BÀI TẬP TRẢ LỜI NGẮN HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Câu 1: Cho góc lượng giác có số đo $\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{4}\ (k\in\mathbb{Z})$. Các điểm biểu diễn góc này trên đường tròn lượng giác lập thành một đa giác đều có bao nhiêu đỉnh?

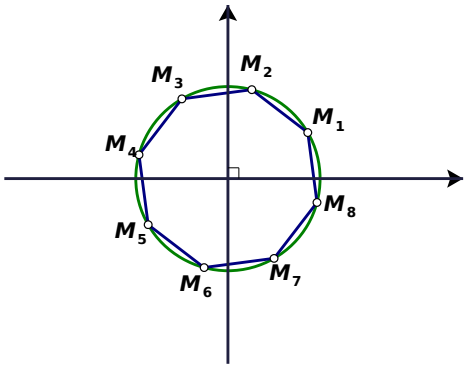
Lời giải

Trả lời: 8.

Các điểm biểu diễn của góc lượng giác đã cho sai khác nhau một bội nguyên của $\frac{\pi}{4}$.

Xét bất phương trình $0<\frac{k\pi}{4}\le 2\pi\Leftrightarrow 0<k\le 8\ (k\in\mathbf{Z})$. Suy ra $k=\{1;2;3;4;5;6;7;8\}$.

Các điểm biểu diễn của góc lượng giác đã cho như hình vẽ bên dưới:



Vậy các điểm biểu diễn góc này trên đường tròn lượng giác lập thành một đa giác đều có 8 đỉnh.

Câu 2: Tính $A=\sin^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}$.

Lời giải

Trả lời:2.

Nhận xét $\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8}$ là hai góc bù nhau nên $\sin\frac{3\pi}{8}=\sin\frac{5\pi}{8}\Rightarrow\sin^2\frac{3\pi}{8}=\sin^2\frac{5\pi}{8}$

Tương tự $\sin\frac{\pi}{8}=\sin\frac{7\pi}{8}\Rightarrow\sin^2\frac{\pi}{8}=\sin^2\frac{7\pi}{8}$

Vậy $A=2.\sin^2\frac{\pi}{8}+2.\sin^2\frac{3\pi}{8}$ mà $\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8}$ là hai góc phụ nhau nên $\sin\frac{3\pi}{8}=\cos\frac{\pi}{8}\Rightarrow\sin^2\frac{3\pi}{8}=\cos^2\frac{\pi}{8}$

$\Rightarrow A=2.\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)=2$

Câu 3: Một dao động điều hòa có phương trình li độ dao động là : $x=A\cos(\omega t+\varphi)$, trong đó t là thời gian tính bằng giây, A là biên độ dao động và x là li độ dao động đều được tính bằng centimet, $\omega>0$. Khi đó, chu kì T của dao động là $T=\frac{2\pi}{\omega}$. Biết giá trị của li độ bằng 9 khi $t=2T,\varphi=\frac{\pi}{6}$, giá trị biên độ dao động bằng bao nhiêu? .

Lời giải

Trả lời: 10,4.

Ta có: $t=2T=2.\frac{2\pi}{\omega}=\frac{4\pi}{\omega}$.

Ta có: $x = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\Rightarrow 9 = A\cos\left(\omega.\frac{4\pi}{\omega} + \frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow A.\cos\left(\frac{\pi}{6} + 4\pi\right) = 9 \Leftrightarrow A.\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 9$$

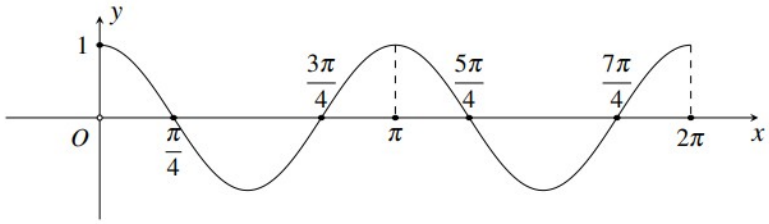
$$\Leftrightarrow \frac{A\sqrt{3}}{2} = 9 \Leftrightarrow A = 6\sqrt{3} \approx 10,4.$$

Câu 4: Cho $\cos 2x = \frac{2}{3}$. Tính giá trị biểu thức $P = 6\cos^2 x - 7$

Lời giải

Trả lời: -2

$$P = 6\cos^2 x - 7 = 3\left(2\cos^2 x - 1\right) - 4 = 3\cos 2x - 4 = 3.\frac{2}{3} - 4 = -2.$$



Câu 5: Xét hàm số $f(x) = \cos 2x$ trên $[0;2\pi]$ có đồ thị như hình vẽ.

Gọi T là tập hợp tất cả các giá trị của $x \in [0;2\pi]$ để $\cos 2x = 0$. Tổng tất cả các phần tử của T là.

Lời giải

Trả lời: 12,6

Dựa vào đồ thị T = $\left\{\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4};\frac{5\pi}{4};\frac{7\pi}{4}\right\}$.

Suy ra, tổng các phần tử trong tập hợp T là $\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} \approx 12,6.$

Câu 6: Tính $A = \sin^2 5° + \sin^2 10° + \sin^2 15° + ... + \sin^2 85°$ (17 số hạng).

Lời giải

Trả lời: 8,5

Ta có $A = \sin^2 5° + \sin^2 10° + \sin^2 15° + ... + \sin^2 85°$

$$= \left(\cos(90° - 5°)\right)^2 + \left(\cos(90° - 10°)\right)^2 + ... + \left(\cos(90° - 40°)\right)^2 + \sin^2 45° + \sin^2 50° + ... + \sin^2 85°$$

$$= \cos^2 85° + \cos^2 80° + ... + \cos^2 50° + \sin^2 45° + \sin^2 50° + ... + \sin^2 80° + \sin^2 85°$$

$$= \left(\cos^2 85° + \sin^2 85°\right) + \left(\cos^2 80° + \sin^2 80°\right) + ... + \left(\cos^2 50° + \sin^2 50°\right) + \sin^2 45°$$

$$= 1 + 1 + ... + 1 + \frac{1}{2} = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}.$$

Câu 7: Cho $\cot\alpha = \sqrt{5}$. Biết giá trị của biểu thức $C = \sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha$ bằng $a - \frac{\sqrt{5}}{b}$ với $a, b \in \mathbb{Q}$. Khi đó $\frac{a+b}{2}$ bằng bao nhiêu

Lời giải

Trả lời: 3,5

Ta có $C=\sin^2\alpha.\dfrac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\sin^2\alpha\left(1-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$.

$=\dfrac{1}{1+\cot^2\alpha}\left(1-\cot\alpha+\cot^2\alpha\right)=\dfrac{1}{1+\left(\sqrt{5}\right)^2}\left(1-\sqrt{5}+5\right)=\dfrac{6-\sqrt{5}}{6}=1-\dfrac{\sqrt{5}}{6}$

$\Rightarrow a=1;b=6\Rightarrow\dfrac{a+b}{2}=3,5$

Câu 8: Một vật thực hiện đồng thời hai dao động điều hòa cùng phương, cùng tần số theo các phương trình:

$$x_1=2cos\left(5\pi t+\frac{\pi}{2}\right)(cm);x_2=2cos\left(5\pi t\right)(cm)$$

Biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là?

Lời giải

Trả lời: 2,83

Xét $x(t)=x_1+x_2=2\cos\left(5\pi t+\dfrac{\pi}{2}\right)+2\cos(5\pi t)\qquad=2\sqrt{2}cos\left(5\pi t+\dfrac{\pi}{4}\right)$

Vậy biên độ của dao động tổng hợp của hai dao động trên là: $2\sqrt{2}\approx2,83$

Câu 9: Số đo của các góc lượng giác α thoả mãn $\sin2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ có dạng $\alpha_1+k\pi$, $\alpha_2+k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$ với α_1, α_2 thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$. Giá trị biểu thức $S=\alpha_1\alpha_2$ là bao nhiêu ?

Lời giải

Trả lời: $0,55$

Ta có: $\sin2\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+k'2\pi\\2\alpha=\dfrac{4\pi}{3}+k'2\pi\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{\pi}{6}+k'\pi\\\alpha=\dfrac{2\pi}{3}+k'\pi\end{array}\right.\ (k'\in\mathbb{Z})$

hay $\left[\begin{array}{l}\alpha=-\dfrac{\pi}{6}+k\pi\\\alpha=-\dfrac{\pi}{3}+k\pi\end{array}\right.,\ (k\in\mathbb{Z})$.

Vì α_1, α_2 thuộc khoảng $\left(-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right)$ nên $\alpha_1=-\dfrac{\pi}{6}$ và $\alpha_2=-\dfrac{\pi}{3}$. Khi đó $S=\alpha_1\alpha_2=\dfrac{\pi^2}{18}\approx0,55$.

Câu 10: Gọi giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của của hàm số $y=3-2\cos2x-\cos^2 2x$ lần lượt là M,m.

Tính giá trị biểu thức $2024M+2025m$.

Lời giải

Trả lời: 8096.

Tập xác định: $D=\mathbb{R}$.

Ta có: $y=3-2\cos2x-\cos^2 2x=4-(\cos2x+1)^2$.

Lại có $\forall x\in\mathbb{R}$ thì $-1\le\cos2x\le1\Rightarrow0\le\cos2x+1\le2\Rightarrow0\le(\cos2x+1)^2\le4$.

Do đó $0\le4-(\cos2x+1)^2\le4-0=4\Rightarrow0\le y\le4$.

$y=4$ khi $\cos 2x=-1\Leftrightarrow 2x=\pi+k2\pi\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}$. Ta được $M=4$.

$y=0$ khi $\cos 2x=1\Leftrightarrow 2x=k2\pi\Leftrightarrow x=k\pi,k\in\mathbb{Z}$. Ta được $m=0$.

Vậy $2024M+2025m=8096$.

Câu 11: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $2024\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)-m+5=0$ có nghiệm?

Lời giải

Trả lời: 4049.

Ta có: $2024\left(\cos^4 x-\sin^4 x\right)-m+5=0\Leftrightarrow 2024\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)-m+5=0$

$\Leftrightarrow 2024\cos 2x-m+5=0\Leftrightarrow \cos 2x=\frac{m-5}{2024}$

Do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow -1\le\frac{m-5}{2024}\le 1\Leftrightarrow -2019\le m\le 2029$

Hơn nữa m là số nguyên nên $m\in\{-2019;-2018;...;2028;2029\}$.

Vậy có 4049 số nguyên m thỏa mãn.

Câu 12: Tính giá trị của biểu thức $P=\frac{\sin^2 x+\sin 2x}{\cos 2x+2}$ biết $\tan x=1$.

Lời giải

Trả lời: $0,75$.

Ta có $P=\frac{\sin^2 x+\sin 2x}{\cos 2x+2}=\frac{\sin^2 x+2\sin x.\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x+2\cos^2 x+2\sin^2 x}=\frac{\sin^2 x+2\sin x.\cos x}{\sin^2 x+3\cos^2 x}$

Chia cả tử và mẫu cho $\cos^2 x$ ta được $P=\frac{\tan^2 x+2\tan x}{\tan^2 x+3}=\frac{1^2+2.1}{1^2+3}=\frac{3}{4}$

Câu 13: Sử dụng MTCT để tìm nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cot x=\frac{1}{3}$ với kết quả là radian .

Lời giải

Trả lời: $-1,9$.

