)$

$$\text{Suy ra } BE = \frac{3a\sqrt{6}}{4}.$$

Gọi F là hình chiếu của D lên $\Delta \Rightarrow DF \perp (P)$.

Suy ra góc tạo bởi BD và (P) là $\alpha = \angle DBF$.

$$\sin \alpha = \frac{FD}{BD} \leq \frac{DE}{BD}, \text{ dấu bằng xảy ra khi } F \equiv E.$$

$$\frac{DE}{BD} = \frac{\sqrt{BD^2 - BE^2}}{BD} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}a}{3a} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

$$\sin \alpha \text{ bằng } \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

Vậy GTLN của

Suy ra mệnh đề **đúng**.

Câu 6. Một lớp học gồm có hai tổ. Tổ 1 có 16 học sinh, tổ 2 có 20 học sinh. Trong kì thi tốt nghiệp trung học phổ thông năm 2024, tổ 1 có 10 bạn đăng ký thi tổ hợp tự nhiên, 6 bạn đăng ký thi tổ hợp xã hội. Tổ 2 có 8 bạn đăng ký thi tổ hợp tự nhiên và 12 bạn đăng ký thi tổ hợp xã hội. Chọn ngẫu nhiên ở mỗi tổ một bạn để thử nghiệm việc đăng ký dự thi TN THPT.

a) Số phân tử của không gian mẫu là 320.

b) Xác suất để hai bạn được chọn cùng đăng ký tổ hợp tự nhiên là $\frac{1}{5}$.

c) Số cách chọn hai bạn cùng đăng ký tổ hợp xã hội là 72 cách.

d) Xác suất để hai bạn được chọn đăng ký cùng tổ hợp dự thi tốt nghiệp là $\frac{21}{40}$.

Lời giải

Chọn a) Đúng | b) Sai | c) Đúng | d) Sai.

a) **Mệnh đề đúng, vì:**

Ta có số phần tử của không gian mẫu là $n(\Omega) = C_{16}^1 \cdot C_{20}^1 = 320$.

b) **Mệnh đề sai, vì:**

Gọi A là biến cố chọn được hai bạn cùng đăng ký tổ hợp tự nhiên.

Ta có $n(A) = C_{10}^1 \cdot C_8^1 = 80$.

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(\Omega)} = \frac{80}{320} = \frac{1}{4}.$$

Xác suất của biến cố A là

c) **Mệnh đề đúng, vì**

Số cách chọn hai bạn cùng đăng ký tổ hợp xã hội là $C_6^1 \cdot C_{12}^1 = 72$.

d) **Mệnh đề sai, vì**

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(\Omega)} = \frac{72}{320} = \frac{9}{40}.$$

Gọi B là biến cố hai bạn cùng đăng ký tổ hợp xã hội,

Gọi C là biến cố để hai bạn đăng ký cùng tổ hợp dự thi tốt nghiệp $\Rightarrow C = A \cup B$, với A và B là hai biến cố xung khắc.

Xác suất của biến cố C là $P(C) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{4} + \frac{9}{40} = \frac{19}{40}$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{m-6}{4}x^4 - (2m+1)x^3 + 9x^2 + 2022$$

Câu 1: Xét hàm số với m là tham số. Tích các giá trị của tham số m sao cho tổng độ dài của các khoảng nghịch biến của hàm số $f(x)$ trên $(-\infty; +\infty)$ là ^{2} . (Kết quả làm tròn đến hàng phần 10)

Lời giải.**Đáp số: 28,8**

$$f'(x) = x^4 + (m-6)x^3 - 3(2m+1)x^2 + 18x$$

Ta có:

$$= x(x-6)(x^2 + mx - 3)$$

Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 6, x^2 + mx - 3 = 0$

Ta thấy phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu là $x_1 < 0 < x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1 x_2 = -3$.

