CÁC DẠNG TOÁN BÀI PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 1: Xác định các yếu tố của đường tròn

Phương pháp: Ta thực hiện trong các cách sau:

Cách 1: Đưa phương trình về dạng $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0 \quad (1)$

Xét dấu biểu thức $P=a^2+b^2-c$

- Nếu $P>0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$
- Nếu $P\le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

Cách 2: Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P \quad (2)$.

- Nếu $P>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$
- Nếu $P\le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Trong các phương trình sau, phương trình nào là phương trình đường tròn? Tìm tâm và bán kính nếu có.

a) $x^2+y^2+2x-4y+9=0$

b) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$

c) $2x^2+2y^2-6x-4y-1=0$

d) $2x^2+y^2+2x-3y+9=0$

Lời giải

a) Phương trình a) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ với $a=-1;\ b=2;\ c=9$

Ta có $a^2+b^2-c=1+4-9<0$

Vậy phương trình a) không phải là phương trình đường tròn.

b) Ta có: $a^2+b^2-c=9+4-13=0$

Suy ra phương trình b) không phải là phương trình đường tròn.

c) Ta có: c) $\Leftrightarrow x^2+y^2-3x-2y-\frac{1}{2}=0 \Rightarrow P=a^2+b^2-c=\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2-\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{15}{4}>0$

Vậy phương trình c) là phương trình đường tròn tâm $I\left(\frac{3}{2};1\right)$ bán kính $R=\frac{\sqrt{15}}{2}$.

d) Phương trình d) không phải là phương trình đường tròn vì hệ số của x^2 và y^2 khác nhau

Bài tập 2: Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0 \quad (1)$

a) Tìm điều kiện của tham số m để (1) là phương trình đường tròn.

b) Nếu (1) là phương trình đường tròn hãy tìm toạ độ tâm và bán kính theo m

Lời giải

a) Phương trình (1) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$

Với $a=m;\ b=2(m-2);\ c=6-m$

Hay $m^2+4(m-2)^2-6+m>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>2 \\ m<1 \end{array}\right.$

b) Với điều kiện trên thì đường tròn có tâm $I(m;2(m-2))$ và bán kính: $R=\sqrt{5m^2-15m+10}$

Bài tập 3: Cho phương trình đường cong (C_m): $x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0\quad (2)$

a) Chứng minh rằng (2) là phương trình một đường tròn

b) Tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi

c) Chứng minh rằng khi m thay đổi họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải

a) Ta có $a^2+b^2-c=\left(-\frac{m+2}{2}\right)^2+\left(\frac{m+4}{2}\right)^2-m-1=\frac{(m+2)^2+4}{2}>0$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m

b) Đường tròn có tâm I: $\left\{\begin{array}{l} x_I=-\frac{m+2}{2} \\ y_I=\frac{m+4}{2} \end{array}\right.$ suy ra $x_I+y_I-1=0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$

c) Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_o^2+y_0^2+(m+2)x_0-(m+4)y_0+m+1=0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0-y_0-1)m+x_o^2+y_0^2+2x_0-4y_0+1=0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0-y_0+1=0 \\ x_0^2+y_0^2+2x_0-4y_0+1=0 \end{array}\right.\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{array}\right.$ hoặc $\left\{\begin{array}{l} x_0=1 \\ y_0=2 \end{array}\right.$

Vậy có hai điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1;0)$ và $M_2(1;2)$

Bài tập 4: Tìm tâm và bán kính của đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-4)^2=7.$

Lời giải

Ta viết phương trình của (C) ở dạng $(x-(-2))^2+(y-4)^2=(\sqrt{7})^2$.

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;4)$ và bán kính $R=\sqrt{7}$.

Bài tập 5: Tìm điều kiện để $x^2+y^2-ax-by+c=0\,(1)$ là phương trình của đường tròn

Lời giải

Ta có: $x^2+y^2-ax-by+c=0 \Leftrightarrow x^2-2.\frac{a}{2}.x+\left(\frac{a}{2}\right)^2+y^2-2.\frac{b}{2}.y+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}-\frac{b^2}{4}+c=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\left(y-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c$

Vậy điều kiện để (1) là phương trình đường tròn: $\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}-c>0 \Leftrightarrow a^2+b^2-4c>0$

Bài tập 6: Cho đường cong $(C_m): x^2+y^2-8x+10y+m=0$. Với giá trị nào của m thì (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 7?

Lời giải

Ta có: $R=\sqrt{4^2+5^2-m}=7 \Leftrightarrow m=-8$.

Bài tập 7: Cho phương trình $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\ (1)$. Tìm điều kiện của m để (1) là phương trình của đường tròn.

Lời giải

Để $x^2+y^2-2mx-4(m-2)y+6-m=0\ \ (1)$ là phương trình của đường tròn khi và chỉ khi $(m)^2+[2(m-2)]^2-(6-m)>0 \Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>2 \end{array}\right.$.