$\cot x=\frac{1}{3}\Leftrightarrow\tan x=3$

Ta có:

Bấm liên tiếp SHIFT $\tan(3)=$

Ta được kết quả gần đúng là $x\approx 1,249045772...$

Suy ra phương trình $\cot x=\frac{1}{3}$ có tất cả các nghiệm là: $x\approx 1,249045772...+k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

Nghiệm âm lớn nhất của phương trình tương ứng với $k=-1$

Trên màn hình MTCT vẫn còn kết quả trên, ta bấm liên tiếp $-$SHIFT π $=$

Ta được kết quả gần đúng là $x\approx -1,892546881...$

Làm tròn đến hàng phần mười được kết đáp án là: $x\approx -1,9$.

Câu 14: Nhiệt độ ngoài trời ở một thành phố vào các thời điểm khác nhau trong ngày được mô phỏng bởi công thức $h(t)=29+3\sin\left[\frac{\pi}{12}(t-9)\right]$

Với h tính bằng độ C và t là thời gian trong ngày tính bằng giờ $(0\le t<24)$. Hãy cho biết nhiệt độ cao nhất ở ngoài trời bằng bao nhiêu độ C?

Lời giải

Trả lời: 32.

Ta có $-1\le \sin\left[\frac{\pi}{12}(t-9)\right]\le 1$

$\Leftrightarrow -3\le 3\sin\left[\frac{\pi}{12}(t-9)\right]\le 3$

$\Leftrightarrow 26\le 29+3\sin\left[\frac{\pi}{12}(t-9)\right]\le 32$

Vậy nhiệt độ ngoài trời cao nhất bằng $32^{\circ}C$.

Câu 15: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số

$d(t)=3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$ với $t\in\mathbb{Z}$ và $100<t\le 365$.

Hỏi thành phố A có đúng 12 giờ có ánh sáng mặt trời vào ngày nào trong năm?

Lời giải

Trả lời: 262.

Ta có phương trình $3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12=12$

$\Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]=0$

$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80)=k\pi\Leftrightarrow t=80+182k$

Với $t,k\in\mathbb{Z}$ và $100<t\le 365$ ta có $k=1$.

Vậy thành phố A có 12 giờ ánh sáng vào ngày thứ 262 của năm.

Câu 16: Cho góc α thỏa mãn $\sin\alpha=\frac{1}{5}$. Khi đó giá trị biểu thức $P=\cos^2 2x+\cos^2 x$ bằng $\frac{a}{b}$. Tính $a+b$.

Biết rằng phân số $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản.

Lời giải

Trả lời: 1754

Biến đổi biểu thức P rồi thay giá trị $\sin\alpha=\frac{1}{5}$ vào P, ta được:

$P=\cos^2 2x+\cos^2 x$

$=\left(1-2\sin^2\alpha\right)^2+\left(1-\sin^2\alpha\right)=\left(1-2.\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)^2+\left(1-\left(\frac{1}{5}\right)^2\right)=\frac{1129}{625}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=1129\\ b=625\end{cases}\Rightarrow a+b=1754$

Câu 17: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x = m$ có nghiệm?

Lời giải

Trả lời:3

$\cos x = m$ có nghiệm $\Leftrightarrow -1 \le m \le 1$. Mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-1;0;1\}$

Câu 18: Phương trình $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2=0$ có bao nhiêu nghiệm trên khoảng $(0;2\pi)$

Lời giải

Trả lời:1

Ta có: $2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)+2=0 \Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{3}+k2\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

Do $x\in(0;2\pi)$ nên $0<-\frac{\pi}{3}+k2\pi<2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6}<k<\frac{7}{6} \Leftrightarrow k=1$.

Vậy phương trình có một nghiệm $x=\frac{5\pi}{3}$.

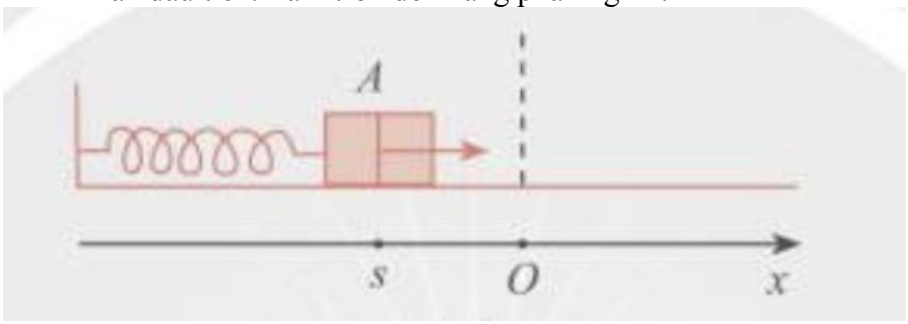
Câu 19: Gọi M và m lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+3$. Tính $M+m$.

Lời giải

Trả lời: 6

Ta có $y=\sin x+\sqrt{3}\cos x+3=2\left(\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x\right)+3=2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+3$

Câu 20: Trong hình vẽ bên dưới, khi được kéo ra khỏi vị trí cân bằng ở điểm O và buông tay, lực đàn hồi của lò xo khiến vật A gắn ở đầu lò xo dao động quanh O. Tọa độ s của A trên trục Ox vào thời điểm t sau khi buông tay được xác định bởi công thức $s=2\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)$. Vào thời điểm nào thì $s=-2$ lần đầu tiên. Làm tròn đến hàng phần nghìn.



Lời giải

Trả lời: 1,178

Khi $s=-2$ thì $2\sqrt{2}\sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)=-2 \Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2t+\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2t+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2t+\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}+k2\pi \\ 2t+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{4}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\frac{3\pi}{8}+k\pi \\ t=\frac{3\pi}{8}+k\pi \end{array}\right.$$

Do lấy thời điểm lần đầu tiên nên ta chọn k sao cho $t>0$ nhỏ nhất.

Ta thấy $k=0 \Rightarrow t=\frac{3\pi}{8}\approx 1{,}178$ là thời điểm đầu tiên.

Câu 21: Số giờ có ánh sáng mặt trời của thành phố A ở vĩ độ 40° Bắc ở ngày thứ t trong năm không nhuận được thể hiện qua công thức $d(t)=3\sin\left[\frac{\pi(t-80)}{180}\right]+12 \quad (1\le t\le 365).$ Hãy cho biết ngày nào trong năm thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Trả lời: 170

Ta có

$$-1\le \sin\left[\frac{\pi(t-80)}{180}\right]\le 1$$

$$\Rightarrow 9\le 3\sin\left[\frac{\pi(t-80)}{180}\right]+12\le 15$$

$$\Rightarrow 9\le d(t)\le 15.$$

Suy ra $\max_{[1;15]} d(t)=15$ khi $\sin\left[\frac{\pi(t-80)}{180}\right]=1$ với $t=170.$

Vậy vào ngày thứ 170 thì thành phố A có nhiều giờ được chiếu ánh sáng mặt trời nhất.

Câu 22: Giá trị của $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ bằng

Lời giải

Trả lời: 1

Ta có: $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

Câu 23: Có bao nhiêu giá trị của góc x biết $\sin x=\frac{1}{2}$ với $0<x<\pi$

Lời giải

Trả lời: 2

$$\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right. \quad (k\in\mathbb{Z})$$

Ta có:

$0<x<\pi\Rightarrow x=\left\{\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$

Mà . Vậy có 2 giá trị

Câu 24: Phương trình $\sin x(1+2\cos x)=0$ có bao nhiêu nghiệm $x\in(-\pi;\pi)$

Lời giải

Trả lời: 3

$$\sin x(1+2\cos x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sin x=0\\ \cos x=-\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=k\pi\\ x=\pm\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.$$

$x\in(-\pi;\pi)\Rightarrow x\in\left\{0,-\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right\}$

Do . Vậy có 3 giá trị

Câu 25: Tập giá trị của hàm số $y=\cos 2x+1$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

Lời giải

Trả lời: 3

Ta có: $-1\le\cos 2x\le 1\Leftrightarrow 0\le\cos 2x+1\le 2$. Vậy có 3 giá trị nguyên

Câu 26: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số *m* để phương trình $\sin x = m+1$ có nghiệm

Lời giải

Trả lời: 3

Vì $-1 \le \sin x \le 1$ nên phương trình $\sin x = m+1$ có nghiệm khi: $-1 \le m+1 \le 1 \Leftrightarrow -2 \le m \le 0$.

Vậy có 3 giá trị.

Câu 27: Số giờ ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40^0 bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$ với $t \in Z$ và $0 < t \le 365$.

Vào ngày nào trong năm thì thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất?

Lời giải

Trả lời: 171

a) Do $\sin x \le 1$ với mọi x $\Leftrightarrow 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12 \le 15$ nên thành phố A có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất khi và chỉ khi $3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12 = 15$ với $t \in Z$ và $0 < t \le 365$

$$\Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Tức là $t = 364k + 171$ với $k \in Z$

Mà $0 < t \le 365$ nên $0 < 364k + 171 \le 365 \Leftrightarrow \frac{-171}{364} < k \le \frac{194}{364} \Leftrightarrow k = 0$.

Vậy thành phố A có nhiều giờ ánh sáng mặt trời nhất vào ngày thứ 171 trong năm.

Câu 28: Cho $\cot\alpha = 3$. Tính $A = \frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{12\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha}$.

Lời giải

Trả lời: -0,3

Ta có $A = \frac{3\sin\alpha - 2\cos\alpha}{12\sin^3\alpha + 4\cos^3\alpha} = \frac{\frac{1}{\sin^2\alpha}(3 - 2\cot\alpha)}{12 + 4\cot^3\alpha} = \left(1+\cot^2\alpha\right)\frac{3-2\cot\alpha}{12+4\cot^3\alpha} = -\frac{1}{4} \approx -0,3$

Câu 29: Cho $\tan\alpha = 3$, khi đó giá trị của biểu thức $P = \frac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}$ là

Lời giải

Trả lời: -1,25

Chia cả tử và mẫu của P cho $\cos\alpha \ne 0$ ta được:

$$P = \frac{2\sin\alpha - \cos\alpha}{3\sin\alpha - 5\cos\alpha} = \frac{2\tan\alpha - 1}{3\tan\alpha - 5} = \frac{5}{4} = 1,25.$$

Câu 30: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right)$.

Ở đây, thời gian t tính bằng giây. Trong thời gian từ 0 đến 30 giây, vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Trả lời:19

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hòa là vị trí vật đứng yên, khi đó $x = 0$.

Xét phương trình $3\cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ ta có:

$3\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(2t-\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow 2t-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi\Leftrightarrow t=\frac{5\pi}{12}+k\frac{\pi}{2},k\in Z$.

Trong thời gian từ 0 đến 30 giây, tức là $0\le t\le 30$ hay $0\le\frac{5\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}\le 30$

$\Leftrightarrow-\frac{5}{6}\le k\le\frac{360-5\pi}{6\pi}$.

Mà $k\in\mathbb{Z}$ nên $k\in\{0;1;2;3;...;17;18\}$.

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 19 lần.

Câu 31: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $\cos x-m=2$ có nghiệm.

Lời giải

Trả lời:3

Ta có: $\cos x-m=2\Leftrightarrow\cos x=2+m$.

Điều kiện để phương trình có nghiệm là: $-1\le m+2\le 1\Leftrightarrow-3\le m\le-1$.

Vậy $-3\le m\le-1$ thoả mãn đề bài.