Ta xét các trường hợp sau:

TH1: phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$ có 2 nghiệm $x_1 < 0 < 6 = x_2$ không thỏa mãn

TH2: Nếu $0 < x_2 < 6$ thì bằng cách vẽ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên $(x_1; 0)$ và $(x_2; 6)$.

x	$-\infty$	x_1	0	x_2	6	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Tổng độ dài hai khoảng này là

$$|0 - x_1| + |6 - x_2| = 6 - (x_1 + x_2) = 6 + m$$

Nên $m + 6 = 2 \Leftrightarrow m = -4$. Thử lại ta có $x_2 = 2 + \sqrt{7} < 6$, thỏa mãn.

TH3: Nếu $x_2 > 6$ thì bằng cách vẽ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên $(x_1; 0)$ và $(x_2; 6)$.

x	$-\infty$	x_1	0	6	x_2	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+

Tổng độ dài hai khoảng này là

$$|0 - x_1| + |x_2 - 6| = x_2 - x_1 - 6$$

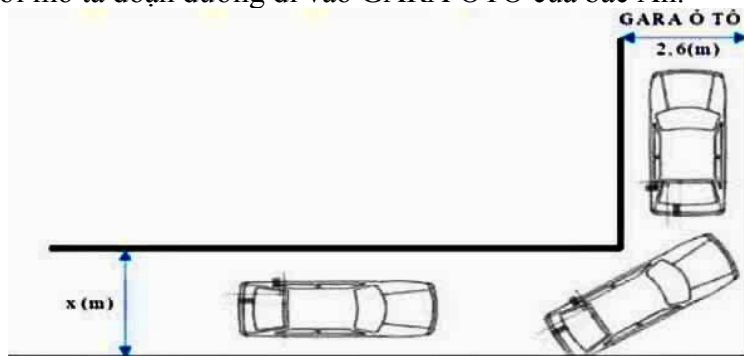
nên $x_2 - x_1 = 8$. Bình phương lên, ta được

$$(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 64 \quad \text{hay} \quad m^2 + 12 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{13}$$

- Với $m = 2\sqrt{13}$ thì ta tính được $x_2 = 4 - \sqrt{13} < 6$, không thỏa mãn.
- Với $m = -2\sqrt{13}$ thì ta tính được $x_2 = 4 + \sqrt{13} > 6$, thỏa mãn.

Vậy tất cả các giá trị cần tìm của m là -4 và $-2\sqrt{13}$. Khi đó Tích các giá trị là $(-4)(-2\sqrt{13}) = 28,8$

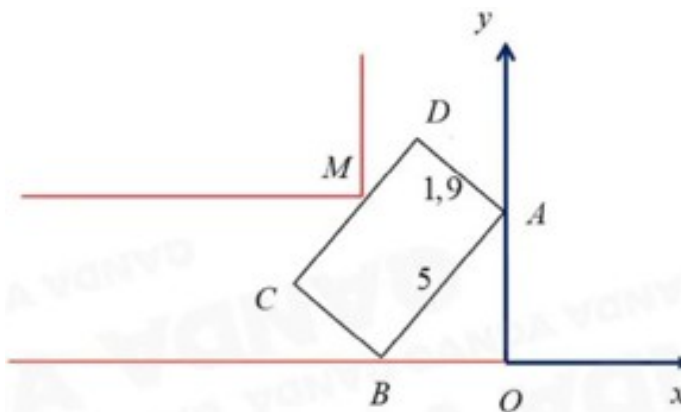
Câu 2: Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA ÔTÔ của bác An.



Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng $x(m)$, đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng $2,6(m)$. Biết kích thước xe ô tô là $5m \times 1,9m$ (chiều dài x chiều rộng). Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài là $5(m)$, chiều rộng $1,9(m)$. Tìm chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên để ô tô có thể đi vào GARA được? (Làm tròn kết quả đến hàng phần mười; giả thiết ô tô không đi ra ngoài đường, không đi nghiêng và ô tô không bị biến dạng).

Lời giải

Trả lời: 3.7



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ. Khi đó, $M(-2, 6; m)$.

