

ÔN TẬP CUỐI CHƯƠNG II. VECTƠ VÀ HỆ TRỤC TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN

Đơn vị kiến thức 1. Các phép toán vectơ và hệ thức vectơ trong hình học không gian

Mức độ: Nhận biết

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$. B. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD})$. C. $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BD} - \overrightarrow{BC})$.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là trung điểm của BB' . Vector $\overrightarrow{DN}$ bằng

- A. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. B. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. C. $-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AA'}$. D. $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Mức độ: Thông hiểu

Câu 3. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD})$. B. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB})$. C. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$. D. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$.

Câu 4. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BDA' . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$. C. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. D. $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Câu 5. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm P thuộc AB , điểm Q thuộc AD sao cho $AP = 2PB$ và $AQ = 2QD$. Khi đó

- A. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$. B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BD}$. D. $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$.

Câu 6. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC . Vector $\overrightarrow{AM}$ bằng

- A. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. B. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$. C. $\overrightarrow{AS} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$. D. $\frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$.

Mức độ: Vận dụng

Câu 7. Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt thuộc AB, AC và thỏa mãn $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Khi đó

- A. $\overrightarrow{PQ} = 4\overrightarrow{BC}$. B. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. C. $\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$. D. $\overrightarrow{PQ} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

Câu 8. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và $C'D'$. Vector $\overrightarrow{EF}$ bằng

A. $\overline{AB}$.

B. $\overline{AA'}$.

C. $\overline{AC}$.

D. $\overline{AD}$.

Đơn vị kiến thức 2. Biểu thức tọa độ của vector và các điểm đặc biệt

Mức độ: Nhận biết

Câu 9. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 2; 5)$ và $\vec{b} = (4; -1; 2)$. Tọa độ của $\vec{a} + 2\vec{b}$ là

A. $(5; 0; 9)$.

B. $(1; 0; 7)$.

C. $(5; 4; 9)$.

D. $(-11; 4; 1)$.

Câu 10. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 4)$. Tọa độ của $3\vec{a} - \vec{b}$ là

A. $(5; -12; 7)$.

B. $(7; -12; -1)$.

C. $(7; -18; -1)$.

D. $(5; -18; 7)$.

Mức độ: Thông hiểu

Câu 11. Cho $\vec{a} = (m; 1; -2)$, $\vec{b} = (3; n; 4)$ và $\vec{a} - \vec{b} = (1; -4; -6)$. Giá trị của $m + n$ bằng

A. 8.

B. 9.

C. 10.

D. 7.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 1; 4)$, $B(4; 5; -2)$. Điểm M thuộc đoạn AB và $AM : MB = 1 : 2$. Tọa độ của M là

A. $(2; 3; 0)$.

B. $(0; 2; 2)$.

C. $\left(0; \frac{5}{3}; 2\right)$.

D. $\left(0; \frac{7}{3}; 2\right)$.

Câu 13. Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1; -2; 3)$, $B(4; 0; -1)$ và $D(-2; 5; 2)$. Tọa độ của C là

A. $(1; 7; -2)$.

B. $(3; 3; 4)$.

C. $(-1; 7; 2)$.

D. $(1; 3; -2)$.

Câu 14. Trong không gian $Oxyz$, tam giác ABC có $A(3; 1; -2)$, $B(-1; 4; 5)$ và trọng tâm $G(2; 0; 1)$. Tọa độ của C là

A. $(2; -3; 0)$.

B. $(4; 5; 0)$.

C. $(4; -5; 0)$.

D. $(-4; 5; 0)$.

Câu 15. Cho $\vec{a} = (2; -1; 3)$ và $\vec{b} = (4; -2; 6)$. Số thực k thỏa mãn $\vec{b} = k\vec{a}$ bằng

A. -2.

B. 2.

C. $\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{1}{2}$.

Mức độ: Vận dụng

Câu 16. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -1; 2)$, $B(3; 2; 5)$ và $C(5; 5; m)$. Ba điểm A, B, C thẳng hàng khi

A. $m = 5$.

B. $m = 6$.

C. $m = 7$.

D. $m = 8$.

Câu 17. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1)$ và $B(-1; 4; 2)$. Điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Tọa độ của P là

- A. $(0; 3; 1)$. B. $(1; 0; 3)$. C. $(-1; 3; 0)$. D. $(0; 1; 3)$.

Câu 18. Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(1; 0; 2)$, $B(3; -1; 4)$, $D(-2; 5; 1)$ và $A'(4; 2; 6)$. Tọa độ của C' là

- A. $(5; 4; 9)$. B. $(2; 6; 5)$. C. $(3; 6; 7)$. D. $(3; 4; 7)$.

Đơn vị kiến thức 3. Tích vô hướng, độ dài, khoảng cách và góc

Mức độ: Nhận biết

Câu 19. Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-2; 3; 1)$ và $\vec{b} = (4; 0; -5)$. Tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ bằng

- A. -3 . B. -13 . C. 13 . D. 3 .

Câu 20. Độ dài của vector $\vec{a} = (6; 2; -3)$ bằng

- A. 7 . B. $\sqrt{41}$. C. 9 . D. $\sqrt{50}$.

Mức độ: Thông hiểu

Câu 21. Cho $\vec{a} = (1; m; 2)$ và $\vec{b} = (2; -1; 3)$. Hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ vuông góc với nhau khi

- A. $m = 4$. B. $m = 6$. C. $m = -8$. D. $m = 8$.

Câu 22. Cho $\vec{a} = (1; 2; 2)$ và $\vec{b} = (2; 1; 2)$. Cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng

- A. $\frac{7}{9}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{8}{9}$. D. $\frac{1}{9}$.

