

Họ và tên: Số báo danh:

Mã đề 0105

Phần I. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1. Phương trình $\sin x + 1 = 0$ có nghiệm là

- A. $x = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$. C. $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. D. $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Câu 2. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = \frac{3x+2}{x+1}$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng

- A. $\frac{8}{3}$. B. 3 . C. $\frac{10}{3}$. D. 2 .

Câu 3. Gieo ngẫu nhiên một con xúc xắc cân đối và đồng chất hai lần liên tiếp. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trong hai lần gieo bằng 8 biết rằng lần gieo thứ nhất xuất hiện mặt 5 chấm.

- A. $\frac{5}{6}$. B. $\frac{1}{6}$. C. $\frac{1}{3}$. D. $\frac{1}{36}$.

Câu 4. Cho hàm số $f(x) = 3^x + 1$. Một nguyên hàm của $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ là

- A. $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3}$. B. $F(x) = \frac{3^x}{\ln 3} + x$. C. $F(x) = 3^x + x$. D. $F(x) = 3^x \ln 3$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $\int_0^5 f(x) dx = 6, \int_2^5 f(x) dx = 2$. Giá trị của biểu thức $\int_0^2 f(x) dx$ bằng

- A. 3 . B. 4 . C. 2 . D. 8 .

Câu 6. Khảo sát thời gian ứng dụng AI vào học tập trong một ngày của học sinh lớp 12 A, thu được mẫu số liệu như sau:

Thời gian (phút)	$[20; 25)$	$[25; 30)$	$[30; 35)$	$[35; 40)$	$[40; 45)$
Số học sinh	5	8	14	10	6

Số trung bình cộng của mẫu số liệu ghép nhóm trên bằng (làm tròn kết quả hàng phần trăm)?

- A. 32,96 . B. 32,97 . C. 31,95 . D. 31,94 .

Câu 7. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho vector $\vec{a}$ thỏa mãn $\vec{a} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 5\vec{k}$. Tọa độ vector $\vec{a}$ là

- A. $(3; 4; -5)$. B. $(4; 3; -5)$. C. $(-4; -3; 5)$. D. $(-5; 4; 3)$.

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây. Hàm số đồng biến trên khoảng nào?

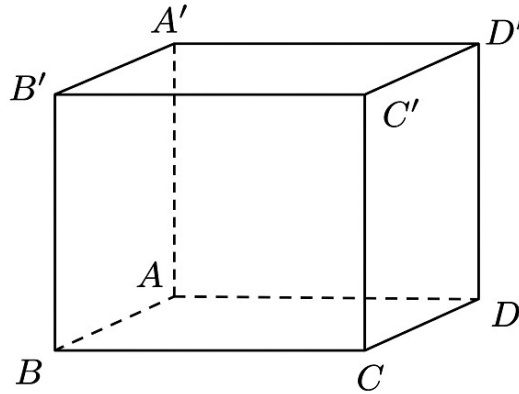
x	$-\infty$	-3	0	3	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$	-1	1	-1	$+\infty$

- A. $(-\infty; 3)$. B. $(-3; 3)$. C. $(-3; 0)$. D. $(0; +\infty)$.

Câu 9. Cho cấp số nhân (u_n) với $u_1 = 1$ và $u_2 = 2$. Công bội của cấp số nhân đã cho là

- A. $q = -\frac{1}{2}$. B. $q = 2$. C. $q = -2$. D. $q = \frac{1}{2}$.

Câu 10. Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$. Tìm mệnh đề sai?



- A. $(\overrightarrow{A'A}; \overrightarrow{C'B'}) = 45^\circ$. B. $(\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{B'D'}) = 90^\circ$. C. $(\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{A'B'}) = 90^\circ$. D. $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{A'C'}) = 45^\circ$.

Câu 11. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y - 4 = 0$, khi đó một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (P) là

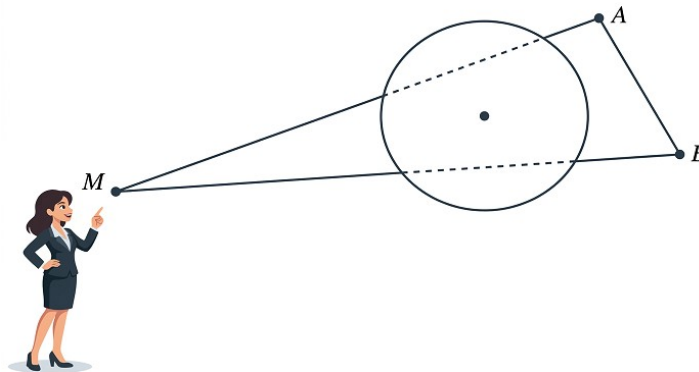
- A. $\vec{n} = (1; -2; 0)$. B. $\vec{n} = (-1; 2; 4)$. C. $\vec{n} = (-1; 2; -4)$. D. $\vec{n} = (1; -2; -4)$.