Gọi $B(-a; 0)$, suy ra $A(0; \sqrt{25 - a^2})$, $a > 0$

Từ đó, phương trình của AB là $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25 - a^2}} = 1$

Do $CD \parallel AB$ nên phương trình CD là $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25 - a^2}} - k = 0$

Khoảng cách giữa AB và CD là chiều rộng của ô tô và bằng $1,9\text{ m}$ nên

$$\frac{|k-1|}{\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{25-a^2}}\right)^2}} = 1,9 \Leftrightarrow k = 1 + \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}$$

Phương trình CD được viết lại là $\frac{x}{-a} + \frac{y}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} = 0$

Điều kiện để ô tô đi qua được là M và O nằm khác phía đối với đường thẳng CD .

Suy ra

$$\left(\frac{2,6}{a} + \frac{m}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}\right)\left(-1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}}\right) \leq 0 \Leftrightarrow \frac{2,6}{a} + \frac{m}{\sqrt{25-a^2}} - 1 - \frac{9,5}{a\sqrt{25-a^2}} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6\sqrt{25-a^2}}{a} \quad (\text{đúng với mọi } a \in (0; 5]).$$

Xét hàm số $f(a) = \sqrt{25-a^2} + \frac{9,5}{a} - \frac{2,6\sqrt{25-a^2}}{a}$ trên nửa khoảng $(0; 5]$.

$$f'(a) = \frac{65 - 9,5\sqrt{25-a^2} - a^3}{a^2\sqrt{25-a^2}} \Rightarrow f'(a) = 0 \Leftrightarrow a = 3 \in (0; 5)$$

Ta có

Bảng biến thiên

a	0	3	5	
$f'(a)$		+	0	-
$f(a)$		$-\infty$	$\frac{37}{10}$	$\frac{19}{10}$

$$m \geq f(a), \forall a \in (0; 5] \Leftrightarrow m \geq \frac{37}{10} = 3,7$$

Do đó,

Vậy $3,7$ là giá trị cần tìm.

Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(2; -1; 6)$, $B(1; 1; 2)$, $C(-3; -2; 4)$,

Câu 3:

$D(6; -4; 1)$. Điểm M di động trên mặt phẳng (Oyz) . Giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \left(\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}\right)^2 - 3\left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{MC}}{\overline{MD}}\right)^2$$

Lời giải

Trả lời: 104

$$T = \left(\frac{\overline{MA}}{\overline{MD}}\right)^2 - 3\left(\frac{\overline{MB}}{\overline{MD}}\right)^2 + \left(\frac{\overline{MC}}{\overline{MD}}\right)^2 = \frac{MA^2 - 3MB^2 + MC^2}{MD^2}$$

Ta có

$$\text{Gọi } M(0; a; b) \Rightarrow MA^2 = 4 + (a+1)^2 + (b-6)^2; MB^2 = 1 + (a-1)^2 + (b-2)^2$$

$$MC^2 = 9 + (a+2)^2 + (b-4)^2; MD^2 = (a-6)^2 + (b+4)^2 + 1$$

$$\Rightarrow MA^2 - 3MB^2 + MC^2 = -a^2 - b^2 + 12a - 8b + 52 = -[(a-6)^2 + (b+4)^2 + 1] + 105$$

$$T = -1 + \frac{105}{(a-6)^2 + (b+4)^2 + 1} \leq 104 \Rightarrow T_{\max} = 104 \quad \text{khi } a = 6; b = -4$$

Câu 4: Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình:

$$256^{2\cos^2 x + \cos x} + 2(4-m)\cos x + 7 - m = 2^{2m\cos x + m+1} - 8\cos 2x \quad \text{có đúng năm nghiệm phân biệt}$$

$$\text{thuộc đoạn } \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right].$$

Lời giải

Đáp số: 9

$$256^{2\cos^2 x + \cos x} + 2(4-m)\cos x + 7 - m = 2^{2m\cos x + m+1} - 8\cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 2^{5(2\cos^2 x + \cos x)} + 8(2\cos^2 x + \cos x) = 2^{2m\cos x + m+1} + 2m\cos x + m+1 \quad (1)$$