Câu 23. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 1; 2)$ và $B(3; -1; 6)$. Khoảng cách AB bằng

- A. $\sqrt{21}$. B. $\sqrt{29}$. C. 5 . D. $\sqrt{33}$.

Mức độ: Vận dụng

Câu 24. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 2)$, $B(4; 0; 2)$ và $C(1; 4; 2)$. Giá trị của $\cos \angle ABC$ bằng

- A. $\frac{3}{5}$. B. $\frac{4}{5}$. C. $-\frac{3}{5}$. D. $\frac{1}{5}$.

Câu 25. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$. Độ dài của vector $2\vec{a} - \vec{b}$ bằng

- A. $\sqrt{14}$. B. $2\sqrt{5}$. C. $\sqrt{26}$. D. $2\sqrt{7}$.

Đơn vị kiến thức 4. Vận dụng tọa độ vector trong thực tiễn

Mức độ: Nhận biết

Câu 26. Trong một mô hình không gian, hai đầu của một dây cáp được biểu diễn bởi $A(0; 0; 12)$ và $B(3; 4; 0)$, đơn vị là mét. Độ dài dây cáp AB bằng

A. 12 m.

B. 5 m.

C. 13 m.

D. 17 m.

Câu 27. Hai cảm biến được đặt tại $A(2; -1; 4)$ và $B(8; 5; 10)$. Một bộ truyền tín hiệu được đặt tại trung điểm của AB . Tọa độ bộ truyền là

A. $(4; 2; 7)$.B. $(5; 2; 7)$.C. $(5; 3; 6)$.D. $(3; 2; 5)$.

Câu 28. Một trạm radar được đặt tại gốc O của hệ trục tọa độ, đơn vị là kilômét và có phạm vi phát hiện 25 km. Một mục tiêu ở vị trí $P(15; 12; -9)$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. Radar phát hiện được mục tiêu vì $OP = 15\sqrt{2} < 25$.B. Radar không phát hiện được mục tiêu vì $OP = 15\sqrt{2} > 25$.C. Radar phát hiện được mục tiêu vì $OP = 36$ km.D. Radar không phát hiện được mục tiêu vì tọa độ z của P âm.

Câu 29. Một thiết bị bay chuyển động từ $A(10; 5; 2)$ đến $B(4; 17; 5)$, đơn vị là kilômét. Quãng đường thẳng AB bằng

A. $3\sqrt{17}$ km.B. $\sqrt{157}$ km.C. $7\sqrt{3}$ km.D. $3\sqrt{21}$ km.

Mức độ: Thông hiểu

Câu 30. Một thiết bị bay có vector chỉ hướng chuyển động $\vec{d} = (3; 4; 12)$. Gọi $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là vector đơn vị theo phương thẳng đứng. Côsin của góc giữa hướng chuyển động và phương thẳng đứng bằng

A. $\frac{3}{13}$.B. $\frac{4}{13}$.C. $\frac{12}{13}$.D. $\frac{5}{13}$.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG – SAI

Đơn vị kiến thức 1. Các phép toán vector và hệ thức vector

Mức độ: Nhận biết.

Câu 1. Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD , P là trung điểm của AB . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD})$ b) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$ c) $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$ d) $\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$

Mức độ: Thông hiểu.

Câu 2. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E là trung điểm của $A'B'$, F là trung điểm của CD' . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$ b) $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$ c) $\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ d)

$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AB}$.

Đơn vị kiến thức 2. Biểu thức tọa độ của vector và các điểm đặc biệt**Mức độ: Nhận biết.****Câu 3.** Cho $\vec{a} = (1; -3; 2)$ và $\vec{b} = (4; 2; -1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\vec{a} + \vec{b} = (5; -1; 1)$. b) $2\vec{a} - \vec{b} = (-2; -8; 5)$. c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$. d) $|\vec{b}| = \sqrt{20}$.

Mức độ: Thông hiểu.**Câu 4.** Cho $A(2; -1; 3)$, $B(8; 5; -3)$. Gọi M là trung điểm của AB . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $M(5; 2; 0)$. b) M thuộc mặt phẳng (Oxy) .
c) $\overrightarrow{AB} = (6; 6; -6)$. d) $AB = 6\sqrt{2}$.

Mức độ: Vận dụng.**Câu 5.** Cho $A(1; -2; 0)$, $B(3; 1; 4)$ và $C(5; 4; m)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 4)$.
b) Nếu $m = 8$ thì $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$.
c) Nếu $m = 6$ thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.
d) Nếu $m = 8$ thì B là trung điểm của AC .

Đơn vị kiến thức 3. Tích vô hướng, độ dài và góc**Mức độ: Nhận biết.****Câu 6.** Cho $\vec{a} = (1; 2; -2)$ và $\vec{b} = (2; 1; 2)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$. b) $\vec{a} \perp \vec{b}$.
c) $|\vec{a} + \vec{b}| = 3\sqrt{2}$. d) Góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng 60° .

Mức độ: Thông hiểu.**Câu 7.** Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; 1)$, $B(7; 1; 1)$ và $C(1; 9; 1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) $AB = 6$.
b) $AC = 8$.
c) $BC = 10$.
d) Chu vi tam giác ABC bằng 26.