Câu 32: Nghiệm phương trình lượng giác $\sin 3x\cdot\cos 3x=0$ có dạng $x=\frac{k\pi}{a}$. Tìm a

Lời giải

Trả lời:6

Câu 33: Nhiệt độ ngoài trời T vào thời điểm t giờ $(0\le t<24)$ trong một ngày ở một kho đông lạnh tính bằng công thức $T=10+5\sin\left(\frac{\pi t}{8}-\frac{3\pi}{4}\right)$. Để bảo quản thực phẩm, hệ thống điều hòa sẽ tự động bật khi nhiệt độ ngoài trời từ $10^{0}C$ trở lên. Biết rằng, trong 1 ngày hệ thống điều hòa sẽ bật trong khoảng $[a;b]\cup[c;d)$. Giá trị của $a+b+c+d$ bằng:

Lời giải

Trả lời: 66

Khi nhiệt độ ngoài trời $10^{0}C$

$T=10+5\sin\left(\frac{\pi t}{8}-\frac{3\pi}{4}\right)=10\Leftrightarrow\frac{\pi t}{8}-\frac{3\pi}{4}=k\pi,k\in\mathbb{Z}$.

$t=6+8k,k\in\mathbb{Z}$, $0\le 6+8k<24\Rightarrow k\in\{0;1,2\}$

$t=6,t=14,t=22$. $[a;b]\cup[c;d)=[6;14]\cup[22;24)$

Suy ra

Ta có $a+b+c+d=6+14+22+24=66$

Câu 34: Khi xe đạp di chuyển, chọn chiều dương là chiều quay của bánh xe. Van V của bánh xe quay được một góc có số đo 450π mỗi phút. Biết bán kính của bánh xe là $30\,\text{cm}$. Độ dài quãng đường mà xe đạp đã đi được trong 1 phút bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

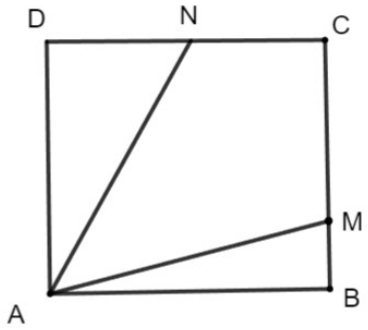
Trả lời:424.

Mỗi góc ở tâm với số đo 1 rad chắn một cung có độ dài bằng bán kính bánh xe $r=0,3\,\text{m}$.

Do đó độ dài quãng đường xe đạp đã đi được trong 1 phút là $450\pi.0,3\approx 424\,m$.

Câu 35: Trên một mảnh đất hình vuông $ABCD$, bác An đặt một chiếc đèn pin tại vị trí A chiếu chùm sáng phân kì sang phía góc C. Bác An nhận thấy góc chiếu sáng của đèn pin giới hạn bởi hai tia AM

và AN, ở đó các điểm M, N lần lượt thuộc các cạnh BC, CD sao cho $BM = \frac{1}{4}BC, DN = \frac{1}{2}DC$. Góc chiếu sáng của đèn pin bằng bao nhiêu độ ?



Lời giải

Trả lời:49.

Trong tam giác vuông ABM, $\tan \widehat{BAM} = \frac{BM}{AB} = \frac{1}{4}$.

Trong tam giác vuông ADN, $\tan \widehat{DAN} = \frac{DN}{AD} = \frac{1}{2}$.

$$\tan\left(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}\right) = \frac{\tan \widehat{BAM} + \tan \widehat{DAN}}{1 - \tan \widehat{BAM}.\tan \widehat{DAN}} = \frac{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}.\frac{1}{2}} = \frac{6}{7}$$

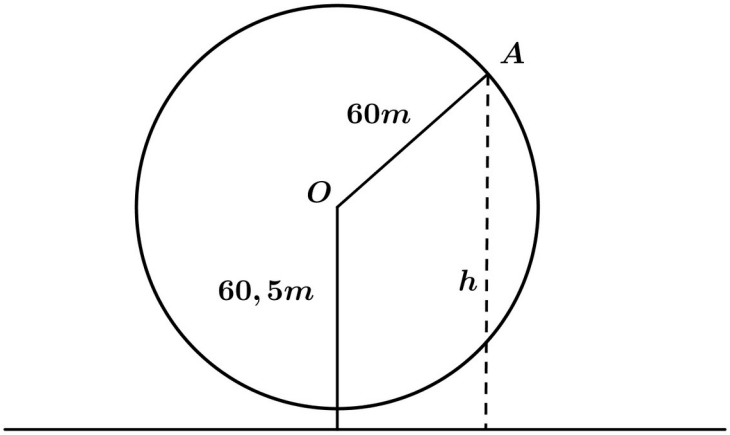
Do đó, .

Suy ra $\left(\widehat{BAM} + \widehat{DAN}\right) \approx 41^0$.

Ta có: $\widehat{MAN} = 90^0 - \widehat{BAM} - \widehat{DAN} \approx 49^0$.

Vậy góc chiếu sáng của đèn pin xấp xỉ bằng 49^0.

Câu 36: Một vòng quay trò chơi có bán kính $60m$, trục quay cách mặt đất $60,5m$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 60\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 60,5$, với t là thời gian của vòng quay tính bằng phút $(t \geq 0)$. Sau khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$, tại thời điểm nào tiếp theo của t thì cabin ở vị trí cao nhất?



Lời giải

Trả lời:22,5.

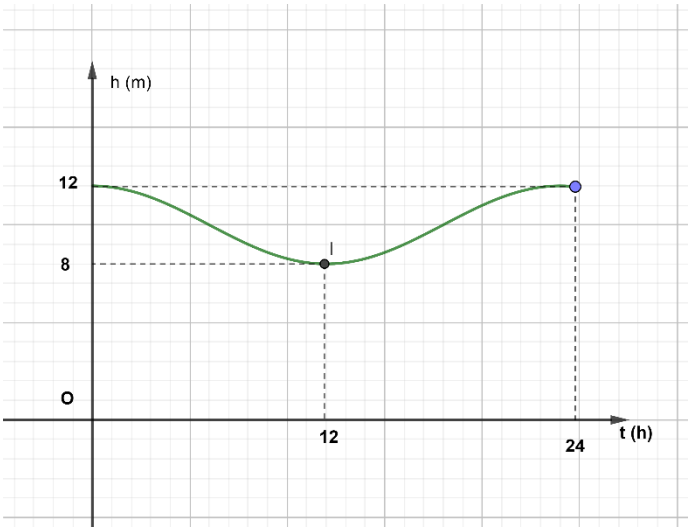
Vòng quay ở vị trí cao nhất $h(t)=60+60,5=120,5m$ khi:

$$\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow\frac{2}{15}t-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+2k\Leftrightarrow\frac{2}{15}t=1+2k$$

$$\Leftrightarrow t=7,5+15k\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

Vòng quay ở vị trí cao nhất sau một vòng thứ nhất khi $k=1\Rightarrow t=7,5+15=22,5$.

Câu 37: Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 12 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là 8 m. Đồ thị dưới đây mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước h theo thời gian t $(0\le t\le 24)$ được cho bởi công thức $h=m+a.\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước. Tính giá trị $T=m+a$.



Lời giải

Trả lời:12.

Ta có $-1\le\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)\le 1\ \forall t\in\mathbb{R}$ nên $m-a\le h\le m+a\ \ \forall t$

Do đó mực nước thấp nhất là $m-a$, mực nước cao nhất là $m+a$.

Theo đề bài ta có: $\begin{cases}m-a=8\\m+a=12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m=10\\a=2\end{cases}$

Nên suy ra $T=m+a=10+2=12$.

Câu 38: Một chiếc quạt trần đang quay, giả sử chọn chiều quay của quạt là chiều dương. Biết rằng cứ 12 giây thì quạt quay được 35 vòng. Sau 72 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $a\pi\left(rad\right)$. Tìm giá trị của a.

Lời giải

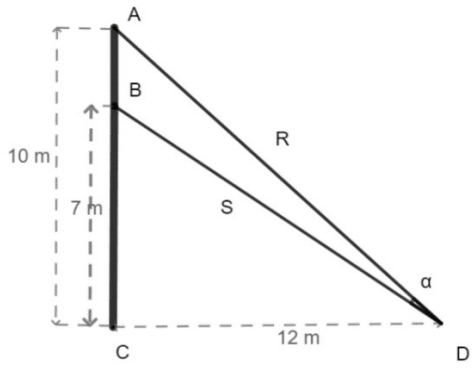
Trả lời:420.

Sau 1 giây, cánh quạt quay được $\frac{35}{12}$ vòng theo chiều dương.

Suy ra sau 1 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo $\frac{35}{12}\cdot 2\pi=\frac{35\pi}{6}$.

Vậy sau 72 giây, cánh quạt quay được một góc có số đo là $\frac{35\pi}{6}\cdot 72 = 420\pi$. Do đó $a = 420$.

Câu 39: Một sợi dây cáp R được gắn vào một cột thẳng đứng ở vị trí cách mặt đất 10 m. Một sợi cáp S khác cũng được gắn vào cột đó ở vị trí cách mặt đất 7 m. Biết rằng hai sợ cáp trên cùng được gắn với mặt đất tại một vị trí cách chân cột 12 m. Tính $\tan\alpha$, ở đó α là góc giữa hai sợi cáp trên ?



Lời giải

Trả lời:0,17.

Ta có: $\alpha = \widehat{ADC} - \widehat{BDC}$.

Trong tam giác vuông ACD, $\tan\widehat{ADC} = \frac{AC}{CD} = \frac{5}{6}$.

Trong tam giác vuông BCD, $\tan\widehat{BDC} = \frac{BC}{CD} = \frac{7}{12}$.

$$\tan\alpha = \tan\left(\widehat{ADC} - \widehat{BDC}\right) = \frac{\tan\widehat{ADC} - \tan\widehat{BDC}}{1 + \tan\widehat{ADC}.\tan\widehat{BDC}} = \frac{\frac{5}{6} - \frac{7}{12}}{1 + \frac{5}{6}.\frac{7}{12}} = \frac{18}{107} \approx 0,17$$

Do đó:

Vậy $\tan\alpha \approx 0,17$.

Câu 40: Một con lắc lò xo treo thẳng đứng gồm một lò xo nhẹ và một vật nặng khối lượng m Từ vị trí cân bằng, kéo vật xuống một đoạn để lò xo giãn rồi buông cho vật dao động. Chọn trục toạ độ Ox trùng với trục lò xo, gốc toạ độ O tại vị trí cân bằng, chiều dương hướng xuống dưới, gốc thời gian là lúc vật đi qua vị trí cân bằng lần đầu tiên. Khi đó phương trình dao động của vật là $x = 5\cos\left(20t + \frac{\pi}{2}\right)$, với x là toạ độ của vật nặng, t là thời gian vật di chuyển. Vào thời gian nào thì vật lần đầu tiên có toạ độ 5 ? .

Lời giải

Trả lời:0,24.

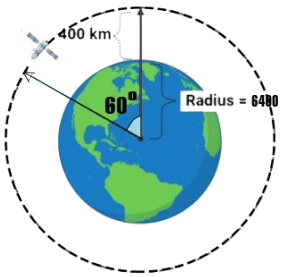
Vật có toạ độ 5 ta có:

$$x = 5 \Leftrightarrow 5\cos\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = 5$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(20t + \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow 20t + \frac{\pi}{2} = k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{10}, \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vì lần đầu tiên vật đạt toạ độ 5 nên $t = -\frac{\pi}{40} + \frac{\pi}{10} = \frac{3\pi}{40} \approx 0,24 \ (k = 1)$.