Câu 12. Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) + 3 > 0$ là

- A. $(9; +\infty)$. B. $(-\infty; 9)$. C. $(1; 7)$. D. $(1; 9)$.

Phần II. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1; 2; 3)$ và quan sát một thanh AB với $A(7; 8; -3), B(2; 3; -3)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn thuộc mặt phẳng (Oxy) có tâm $O(0; 0; 0)$, bán kính R và che khuất hoàn toàn thanh AB đối với người quan sát tại điểm M .



a) Vectơ $\overrightarrow{MA} = (6; 6; -6)$.

b) Đường thẳng AB tạo với mặt phẳng chứa tấm bìa một góc 30° .

$$MA: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3 - t \end{cases}$$

c) Phương trình đường thẳng

d) Tấm bìa có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{41}$.

Câu 2. Từ một nhóm học sinh gồm 6 học sinh lớp $^{10}A, 8$ học sinh lớp ^{10}B và 7 học sinh lớp ^{10}C . Chọn ngẫu nhiên 5 học sinh từ nhóm học sinh trên?

a) Số cách chọn 5 học sinh đều thuộc lớp 10 A là 6 cách.

b) Số cách chọn 5 học sinh tùy ý là 20349 cách.

c) Số cách chọn 5 học sinh có đủ cả ba lớp sao cho số học sinh lớp ^{10}C lớn hơn hai là 1860 cách.

d) Xác suất để chọn 5 học sinh sao cho không tồn tại lớp nào có đúng 1 học sinh được chọn là $\frac{1528}{6783}$.

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 - x + 100}{x}$.

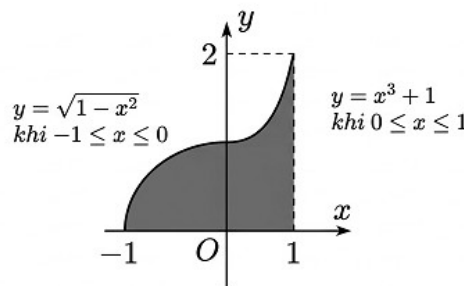
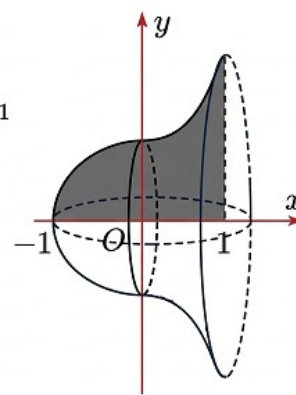
a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}, \{0\}$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng có phương trình $y = x - 1$.

c) Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị.

d) Xí nghiệp A sản xuất x sản phẩm với tổng chi phí được cho bởi công thức $C(x) = x^2 - x + 100$ (đơn vị ngàn đồng, $x > 1$). Khi đó chi phí sản xuất trung bình của một sản phẩm thấp nhất bằng 19 ngàn đồng.

Câu 4. Chiếc mũ rộng vành được mô hình hóa khi cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1 \leq x \leq 0 \\ x^3 + 1 & \text{khi } 0 < x \leq 1 \end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x = -1, x = 1$ quay xung quanh trục Ox (tham khảo hình vẽ). Biết đơn vị trên mỗi trục là dm.



a) Giá trị của hàm số $f(x)$ khi $x = 1$ bằng 2.

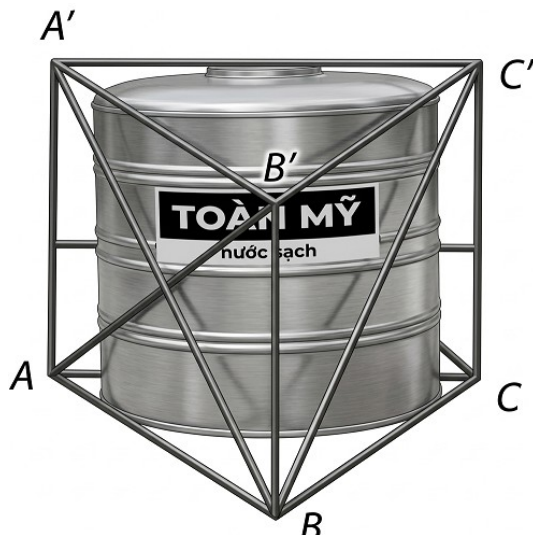
b) Diện tích của hình phẳng (H) là $S = \int_{-1}^1 |\sqrt{1-x^2} + x^3 + 1| dx$.

c) Vành của chiếc mũ (giao tuyến của mặt tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$) có diện tích bằng $2\pi (dm^2)$.

d) Thể tích của khối tròn xoay trên là $\frac{97}{42} \cdot \pi (dm^3)$.

Phần III. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6.