Đơn vị kiến thức 4. Vận dụng tọa độ vector trong thực tiễn**Mức độ: Vận dụng.**

Câu 8. Một thiết bị bay chuyển động từ $A(2;3;1)$ đến $B(8;-1;5)$ trong 2 phút theo đường thẳng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\overrightarrow{AB} = (6; -4; 4)$.

b) $AB = 2\sqrt{17}$.

c) Trung điểm của AB có tọa độ $(5;1;3)$.

d) Nếu thiết bị chuyển động đều thì vector độ dịch chuyển trong mỗi phút là $(6; -4; 4)$.

Mức độ: Vận dụng.

Câu 9. Một trạm radar được đặt tại gốc O , phạm vi phát hiện là 16 km. Một mục tiêu ở vị trí $P(9;12;-4)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $OP = \sqrt{241}$ km.

b) Radar phát hiện được mục tiêu.

c) Khoảng cách từ P đến mặt phẳng (Oxy) bằng 4 km.

d) Hình chiếu vuông góc của P trên mặt phẳng (Oyz) là $(9;0;-4)$.

Mức độ: Nhận biết.

Câu 10. Hai cảm biến được đặt tại $A(-4;2;6)$ và $B(6;8;2)$. Bộ truyền tín hiệu M được đặt tại trung điểm của AB . Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $M(1;5;4)$.

b) $AM = MB$.

c) M thuộc mặt phẳng (Oxy) .

d) Tổng ba tọa độ của M bằng 10.

PHẦN III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN**Mức độ: Nhận biết**

Câu 1. Cho $\vec{a} = (-2;3;1)$, $\vec{b} = (4;-1;5)$. Tính tổng ba tọa độ của vector $2\vec{a} - \vec{b}$.

Câu 2. Cho $\vec{a} = (m;1;2)$ và $\vec{b} = (2;-3;1)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Câu 3. Cho $\vec{a} = (1;1;1)$ và $\vec{b} = (1;1;-1)$. Tính $3\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Mức độ: Thông hiểu

Câu 4. Cho tứ diện $ABCD$. Điểm P thuộc AB , điểm Q thuộc AD sao cho $AP = 3PB$ và $AQ = 3QD$. Biết $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{BD}$. Tìm k .

Câu 5. Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $AD = 4$, $AA' = 8$. Tính độ dài của vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}$.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 1; 3)$, $B(6; 5; -1)$. Điểm P thuộc đoạn AB và $AP : PB = 1 : 3$. Tính tổng ba tọa độ của P .

Câu 7. Trong không gian $Oxyz$, tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(4; -2; 3)$ và trọng tâm $G(2; 1; 2)$. Tính tổng ba tọa độ của điểm C .

Mức độ: Vận dụng

Câu 8. Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 1; 1)$, $B(4; 1; 1)$ và $C(1; 5; 1)$. Tính chu vi tam giác ABC .

Câu 9. Một trạm radar được đặt tại gốc O . Một mục tiêu ở vị trí $P(3; 4; -12)$, đơn vị là kilômét. Tính khoảng cách từ mục tiêu đến trạm radar.

Câu 10. Một robot đang ở vị trí $A(2; -3; 5)$ và di chuyển đến B sao cho $\overrightarrow{AB} = (6; 4; -2)$. Tính tổng ba tọa độ của điểm B .

ĐÁP ÁN

I. Đáp án trắc nghiệm 4 lựa chọn

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	A	B	C	D	B	A	C	D	A	C
Câu	1	12	1	14	1	16	1	18	1	20
	1		3		5		7		9	
Đáp án	B	D	A	C	B	D	A	C	B	A
Câu	2	22	2	24	2	26	2	28	2	30
	1		3		5		7		9	
Đáp án	D	C	B	A	D	C	B	A	D	C

II. Đáp án trắc nghiệm đúng – sai

Câu	a	b	c	d
1	Đ	Đ	Đ	S
2	Đ	Đ	Đ	S
3	Đ	Đ	Đ	S
4	Đ	Đ	Đ	S

Câu	a	b	c	d
5	Đ	Đ	S	Đ
6	Đ	Đ	Đ	S
7	Đ	Đ	Đ	S
8	Đ	Đ	Đ	S
9	Đ	Đ	Đ	S
10	Đ	Đ	S	Đ

III. Đáp án câu trả lời ngắn

Câu	1	2	3	4	5
Đáp án	-4	0,5	1	0,75	9
Câu	6	7	8	9	10
Đáp án	4	8	12	13	12

LỜI GIẢI CHI TIẾT

PHẦN I. TRẮC NGHIỆM 4 LỰA CHỌN

Đơn vị kiến thức 1. Các phép toán vector và hệ thức vector trong hình học không gian

Câu 1.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng CD . Chọn khẳng định đúng.

Lời giải. Vì M là trung điểm của CD nên

$$\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}.$$

Ta có

$$\text{Mà } \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = -\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}.$$

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}(-\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$$

Do đó

Chọn A.

Câu 2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi N là trung điểm của BB' . Tính $\overrightarrow{DN}$.

Lời giải. Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{w}$.

Vì N là trung điểm của BB' nên $\overrightarrow{BN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2} \vec{w}$.

Ta có $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$.

Suy ra $\overrightarrow{DN} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'}$.

Hay $\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AA'}$.

Chọn B.**Câu 3.**

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Chọn khẳng định đúng.

Lời giải. Chọn một gốc tùy ý O . Vì M, N là các trung điểm nên

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}),$$

$$\overrightarrow{ON} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).$$

Do đó

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OB}).$$

Suy ra $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD})$.

Chọn C.

Câu 4.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi G là trọng tâm của tam giác BDA' . Tìm mối liên hệ giữa $\overrightarrow{AG}$ và $\overrightarrow{AC'}$.