Bài tập 8: Tìm bán kính của đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$

Lời giải

Đường tròn $x^2+y^2-10y-24=0$ có tâm $I(0;5)$, bán kính $R=\sqrt{0^2+5^2-(-24)}=7$.

Bài tập 9: Tìm tọa độ tâm I và bán kính R của đường tròn (C): $x^2+y^2-2x+4y+1=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=\sqrt{1^2+(-2)^2-1}=2$.

Bài tập 10: Tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là phương trình đường tròn.

Lời giải

Ta có $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0 \quad (1) \Rightarrow a=m+2; b=-2m; c=19m-6.$

Phương trình (1) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0 \Leftrightarrow m<1$ hoặc $m>2$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tâm của đường tròn đường kính AB với $A(1;-3); B(-5;7)$ là điểm nào sau đây?

A. $(-2;2)$. **B.** $(2;2)$. **C.** $(3;-1)$. **D.** $(3;1)$.

Lời giải

Ta có đường tròn đường kính AB có tâm là trung điểm I của AB.

Suy ra $\begin{cases} x_I=\dfrac{1-5}{2}=-2 \\ y_I=\dfrac{-3+7}{2}=2 \end{cases} \Rightarrow I(-2;2)$.

Câu 2: Cho đường cong $(C_m): x^2+y^2-8x+10y+m=0$. Với giá trị nào của m thì (C_m) là đường tròn có bán kính bằng 7?

A. $m=-8$. **B.** $m=4$. **C.** $m=-4$. **D.** $m=8$.

Lời giải

Ta có bán kính của đường tròn là $R=\sqrt{4^2+(-5)^2-m}=7 \Leftrightarrow 41-m=49 \Leftrightarrow m=-8$.

Câu 3: Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

A. $4x^2+y^2-10x-6y-2=0$. **B.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

C. $x^2+2y^2-4x-8y+1=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-8y+20=0$.

Lời giải

Loại đáp án A và C vì hệ số trước x^2 và y^2 không bằng nhau.

Xét đáp án B ta có $a^2+b^2-c=2^2+(-3)^2+12=25>0$ là phương trình đường tròn.

Xét đáp án D ta có $a^2+b^2-c=1^2+4^2-20=-3<0$ không là phương trình đường tròn.

Câu 4: Cho đường tròn (C) có phương trình $3x^2+3y^2-6x+12y-12=0$. Biết (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính R. Tính $a+b+R$.

A. $\sqrt{57}+3$. **B.** $\sqrt{57}-3$. **C.** 4. **D.** 2.

Lời giải

Ta có: $3x^2+3y^2-6x+12y-12=0 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x+4y-4=0$.

Ta có: $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=-4 \end{cases} \Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{1+4+4}=3$.

Vậy $a+b+R=1-2+3=2$.

Câu 5: Phương trình nào sau đây là phương trình của đường tròn?

A. $2x^2+y^2-6x-6y-8=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x-8y-12=0$.

C. $x^2+y^2-2x-8y+18=0$. **D.** $2x^2+2y^2-4x+6y-12=0$.

Lời giải

$x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là phương trình của một đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0$.

Ta thấy phương trình trong phương án A và B có hệ số của x^2, y^2 không bằng nhau nên đây không phải là phương trình đường tròn.

Với phương án C có $a^2+b^2-c=1+16-18<0$ nên đây không phải là phương trình đường tròn. Vậy ta chọn đáp án D.

Câu 6: Phương trình nào sau đây là phương trình của một đường tròn?

A. $x^2+y^2-4xy+2x+8y-3=0$. **B.** $x^2+2y^2-4x+5y-1=0$.

C. $x^2+y^2-14x+2y+2018=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+5y+2=0$.

Lời giải

Phương án A: có tích xy nên không phải là phương trình đường tròn.

Phương án B: có hệ số bậc hai không bằng nhau nên không phải là phương trình đường tròn.

Phương án C: ta có $x^2+y^2-14x+2y+2018=0 \Leftrightarrow (x-7)^2+(y+1)^2+1968=0$ không tồn tại x,y nên cũng không phải phương trình đường tròn.

Câu 7: Đường tròn $x^2+y^2-5y=0$ có bán kính bằng bao nhiêu?

A. $\sqrt{5}$. **B.** 25. **C.** $\frac{25}{2}$. **D.** $2,5$.

Lời giải

Ta có $x^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{5}{2}\right)^2$ suy ra bán kính của đường tròn là $R=2,5$.

Câu 8: Đường tròn $x^2+y^2-2x+10y+1=0$ có tâm là điểm nào dưới đây?

A. $(1;5)$. **B.** $(-1;5)$. **C.** $(1;-5)$. **D.** $(-1;-5)$.

Lời giải

Đường tròn $x^2+y^2-2x+10y+1=0$ có tâm là $(1;-5)$.