Câu 1. Một giàn khung thép đỡ bồn nước sinh hoạt có dạng là hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$. Để giàn đỡ có kết cấu chắc chắn người ta hàn thêm 1 số thanh sắt (hình vẽ), trong đó có hai thanh $AB' \perp BC'$. Cho biết cạnh đáy của giàn đỡ $AB = 2$ (m). Tính thể tích V (m^3) của khối lăng trụ $ABC \cdot A'B'C'$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 2. Xếp 8 quyển sách giống nhau vào một giá sách gồm 10 ngăn. Gọi P là xác suất để xếp 8 quyển sách vào 10 ngăn sao cho số quyển sách trong mỗi ngăn không quá 2 quyển sách, có 4 ngăn hoặc 6 ngăn chưa đúng 1 quyển sách và các ngăn liền kề với ngăn chứa 2 quyển sách là ngăn không có quyển sách nào. Tính $12155P$.

Câu 3. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm

được mô hình hóa bằng hàm số $P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}}$ (với $a, b \in \mathbb{R}$), trong đó thời gian t được tính bằng giờ.

Đạo hàm của hàm số $y = P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 24 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 8 tế bào/giờ. Sau một thời gian về lâu dài thì số lượng tế bào của quần thể nấm men tiến về giá trị bao nhiêu?

Câu 4. Trong một chương trình giao lưu âm nhạc đón tết vui xuân, ban đầu với sự tham dự của 1700 khán giả. Ban tổ chức đã thống kê được số lượng khán giả ở lại sân khấu xem âm nhạc theo thời gian, được mô tả

$$t \in [0; +\infty): f'(t) = \begin{cases} 1700 - 400t, & 0 \leq t \leq 2 \\ a(t-2)^2 + b, & t > 2 \end{cases}$$

bởi một hàm số liên tục trên (trong đó $f'(t)$ là số khán giả, t là

số giờ kể từ khi chương trình bắt đầu, a, b là tham số thực), với hàm số $f(t)$ mô tả tổng sự hiện diện của khán giả theo thời gian t . Sau 2 giờ 30 phút số lượng khán giả ở lại sân khấu là 875. Hỏi từ khi bắt đầu cho đến khi khán giả ra về hết, trung bình mỗi giờ còn bao nhiêu khán giả ở lại tham gia chương trình âm nhạc?

Câu 5. Tỷ lệ lạm phát là tỷ lệ phần trăm biểu thị mức tăng chung của giá hàng hóa và dịch vụ trong một khoảng thời gian (thường tính theo năm). Nếu tỷ lệ lạm phát của năm sau so với năm trước là i thì A đồng ở năm trước tương đương với $P = A(1+i)$ đồng ở năm sau.

Ông An gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 6% /năm, theo hình thức lãi kép, tính lãi mỗi năm một lần (tức là lãi của năm trước được nhập vào vốn để tính lãi cho năm sau). Sau 2 năm, ông An nhận cả vốn và lãi. Giả sử trong 2 năm đó, tỷ lệ lạm phát ổn định 4% / năm. Nếu quy đổi theo mức giá tại thời điểm gửi tiền thì số tiền ông An nhận được sau 2 năm tương đương bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

$$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+5}{5};$$

Câu 6. Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng có phương trình $d: \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z+4}{c}$, trong đó a, b, c là các số thực khác 0 sao cho các đường thẳng d và d' cắt nhau tại M . Mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 6 = 0$ lần lượt cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C . Tính thể tích của khối tứ diện $MABC$.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

PHẦN I: Trắc nghiệm nhiều lựa chọn

Mã đề	Đáp án											
0105	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	D	A	B	B	B	B	B	C	B	D	A	D

PHẦN II: Trắc nghiệm đúng sai

Mã đề	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4
0105	a)D-b)Ss-c)D-d)D	a)D-b)D-c)S-d)D	a)D-b)D-c)S-d)D	a)D-b)S-c)S-d)D

PHẦN III: Trắc nghiệm trả lời ngắn

Mã đề	Câu 1	Câu 2	Câu 3	Câu 4	Câu 5	Câu 6
0105	2,45	131	43,2	880	104	13,5

LỜI GIẢI CHI TIẾT THAM KHẢO

Phần II

Câu 1. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mắt một người quan sát đặt tại điểm $M(1;2;3)$ và quan sát một thanh AB với $A(7;8;-3)$, $B(2;3;-3)$. Một tấm bìa cứng có dạng hình tròn thuộc mặt phẳng (Oxy) có tâm $O(0;0;0)$, bán kính R và che khuất hoàn toàn thanh AB đối với người quan sát tại điểm M .

a) Vector $\overrightarrow{MA} = (6; 6; -6)$.

Ta có

$$\overrightarrow{MA} = A - M = (7 - 1; 8 - 2; -3 - 3) = (6; 6; -6). \text{ Vậy mệnh đề đúng.}$$

b) Đường thẳng AB tạo với mặt phẳng chứa tấm bìa một góc 30° .