Lời giải. Vì G là trọng tâm tam giác BDA' nên
$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}).$$

Trong hình hộp, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC'}.$$

Vậy

Chọn D.

Câu 5.

Cho tứ diện $ABCD$. Điểm P thuộc AB , điểm Q thuộc AD sao cho $AP = 2PB$ và $AQ = 2QD$. Tính $\overrightarrow{PQ}$ theo $\overrightarrow{BD}$.

Lời giải. Vì $AP = 2PB$ nên
$$AP = \frac{2}{3}AB,$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}.$$

suy ra

$$\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}.$$

Tương tự,

Do đó

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AQ} = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AQ}$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}.$$

Chọn B.

Câu 6.

Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M là trung điểm của SC . Tính $\overrightarrow{AM}$.

Lời giải. Vì M là trung điểm của SC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AC})$.

Do $ABCD$ là hình bình hành, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}).$$

Suy ra

Chọn A.

Câu 7.

Cho tứ diện $ABCD$. Các điểm P, Q lần lượt thuộc AB, AC và thỏa mãn $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Tính $\overrightarrow{PQ}$.

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP}.$$

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}).$$

Suy ra

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}.$$

Vậy

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}.$$

Chọn C.

Câu 8.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của $A'B'$ và $C'D'$. Tính $\overrightarrow{EF}$.

Lời giải. Trên mặt $A'B'C'D'$, tứ giác $A'B'C'D'$ là hình bình hành. Hai đoạn $A'B'$ và $D'C'$ song song và bằng nhau.

$$\text{Đặt } \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD}.$$

Vì E là trung điểm $A'B'$ và F là trung điểm $C'D'$, hai điểm E, F có cùng vị trí tương đối trên hai cạnh đối $A'B'$ và $D'C'$. Do đó

$$\overline{EF} = \overline{A'D'} = \overline{AD}.$$

Chọn D.

Đơn vị kiến thức 2. Biểu thức tọa độ của vector và các điểm đặc biệt

Câu 9.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-3; 2; 5)$ và $\vec{b} = (4; -1; 2)$. Tìm tọa độ của $\vec{a} + 2\vec{b}$.

Lời giải.

Ta có $2\vec{b} = (8; -2; 4)$.

Vì vậy $\vec{a} + 2\vec{b} = (-3 + 8; 2 - 2; 5 + 4) = (5; 0; 9)$.

Chọn A.

Câu 10.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (2; -5; 1)$ và $\vec{b} = (-1; 3; 4)$. Tìm tọa độ của $3\vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải. Ta có $3\vec{a} = (6; -15; 3)$.

Do đó $3\vec{a} - \vec{b} = (6 - (-1); -15 - 3; 3 - 4) = (7; -18; -1)$.

Chọn C.

Câu 11.

Cho $\vec{a} = (m; 1; -2)$, $\vec{b} = (3; n; 4)$ và $\vec{a} - \vec{b} = (1; -4; -6)$. Tính $m + n$.

Lời giải. Ta có

$$\vec{a} - \vec{b} = (m - 3; 1 - n; -6).$$

So sánh với $(1; -4; -6)$, ta được

$$m - 3 = 1 \Rightarrow m = 4,$$

$$1 - n = -4 \Rightarrow n = 5.$$

Vậy $m + n = 4 + 5 = 9$.

Chọn B.

Câu 12.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 1; 4)$, $B(4; 5; -2)$. Điểm M thuộc đoạn AB và $AM : MB = 1 : 2$. Tìm tọa độ M .

Lời giải. Vì $AM : MB = 1 : 2$,

nên M chia đoạn AB theo tỉ số $1 : 2$. Ta có công thức

$$M = \frac{2A + B}{3}.$$

Suy ra

$$x_M = \frac{2(-2) + 4}{3} = 0,$$

$$y_M = \frac{2 \cdot 1 + 5}{3} = \frac{7}{3},$$

$$z_M = \frac{2 \cdot 4 + (-2)}{3} = 2.$$

Vậy $M\left(0; \frac{7}{3}; 2\right)$.

Chọn D.

Câu 13.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình bình hành $ABCD$ với $A(1; -2; 3)$, $B(4; 0; -1)$ và $D(-2; 5; 2)$. Tìm tọa độ C .

Lời giải. Với hình bình hành,

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Tương đương

$$C = B + D - A.$$

Do đó $C = (4; 0; -1) + (-2; 5; 2) - (1; -2; 3).$

Suy ra $C = (1; 7; -2).$

Chọn A.

Câu 14.

Trong không gian $Oxyz$, tam giác ABC có $A(3; 1; -2)$, $B(-1; 4; 5)$ và trọng tâm $G(2; 0; 1)$. Tìm tọa độ C .

Lời giải. Vì G là trọng tâm nên $3G = A + B + C.$

Suy ra $C = 3G - A - B.$

Ta có $3G = (6; 0; 3).$

Do đó $C = (6; 0; 3) - (3; 1; -2) - (-1; 4; 5) = (4; -5; 0).$

Chọn C.

Câu 15.

Cho $\vec{a} = (2; -1; 3)$ và $\vec{b} = (4; -2; 6)$. Tìm k sao cho $\vec{b} = k\vec{a}$.

Lời giải. Ta nhận thấy

$$\vec{b} = (4; -2; 6) = 2(2; -1; 3) = 2\vec{a}.$$

Vậy $k = 2$.

Chọn B.

Câu 16.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; -1; 2)$, $B(3; 2; 5)$ và $C(5; 5; m)$. Tìm m để A, B, C thẳng hàng.