Câu 9: Tìm m để $(C_m): x^2+y^2+4mx-2my+2m+3=0$ là phương trình đường tròn?

A. $m<-\frac{3}{5}$ hoặc $m>1$. **B.** $m<-\frac{5}{3}$. **C.** $m>1$. **D.** $-\frac{3}{5}<m<1$.

Lời giải

(C_m) là phương trình đường tròn khi và chỉ khi $a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow (-2m)^2+m^2-(2m+3)>0$

$\Leftrightarrow 5m^2-2m-3>0 \Leftrightarrow m<-\frac{3}{5} \vee m>1$.

Câu 10: Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2mx+4y+5m=0$ là phương trình đường tròn.

A. $1<m<4$. **B.** $1\le m\le 4$. **C.** $\left[\begin{array}{l} m\le 1 \\ m\ge 4 \end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Lời giải

Phương trình $x^2+y^2-2mx+4y+5m=0$ là phương trình đường tròn

$\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow m^2+(-2)^2-5m>0 \Leftrightarrow m^2-5m+4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m<1 \\ m>4 \end{array}\right.$.

Câu 11: Trong mặt phẳng với hệ trục Oxy cho đường tròn $(C):(x+5)^2+(y-4)^2=16$. Đường tròn (C) có tọa độ tâm I và bán kính R bằng

A. $I(5;-4); R=16$. **B.** $I(-5;4); R=16$. **C.** $I(-5;4); R=4$. **D.** $I(5;-4); R=4$.

Lời giải

Đường tròn $(C):(x+5)^2+(y-4)^2=16$ có tọa độ tâm $I(-5;4)$ và bán kính $R=\sqrt{16}=4$.

Câu 12: Phương trình nào sau đây là đường tròn?

A. $2x^2+y^2-6x-8y+1=0$. **B.** $x^2+y^2+6x+16=0$.

C. $x^2+y^2-2x-8y+20=0$. **D.** $x^2+y^2-4x+6y-12=0$.

Lời giải

Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ với a,b,c thỏa mãn điều kiện $a^2+b^2>c$.

Xét phương án A, ta thấy không thỏa mãn dạng của phương trình đường tròn.

Xét phương án B, ta thấy $a^2+b^2=(-3)^2=9<16$ nên $x^2+y^2+6x+16=0$ không là phương trình đường tròn.

Xét phương án C, ta thấy $a^2+b^2=1+4^2=17<20$ nên $x^2+y^2-2x-8y+20=0$ không là phương trình đường tròn.

Xét phương án D, ta thấy $a^2+b^2=2^2+(-3)^2=13>-12$, thỏa mãn điều kiện.

Vậy $x^2+y^2-4x+6y-12=0$ có $a^2+b^2=2^2+(-3)^2=13>-12$ là phương trình đường tròn.

Câu 13: Cho phương trình $x^2+y^2+2ax+2by+c=0,(a,b,c\in\square)$ là phương trình đường tròn. Khi đó a,b,c thỏa mãn điều kiện nào sau đây?

A. $a^2-b^2<c$. **B.** $a^2+b^2>c$. **C.** $a^2-b^2>c$. . **D.** $a^2+b^2<c$.

Lời giải

Điều kiện để $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ là phương trình đường tròn là $a^2+b^2>c$.

Câu 14: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-6x+4y-12=0$. Đường tròn (C) có tâm I và bán kính R lần lượt là

A. $I(3;-2),R=5$. **B.** $I(-3;2),R=5$. **C.** $I(-6;4),R=5$. . **D.** $I(6;-4),R=5$.

Lời giải

Phương trình $x^2+y^2-6x+4y-12=0$ có tâm $I(3;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{3^2+(-2)^2+12}=5$.

Câu 15: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x+6y-1=0.$ Tâm của (C) có tọa độ là

A. $(-2;6)$. **B.** $(-1;3)$. **C.** $(2;-6)$. **D.** $(1;-3)$.

Lời giải

Phương trình đường tròn $(C):x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (với $a^2+b^2-c>0$)

Ta có $\begin{cases}-2a=-2\\-2b=6\\c=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-3\\c=-1\end{cases}$

Ta có: $a^2+b^2-c=1^2+(-3)^2+1=11>0$ nên đây là phương trình đường tròn.

Vậy tâm đường tròn (C) có tọa độ là $(1;-3)$.

Câu 16: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy hãy tìm tâm I và bán kính R của đường tròn có phương trình $(C):x^2+y^2-2x+6y-8=0$

A. $I(-1;-3),R=2\sqrt{2}$. **B.** $I(1;-3),R=3\sqrt{2}$. **C.** $I(1;-3),R=\sqrt{2}$. **D.** $I(1;3),R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (với $a^2+b^2-c>0$)

có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$.

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} -2a=-2 \\ -2b=6 \\ c=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-3 \\ c=-8 \end{cases}$ (thỏa mãn $a^2+b^2-c>0$).