Ta có

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2 - 7; 3 - 8; -3 - (-3)) = (-5; -5; 0)$$

Vì $\overrightarrow{AB}$ có tọa độ $z = 0$ nên đường thẳng AB song song với mặt phẳng (Oxy) .

Do đó góc giữa AB và (Oxy) bằng 0° , không phải 30° .

Vậy mệnh đề sai.

c) Phương trình đường thẳng MA là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Vì đường thẳng MA đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và có vector chỉ phương

$\overrightarrow{MA} = (6; 6; -6) = 6(1; 1; -1)$, nên một phương trình tham số của MA là

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 3 - t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Vậy mệnh đề đúng.

d) Tấm bìa có bán kính nhỏ nhất bằng $\sqrt{41}$.

Để tấm bìa che khuất hoàn toàn thanh AB đối với người quan sát tại M , hình tròn trong mặt phẳng (Oxy) phải chứa đoạn giao của chùm tia xuất phát từ M đi qua thanh AB với mặt phẳng (Oxy) .

Trước hết, tìm giao điểm của đường thẳng MA với mặt phẳng (Oxy) .

Từ phương trình ở ý c), cho $z = 0$ thì

$3 - t = 0 \Rightarrow t = 3$. Suy ra giao điểm là

$$A' = (4; 5; 0).$$

Tiếp theo, xét đường thẳng MB.

Ta có

$\overrightarrow{MB} = B - M = (2 - 1; 3 - 2; -3 - 3) = (1; 1; -6)$. Phương trình tham số của MB là

$$\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2 + s \\ z = 3 - 6s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R}).$$

Cho $z = 0$ thì

$3 - 6s = 0 \Rightarrow s = \frac{1}{2}$. Suy ra giao điểm là

$$B' = \left(\frac{3}{2}; \frac{5}{2}; 0\right).$$

Khi đó hình tròn tâm O nhỏ nhất che được đoạn $A'B'$ phải có bán kính bằng

$R_{\min} = \max\{OA', OB'\}$. Ta tính được

$$OA' = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}, \text{ và}$$

$$OB' = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{34}{4}} = \sqrt{\frac{17}{2}}. \text{ Do đó}$$

$R_{\min} = \sqrt{41}$. Vậy mệnh đề đúng.

Câu 2. Từ một nhóm học sinh gồm ^{6} học sinh lớp 10A, ^{8} học sinh lớp 10B và ^{7} học sinh lớp 10C. Chọn ngẫu nhiên ^{5} học sinh từ nhóm học sinh trên.

Tổng số học sinh là

$$6 + 8 + 7 = 21.$$

a) Số cách chọn ^{5} học sinh đều thuộc lớp 10A là ^{6} cách.

Ta có

$$\binom{6}{5} = 6.$$

Vậy mệnh đề đúng.

b) Số cách chọn ^{5} học sinh tùy ý là 20349 cách.

Tổng số cách chọn ^{5} học sinh từ 21 học sinh là

$$\binom{21}{5} = \frac{21 \cdot 20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20349.$$

Vậy mệnh đề đúng.

c) Số cách chọn ^{5} học sinh có đủ cả ba lớp sao cho số học sinh lớp 10C lớn hơn hai là 1860 cách.

Vì chọn ^{5} học sinh, có đủ cả ba lớp và số học sinh lớp 10C lớn hơn 2, nên số học sinh lớp 10C phải là ^{3} .

Khi đó số học sinh của ba lớp lần lượt là

$(1; 1; 3)$. Số cách chọn là

$$\binom{6}{1} \binom{8}{1} \binom{7}{3} = 6 \cdot 8 \cdot 35 = 1680.$$

Không phải 1860.

Vậy mệnh đề sai.

d) Xác suất để chọn ^{5} học sinh sao cho không tồn tại lớp nào có đúng 1 học sinh được chọn là $\frac{1528}{6783}$.

Gọi số học sinh được chọn từ các lớp 10A, 10B, 10C lần lượt là a, b, c. Khi đó

$a + b + c = 5, \quad a, b, c \geq 0$. Điều kiện "không tồn tại lớp nào có đúng 1 học sinh được chọn" nghĩa là không có số nào trong a, b, c bằng 1.

Các bộ (a, b, c) thỏa mãn là:

$(5, 0, 0), (0, 5, 0), (0, 0, 5), (3, 2, 0), (3, 0, 2), (2, 3, 0), (0, 3, 2), (2, 0, 3), (0, 2, 3)$.