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (2; 3; 3),$$

$$\overrightarrow{AC} = (4; 6; m - 2).$$

Hai tọa độ đầu cho thấy $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}$ nếu ba điểm thẳng hàng.

Vì vậy tọa độ thứ ba phải thỏa mãn $m - 2 = 2 \cdot 3 = 6$.

Suy ra $m = 8$.

Chọn D.

Câu 17.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(2; 1; -1)$ và $B(-1; 4; 2)$. Điểm P thỏa mãn $\overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \vec{0}$. Tìm tọa độ P .

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{PA} = A - P, \quad \overrightarrow{PB} = B - P.$$

$$\text{Từ } \overrightarrow{PA} + 2\overrightarrow{PB} = \vec{0}$$

$$\text{suy ra } A - P + 2(B - P) = 0.$$

$$\text{Do đó } 3P = A + 2B,$$

$$\text{Hay } P = \frac{A + 2B}{3}.$$

Tính được

$$P = \left(\frac{2+2(-1)}{3}; \frac{1+2 \cdot 4}{3}; \frac{-1+2 \cdot 2}{3} \right) = (0; 3; 1).$$

Chọn A.

Câu 18.

Trong không gian $Oxyz$, cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ với $A(1; 0; 2)$, $B(3; -1; 4)$, $D(-2; 5; 1)$ và $A'(4; 2; 6)$.
Tìm tọa độ C' .

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2; -1; 2),$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-3; 5; -1),$$

$$\overrightarrow{AA'} = A' - A = (3; 2; 4).$$

Trong hình hộp, $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Vậy $C' = A + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}$.

Suy ra

$$C' = (1; 0; 2) + (2; -1; 2) + (-3; 5; -1) + (3; 2; 4) = (3; 6; 7).$$

Chọn C.

Đơn vị kiến thức 3. Tích vô hướng, độ dài, khoảng cách và góc

Câu 19.

Trong không gian $Oxyz$, cho $\vec{a} = (-2; 3; 1)$ và $\vec{b} = (4; 0; -5)$. Tính $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Lời giải. Theo công thức tích vô hướng,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-2) \cdot 4 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-5) = -8 - 5 = -13.$$

Chọn B.

Câu 20.

Tính độ dài của vector $\vec{a} = (6; 2; -3)$.

Lời giải. Ta có

$$|\vec{a}| = \sqrt{6^2 + 2^2 + (-3)^2} = \sqrt{36 + 4 + 9} = \sqrt{49} = 7.$$

Vậy kết quả là $|\vec{a}| = 7$.

Câu 21.

Cho $\vec{a} = (1; m; 2)$ và $\vec{b} = (2; -1; 3)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lời giải. Hai vector vuông góc khi tích vô hướng bằng 0 :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

$$\text{Suy ra } 1 \cdot 2 + m(-1) + 2 \cdot 3 = 0.$$

$$\text{Do đó } 2 - m + 6 = 0 \Rightarrow m = 8.$$

Chọn D.

Câu 22.

Cho $\vec{a} = (1; 2; 2)$ và $\vec{b} = (2; 1; 2)$. Tính cosin của góc giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Lời giải. Ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 8.$$

Độ dài hai vector:

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3,$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

Vì vậy

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{8}{3 \cdot 3} = \frac{8}{9}.$$

Chọn C.

Câu 23.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(0; 1; 2)$ và $B(3; -1; 6)$. Tính khoảng cách AB .

Lời giải. Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; -2; 4)$.

Do đó $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}.$

Chọn B.

Câu 24.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1; 0; 2)$, $B(4; 0; 2)$ và $C(1; 4; 2)$. Tính $\cos \angle ABC$.

Lời giải. Góc $\angle ABC$ là góc giữa hai vectơ $\overrightarrow{BA}$ và $\overrightarrow{BC}$.

Ta có

$$\overrightarrow{BA} = (-3; 0; 0),$$

$$\overrightarrow{BC} = (-3; 4; 0).$$

Tích vô hướng: $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-3)(-3) + 0 \cdot 4 = 9.$

Độ dài:

$$|\overrightarrow{BA}| = 3,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

Vậy $\cos \angle ABC = \frac{9}{3 \cdot 5} = \frac{3}{5}$.

Chọn A.

Câu 25.

Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$ và $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6$. Tính $|2\vec{a} - \vec{b}|$.

Lời giải. Ta bình phương độ dài:

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = (2\vec{a} - \vec{b}) \cdot (2\vec{a} - \vec{b}).$$

Khai triển:

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 4\vec{a} \cdot \vec{b}.$$

Thay số:

$$|2\vec{a} - \vec{b}|^2 = 4 \cdot 9 + 16 - 4 \cdot 6 = 28.$$

Suy ra

$$|2\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}.$$

Đơn vị kiến thức 4. Vận dụng tọa độ vector trong thực tiễn

Câu 26.

Hai đầu của một dây cáp được biểu diễn bởi $A(0; 0; 12)$ và $B(3; 4; 0)$, đơn vị là mét. Tính độ dài dây cáp AB .

Lời giải.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 4; -12)$.

Do đó $AB = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$

Vậy dây cáp dài 13 m.

Chọn C.

Câu 27.

Hai cảm biến được đặt tại $A(2; -1; 4)$ và $B(8; 5; 10)$. Bộ truyền tín hiệu đặt tại trung điểm của AB . Tìm tọa độ bộ truyền.

Lời giải. Gọi M là trung điểm của AB . Khi đó

$$M\left(\frac{2+8}{2}; \frac{-1+5}{2}; \frac{4+10}{2}\right).$$

Suy ra $M(5; 2; 7)$.

Chọn B.