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R=\sqrt{1^2+(-3)^2+8}=3\sqrt{2}.$

Câu 17: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $x^2+y^2-2x-4y+m=0$ là phương trình của một đường tròn.

A. 3. **B.** 5. **C.** 4. **D.** vô số.

Lời giải

Phương trình: $x^2+y^2-2x-4y+m=0$ có $\begin{cases} -2a=-2 \\ -2b=-4 \\ c=m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ c=m \end{cases}$.

Phương trình đã cho là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow 1+4-m>0 \Leftrightarrow m<5$, kết hợp m là giá trị nguyên dương suy ra $m\in\{1;2;3;4\}$.

Vậy có 4 giá trị của tham số m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 18: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy tìm tất cả các giá trị của tham số m để phương trình sau đây $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+2m^2-3m+16=0$ là phương trình của một đường tròn.

A. $m>3$. **B.** $m\le 3$. **C.** $m<3$. **D.** $m\ge 3$.

Lời giải

Phương trình đường tròn (C) có dạng: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (với $a^2+b^2-c>0$)

Theo đề bài, ta có: $\begin{cases} -2a=2(m+1) \\ -2b=-2m \\ c=2m^2-3m+16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-m-1 \\ b=m \\ c=2m^2-3m+16 \end{cases}$.

Phương trình $x^2+y^2+2(m+1)x-2my+2m^2-3m+16=0$ là phương trình của một đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow (-m-1)^2+m^2-(2m^2-3m+16)>0 \Leftrightarrow 5m-15>0 \Leftrightarrow m>3.$

Vậy $m>3$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 19: Phương trình nào sau đây **không phải** là phương trình đường tròn?

A. $x^2+y^2-100y+1=0$. **B.** $x^2+y^2-y=0$.

C. $x^2+y^2-2=0$. **D.** $x^2+y^2-x+y+4=0$.

Lời giải

Xét đáp án A ta có $a^2+b^2-c=0^2+50^2-1=2499>0$ là phương trình đường tròn.

Xét đáp án B ta có $a^2+b^2-c=0^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-0=\frac{1}{4}>0$ là phương trình đường tròn.

Xét đáp án C ta có $a^2+b^2-c=0^2+0^2+2=2>0$ là phương trình đường tròn.

Xét đáp án D ta có $a^2+b^2-c=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-1}{2}\right)^2-4=-\frac{7}{2}<0$ không là phương trình đường tròn.

Câu 20: Tìm tất cả giá trị của tham số m để phương trình $x^2+y^2+2mx-10y+4m=0$ là phương trình đường tròn và có bán kính nhỏ nhất.

A. $m=\frac{1}{2}$. **B.** $m=1$. **C.** $m=-2$. **D.** $m=2$.

Lời giải

Phương trình $x^2+y^2+2mx-10y+4m=0$ là phương trình đường tròn

$\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0\Leftrightarrow(-m)^2+5^2-4m>0\Leftrightarrow m^2-4m+25>0\Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{m^2-4m+25}=\sqrt{m^2-4m+4+21}=\sqrt{(m-2)^2+21}\geq\sqrt{21}$.

Bán kính nhỏ nhất là $R=\sqrt{21}$ khi $m-2=0\Leftrightarrow m=2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C):x^2+y^2+4x+6y-12=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;3)$.

b) Đường tròn (C) có bán kính $R=5$.

c) Đường tròn $(C):(x+2)^2+(y+3)^2=25$.

d) Điểm $M(2;-6)$ là một điểm thuộc đường tròn (C)

Lời giải

a) Sai: Đường tròn (C) có tâm $I(-2;-3)$.

b) Đúng: Bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+(-3)^2+12}=5$

c) Đúng: $(C):(x+2)^2+(y+3)^2=25$

d) Đúng: Ta có $IM=\sqrt{(2+2)^2+(-6+3)^2}=5=R\Rightarrow M\in(C)$

Câu 2: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2y-8=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tâm của đường tròn (C) là điểm $I(0;1)$.

b) Điểm $A(1;0)$ nằm trên đường tròn.

c) Tâm đường tròn (C) cách trục Oy một khoảng bằng 2.

d) Khi đường thẳng $\Delta: x+my-2=0$ cắt đường tròn (C) theo dây cung có độ dài bằng 6 thì giá trị $m=2$.

Lời giải

a) Đúng: $(C): x^2+y^2-2y-8=0$ nên tâm của (C) là $I(0;1)$.

b) Sai: Xét điểm $A(1;0)$ thì VT = -7 còn VP = 0. VT $\neq$ VP.

c) Sai: Trục $0y$ có phương trình $x=0$. Khoảng cách từ tâm đường tròn (C) đến trục Oy là 1.

d) Đúng: (C) có tâm $I(0;1)$, bán kính $R=3$

Do Δ cắt (C) theo dây cung có độ dài bằng đường kính của (C) nên Δ đi qua tâm I của đường tròn (C). Suy ra: $0+m.1-2=0 \Leftrightarrow m=2$.