Câu 41: Trạm vũ trụ quốc tế ISS nằm trong quỹ đạo tròn cách bề mặt Trái Đất khoảng 400 km. Nếu trạm mặt đất theo dõi được trạm vũ trụ ISS khi nó nằm trong góc 60° ở tâm của quỹ đạo tròn này phía trên ăng-ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu kilômét trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng bán kính của Trái Đất là $6\,400$ km. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.



Lời giải

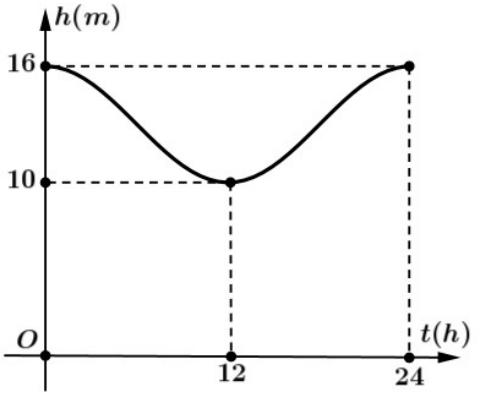
Trả lời:7121

Bán kính quỹ đạo của trạm vũ trụ quốc tế là $R = 6\,400 + 400 = 6800$.

Đổi $60^\circ = 60 \cdot \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{\pi}{3}$ rad.

Vậy trong khi được trạm mặt đất theo dõi, trạm ISS đã di chuyển một quãng đường có độ dài là $l = R\alpha = 6800 \cdot \dfrac{\pi}{3} \approx 7120,943 \approx 7121$.

Câu 42: Mực nước cao nhất tại một cảng biển là 16 m khi thủy triều lên cao và sau 12 giờ khi thủy triều xuống thấp thì mực nước thấp nhất là 10 m. Đồ thị ở hình dưới đây mô tả sự thay đổi chiều cao của mực nước tại cảng trong vòng 24 giờ tính từ lúc nửa đêm. Biết chiều cao của mực nước $h(\text{m})$ theo thời gian $t(\text{h})(0 \le t \le 24)$ được cho bởi công thức $h = m + a\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right)$ với m, a là các số thực dương cho trước. Tìm thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước là $11,5$ m và tính tổng các thời điểm đó.



Lời giải

Trả lời:24

Chiều cao của mực nước cao nhất là $m + a$ khi $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) = 1$ và thấp nhất bằng $m - a$ khi $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}t\right) = -1$. Theo giả thiết, ta có: $\begin{cases} m + a = 16 \\ m - a = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 13 \\ a = 3. \end{cases}$

Từ câu a ta có công thức: $h=13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)$. Do chiều cao của mực nước là 11,5 m nên

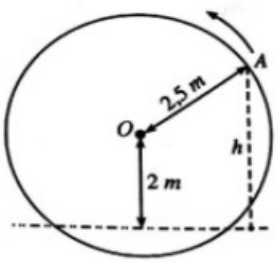
$$13+3\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=11,5\Leftrightarrow\cos\left(\frac{\pi}{12}t\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{12}t=\frac{2\pi}{3}+k2\pi\\ \frac{\pi}{12}t=-\frac{2\pi}{3}+k2\pi\end{array}\right.(k\in Z)\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=8+24k\\ t=-8+24k\end{array}\right.(k\in Z).$$

Ứng với hai thời điểm trong ngày ta có $t=8(\text{ h})$ và $t=16$.

Tổng của hai thời điểm là $8+16=24$

Câu 43: Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính 2,5 m; trục của nó cách mặt nước 2 m . Khi guồng quay đều, khoảng cách h tính từ một chiếc gầu gắn tại điểm A trên guồng đến mặt nước là $h=|y|$ trong đó $y=2+2,5\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)$ với x là thời gian quay của guồng $(x\geq 0)$, tính bằng phút; ta quy ước rằng khi gầu ở trên mặt nước và $y<0$ khi gầu ở dưới mặt nước. Chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên tại thời điểm nào?



Mô phỏng guồng nước

Lời giải

Trả lời:15

Gầu cách mặt nước 2 m khi $2+2,5\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=2$

$$\Leftrightarrow\sin 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\pi\left(x-\frac{1}{4}\right)=k\pi(k\in Z)$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}(k\in Z)$$

Vì $x\geq 0$ nên $x=\frac{1}{4}+\frac{k}{2}(k\in N)$

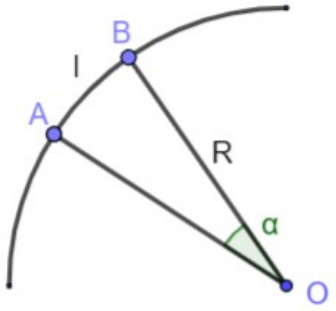
Vậy chiếc gầu cách mặt nước 2 mét lần đầu tiên tại thời điểm $\frac{1}{4}$ phút = 15 giây.

Câu 44: Sân bay Quốc tế Cát Bi – Hải Phòng và sân bay Quốc Tế Tân Sơn Nhất – TP. Hồ Chí Minh nằm xấp xỉ trên cùng một kinh tuyến. Biết rằng sân bay Quốc tế Cát Bi có vĩ độ là $20^{\circ}49'$ Bắc, sân bay Quốc Tế Tân Sơn Nhất có vĩ độ $10^{\circ}49'$ Bắc. Biết rằng bán kính trái đất tại xích đạo là 6378 km. Khoảng cách giữa hai sân bay trên là bao nhiêu km? .

Lời giải

Trả lời: 1113.

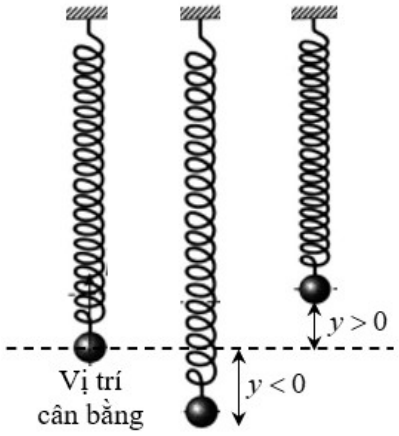
Gọi điểm O, A, B lần lượt là tâm Trái Đất, sân bay Quốc Tế Cát Bi, sân bay Quốc Tế Tân Sơn Nhất và l là độ dài cung hình học $\overset{\frown}{AB}$. Ta có l là khoảng cách giữa hai sân bay.



Ta có: $\alpha = \widehat{AOB} = 20^\circ 49' - 10^\circ 49' = 10^\circ = \dfrac{10\pi}{180} = \dfrac{\pi}{18}$ rad và $R = 6378$ km.

Độ dài của cung $\overset{\frown}{AB}$ là: $l = \alpha R = \dfrac{\pi}{18}.6378 \approx 1113$ km.

Câu 45: Một con lắc lò xo dao động điều hoà quanh vị trí cân bằng theo phương trình $y = 25\sin 4\pi t$ ở đó y được được tính bằng centimét còn thời gian t được tính bằng giây. Gọi a là chu kì dao động của con lắc lò xo; b là tần số dao động của con lắc, tức là số lần dao động trong một giây và c là khoảng cách giữa điểm cao nhất và thấp nhất của con lắc. Tính $a + b + c$.



Lời giải

Trả lời: $52,5$.

Hàm số $y = 25\sin 4\pi t$ tuần hoàn với chu kì $T = \dfrac{2\pi}{4\pi} = \dfrac{1}{2}$ suy ra chu kì dao động của con lắc lò xo là $T = \dfrac{1}{2}$ giây nên $a = 0,5$.

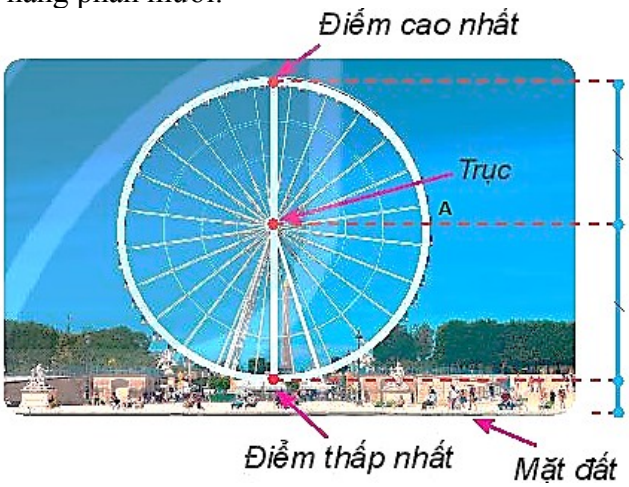
Vì chu kì dao động của con lắc là $T = \dfrac{1}{2}$ giây nên trong 1 giây con lắc thực hiện được 2 dao động, tức là tần số dao động của con lắc là $b = f = \dfrac{1}{T} = 2$ Hz.

Vì phương trình dao động của con lắc là $y = 25\sin 4\pi t$ nên biên độ dao động của nó là $A = 25$ cm

Từ đó khoảng cách giữa điểm cao nhất và điểm thấp nhất của con lắc là $c = 2A = 50$ cm.

Vậy $a + b + c = 0,5 + 2 + 50 = 52,5$.

Câu 46: Vòng quay mặt trời trong một khu vui chơi có điểm cao nhất là 60 m, điểm thấp nhất là 6 m . Bạn An tham gia chơi vòng quay mặt trời. Ban đầu bạn An ở vị trí A như hình vẽ. Hỏi độ cao bạn An sau khi vòng quay quay được $2\frac{1}{3}$ vòng. Biết rằng vòng quay mặt trời quay theo chiều kim đồng hồ. Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

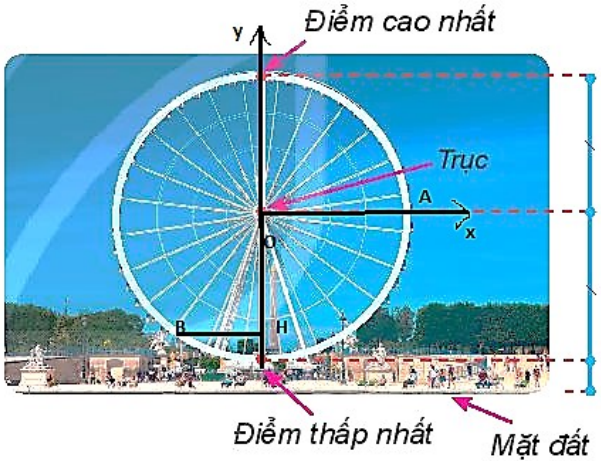


Lời giải

Trả lời: $9,6$.

Bán kính của vòng quay mặt trời là $R=\frac{60-6}{2}=27\,(\mathrm{m})$

Đặt hệ trục như hình vẽ



Sau khi quay $2\frac{1}{3}$ vòng bạn An ở vị trí B, kẻ $BH\perp Oy$

Bạn An đã quay một góc $\alpha=-2\frac{1}{3}\cdot 360^\circ=-840^\circ$.