Câu 28.

Một trạm radar đặt tại gốc O , phạm vi phát hiện 25 km. Mục tiêu ở vị trí $P(15; 12; -9)$. Xác định radar có phát hiện được mục tiêu hay không.

Lời giải. Khoảng cách từ mục tiêu đến radar là

$$OP = \sqrt{15^2 + 12^2 + (-9)^2}.$$

Ta có $OP = \sqrt{225 + 144 + 81} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}$.

Vì $15\sqrt{2} \approx 21, 21 < 25$,

nên mục tiêu nằm trong phạm vi phát hiện của radar.

Chọn A.

Câu 29.

Một thiết bị bay chuyên động từ $A(10; 5; 2)$ đến $B(4; 17; 5)$, đơn vị là kilômét. Tính quãng đường thẳng AB .

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = (4 - 10; 17 - 5; 5 - 2) = (-6; 12; 3).$$

Do đó $AB = \sqrt{(-6)^2 + 12^2 + 3^2} = \sqrt{36 + 144 + 9} = \sqrt{189} = 3\sqrt{21}.$

Vậy quãng đường thẳng là $3\sqrt{21}$ km.

Chọn D.

Lưu ý: hai phương án $3\sqrt{17}$ và $\sqrt{153}$ trong đề gốc là hai cách viết của cùng một số, vì $\sqrt{153} = 3\sqrt{17}$. Tuy nhiên chúng đều không phải kết quả đúng của câu này.

Câu 30.

Một thiết bị bay có vector chỉ hướng $\vec{d} = (3; 4; 12)$. Gọi $\vec{k} = (0; 0; 1)$ là vector đơn vị theo phương thẳng đứng. Tính cosin của góc giữa hướng chuyển động và phương thẳng đứng.

Lời giải. Ta có

$$\vec{d} \cdot \vec{k} = 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 12 \cdot 1 = 12.$$

Độ dài:

$$|\vec{d}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13,$$

$$|\vec{k}| = 1.$$

Vậy $\cos(\vec{d}, \vec{k}) = \frac{12}{13 \cdot 1} = \frac{12}{13}.$

Chọn C.

PHẦN II. TRẮC NGHIỆM ĐÚNG – SAI

Câu 1.

Cho tứ diện $ABCD$. Gọi M là trung điểm của CD , P là trung điểm của AB .

a) Mệnh đề:

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$$

Vì M là trung điểm của CD , công thức vector trung điểm cho

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}).$$

Kết luận: Đúng.

b) Tương tự, lấy A làm điểm đầu:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}).$$

Kết luận: Đúng.

c) Vì P là trung điểm AB và M là trung điểm CD ,

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}).$$

Có thể kiểm tra bằng vector vị trí:

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(C + D - A - B).$$

$$\text{Mà } \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (C - A) + (D - B) = C + D - A - B.$$

Kết luận: Đúng.

d)

Ta có

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}((D - A) - (C - B))$$

$$\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}) = \frac{1}{2}(B + D - A - C),$$

khác với

$$\overrightarrow{PM} = \frac{1}{2}(C + D - A - B).$$

Kết luận: Sai.

Đáp án Câu 1: Đ – Đ – Đ – S.

Câu 2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi E là trung điểm của $A'B'$, F là trung điểm của CD' .

Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{w}$.

Khi đó $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$.

a)
$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}.$$

Kết luận: Đúng.

b)
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = -\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}.$$

Do đó

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'}.$$

Kết luận: Đúng.

c) Ta có

$$\overrightarrow{EC} = \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}.$$

Kết luận: Đúng.

d) Hai điểm E, F có cùng vị trí tương đối trên hai cạnh đối của mặt $A'B'C'D'$, nên

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{AD}.$$

Không phải $\overrightarrow{AB}$.

Kết luận: Sai.

Đáp án Câu 2: Đ – Đ – Đ – S.

Câu 3.

Cho $\vec{a} = (1; -3; 2)$ và $\vec{b} = (4; 2; -1)$.

a) $\vec{a} + \vec{b} = (1 + 4; -3 + 2; 2 - 1) = (5; -1; 1).$

Kết luận: Đúng.

b)

$$2\vec{a} = (2; -6; 4).$$

Do đó

$$2\vec{a} - \vec{b} = (2 - 4; -6 - 2; 4 - (-1)) = (-2; -8; 5).$$

Kết luận: Đúng.

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 4 + (-3) \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 - 6 - 2 = -4.$

Kết luận: Đúng.

d) $|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}.$

Vì $\sqrt{21} \neq \sqrt{20}$ nên mệnh đề sai.

Kết luận: Sai.

Đáp án Câu 3: Đ – Đ – Đ – S.

Câu 4. Cho $A(2; -1; 3)$, $B(8; 5; -3)$. Gọi M là trung điểm của AB .

a) $M\left(\frac{2+8}{2}; \frac{-1+5}{2}; \frac{3+(-3)}{2}\right) = (5; 2; 0).$

Kết luận: Đúng.

b) Điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) khi tọa độ $z = 0$. Vì $M(5; 2; 0)$ nên M thuộc (Oxy) .

Kết luận: Đúng.

c) $\overrightarrow{AB} = (8 - 2; 5 - (-1); -3 - 3) = (6; 6; -6).$

Kết luận: Đúng.

d) $AB = \sqrt{6^2 + 6^2 + (-6)^2} = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}.$

Không phải $6\sqrt{2}$.

Kết luận: Sai.

Đáp án Câu 4: Đ – Đ – Đ – S.

Câu 5.