Câu 3: Cho phương trình đường cong $(C_m): x^2+y^2+(m+2)x-(m+4)y+m+1=0$ (2). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) (2) là phương trình một đường tròn với mọi giá trị của m.

b) Tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi luôn nằm trên đường thẳng có phương trình $\Delta: x+y-1=0$

c) Bán kính của đường tròn $R=\dfrac{m^2+2m+4}{2}$

d) Khi m thay đổi họ các đường tròn (C_m) luôn đi qua hai điểm cố định.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $a^2+b^2-c=\left(-\dfrac{m+2}{2}\right)^2+\left(\dfrac{m+4}{2}\right)^2-m-1=\dfrac{(m+2)^2+4}{2}>0$

Suy ra (2) là phương trình đường tròn với mọi m

b) Đúng: Đường tròn có tâm I: $\begin{cases} x_I=-\dfrac{m+2}{2} \\ y_I=\dfrac{m+4}{2} \end{cases}$ suy ra $x_I+y_I-1=0$

Vậy tập hợp tâm các đường tròn là đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$

c) Sai: Bán kính đường tròn $R=\dfrac{m^2+2m+8}{2}$.

d) Đúng: Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua.

Khi đó ta có: $x_o^2+y_0^2+(m+2)x_0-(m+4)y_0+m+1=0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow (x_0-y_0-1)m+x_o^2+y_0^2+2x_0-4y_0+1=0,\ \forall m$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0-y_0+1=0 \\ x_0^2+y_0^2+2x_0-4y_0+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x_0=1 \\ y_0=2 \end{cases}$

Vậy có hai điểm cố định mà họ (C_m) luôn đi qua với mọi m là $M_1(-1;0)$ và $M_2(1;2)$

Câu 4: Cho đường cong $(C): x^2+y^2+2mx-10y+4m=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khi $m=0$ thì (C) là phương trình đường tròn.

b) Tất cả giá trị của tham số m để phương trình (C) là phương trình đường tròn là $\left[\begin{array}{l} m<-2 \\ m>2 \end{array}\right.$.

c) Có 1 giá trị nguyên dương của m để (C) là một phương trình đường tròn có bán kính bằng 5 cm

d) Khi $m=2$ thì (C) là phương trình đường tròn và có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải

a) Đúng: Khi $m=0$ thì phương trình (C) là: $x^2+y^2-10y=0$

$\Leftrightarrow x^2+(y-5)^2-25=0 \Leftrightarrow x^2+(y-5)^2=25$

Khi đó (C) là phương trình đường tròn có tâm $(0;5)$, bán kính $R=5$.

b) Sai: Ta có: $a=-m;\ b=5;\ c=4m$. (C) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow (-m)^2+5^2-4m>0 \Leftrightarrow m^2-4m+25>0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

c) Đúng: Ta có: $a=-m;\ b=5;\ c=4m$. (C) là phương trình đường tròn $\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0$

$\Leftrightarrow (-m)^2+5^2-4m>0 \Leftrightarrow m^2-4m+25>0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$

Bán kính bằng $5\ cm \Rightarrow \sqrt{m^2-4m+25}=5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=4 \\ m=0 \end{array}\right.$ mà $m\in\mathbb{R}^* \Rightarrow m=4$.

d) Đúng: Phương trình $x^2+y^2+2mx-10y+4m=0$ là phương trình đường tròn

$\Leftrightarrow a^2+b^2-c>0 \Leftrightarrow (-m)^2+5^2-4m>0 \Leftrightarrow m^2-4m+25>0 \Leftrightarrow m\in\mathbb{R}$.

Bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{m^2-4m+25}=\sqrt{m^2-4m+4+21}=\sqrt{(m-2)^2+21}\geq\sqrt{21}$.

Bán kính nhỏ nhất là $R=\sqrt{21}$ khi $m-2=0\Leftrightarrow m=2$.

Câu 5: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho các điểm $A(-2;1)$, $B(3;-2)$ và $C(1;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu đường tròn có tâm là điểm A và có bán kính $R=2$ thì đường tròn có phương trình là $(x-2)^2+(y+1)^2=2$.

b) Nếu đường tròn có tâm là điểm B và có bán kính $R=3$ thì đường tròn có phương trình là $(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

c) Nếu đường tròn có tâm là điểm C và có bán kính bằng độ dài đoạn AB thì đường tròn có phương trình là $(x-1)^2+(y+1)^2=34$.

d) Nếu đường tròn có tâm là điểm B và đường tròn đi qua điểm C thì đường tròn có phương trình là $(x-3)^2+(y+2)^2=5$.