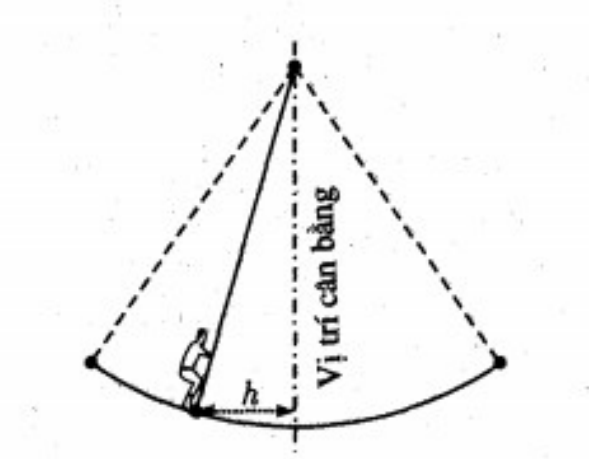
Khi đó $B\left(27.\cos\left(-840^\circ\right);27.\sin\left(-840^\circ\right)\right)$

Suy ra $\overline{OH}=27.\sin\left(-840^\circ\right)\approx -23,4$.

Vậy độ cao bạn An sau khi vòng quay quay được $2\frac{1}{3}$ vòng là $27-23,4+6=9,6\,m$.

Câu 47: Mùa xuân ở Hội Lim thường có trò chơi đu. Khi người chơi đu nhún đều, cây đu sẽ đưa người chơi đu dao động qua lại vị trí cân bằng. Nghiên cứu trò chơi này, người ta thấy khoảng cách h được tính từ vị trí chân người chơi đu đến vị trí cân bằng được biểu diễn bởi hệ thức $h=|d|$ với

$d = 3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right]$ ($t \ge 0$ và được tính bằng giây), trong đó ta quy ước $d > 0$ khi vị trí cân bằng ở về phía sau lưng người chơi đu và $d < 0$ trong trường hợp ngược lại.



Hỏi trong 3 giây đầu tiên, có tất cả bao nhiêu lần người chơi đu ở cách vị trí cân bằng 1 mét?

Lời giải

Trả lời: 4

Người chơi cách vị trí cân bằng 1 mét khi $3\cos\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \pm 1$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left[\frac{\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{8}{9} \Leftrightarrow 1-\cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right] = \frac{16}{9} \Leftrightarrow \cos\left[\frac{2\pi}{3}(2t-1)\right] = -\frac{7}{9}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{2\pi}{3}(2t-1) = \alpha + k2\pi \\ \frac{2\pi}{3}(2t-1) = -\alpha + k2\pi\end{array}\right. \left(\text{với } k \in \mathbb{Z} \text{ và } \cos\alpha = -\frac{7}{9}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t = \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \\ t = -\frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}\end{array}\right.$$

Trong 3 giây đầu tiên ứng với $0 \le t \le 3$:

+) Với $t = \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}$ thì $0 \le \frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \le 3 \Rightarrow -0,73 \le k \le 1,27 \Rightarrow k \in \{0;1\}$.

+) Với $t = -\frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2}$ thì $0 \le -\frac{3\alpha}{4\pi} + \frac{1}{2} + \frac{3k}{2} \le 3 \Rightarrow 0,06 \le k \le 2,06 \Rightarrow k \in \{1;2\}$.

Vậy trong 3 giây đầu tiên, có 4 lần người chơi ở cách vị trí cân bằng 1 mét.

Do $\forall x: -1 \le \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 1 \Leftrightarrow -2 \le 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \le 2 \Leftrightarrow 1 \le 2\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + 3 \le 5 \Leftrightarrow 1 \le y \le 5$.

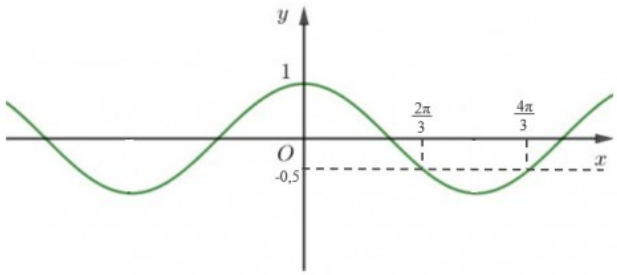
Vậy $m = \min y = 1$ khi $x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và $M = \max y = 5$ khi $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ nên $M + m = 6$.

Câu 48: Độ sâu $h(m)$ của mực nước ở một cảng biển vào thời điểm t sau khi thủy triều lên lần đầu tiên trong ngày được tính xấp xỉ bởi công thức $h(t) = 0,8\cos(0,5t) + 4$. Một con tàu cần mực nước sâu tối thiểu là $3,6m$ để có thể di chuyển ra vào cảng an toàn. Dựa vào đồ thị của hàm số côsin, hãy cho biết trong vòng 12 tiếng sau khi thủy triều lên lần đầu tiên, **có tất cả bao nhiêu thời điểm t "đẹp"** để có thể hạ thủy. Biết rằng thời điểm t được gọi là "đẹp " là thời điểm t nguyên , Ví dụ $t = 1$; $t = 2$ …

Lời giải

Trả lời: 9

Dựa vào đồ thị hàm số cos:



$0,8\cos 0,5t + 4 < 3,6 \Leftrightarrow \cos 0,5t \ge -0,5$

Những thời điểm tàu **có** thể hạ thuỷ là khi

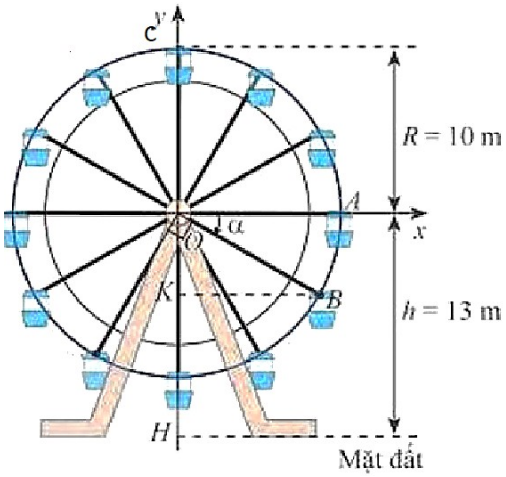
$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le 0,5t \le \dfrac{2\pi}{3} \\ \dfrac{4\pi}{3} \le 0,5t \le 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0 \le t \le \dfrac{4\pi}{3} \\ \dfrac{8\pi}{3} \le t \le 12 \end{array}\right.$$

Suy ra thời điểm tàu có thể hạ thuỷ là $t \in [0;4,19] \cup [8,38;12]$ mà $t \in \mathbb{Z}$ nên ta có $t \in \{0;1;2;3;4;9;10;11;12\}$.

Vậy có tất cả 9 thời điểm đẹp để hạ thủy con tàu.

Câu 49: Trong hình vẽ sau, vị trí cabin mà Bình và Cường ngồi trên vòng quay được đánh dấu bởi 2 điểm B và C. Biết các cabin nằm cách đều nhau và số đo góc $(OA,OB) = \alpha$. Hỏi khi Bình cách mặt đất 4m **lần thứ hai** kể từ lúc bắt đầu chuyển động thì Cường cách mặt đất bao nhiêu m ? Làm tròn đến hàng phần nghìn.

Lời giải



Trả lời: 21,275

Ta có $KH = y_B = 10\sin\alpha + 13$.

Khi $KH = 4$. Suy ra $\sin\alpha = \dfrac{-9}{10} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1-\left(\dfrac{-9}{10}\right)^2} = \pm\dfrac{\sqrt{19}}{10}$.

$$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2};-\pi\right) \Rightarrow \cos\alpha < 0 \Rightarrow \cos\alpha = -\frac{\sqrt{19}}{10}$$

Do Bình cách mặt đất 4m ở lần thứ hai nên góc

Khoảng cách từ vị trí Cường đến mặt đất là

$$HC = 13 + 10\sin(\alpha - 240) = 13 + 10\left[\sin\alpha\cos 240 - \cos\alpha\sin 240\right]$$

$$HC = 13 + 10\left[\left(\frac{-9}{10}\right)\left(\frac{-1}{2}\right) - \left(\frac{-\sqrt{19}}{10}\right)\frac{1}{2}\right] \approx 21{,}275$$

Câu 50: Một chiếc xe đạp có hai bánh và bánh phía sau được liên kết với bàn đạp và dây xích như hình bên dưới . Biết bánh trước có đường kính 24 cm và bánh sau có đường kính 60 cm . Hỏi bánh trước sẽ quay một góc bao nhiêu radian nếu bánh sau đã quay một góc 12 rad?

Lời giải

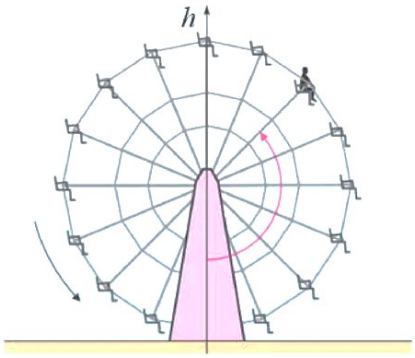
Trả lời: 30

Bán kính của bán trước và bánh sau của xe đạp lần lượt là $r_1 = 12;\ r_2 = 30.$

Bánh sau quay một góc 12 rad nên sẽ di chuyển một đoạn bằng $30 \cdot 12 = 360$ cm, đây cũng chính là đoạn đường di chuyển của bánh trước.

Suy ra số rad mà bánh trước quay được là $\frac{360}{12} = 30$.

Câu 51: Một bánh xe đu quay có đường kính 200 m cách đất một khoảng $d = 1$m quay ngược chiều kim đồng hồ với tốc độ $\frac{1}{2}$ vòng/phút . Một người lên đu quay ở vị trí thấp nhất so với mặt đất. Tại thời điểm t khi đu quay hoạt động, người này ở độ cao là h so với mặt đất. Lần đầu tiên để người đó ở độ cao cách mặt đất 50 m là ở phút thứ mấy kể từ lúc lên đu quay?



Lời giải

Trả lời: 0,5

Hình bên mô tả chuyển động của đu quay với tâm của vòng quay là điểm O, điểm M là vị trí của cabin chứa người chơi.

Gọi $\alpha = (Ox, OM)$. Khi đó vị trí của cabin M tại thời điểm t kể từ khi đu quay hoạt động là

$$h(t) = OA + y_M = 101 + 100\sin\alpha = 101 + 100\sin\left(\pi t + \frac{3\pi}{2}\right) = 101 - 100\cos(\pi t).$$

Theo đề bài,

$$h(t)=101 \Leftrightarrow 101-100\cos(\pi t)=101$$

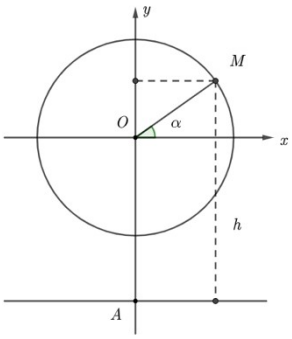
$$\Leftrightarrow \cos(\pi t)=0 \Leftrightarrow \pi t=\frac{\pi}{2}+k\pi$$

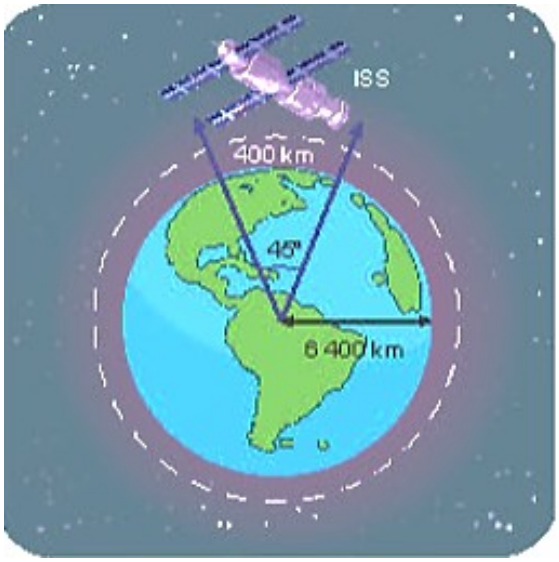
$$\Leftrightarrow t=\frac{1}{2}+k \ (k\in\mathbb{Z}).$$

Do $t\geq 0$ nên $k\geq -\frac{1}{2}$.