Cho $A(1; -2; 0)$, $B(3; 1; 4)$ và $C(5; 4; m)$.

a) $\overrightarrow{AB} = (3 - 1; 1 - (-2); 4 - 0) = (2; 3; 4).$

Kết luận: Đúng.

b) Nếu $m = 8$ thì

$\overrightarrow{AC} = (5 - 1; 4 - (-2); 8 - 0) = (4; 6; 8).$

Mà $2\overrightarrow{AB} = 2(2; 3; 4) = (4; 6; 8).$

Do đó

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB}.$

Kết luận: Đúng.

c) Nếu $m = 6$ thì $\overrightarrow{AC} = (4; 6; 6)$.

Để A, B, C thẳng hàng, $\overrightarrow{AC}$ phải cùng phương với $\overrightarrow{AB} = (2; 3; 4)$. Hai tọa độ đầu cho tỉ số bằng 2 , nhưng tọa độ thứ ba phải là 8 , không phải 6 .

Kết luận: Sai.

d)

Nếu $m = 8$ thì $C(5; 4; 8)$. Trung điểm của AC là

$$\left(\frac{1+5}{2}; \frac{-2+4}{2}; \frac{0+8}{2} \right) = (3; 1; 4) = B.$$

Kết luận: Đúng.

Đáp án Câu 5: Đ – Đ – S – Đ.

Câu 6.

Cho $\vec{a} = (1; 2; -2)$ và $\vec{b} = (2; 1; 2)$.

a)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 = 2 + 2 - 4 = 0.$$

Kết luận: Đúng.

b)

Hai vector khác vector-không và có tích vô hướng bằng 0 , nên

$$\vec{a} \perp \vec{b}.$$

Kết luận: Đúng.

c)

$$\vec{a} + \vec{b} = (3; 3; 0).$$

Do đó $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$.

Kết luận: Đúng.

d)

Vì $\vec{a} \perp \vec{b}$ nên góc giữa hai vector bằng 90° , không phải 60° .

Kết luận: Sai.

Đáp án Câu 6: Đ – Đ – Đ – S.

Câu 7.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(7;1;1)$ và $C(1;9;1)$.

a) $AB = \sqrt{(7-1)^2} = 6.$

Kết luận: Đúng.

b) $AC = \sqrt{(9-1)^2} = 8.$

Kết luận: Đúng.

c) $\overrightarrow{BC} = (-6; 8; 0).$

Do đó $BC = \sqrt{(-6)^2 + 8^2} = \sqrt{100} = 10.$

Kết luận: Đúng.

d) Chu vi tam giác là

$$AB + AC + BC = 6 + 8 + 10 = 24.$$

Không phải 26 .

Kết luận: Sai.

Đáp án Câu 7: Đ – Đ – Đ – S.

Câu 8.

Một thiết bị bay chuyển động từ $A(2; 3; 1)$ đến $B(8; -1; 5)$ trong 2 phút theo đường thẳng.

a)

$$\overrightarrow{AB} = (8 - 2; -1 - 3; 5 - 1) = (6; -4; 4).$$

Kết luận: Đúng.**b)**

$$AB = \sqrt{6^2 + (-4)^2 + 4^2} = \sqrt{36 + 16 + 16} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}.$$

Kết luận: Đúng.**c)**

Trung điểm M của AB là

$$M\left(\frac{2+8}{2}; \frac{3+(-1)}{2}; \frac{1+5}{2}\right) = (5; 1; 3).$$

Kết luận: Đúng.

d) Nếu chuyển động đều trong 2 phút thì vector độ dịch chuyển trong mỗi phút là

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = (3; -2; 2),$$

không phải $(6; -4; 4)$.

Kết luận: Sai.**Đáp án Câu 8: Đ – Đ – Đ – S.****Câu 9.**

Một trạm radar đặt tại gốc O , phạm vi phát hiện 16 km. Mục tiêu ở vị trí $P(9; 12; -4)$.

a)

$$OP = \sqrt{9^2 + 12^2 + (-4)^2} = \sqrt{81 + 144 + 16} = \sqrt{241}.$$

Kết luận: Đúng.

b)

Ta có $\sqrt{241} \approx 15,52 < 16$.

Vì vậy radar phát hiện được mục tiêu.

Kết luận: Đúng.

c)

Khoảng cách từ điểm $P(x; y; z)$ đến mặt phẳng (Oxy) bằng $|z|$. Do đó

$$d(P, (Oxy)) = |-4| = 4.$$

Kết luận: Đúng.

d)

Hình chiếu vuông góc của $P(9; 12; -4)$ lên mặt phẳng (Oyz) phải có hoành độ bằng 0 và giữ nguyên hai tọa độ còn lại:

$$P'(0; 12; -4).$$

Vì vậy $(9; 0; -4)$ là sai.

Kết luận: Sai.**Đáp án Câu 9: Đ – Đ – Đ – S.****Câu 10.**

Hai cảm biến đặt tại $A(-4; 2; 6)$ và $B(6; 8; 2)$. Bộ truyền tín hiệu M đặt tại trung điểm của AB .

a)

$$M\left(\frac{-4+6}{2}; \frac{2+8}{2}; \frac{6+2}{2}\right) = (1; 5; 4).$$

Kết luận: Đúng.

b)

Vì M là trung điểm của AB nên

$$AM = MB.$$

Kết luận: Đúng.

c)

Điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) phải có $z = 0$. Ở đây $M(1; 5; 4)$ có $z = 4$, nên không thuộc (Oxy) .