Lời giải

a) Sai: Nếu đường tròn có tâm là điểm A và có bán kính $R=2$ thì đường tròn có phương trình là $(x+2)^2+(y-1)^2=2^2\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-1)^2=4$.

b) Sai: Nếu đường tròn có tâm là điểm B và có bán kính $R=3$ thì đường tròn có phương trình là $(x-3)^2+(y+2)^2=9$.

c) Đúng: Ta có $AB=\sqrt{(3+2)^2+(-2-1)^2}=\sqrt{34}$.

Nếu đường tròn có tâm là điểm C và có bán kính $R=AB=\sqrt{34}$ thì đường tròn có phương trình là $(x-1)^2+(y+1)^2=34$. Do đó, c) đúng

d) Đúng: Ta có $BC=\sqrt{(1-3)^2+(-1+2)^2}=\sqrt{5}$.

Đường tròn có tâm là điểm B và đường tròn đi qua điểm C thì đường tròn có bán kính $R=BC=\sqrt{5}$.

Nếu đường tròn có tâm là điểm B và có bán kính $R=\sqrt{5}$ thì đường tròn có phương trình là $(x-3)^2+(y+2)^2=5$.

Câu 6: Trong mặt phẳng với hệ trục tọa độ Oxy, cho các điểm $M(1;-2)$, $N(-3;2)$ và $P(5;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Nếu đường tròn có tâm là điểm M và có đường kính bằng 2 thì đường tròn có phương trình là $(x-1)^2+(y+2)^2=4$.

b) Nếu đường tròn có tâm là điểm N và có đường kính bằng 6 thì đường tròn có phương trình là $(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

c) Nếu đường tròn có tâm là điểm P và có đường kính bằng độ dài đoạn MN thì đường tròn có phương trình là $(x-5)^2+y^2=8$.

d) Nếu đường tròn có đường kính là đoạn NP thì đường tròn có phương trình là $(x-1)^2+(y-1)^2=17$.

Lời giải

a) Sai: Bán kính đường tròn là $R=\frac{2}{2}=1$.

Đường tròn có tâm là điểm M và có bán kính $R=1$ thì đường tròn có phương trình là $(x-1)^2+(y+2)^2=1$.

b) Đúng: Bán kính đường tròn là $R=\frac{6}{2}=3$

Đường tròn có tâm là điểm N và có bán kính bằng $R=3$ thì đường tròn có phương trình là $(x+3)^2+(y-2)^2=9$.

c) Đúng: Ta có $MN=\sqrt{(-3-1)^2+(2+2)^2}=4\sqrt{2}$.

Đường tròn có đường kính bằng độ dài đoạn MN nên bán kính đường tròn là

$$R=\frac{MN}{2}=\frac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}.$$

Đường tròn có tâm là điểm P và có bán kính $R=2\sqrt{2}$ thì đường tròn có phương trình là $(x-5)^2+y^2=8$.

d) Đúng: Gọi I là trung điểm của đoạn thẳng NP nên $I(1;1)$.

Ta có $NP=\sqrt{(5+3)^2+(0-2)^2}=\sqrt{68}$.

Đường tròn có đường kính là đoạn NP nên có tâm là điểm I và có bán kính

$$R=\frac{NP}{2}=\frac{\sqrt{68}}{2}=\sqrt{17}.$$

Đường tròn có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=\sqrt{17}$ thì đường tròn có phương trình là

$$(x-1)^2+(y-1)^2=17.$$

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm $t(0\le t\le 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $(2+\sin t^\circ;4+\cos t^\circ)$. Giả sử quỹ đạo chuyển động của vật thể là một đường tròn có tâm $I(a;b)$. Tính tổng $a+b$

Lời giải

Quỹ đạo chuyển độ của vật thể là các điểm $M(x;y)$ thỏa mãn

$$\begin{cases}x=2+\sin t^\circ\\ y=4+\cos t^\circ\end{cases}\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=1.$$

Vậy quỹ đạo chuyển độ của vật thể là đường tròn $(C):\ (x-2)^2+(y-4)^2=1$ có tâm $I(2;4)$, bán kính $R=1$ suy ra $\begin{cases}a=2\\ b=4\end{cases}$ nên $a+b=6$.

Câu 2: Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số $m\in[-10;10]$ để phương trình sau đây $x^2+y^2-2(m+2)x+4my+19m-6=0$ là một phương trình đường tròn.

Lời giải

Phương trình đã cho là phương trình đường tròn khi và chỉ khi

$$(m+2)^2+(-2m)^2-(19m-6)>0\Leftrightarrow 5m^2-15m+10>0\Leftrightarrow m\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$$

Với $m\in[-10;10]$ thì có $11+8=19$ giá trị nguyên của tham số *m*.