Vậy lần đầu tiên người chơi đu quay ở vị trí cách mặt đất 101 mét là $t=\frac{1}{2}=0,5$.

Câu 52: Trạm vũ trụ Quốc tế ISS nằm trong quỹ đạo tròn khoảng $400\,km$. Nếu trạm mặt đất theo dõi khi nó nằm trong góc 45° ở tâm của quỹ đạo ăng-ten theo dõi, thì trạm vũ trụ ISS đã di chuyển được bao nhiêu km trong khi nó đang được trạm mặt đất theo dõi? Giả sử rằng bán kính của Trái Đất là $6400\,km$. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.





Lời giải

Trả lời: 5341.

Bán kính quỹ đạo của trạm vũ trụ quốc tế là $R=6400+400=6800\,(km)$.

Đổi $45^\circ=45.\frac{\pi}{180}=\frac{\pi}{4}\,(rad)$.

Vậy trong khi được trạm mặt đất theo dõi, trạm ISS đã di chuyển một quãng đường có độ dài $l=R.\alpha=6800.\frac{\pi}{4}\approx 5341\,(km)$.

Câu 53: Máy kéo nông nghiệp có hai bánh sau to hơn hai bánh trước. Khi bơm căng, bánh xe sau có đường kính là 189 cm và bánh xe trước có đường kính là 90 cm. Hỏi khi xe chạy trên đoạn đường thẳng, bánh xe sau lăn được 10 vòng thì xe đi được bao xa và bánh xe trước lăn được mấy vòng?

Lời giải

Trả lời: 21

Độ dài bánh xe sau là: $C = \pi.d = 189.\pi\left(cm\right)$

Quãng đường xe đi được khi bánh sau lăn 10 vòng là:

$10.189.\pi = 1890.\pi\left(cm\right)$

Độ dài bánh xe trước là: $C = \pi.d = 90.\pi\left(cm\right)$

Số vòng bánh trước lăn được là: $\left(1890.\pi\right):\left(90.\pi\right) = 21$

Câu 54: Một bánh xe có 72 răng. Số đo góc mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng là bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 50°

Ta có:

01 bánh răng tương ứng với $\frac{360^{\circ}}{72} = 5^{\circ} \Rightarrow 10$ bánh răng là 50°.

Câu 55: Trong 20 giây bánh xe của xe gắn máy quay được 60 vòng. Tính độ dài quãng đường xe gắn máy đã đi được trong vòng 3 phút, biết rằng bán kính bánh xe gắn máy bằng $6,5cm$.

Trả lời: $22054,032$

Lời giải

Ta có:

3 phút xe đi được $\frac{3\times 60}{20}\times 60 = 540$ vòng.

Độ dài 1 vòng bằng chu vi bánh xe là: $2\pi R = 2\times 3,1416\times 6,5 = 40,8408cm$

Vậy quãng đường xe đi được là $540\times 40,8408 = 22054,032cm$.

Câu 56: Một máy kéo nông nghiệp với bánh xe sau có đường kính là 184 cm, bánh xe trước có đường kính là 92 cm, xe chuyển động với vận tốc không đổi trên một đoạn đường thẳng. Biết rằng vận tốc của bánh xe sau trong chuyển động này là 80 vòng/phút. Tính quãng đường đi được của máy kéo trong 10 phút. Làm tròn kết quả đến hàng đơn vị.

Lời giải

Trả lời: 4624

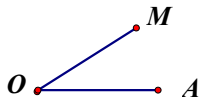
Đổi 184 cm = $1,84$ m.

Quãng đường máy kéo di chuyển được khi bánh xe sau quay 1 vòng bằng chu vi của bánh xe sau của máy kéo là $C = \pi d = \pi.1,84 = 1,84\pi$.

Số vòng bánh xe sau chuyển động trong 10 phút là $80.10 = 800$.

Quãng đường máy kéo đi được trong 10 phút là: $s = 1,84\pi.800 \approx 4624$.

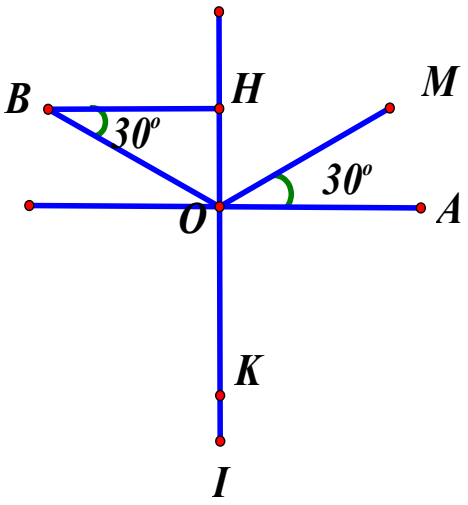
Câu 57: Vòng quay Sun Wheel ở Đà Nẵng là một công trình lớn thứ nhất ở nước ta. Điểm cao nhất trên vòng quay cách mặt đất 115m, điểm thấp nhất cách mặt đất 5m. Tốc độ quay là 15 phút /1 vòng và quay theo chiều ngược chiều kim đồng hồ. Một người đang ở vị trí điểm M, biết góc lượng giác tạo bởi tia đầu OA và tia cuối OM bằng 30^{o}.



Hỏi sau 5 phút thì người đó ở độ cao cách mặt đất bao nhiêu mét? *Kết quả làm tròn đến một chữ số thập phân*.

Lời giải

Trả lời: $87,5$



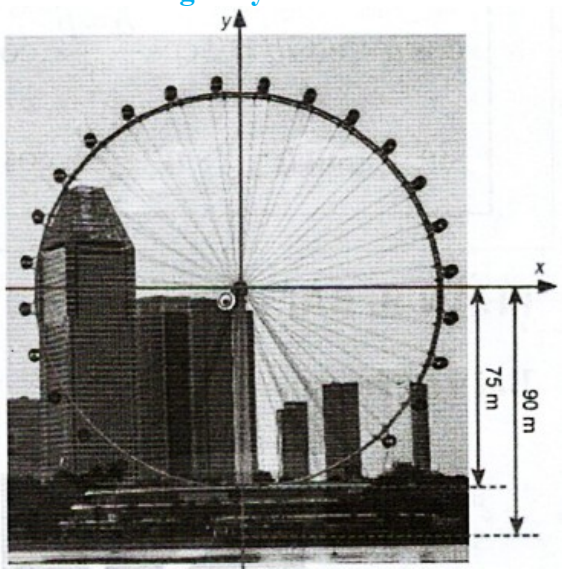
Theo đề bài, ta có $OI = 60m; OB = 55m$.

Sau 5 phút người đó ở vị trí điểm B, người đó cách mặt đất khoảng bằng đoạn IH.

Xét tam giác vuông OHB, $\sin 30^\circ = \dfrac{OH}{OB} \Rightarrow OH = OB\sin 30^\circ = 55.\dfrac{1}{2} = 27,5m$.

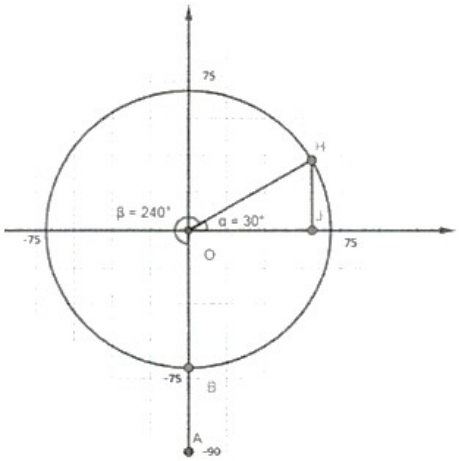
Vậy người này cách mặt đất một khoảng bằng $HI = HO + OI = 27,5 + 60 = 87,5$.

Câu 58: Một chiếc đu quay có bán kính $75\,m$, tâm của vòng quay ở độ cao $90\,m$, thời gian thực hiện mỗi vòng quay của đu quay là 30 phút. Nếu một người vào cabin tại vị trí thấp nhất của vòng quay, thì sau 20 phút quay, người đó ở độ cao bao nhiêu mét?



Lời giải

Trả lời: $127,5(m)$



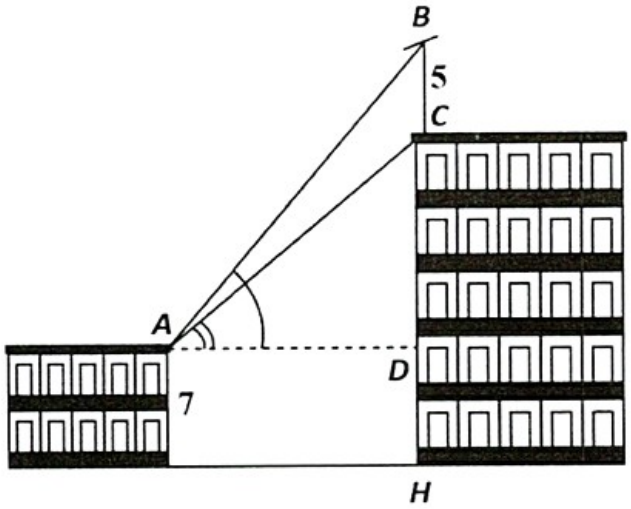
Do tính đối xứng, dù đu quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ hay ngược chiều kim đồng hồ, ta đều thấy rằng độ cao của người đó là như nhau sau cùng một khoảng thời gian. Ở đây ta xét đu quay chuyển động theo chiều kim đồng hồ. Gắn đu quay có bán kính $75m$, tâm của vòng quay ở độ cao $90m$ vào hệ trục tọa độ Oxy ta được hình bên:

Sau 20 phút quay cabin đi được một góc là $\frac{20}{30}\cdot 360^\circ = 240^\circ$ tức là đến vị trí điểm H.

Khi đó góc $HOJ = 30^\circ$ và $HJ = 30, OH = 37,5(m)$.

Vậy sau 20 phút quay, người đó ở độ cao $37,5+90 = 127,5(m)$.