Số cách tương ứng là:

$$\binom{6}{5} = 6, \quad \binom{8}{5} = 56, \quad \binom{7}{5} = 21, \quad \binom{6}{3} \binom{8}{2} = 20 \cdot 28 = 560,$$

$$\binom{6}{3} \binom{7}{2} = 20 \cdot 21 = 420, \quad \binom{6}{2} \binom{8}{3} = 15 \cdot 56 = 840,$$

$$\binom{8}{3} \binom{7}{2} = 56 \cdot 21 = 1176, \quad \binom{6}{2} \binom{7}{3} = 15 \cdot 35 = 525,$$

$$\binom{8}{2} \binom{7}{3} = 28 \cdot 35 = 980.$$

Cộng lại, số trường hợp thuận lợi là

$$6 + 56 + 21 + 560 + 420 + 840 + 1176 + 525 + 980 = 4584. \text{ Do đó xác suất cần tìm là}$$

$$P = \frac{4584}{20349} = \frac{1528}{6783}. \text{ Vậy mệnh đề đúng.}$$

Câu 3. Cho hàm số

$$y = f(x) = \frac{x^2 - x + 100}{x}.$$

Ta có

$$f(x) = x - 1 + \frac{100}{x}.$$

a) Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Vì mẫu số khác 0 nên

$$x \neq 0. \text{ Do đó}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{0\}. \text{ Vậy mệnh đề đúng.}$$

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ là đường thẳng có phương trình $y = x - 1$.

$$f(x) = x - 1 + \frac{100}{x}.$$

Ta có Khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì

$$\frac{100}{x} \rightarrow 0.$$

Suy ra tiệm cận xiên của đồ thị là

$$y = x - 1. \text{ Vậy mệnh đề đúng.}$$

c) Hàm số $y = f(x)$ không có điểm cực trị.

Ta tính đạo hàm:

$$f'(x) = 1 - \frac{100}{x^2} = \frac{x^2 - 100}{x^2}. \text{ Cho } f'(x) = 0, \text{ ta được}$$

$$x^2 - 100 = 0 \Rightarrow x = \pm 10. \text{ Vậy hàm số có hai điểm cực trị, nên mệnh đề đã cho là sai.}$$

d) Xí nghiệp A sản xuất x sản phẩm với tổng chi phí được cho bởi công thức

$C(x) = x^2 - x + 100$ (đơn vị ngàn đồng, $x > 1$) Khi đó chi phí sản xuất trung bình của một sản phẩm thấp nhất bằng 19 ngàn đồng.

Chi phí trung bình của một sản phẩm là

$$\bar{C}(x) = \frac{C(x)}{x} = \frac{x^2 - x + 100}{x} = x - 1 + \frac{100}{x}, \quad x > 1.$$

Ta có

$$\bar{C}'(x) = 1 - \frac{100}{x^2}. \text{ Cho } \bar{C}'(x) = 0, \text{ suy ra}$$

$$1 - \frac{100}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 100 \Rightarrow x = 10 \quad (\text{vì } x > 1).$$

Khi đó

$$\bar{C}_{\min} = \bar{C}(10) = 10 - 1 + \frac{100}{10} = 19. \text{ Vậy mệnh đề đúng.}$$

Câu 4. Chiếc mũ rộng vành được mô hình hóa khi cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị hàm số

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1 \leq x \leq 0, \\ x^3 + 1 & \text{khi } 0 < x \leq 1, \end{cases} \text{ trục Ox và các đường thẳng } x = -1, x = 1 \text{ quay xung quanh trục Ox.}$$

a) Giá trị của hàm số $f(x)$ khi $x = 1$ bằng 2.

Vì $1 \in (0; 1]$ nên

$$f(1) = 1^3 + 1 = 2. \text{ Vậy mệnh đề đúng.}$$

.

b) Diện tích của hình phẳng (H) là

$$S = \int_{-1}^1 \left| \sqrt{1-x^2} + x^3 + 1 \right| dx.$$

Biểu thức trên sai, vì trên mỗi khoảng chỉ dùng một nhánh của hàm số đã cho.

Diện tích đúng phải là

$$S = \int_{-1}^0 \sqrt{1-x^2} dx + \int_0^1 (x^3 + 1) dx. \text{ Vậy mệnh đề sai.}$$

c) Vành của chiếc mũ (giao tuyến của mặt tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại $x = 1$) có diện tích bằng $2\pi \text{ (dm}^2\text{)}$.

Tại $x = 1$, bán kính của tiết diện tròn là

$$f(1) = 2. \text{ Vậy diện tích hình tròn tiết diện là}$$

$$S = \pi \cdot 2^2 = 4\pi \text{ (dm}^2\text{)}. \text{ Không phải } 2\pi.$$

Vậy mệnh đề sai.

d) Thể tích của khối tròn xoay trên là

$$\frac{97\pi}{42} \text{ (dm}^3\text{)}.$$

Thể tích khối tròn xoay là

$$V = \pi \int_{-1}^1 f^2(x) dx = \pi \left(\int_{-1}^0 (1-x^2) dx + \int_0^1 (x^3+1)^2 dx \right).$$

Ta tính

$$\int_{-1}^0 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^0 = \frac{2}{3}.$$

Tiếp theo,

$$\int_0^1 (x^3+1)^2 dx = \int_0^1 (x^6 + 2x^3 + 1) dx = \left[\frac{x^7}{7} + \frac{x^4}{2} + x \right]_0^1 = \frac{1}{7} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{23}{14}.$$