Câu 3: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x+4y-4=0$ và điểm $M(1;0)$. Dây cung của (C) đi qua điểm *M* có độ dài ngắn nhất bằng bao nhiêu? (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)

Lời giải

Ta có $(C):x^2+y^2-4x+4y-4=0\Leftrightarrow (C):(x-2)^2+(y+2)^2=12$ nên có tâm $I(2;-2)$, bán kính $R=2\sqrt{3}$.

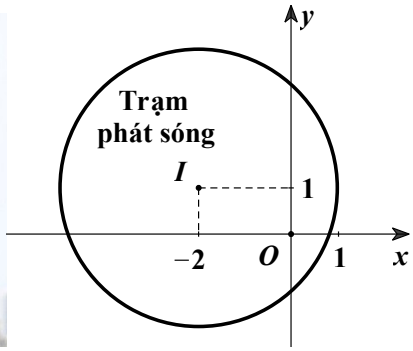
Vì $IM=\sqrt{5}<2\sqrt{3}=R$.

Gọi *d* là đường thẳng đi qua *M* cắt đường tròn (C) tại các điểm *A, B.*

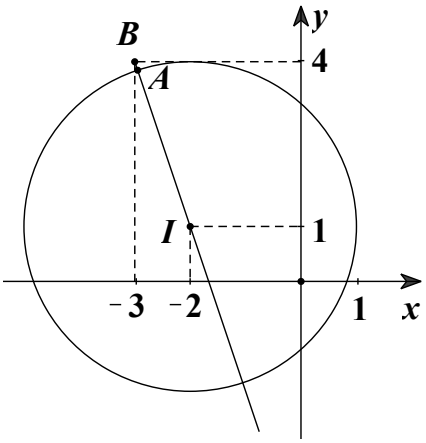
Gọi J là trung điểm của AB.

Ta có: $AB=2AJ=2\sqrt{R^2-IJ^2}\ge 2\sqrt{R^2-IM^2}=2\sqrt{12-5}=2\sqrt{7}\approx 5,29$

Câu 4: Hình vẽ bên dưới mô phỏng một trạm thu phát sóng điện thoại di động đặt ở vị trí I có tọa độ $(-2;1)$ trong mặt phẳng toạ độ (đơn vị trên hai trục là km). Tính theo đường chim bay, xác định khoảng cách ngắn nhất để một người ở vị trí có toạ độ $(-3;4)$ di chuyển được tới vùng phủ sóng theo đơn vị ki-lô-mét (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm). Biết rằng trạm thu phát sóng đó được thiết kế với bán kính phủ sóng 3 km.



Lời giải



Đường tròn màu đen mô tả ranh giới bên ngoài của vùng phủ sóng có tâm $I(-2;1)$ và bán kính phủ sóng $3\,\text{km}$ nên phương trình đường tròn đó là: $(x+2)^2+(y-1)^2=9$.

Giả sử vị trí đứng của người đó là $B(-3;4)$.

Gọi A (như trên hình vẽ) là giao điểm thứ nhất của đường tròn tâm I và BI

Khoảng cách ngắn nhất để người đó di chuyển được từ vị trí $B(-3;4)$ tới vùng phủ sóng là BA

Ta có: $IB=\sqrt{(-3+2)^2+(4-1)^2}=\sqrt{10}$ suy ra $AB=IB-IA=\sqrt{10}-3\approx 0{,}16$ (km)

Câu 5: Một nông trại tưới nước theo phương pháp vòi phun xoay vòng trung tâm như Hình 3. Cho biết tâm một vòi phun được đặt tại toạ độ $(12;-9)$ và vòi có thể phun xa tối đa 36 m. Phương trình đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới có dạng $(x-12)^2+(y+9)^2=R^2$. Khi đó giá trị của R là bao nhiêu.

Lời giải

Tập hợp các điểm xa nhất mà vòi nước có thể phun tới là đường tròn có tâm $I(12;-9)$ và bán kính $R=36$ nên có phương trình: $(x-12)^2+(y+9)^2=36^2$.

Câu 6: Một cái cổng hình bán nguyệt rộng 6,8 m và cao 3,4 m. Mặt đường dưới cổng được chia thành hai làn cho xe ra vào. Biết rằng phương trình mô phỏng cái cổng là đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R. Tính $a+b+R$

Lời giải

Chọn hệ tọa độ sao cho tâm của cái cổng hình bán nguyệt có tọa độ $(0;0)$ và đỉnh của cổng có toạ độ $M(0;3,4)$.Ta có phương trình mô phỏng của cổng là đường tròn nhận $O(0;0)$ làm tâm và bán kính là $R=OM=3,4\Rightarrow a+b+R=3,4$.

Dạng 2: Viết phương trình đường tròn

Phương pháp: Ta thực hiện trong các cách sau:

Cách 1:

- Tìm tọa độ tâm $I(a;b)$ của đường tròn (C).
- Tìm bán kính R của đường tròn (C).
- Viết phương trình của đường tròn (C) theo dạng $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

Cách 2:

- Giả sử phương trình của đường tròn (C) là $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$
  Hoặc dạng $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$.
- Từ điều kiện của đề bài thiết lập hệ phương trình với ba ẩn là a, b, c.
- Giải hệ để tìm a, b, c ntừ đó tìm được phương trình của đường tròn (C).