Câu 59: Trên nóc một tòa nhà có một cột ăng-ten cao $5m$. Từ vị trí quan sát A cao $7m$ so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăng-ten dưới góc α và β so với phương nằm ngang. Biết chiều cao của toà nhà là $18,9m$, hai toà nhà cách nhau $10m$. Tính $\tan\alpha$;



Lời giải

Trả lời: $\dfrac{16,9}{10}$

Ta có: $AD = 10\,m$

$CD = 18,9 - 7 = 11,9\,m$

$BD = BC + CD = 11,9 + 5 = 16,9\,m$

$\tan\alpha = \dfrac{BD}{AD} = \dfrac{16,9}{10}$

Câu 60: Guồng nước không chỉ là công cụ phục vụ sản xuất nông nghiệp, mà đã trở thành hình ảnh quen thuộc của bản làng và là một nét văn hoá đặc trưng của đồng bào dân tộc miền núi phía Bắc.Một chiếc guồng nước có dạng hình tròn bán kính $2,5m$; trục của nó đặt cách mặt nước $2m$. Khi guồng quay đều, khoảng cách $h(m)$ từ một ống đựng nước gắn tại một điểm của guồng đến mặt nước được tính theo công thức $h = |y|$,

trong đó $y = 2,5\sin\left(2\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2$ với x là thời gian quay của guồng $(x \ge 0)$. Giá trị lớn nhất của h bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: $4,5$

Xét hàm số $y = 2,5\sin\left(2\pi x - \dfrac{\pi}{2}\right) + 2$ với $x \in [0;+\infty)$.

$$-0,5 \le 2,5\sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)+2 \le 4,5 \ ,\forall x \in [0;+\infty)$$

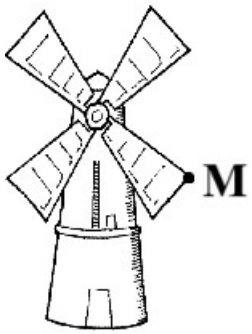
Ta có: $\Leftrightarrow -0,5 \le y \le 4,5 \ ,\forall x \in [0;+\infty)$

Suy ra $\underset{[0;+\infty)}{Max}\, y = 4,5 \Leftrightarrow \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=1$

$\underset{[0;+\infty)}{Min}\, y = -0,5 \Leftrightarrow \sin\left(2\pi x-\frac{\pi}{2}\right)=-1$

Khi đó $\underset{[0;+\infty)}{Max}\, h = \underset{[0;+\infty)}{Max}|y| = \underset{[0;+\infty)}{Max}\{|-0,5|;|4,5|\} = 4,5$.

Câu 61: Cối xay gió là một loại máy chạy bằng sức gió. Máy này được thiết kế để biến năng lượng gió thành các dạng năng lượng khác hữu dụng hơn. Một điểm M nằm trên cánh của cối xay gió như hình vẽ.



Khi cánh quạt quay, vị trí thấp nhất và cao nhất của M so với mặt đất lần lượt là 8 mét và 22 mét. Xét một vòng quay của M bắt đầu từ vị trí thấp nhất. Khi cánh quay đều, khoảng cách h từ M đến mặt đất được tính theo công thức $h = A.\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)+C,$ với x là thời gian quay của điểm M $(x \ge 0)$. Hỏi sau 4 giây, điểm M cách mặt đất bao nhiêu mét?

Lời giải

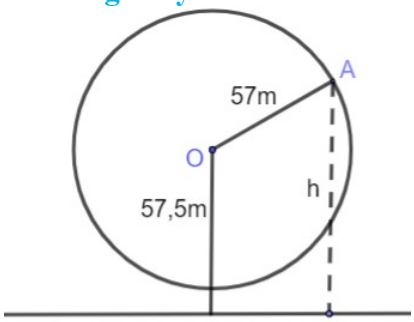
Trả lời: **12,8**

Vị trí thấp nhất và cao nhất là 8 và 22 nên $C = \frac{22+8}{2} = 15$ và $A = 15-22 = -7$.

Phương trình khoảng cách của điểm M so với mặt đất là $h = -7\cos\left(\frac{2\pi}{5}x\right)+15$.

Khi $x = 4 \Rightarrow h \approx 12,8\,(m)$

Câu 62: Một vòng quay trò chơi có bán kính 57m, trục quay cách mặt đất $57,5\text{m}$, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách $h(\text{m})$ từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức: $h(t) = 57\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)+57,5$ với t là thời gian quay tính bằng phút $(t \ge 0)$



Khi quay một vòng lần thứ nhất tính tại thời điểm $t=0$, tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất?

Lời giải

Trả lời: $7,5$

Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi

$$\sin\left(\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}\right)=1\Leftrightarrow\frac{2\pi}{15}t-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}+k2\pi\left(k\in Z\right)$$

$$\Leftrightarrow t=7,5+15k\left(k\in Z\right)$$

Vì $0\le t\le 15$ nên $t=7,5$.

Câu 63: Số giờ có ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40° bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d\left(t\right)=3\sin\left[\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)\right]+12$ với $t\in$ và $0<t\le 365$. Gọi a là ngày có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất và b là ngày có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất trong năm. Tính $a+b$.

Lời giải

Trả lời: 524.

Do $0<t\le 365$ nên $-\frac{40\pi}{91}<\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)\le\frac{285\pi}{182}$

Ngày có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất ứng với t thỏa mãn điều kiện $\sin\left[\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)\right]=1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $\sin$ và điều kiện $-\frac{40\pi}{91}<\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)\le\frac{285\pi}{182}$ ta được

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)\right]=1\Leftrightarrow\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow t=171$$

.

Trong năm không nhuận, ngày có nhiều giờ có ánh sáng mặt trời nhất là ngày thứ 171.

Ngày có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất ứng với t thỏa mãn điều kiện $\sin\left[\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)\right]=-1$.

Dựa vào đồ thị hàm số $\sin$ và điều kiện $-\frac{40\pi}{91}<\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)\le\frac{285\pi}{182}$ ta được

$$\sin\left[\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)\right]=-1\Leftrightarrow\frac{\pi}{182}\left(t-80\right)=\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow t=353$$

.

Trong năm không nhuận, ngày có ít giờ có ánh sáng mặt trời nhất là ngày thứ 353.

Vậy $a+b=171+353=524$

Câu 64: Mực nước của một con sông hàng ngày lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(\text{m})$ của mực nước con sông tại thời điểm t trong một ngày $(0 \le t \le 24)$ được tính theo công thức $h = -4\sin\left(\frac{\pi t}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 5$. Tính độ sâu của mực nước con sông tại thời điểm 9 giờ sáng?

Lời giải

Trả lời: 7

Độ sâu của mực nước con sông tại thời điểm 9 giờ sáng ứng với $t = 9$ nên ta có: $h = -4\sin\left(\frac{\pi.9}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + 5 = 7$.

Câu 65: Hằng ngày, mực nước của con kênh lên xuống theo thủy triều. Độ sâu $h(m)$ của mực nước trong kênh tính theo thời gian $t(h)$ được cho bởi công thức $h = 3\cos\left(\frac{\pi t}{12} + \frac{\pi}{3}\right) + 12$. $(0 £ t £ 24)$. Xác định thời điểm trong ngày khi chiều cao của mực nước trong kênh là $15\ m$.

Lời giải

Trả lời: **20**

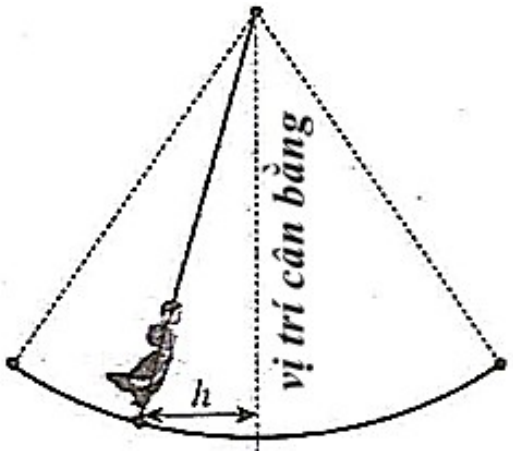
Do chiều cao của mực nước trong kênh là $15\ m$ nên ta có:

$$3\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right) + 12 = 15 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow t = -4 + 24k.$$

Vì $0 \le t \le 24 \Leftrightarrow 0 \le -4 + 24k \le 24 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le k \le \frac{7}{6}$

Do $k \in \square \Rightarrow k = 1$. Khi đó $t = 20$

Câu 66: Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 2\cos(\frac{t\pi}{6})$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Trong khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?



Lời giải

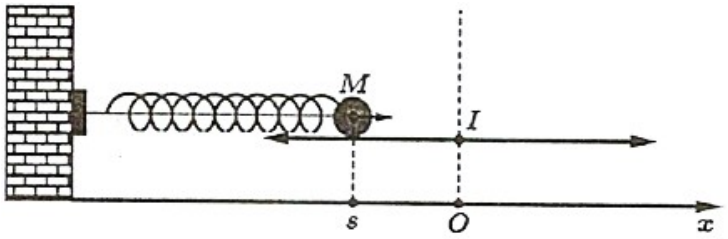
Trả lời: **5**

Khi vật ở vị trí cân bằng thì $x = 0$

$$\Leftrightarrow 2\cos(\frac{t\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow \cos(\frac{t\pi}{6}) = 0 \Leftrightarrow \frac{t\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = 3 + 6k \ (k \in Z).$$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây thì vật ở vị trí cân bằng tại các thời điểm $t=3,\ t=9,\ t=15,\ t=21,\ t=27$ nên vật qua vị trí cân bằng 5 lần.

Câu 67: Một vật M được gắn vào đầu lò xo và dao động quanh vị trí cân bằng I, biết rằng O là hình chiếu vuông góc của I trên trục Ox, toạ độ điểm M trên Ox tại thời điểm t là đại lượng s được tính bởi công thức $s=8,6\sin\left(8t+\dfrac{\pi}{2}\right)$. Có bao nhiêu thời điểm trong khoảng 2 giây đầu tiên thì $s=4,3cm$?



Lời giải

Trả lời: **5**

Khi $s=4,3$ thì $8,6\sin\left(8t+\dfrac{\pi}{2}\right)=4,3\Rightarrow\sin\left(8t+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}8t+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{6}+k2\pi\\8t+\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z})\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{4}\\t=\dfrac{\pi}{24}+k\dfrac{\pi}{4}\end{array}\right.(k\in\mathbb{Z}).$$

Vì $t\in(0;2)$ nên có 5 giá trị t thoả mãn là: $t_1\approx0,65s;t_2\approx1,44s;t_3\approx0,13s$; $t_4\approx0,92s;t_5\approx1,7s$.

Câu 68: Học sinh An tiến hành làm một thí nghiệm trên một con lắc đơn. Tại vị trí cân bằng, An tác động một lực lên con lắc theo phương ngang. Từ các kết quả thí nghiệm cho thấy, An tính được con lắc dao động điều hòa quanh vị trí cân bằng theo phương trình $s=2\sqrt{2}\cos\left(7t+\dfrac{\pi}{3}\right)$ với $s\,(cm)$ là độ dài cung quét của con lắc từ một vị trí bất kì tại thời điểm t đến vị trí cân bằng. Con lắc đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần trong khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây?

Lời giải

Trả lời: **67**

Khi vật đi qua vị trí cân bằng thì $s=0$, ta có:

$$2\sqrt{2}\cos\left(7t+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow\cos\left(7t+\frac{\pi}{3}\right)=0\Leftrightarrow7t+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow7t=\frac{\pi}{6}+k\pi$$

$$\Leftrightarrow t=\frac{\pi}{42}+\frac{k\pi}{7}.$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây, ta có:

$$0\le\frac{\pi}{42}+\frac{k\pi}{7}\le30\Leftrightarrow-\frac{1}{6}\le k\le\frac{210}{\pi}-\frac{1}{6}$$

Vì $k\in\mathbb{Z}\Rightarrow k\in\{0;1;2;3;4;5;6;7;.....;66\}$.