Kết luận: Sai.

d)

Tổng ba tọa độ của M là

$$1 + 5 + 4 = 10.$$

Kết luận: Đúng.**Đáp án Câu 10: Đ – Đ – S – Đ.****PHẦN III. CÂU TRẢ LỜI NGẮN****Câu 1.**

Cho $\vec{a} = (-2; 3; 1)$, $\vec{b} = (4; -1; 5)$. Tính tổng ba tọa độ của vector $2\vec{a} - \vec{b}$.

Lời giải. Ta có

$$2\vec{a} = (-4; 6; 2).$$

Suy ra $2\vec{a} - \vec{b} = (-4 - 4; 6 - (-1); 2 - 5) = (-8; 7; -3).$

Tổng ba tọa độ là $-8 + 7 - 3 = -4$.

Đáp số: -4 .

Câu 2.

Cho $\vec{a} = (m; 1; 2)$ và $\vec{b} = (2; -3; 1)$. Tìm m để $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Lời giải. Điều kiện vuông góc: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Ta có $2m + 1 \cdot (-3) + 2 \cdot 1 = 0$.

Suy ra $2m - 1 = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2} = 0,5$.

Đáp số: $0,5$.

Câu 3.

Cho $\vec{a} = (1; 1; 1)$ và $\vec{b} = (1; 1; -1)$. Tính $3\cos(\vec{a}, \vec{b})$.

Lời giải. Ta có

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 + 1 - 1 = 1.$$

Độ dài:

$$|\vec{a}| = \sqrt{3}, |\vec{b}| = \sqrt{3}.$$

Do đó $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1}{3}$.

Suy ra $3\cos(\vec{a}, \vec{b}) = 1$.

Đáp số: 1 .

Câu 4.

Cho tứ diện $ABCD$. Điểm P thuộc AB , điểm Q thuộc AD sao cho $AP = 3PB$ và $AQ = 3QD$. Biết $\overrightarrow{PQ} = k\overrightarrow{BD}$. Tìm k .

Lời giải. Từ $AP = 3PB$, ta có $AP = \frac{3}{4}AB$,

Nên $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

Tương tự, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

Do đó $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{BD}$.

Suy ra $k = \frac{3}{4} = 0,75$.

Đáp số: $0,75$.

Câu 5.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = 1$, $AD = 4$, $AA' = 8$. Tính độ dài của vector $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'}$.

Lời giải. Trong hình hộp chữ nhật, ba vector

$$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AA'}$$

đôi một vuông góc. Do đó

$$\left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} \right|^2 = AB^2 + AD^2 + AA'^2.$$

Thay số:

$$\left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} \right|^2 = 1^2 + 4^2 + 8^2 = 1 + 16 + 64 = 81.$$

Vậy $\left| \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AA'} \right| = 9$.

Đáp số: ⁹.

Câu 6.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(-2; 1; 3)$, $B(6; 5; -1)$. Điểm P thuộc đoạn AB và $AP : PB = 1 : 3$. Tính tổng ba tọa độ của P .

Lời giải. Vì $AP : PB = 1 : 3$, ta có $P = \frac{3A + B}{4}$.

Do đó

$$x_P = \frac{3(-2) + 6}{4} = 0,$$

$$y_P = \frac{3 \cdot 1 + 5}{4} = 2,$$

$$z_P = \frac{3 \cdot 3 + (-1)}{4} = 2.$$

Vậy $P(0; 2; 2)$.

Tổng ba tọa độ: $0 + 2 + 2 = 4$.

Đáp số: ⁴.

Câu 7.

Trong không gian $Oxyz$, tam giác ABC có $A(1; 2; -1)$, $B(4; -2; 3)$ và trọng tâm $G(2; 1; 2)$. Tính tổng ba tọa độ của C .

Lời giải. Vì G là trọng tâm, $C = 3G - A - B$.

Ta có $3G = (6; 3; 6)$.

Suy ra $C = (6; 3; 6) - (1; 2; -1) - (4; -2; 3) = (1; 3; 4)$.

Tổng ba tọa độ của C là $1 + 3 + 4 = 8$.

Đáp số: ⁸.

Câu 8.

Trong không gian $Oxyz$, cho $A(1;1;1)$, $B(4;1;1)$ và $C(1;5;1)$. Tính chu vi tam giác ABC .

Lời giải. Ta có

$$AB = 3, \quad AC = 4.$$

Mặt khác, $\overrightarrow{BC} = (-3; 4; 0)$,

$$\text{Nên } BC = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5.$$

Chu vi tam giác: $P = AB + AC + BC = 3 + 4 + 5 = 12$.

Đáp số: ¹².

Câu 9.

Một trạm radar đặt tại gốc O . Một mục tiêu ở vị trí $P(3; 4; -12)$, đơn vị là kilômét. Tính khoảng cách từ mục tiêu đến trạm radar.

Lời giải. Khoảng cách cần tìm là

$$OP = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}.$$

Suy ra

$$OP = \sqrt{9 + 16 + 144} = \sqrt{169} = 13.$$

Vậy mục tiêu cách trạm radar ¹³ km.

Đáp số: ¹³.

Câu 10.

Một robot đang ở vị trí $A(2; -3; 5)$ và di chuyển đến B sao cho $\overrightarrow{AB} = (6; 4; -2)$. Tính tổng ba tọa độ của B .

Lời giải. Ta có

$$\overrightarrow{AB} = B - A.$$

Suy ra $B = A + \overrightarrow{AB}.$

Do đó

$$B = (2; -3; 5) + (6; 4; -2) = (8; 1; 3).$$

Tổng ba tọa độ của B là $8 + 1 + 3 = 12.$

Đáp số: $12.$