Suy ra

$$V = \pi \left(\frac{2}{3} + \frac{23}{14} \right) = \pi \cdot \frac{28+69}{42} = \frac{97\pi}{42}. \quad \text{Vậy mệnh đề đúng.}$$

Phần III

Câu 1. Một giàn khung thép đỡ bồn nước sinh hoạt có dạng là hình lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$. Để giàn đỡ có kết cấu chắc chắn người ta hàn thêm một số thanh sắt (hình vẽ), trong đó có hai thanh AB' và BC' vuông góc với nhau. Cho biết cạnh đáy của giàn đỡ $AB = 2$ m. Tính thể tích V (m^3) của khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Đặt hệ trục tọa độ sao cho

$$A(0,0,0), \quad B(2,0,0), \quad C(1,\sqrt{3},0), \text{ và gọi chiều cao của lăng trụ là } h. \text{ Khi đó}$$

$$A'(0,0,h), \quad B'(2,0,h), \quad C'(1,\sqrt{3},h).$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AB'} = (2,0,h), \quad \overrightarrow{BC'} = (-1,\sqrt{3},h).$$

Vì $AB' \perp BC'$ nên

$$\overrightarrow{AB'} \cdot \overrightarrow{BC'} = 0 \quad 2 \cdot (-1) + 0 \cdot \sqrt{3} + h^2 = 0$$

$$-2 + h^2 = 0 \Rightarrow h = \sqrt{2}.$$

Diện tích đáy tam giác đều cạnh 2 là

$$S_{\triangle ABC} = \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Vậy thể tích khối lăng trụ là

$$V = S_{\triangle ABC} \cdot h = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{6} \approx 2.45 \text{ (m}^3\text{)}.$$

$$V \approx 2.45 \text{ (m}^3\text{)}$$

Câu 2. Xếp 8 quyển sách giống nhau vào một giá sách gồm 10 ngăn. Gọi P là xác suất để xếp 8 quyển sách vào 10 ngăn sao cho số quyển sách trong mỗi ngăn không quá 2, có 4 ngăn hoặc 6 ngăn chứa đúng 1 quyển sách và các ngăn liền kề với ngăn chứa 2 quyển sách là ngăn không có quyển sách nào. Tính $12155P$.

Gọi số sách trong 10 ngăn lần lượt là $x_1, x_2, \dots, x_{10}$.

Tổng số cách xếp 8 quyển sách giống nhau vào 10 ngăn là số nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + \dots + x_{10} = 8. \text{ Do đó}$$

$$N = \binom{8+10-1}{10-1} = \binom{17}{9} = 24310.$$

Ta đếm số trường hợp thuận lợi.

Trường hợp 1: Có 6 ngăn chứa đúng 1 quyển sách.

Khi đó có đúng 1 ngăn chứa 2 quyển sách và 3 ngăn trống.

Nếu ngăn chứa 2 quyển ở đầu dãy: có 2 cách chọn đầu dãy.

Ngăn kề nó bắt buộc trống. Còn lại 8 ngăn gồm 6 ngăn chứa 1 quyển và 2 ngăn trống, nên có

$$\binom{8}{6} = 28 \text{ cách.}$$

Số cách trong trường hợp này là

$$2 \cdot 28 = 56.$$

Nếu ngăn chứa 2 quyển ở vị trí giữa: có 8 cách chọn vị trí.

Hai ngăn kề nó bắt buộc trống. Còn lại 7 ngăn gồm 6 ngăn chứa 1 quyển và 1 ngăn trống, nên có

$$\binom{7}{6} = 7 \text{ cách.}$$

Số cách trong trường hợp này là

$$8 \cdot 7 = 56.$$

Vậy số cách thuận lợi của trường hợp 1 là

$$N_1 = 56 + 56 = 112.$$

Trường hợp 2: Có 4 ngăn chứa đúng 1 quyển sách.

Khi đó có đúng 2 ngăn chứa 2 quyển sách và 4 ngăn trống.

2.1. Cả hai ngăn chứa 2 quyển đều ở hai đầu dãy.

Khi đó mẫu hình có dạng

$20 \dots 02$ với phần giữa còn 6 ngăn, trong đó có 4 ngăn chứa 1 quyển và 2 ngăn trống.

Số cách là

$$\binom{6}{4} = 15.$$

2.2. Có đúng một ngăn chứa 2 quyển ở đầu dãy, ngăn còn lại ở giữa.

Chọn đầu dãy: có 2 cách.

Cố định ngăn đầu dãy chứa 2 quyển.