Vậy khoảng thời gian từ 0 đến 30 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 67 lần.

Câu 69: Huyết áp là áp lực cần thiết tác động lên thành của động mạch để đưa máu từ tim đến nuôi dưỡng các mô trong cơ thể. Huyết áp được tạo ra do lực co bóp của cơ tim và sức cản của thành động

mạch. Mỗi lần tim đập, huyết áp của chúng ta tăng rồi giảm giữa các nhịp. Huyết áp tối đa và huyết áp tối thiểu được gọi tương ứng là huyết áp tâm thu và tâm trương. Chỉ số huyết áp của chúng ta được viết là huyết áp tâm thu/huyết áp tâm trương,tương ứng. Chỉ số huyết áp $120/80$ là bình thường. Giả sử huyết áp của một người nào đó được mô hình hóa bởi hàm số

$$P(t)=110+10\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right).$$

Trong đó $P(t)$ là huyết áp tính theo đơn vị mmHg và thời gian t tính theo giây.Hỏi trong khoảng từ 0 đến 5 giây có bao nhiêu lần huyết áp là 120 mmHg?

Lời giải

Trả lời: **6**

Huyết áp là 120 mmHg khi

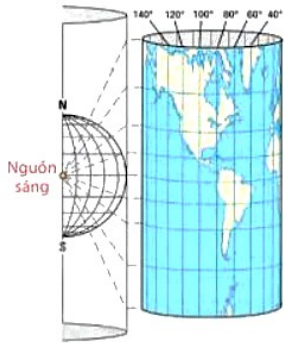
$$P(t)=120\Leftrightarrow 110+10\sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)=120\Leftrightarrow \sin\left(\frac{5\pi}{2}t\right)=1$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{2}t=\frac{\pi}{2}+k2\pi\Leftrightarrow t=\frac{1+4k}{5}\,(k\in\mathbb{Z})$$

Xét $0<t<5\Rightarrow 0<\frac{1+4k}{5}<5\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<k<6\Leftrightarrow k\in\{0;1;2;3;4;5\}$ vì $k\in\mathbb{Z}$.

Vậy trong khoảng từ 0 đến 5 giây có 6 lần huyết áp là 120 mmHg.

Câu 70: Trong Địa lí, phép chiếu hình trụ được sử dụng để vẽ một bản đồ phẳng như trong Hình 9. Trên bản đồ phẳng lấy đường xích đạo làm trục hoành và kinh tuyến 0^0 làm trục tung. Khi đó tung độ của một điểm có vĩ độ $\varphi^0\,(-90<\varphi<90)$ được cho bởi hàm số $y=30\tan(\frac{\pi}{180}\varphi)(cm)$. Sử dụng đồ thị hàm số tang, hãy cho biết những điểm ở vĩ độ dương lớn nhất nào nằm cách xích đạo không quá $30\,cm$ trên bản đồ?



Hình 9

Lời giải

Trả lời: 45^0.

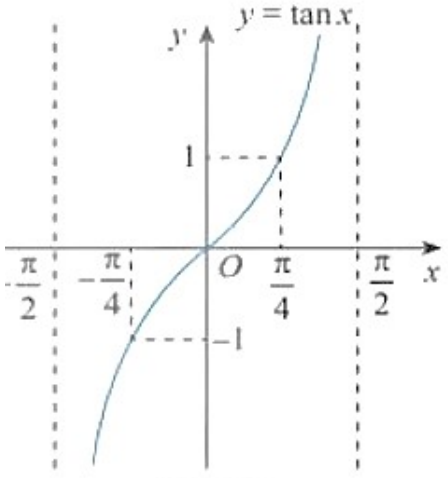
Vì điểm cách xích đạo không quá $30cm$ trên bản đồ nên ta có $(-30\le y\le 30)$. Khi đó:

$$-30\le 30\tan(\frac{\pi}{180}\varphi)\le 30$$

Hay $-1\le\tan(\frac{\pi}{180}\varphi)\le 1$.

Ta có: $(-90<\varphi<90)\Leftrightarrow\frac{-\pi}{2}<\frac{\pi}{180}\varphi<\frac{\pi}{2}$

Xét đồ thị hàm số $y=\tan x$ trên khoảng $(\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2})$.



Hình 10

Ta thấy $-1\le\tan(\frac{\pi}{180}\varphi)\le 1$ khi và chỉ khi $(\frac{-\pi}{4}\le\frac{\pi}{180}\varphi\le\frac{\pi}{4}$

Hay $-45 \le \varphi \le 45$.

Vậy trên bản đồ, các điểm cách xích đạo không quá $30cm$ nằm ở vĩ

Độ từ -45^0 đến 45^0. Điểm ở vĩ độ dương lớn nhất là 45^0.

Câu 71: Số giờ ánh sáng mặt trời của một thành phố A ở vĩ độ 40^0 Bắc trong ngày thứ t của một năm không nhuận được cho bởi hàm số $d(t) = 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12$ với $t \in \mathbb{N}^*$ và $0 < t \le 365$. Hỏi trong năm không nhuận thì thành phố A có bao nhiêu ngày có 12 giờ ánh sáng mặt trời?

Lời giải

Trả lời: **2**

Thành phố A có 12 giờ ánh sáng mặt trời nên $d(t) = 12$

$$\Leftrightarrow 3\sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right]+12 = 12 \Leftrightarrow \sin\left[\frac{\pi}{182}(t-80)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{182}(t-80) = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow t = 80+182k$$

Mà $0 < t \le 365 \Rightarrow 0 < 80+182k \le 365 \Leftrightarrow -\frac{40}{91} < k \le \frac{285}{182}$

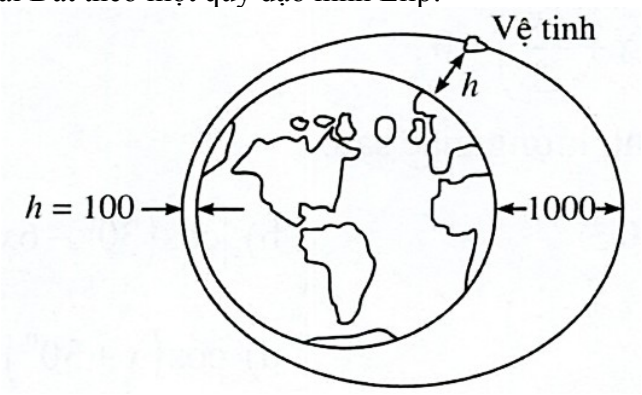
Do $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ k = 1 \end{array}\right.$

Với $k = 0 \Rightarrow t = 80$

Với $k = 1 \Rightarrow t = 262$

Vậy có 2 ngày để thành phố A có 12 giờ ánh sáng mặt trời.

Câu 72: Một vệ tinh bay quanh Trái Đất theo một quỹ đạo hình Elip:



Độ cao h của vệ tinh so với bề mặt Trái Đất được xác định bởi công thức $h = 550+450\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi t}{50}\right)$. Trong đó t là thời gian tính bằng phút kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo. Người ta cần thực hiện một thí nghiệm khoa học khi vệ tinh cách mặt đất xa nhất trong khoảng 120 phút đầu tiên kể từ lúc vệ tinh bay vào quỹ đạo, hãy tìm thời điểm để có thể thực hiện thí nghiệm đó?.

Lời giải

Trả lời: **87,5**

Ta có $-1 \le \cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi t}{50}\right) \le 1 \Leftrightarrow 100 \le 550+450\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi t}{50}\right) \le 1000 \Leftrightarrow 100 \le h \le 1000$

Suy ra, h đạt giá trị lớn nhất bằng 1000 khi

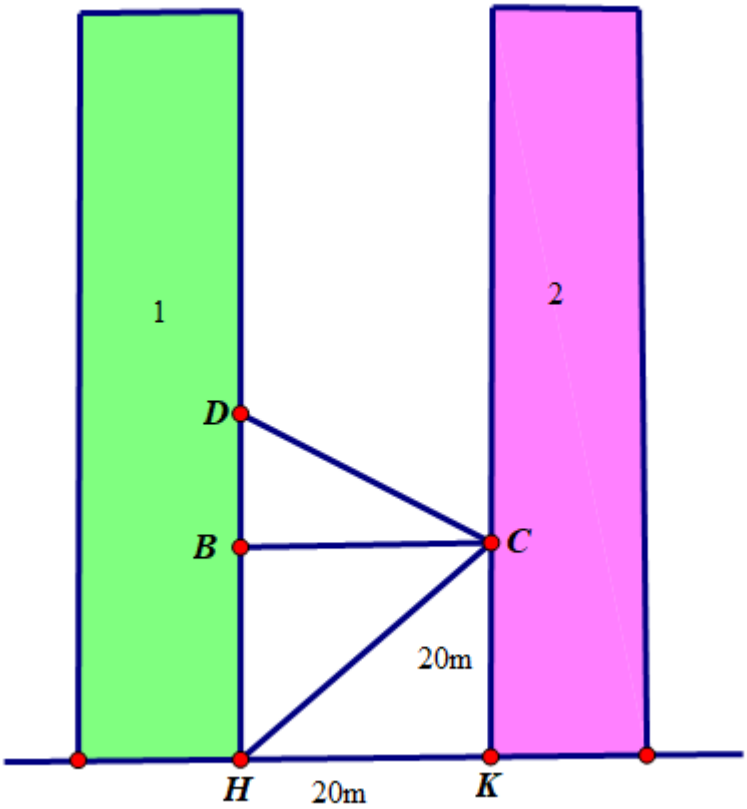
$$\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi t}{50}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4}+\frac{\pi t}{50} = k2\pi \Leftrightarrow t = -12,5+100k\ (k \in \mathbb{Z})$$

Mà $t \in [0;120]$ nên $\begin{cases} 0 \le -12,5+100k \le 120 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,125 \le k \le 1,325 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow k = 1$.

Với $k = 1$ thì $t = 87,5$.

Vậy thời điểm thực hiện thí nghiệm là $87,5$ phút.

chung cư cao tầng với độ cao đều là $90m$ xây cạnh nhau với khoảng cách giữa chúng là $HK = 20m$. Để đảm bảo an ninh cho tòa số 1 người ta cần lắp một số camera an ninh ở vị trí tòa số 2 như hình vẽ. Để góc quan sát của camera tại vị trí thấp nhất là sàn của tòa nhà số 1 người ta lắp camera đầu tiên cách sàn tòa nhà số 2 đúng $20m$. Biết góc quan sát theo chiều dọc của camera là 80°. Hỏi cần lắp tối thiểu bao nhiêu camera để đảm bảo có đủ góc quay của tất cả các tầng của tòa nhà số 1?



Lời giải

Trả lời: 3

Xét tam giác vuông HCK ta có: $HK = CK = 20 \Rightarrow \begin{cases} CH = 20\sqrt{2} \\ HCK = 45^\circ \end{cases} \Rightarrow HCB = 45^\circ$.

Mà $HCD = 80^\circ \Rightarrow BCD = 35^\circ \Rightarrow BD = BC\tan 35^\circ \Rightarrow DH = DB + BH = BC\tan 35^\circ + 20 = 20\tan 35^\circ + 20 \approx 34,004m$.

Vì tòa nhà cao $90m$ nên ta cần lắp tối thiểu 3 camera thì sẽ có đủ góc quay của cả tòa nhà đó.