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = 2^t + t (\forall t \in \mathbb{R})$. Dễ chứng minh được hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

$$\text{Phương trình} \Leftrightarrow f(8(2\cos^2 x + \cos x)) = f(2m\cos x + m+1)$$

$$\Leftrightarrow 8(2\cos^2 x + \cos x) = 2m\cos x + m+1$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{8(2\cos^2 x + \cos x) - 1}{2\cos x + 1} = 8\cos x - \frac{1}{2\cos x + 1} \quad \left(\text{Vi } \cos x = -\frac{1}{2} \text{ không là nghiệm của phương trình}\right)$$

Đặt $\cos x = t$, với $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right] \Rightarrow t \in [-1; 1]$. Phương trình trở thành:

$$m = 8t - \frac{1}{2t+1} \quad (2)$$

Đặt $f(t) = 8t - \frac{1}{2t+1}$. Vẽ bảng biến thiên của hàm số $f(t)$ trên đoạn $[-1; 1]$

x	$-\infty$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	///	+		+		///
$f(x)$	///	-7	$+\infty$	-1	$\frac{23}{3}$	///

Để phương trình (1) có năm nghiệm phân biệt thuộc đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt thỏa mãn: một nghiệm thuộc $[0; 1)$, còn một nghiệm thuộc $(-1; 0)$ hoặc bằng 1.

$$m \in \left[-1; \frac{23}{3}\right).$$

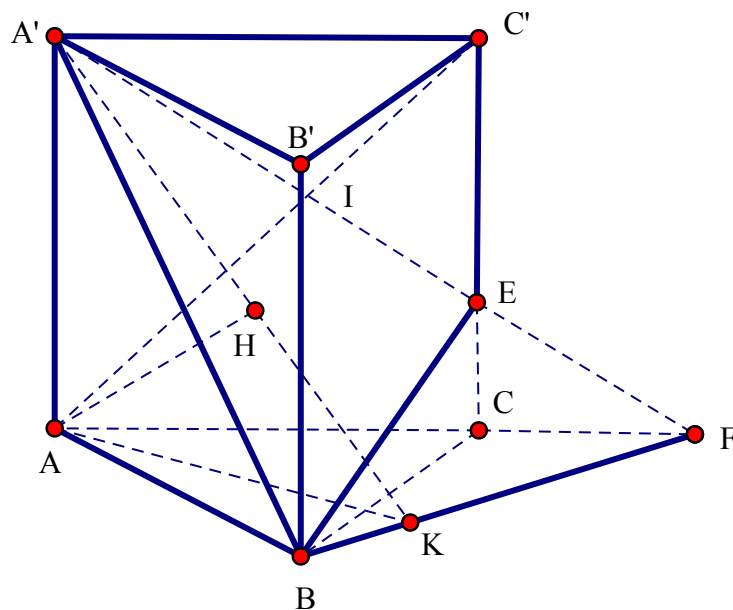
Căn cứ vào bảng biến thiên, ta có: Mà m nguyên nên có 9 giá trị của m .

Câu 5: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, tam giác ABC vuông tại A , $AB = 2AC$. Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{EC'} = -2\overrightarrow{EC}$. Khoảng cách từ điểm C' đến mặt phẳng $(A'BE)$ bằng 12. Gọi α là góc

giữa mặt phẳng $(A'BE)$ và mặt (ABC) . Giả sử khi $\cos \alpha = m$ thì thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ đạt giá trị nhỏ nhất và giá trị nhỏ nhất đó là M . Khi đó $P = m.M$ bằng bao nhiêu.

Lời giải

Đáp số: 6075



Gọi I, F lần lượt là giao điểm của $A'E$ với AC' và AC

Ta có $d(A, (A'BE)) = \frac{3}{2} d(C', (A'BE)) = 18$. Gọi K là hình chiếu của A trên BF , H là hình chiếu của A trên $A'K$. Khi đó góc giữa mặt phẳng $(A'BE)$ và mặt (ABC) là $\angle A'KA \Rightarrow \angle A'KA = \alpha$ và $d(A, (A'BE)) = AH = 18$.