- Nếu ngăn ở giữa cách ngăn đầu đúng 2 vị trí, thì số ngăn trống bắt buộc là 2, còn lại 6 ngăn để xếp 4 ngăn chứa 1 quyển và 2 ngăn trống:

$$\binom{6}{4} = 15.$$

- Nếu ngăn ở giữa không ở vị trí đó, thì số ngăn trống bắt buộc là ^{3} , còn lại ^{5} ngăn để xếp ^{4} ngăn chứa ^{1} quyền và ^{1} ngăn trống:

$$\binom{5}{4} = 5.$$

Có ^{6} vị trí như vậy.

Với mỗi đầu dãy, số cách là

$$15 + 6 \cdot 5 = 45. \text{ Suy ra tổng số cách của trường hợp này là}$$

$$N_{22} = 2 \cdot 45 = 90.$$

2.3. Cả hai ngăn chứa ^{2} quyền đều ở giữa.

Chọn hai vị trí trong ^{8} vị trí giữa, không kề nhau.

- Nếu hai vị trí cách nhau đúng ^{2} , thì chúng có chung một ngăn trống bắt buộc ở giữa. Có ^{6} cách chọn cặp vị trí như vậy.

Khi đó số ngăn trống bắt buộc là ^{3} , còn lại ^{5} ngăn để xếp thêm ^{1} ngăn trống và ^{4} ngăn chứa ^{1} quyền:

$$\binom{5}{4} = 5.$$

Số cách là

$$6 \cdot 5 = 30.$$

- Nếu hai vị trí cách nhau lớn hơn ^{2} , thì có ^{4} ngăn trống bắt buộc.

Số cặp vị trí như vậy là

$$\binom{8}{2} - 7 - 6 = 15.$$

Mỗi cặp chỉ cho đúng ^{1} cách xếp ^{4} ngăn chứa ^{1} quyền còn lại.

Số cách là ^{15}

Do đó

$$N_{23} = 30 + 15 = 45.$$

Vậy số cách thuận lợi của trường hợp ^{2} là

$$N_2 = 15 + 90 + 45 = 150.$$

Suy ra tổng số trường hợp thuận lợi là

$$N_f = N_1 + N_2 = 112 + 150 = 262. \text{ Do đó}$$

$$P = \frac{262}{24310} = \frac{131}{12155}.$$

Vậy $^{12155}P = 131.$

Câu 3. Giả sử số lượng tế bào của một quần thể nấm men tại môi trường nuôi cấy trong phòng thí nghiệm được mô hình hóa bằng hàm số

$$P(t) = \frac{a}{b + e^{-0,75t}} \quad (a, b \in \mathbb{R}), \quad \text{trong đó thời gian } t \text{ được tính bằng giờ.}$$

Đạo hàm của hàm số $y = P(t)$ biểu thị tốc độ sinh trưởng của nấm men (tính bằng tế bào/giờ) tại thời điểm t (giờ). Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, quần thể có 24 tế bào và tốc độ sinh trưởng là 8 tế bào/giờ. Sau một thời gian về lâu dài thì số lượng tế bào của quần thể nấm men tiến về giá trị bao nhiêu?

Ta có $P(0) = \frac{a}{b+1} = 24$. Suy ra
 $a = 24(b+1)$. (1)

Mặt khác, $P'(t) = \frac{0,75ae^{-0,75t}}{(b + e^{-0,75t})^2}$.

Do đó $P'(0) = \frac{0,75a}{(b+1)^2} = 8$. Thay $a = 24(b+1)$ vào, ta được

$$\frac{0,75 \cdot 24(b+1)}{(b+1)^2} = 8 \Rightarrow \frac{18}{b+1} = 8 \Rightarrow b+1 = \frac{9}{4} \Rightarrow b = \frac{5}{4}.$$

Từ (1), $a = 24 \cdot \frac{9}{4} = 54$.

Vậy $P(t) = \frac{54}{\frac{5}{4} + e^{-0,75t}}$. Khi $t \rightarrow +\infty$ thì

$e^{-0,75t} \rightarrow 0$, nên $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \frac{54}{5/4} = \frac{216}{5} = 43,2$.

$\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = 43,2$

Câu 4. Trong một chương trình giao lưu âm nhạc đón tết vui xuân, ban đầu với sự tham dự của 1700 khán giả. Ban tổ chức đã thống kê được số lượng khán giả ở lại sân khấu xem âm nhạc theo thời gian, được mô tả bởi một hàm số liên tục trên $t \in [0; +\infty)$:

$$f'(t) = \begin{cases} 1700 - 400t, & 0 \leq t \leq 2, \\ a(t-2)^2 + b, & t > 2, \end{cases} \quad \text{trong đó } f'(t) \text{ là số khán giả, } t \text{ là số giờ kể từ khi chương trình bắt đầu. Sau 2 giờ 30 phút số lượng khán giả ở lại sân khấu là 875. Hỏi từ khi bắt đầu cho đến khi khán giả ra về hết, trung bình mỗi giờ còn bao nhiêu khán giả ở lại tham gia chương trình âm nhạc?}$$

Vì $f'(t)$ liên tục tại $t = 2$ nên $b = f'(2) = 1700 - 400 \cdot 2 = 900$.