Đặt $AC = x > 0 \Rightarrow AB = 2x, AF = \frac{3}{2} AC = \frac{3x}{2}, BF = \frac{5x}{2}$

Mặt khác $AK = \frac{AB \cdot AF}{BF} = \frac{6x}{5}$

Xét tam giác AHK vuông tại $H \Rightarrow AH = AK \sin \alpha \Leftrightarrow \frac{6x}{5} \cdot \sin \alpha = 18 \Leftrightarrow x = \frac{15}{\sin \alpha}$

Xét tam giác AHK vuông tại $A \Rightarrow A'A = AK \tan \alpha = \frac{6x}{5} \tan \alpha = \frac{18}{\cos \alpha}$

$V = S_{\Delta ABC} \cdot AA' = \frac{225}{\sin^2 \alpha} \cdot \frac{18}{\cos \alpha} = \frac{4050}{\sin^2 \alpha \cdot \cos \alpha} = \frac{4050}{\cos \alpha - \cos^3 \alpha}$

Đặt $t = \cos \alpha \in (0; 1)$. Xét hàm số $f(t) = -t^3 + t; t \in (0; 1)$

Ta có $f'(t) = -3t^2 + 1; f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Lập bảng biến thiên ta được $f(t) \leq \frac{2\sqrt{3}}{9} \Rightarrow V \geq \frac{18225\sqrt{3}}{3}$

$M = \frac{18225\sqrt{3}}{3}$ khi $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = m$

Suy ra thể tích khối lăng trụ nhỏ nhất là

$$P = m.M = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{18225\sqrt{3}}{3} = 6075$$

Vậy

Câu 6: Trong truyện cổ tích Cây tre trăm đốt (các đốt được đánh thứ tự từ 1 đến 100), khi không vác được cây tre dài tận 100 đốt như vậy về nhà, anh Khoai ngồi khóc, Bụt liền hiện lên, bày cho anh ta: “Con hãy hô câu thần chú khắc xuất, khắc xuất thì cây tre sẽ rời ra, con sẽ mang được về nhà”. Biết rằng cây tre 100 đốt được tách ra một cách ngẫu nhiên thành các đoạn ngắn có chiều dài 2 đốt và 5 đốt (có thể chỉ có một loại). Tính xác suất để số đoạn 2 đốt nhiều hơn số đoạn 5 đốt đúng 1 (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Lời giải:

Đáp số: 0,14.

Giả sử có x đoạn 2 đốt và y đoạn 5 đốt được tách ra từ cây tre 100 đốt đã cho.

Ta có: $2x + 5y = 100 \Rightarrow x : 5 \Rightarrow x = 5m \Rightarrow 2m + y = 20 \Rightarrow y \in \{0; 2; 4; \dots; 20\}$

Với mỗi các bộ số $(x; y)$ tìm được cho ta số các đoạn 2 đốt và 5 đốt được tách ra từ đó có số các cách để

tách cây tre 100 đốt thành x đoạn 2 đốt và y đoạn 5 đốt là C_{x+y}^y .

Do đó số cách để tách cây tre 100 đốt thành các đoạn 2 đốt và 5 đốt là:

$$C_{50}^0 + C_{47}^2 + C_{44}^4 + C_{41}^6 + C_{38}^8 + C_{35}^{10} + C_{32}^{12} + C_{29}^{14} + C_{26}^{16} + C_{23}^{18} + C_{20}^{20} = 545813094$$

Để tách cây tre 100 đốt thành các đoạn ngắn có chiều dài 2 đốt và 5 đốt sao cho đoạn có 2 đốt nhiều hơn số đoạn 5 đốt đúng 1 thì ta phải có $x - y = 1 \Rightarrow x = 15, y = 14$.

Số cách để tách cây tre thành 15 đoạn 2 đốt và 14 đoạn 5 đốt là $C_{29}^{15} = 77558760$.

Xác suất để số đoạn 2 đốt nhiều hơn số đoạn 5 đốt đúng 1 là: $\frac{77558760}{545813094} \approx 0,1421$

----- **HẾT** -----