Lại có $f'(2,5) = 875$, nên

$$a(2,5-2)^2 + b = 875 \Rightarrow a \cdot \frac{1}{4} + 900 = 875 \Rightarrow \frac{a}{4} = -25 \Rightarrow a = -100.$$

Vậy $f'(t) = \begin{cases} 1700 - 400t, & 0 \leq t \leq 2, \\ -100(t-2)^2 + 900, & t > 2. \end{cases}$

Thời điểm khán giả ra về hết là khi

$$f'(t) = 0. \text{ Với } t > 2: -100(t-2)^2 + 900 = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 9 \Rightarrow t = 5 \text{ (vì } t > 2).$$

Số khán giả trung bình mỗi giờ từ lúc bắt đầu đến lúc khán giả ra về hết là

$$\bar{N} = \frac{1}{5} \int_0^5 f'(t) dt.$$

Ta tính

$$\int_0^2 (1700 - 400t) dt = \left[1700t - 200t^2 \right]_0^2 = 2600.$$

Và

$$\int_2^5 (-100(t-2)^2 + 900) dt. \text{ Đặt } u = t-2, \text{ khi đó } u \text{ chạy từ } 0 \text{ đến } 3, \text{ nên}$$

$$\int_2^5 (-100(t-2)^2 + 900) dt = \int_0^3 (-100u^2 + 900) du = \left[-\frac{100}{3}u^3 + 900u \right]_0^3 = -900 + 2700 = 1800.$$

$$\bar{N} = \frac{2600 + 1800}{5} = \frac{4400}{5} = 880.$$

Do đó

Câu 5. Tỷ lệ lạm phát là tỷ lệ phần trăm biểu thị mức tăng chung của giá hàng hóa và dịch vụ trong một khoảng thời gian (thường tính theo năm). Nếu tỷ lệ lạm phát của năm sau so với năm trước là i thì A đồng ở năm trước tương đương với $P = A(1+i)$ đồng ở năm sau.

Ông An gửi vào ngân hàng 100 triệu đồng với lãi suất 6%/năm, theo hình thức lãi kép, tính lãi mỗi năm một lần (tức là lãi của năm trước được nhập vào vốn để tính lãi cho năm sau). Sau 2 năm, ông An nhận cả vốn và lãi. Giả sử trong 2 năm đó, tỷ lệ lạm phát ổn định 4%/năm. Nếu quy đổi theo mức giá tại thời điểm gửi tiền thì số tiền ông An nhận được sau 2 năm tương đương bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Sau 2 năm, số tiền danh nghĩa ông An nhận được là

$$100(1 + 0,06)^2 = 100 \cdot 1,1236 = 112,36 \text{ (triệu đồng)}.$$

Quy đổi theo mức giá tại thời điểm gửi tiền, ta chia cho hệ số lạm phát sau 2 năm:

$$\frac{112,36}{(1 + 0,04)^2} = \frac{112,36}{1,0816} \approx 103,88.$$

Làm tròn đến hàng đơn vị, ta được 104.

Câu 6. Trong không gian tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng có phương trình

$d: \frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+5}{5}; \quad d': \frac{x-1}{a} = \frac{y+1}{b} = \frac{z+4}{c},$ trong đó a, b, c là các số thực khác 0 sao cho các đường thẳng d và d' cắt nhau tại M . Mặt phẳng $(P): 2x + y - 2z - 6 = 0$ lần lượt cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C . Tính thể tích của khối tứ diện $MABC$.

Tham số hóa đường thẳng $d: \begin{cases} x = 2 + 3t, \\ y = 1 + 4t, \\ z = -5 + 5t. \end{cases}$ Vì $M \in d$ nên $M(2 + 3t, 1 + 4t, -5 + 5t).$

Ta xét giá trị của biểu thức mặt phẳng (P) tại điểm M :

$$2x_M + y_M - 2z_M - 6 = 2(2 + 3t) + (1 + 4t) - 2(-5 + 5t) - 6 = 9.$$

Suy ra khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) là không đổi, nên thể tích khối tứ diện MABC là không đổi.

Mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại $A(3, 0, 0)$, $B(0, 6, 0)$, $C(0, 0, -3)$.

Thể tích khối tứ diện $OABC$ là

$$V_{O,ABC} = \frac{|3 \cdot 6 \cdot (-3)|}{6} = 9.$$

Khoảng cách từ gốc tọa độ O đến mặt phẳng (P) tỉ lệ với

$|2 \cdot 0 + 0 - 2 \cdot 0 - 6| = 6$, còn khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P) tỉ lệ với

$$|2x_M + y_M - 2z_M - 6| = 9. \text{ Do đó } \frac{V_{M,ABC}}{V_{O,ABC}} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}.$$

$$\text{Suy ra } V_{M,ABC} = 9 \cdot \frac{3}{2} = \frac{27}{2} = 13,5$$