Chú ý:

- Cho đường tròn (C) có tâm I và bán kính R, điểm $A\in(C)\Leftrightarrow IA=R$.
- (C) tiếp xúc với đường thẳng Δ tại $A\Leftrightarrow IA=d(I,\Delta)=R$.
- (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1 và $\Delta_2\Leftrightarrow d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2)=R$.
- (C) cắt đường thẳng Δ_3 theo dây cung có độ dài $a\Leftrightarrow\left[d(I,\Delta_3)\right]^2+\frac{a^2}{4}=R^2$.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Viết phương trình đường tròn trong mỗi trường hợp sau:

a) Có tâm $I(1;-5)$ và đi qua $O(0;0)$.

b) Nhận AB làm đường kính với $A(1;1),\ B(7;5)$.

c) Đi qua ba điểm: $M(-2;4),\ N(5;5),\ P(6;-2)$

Lời giải

a) Đường tròn cần tìm có bán kính là $OI=\sqrt{1^2+5^2}=\sqrt{26}$ nên có phương trình là:

$$(x-1)^2+(y+5)^2=26$$

b) Gọi I là trung điểm của đoạn AB suy ra $I(4;3)$ nên $AI=\sqrt{(4-1)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$

Đường tròn cần tìm có đường kính là AB suy ra nó nhận $I(4;3)$ làm tâm và bán kính $R=AI=\sqrt{13}$ nên có phương trình là $(x-4)^2+(y-3)^2=13$

c) Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm M,N,P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}4+16+4a-8b+c=0\\25+25-10a-10b+c=0\\36+4-12a+4b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\\c=-20\end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

Bài tập 2: Viết phương trình đường tròn (C) trong các trường hợp sau:

a) (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$

b) (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục toạ độ Ox và Oy

c) (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$

Lời giải

a) Bán kính đường tròn (C) chính là khoảng cách từ I tới đường thẳng Δ nên:

$$R=d(I;\Delta)=\frac{|-1-4-7|}{\sqrt{1+4}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2+(y-2)^2=\frac{4}{5}$

b) Vì điểm A nằm ở góc phần tư thứ tư và đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ nên tâm của đường tròn có dạng $I(R;-R)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C).

Ta có: $R^2 = IA^2 \Leftrightarrow R^2 = (2-R)^2 + (-1+R)^2 \Leftrightarrow R^2 - 6R + 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} R = 1 \\ R = 5 \end{array}\right.$

Vậy có hai đường tròn thoả mãn đầu bài là: $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$ và $(x-5)^2 + (y+5)^2 = 25$

c) Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10;a)$

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra:

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4((6a+10)3a-5|}{5} \Leftrightarrow |22a+35| = |21a+35| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 0 \\ a = -\frac{70}{43} \end{array}\right.$$

Với $a = 0$ thì $K(10;0)$ và $R = 7$ suy ra $(C): (x-10)^2 + y^2 = 49$

Với $a = -\frac{70}{43}$ thì $K\left(\frac{10}{43}; -\frac{70}{43}\right)$ và $R = \frac{7}{43}$ suy ra $(C): \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$(C): (x-10)^2 + y^2 = 49$ và $(C): \left(x - \frac{10}{43}\right)^2 + \left(y + \frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$

Bài tập 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(8;0)$ và $B(0;6)$.

a) Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB

b) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB

Lời giải

a) Ta có tam giác OAB vuông ở O nên tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác là trung điểm của cạnh huyền AB suy ra $I(4;3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{(8-4)^2 + (0-3)^2} = 5$

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là: $(x-4)^2 + (y-3)^2 = 25$

b) Ta có $OA = 8;\ OB = 6;\ AB = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

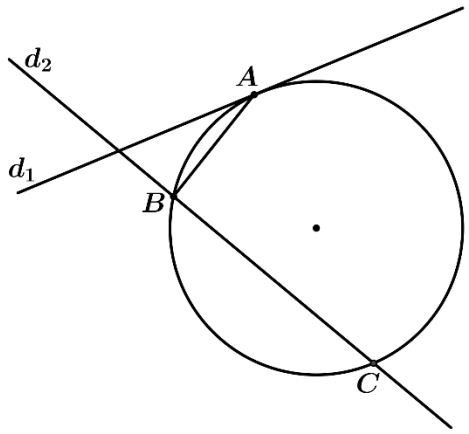
Mặt khác $\frac{1}{2}OA.OB = pr$ (vì cùng bằng diện tích tam giác ABC) suy ra $r = \frac{OA.OB}{OA + OB + AB} = 2$

Dễ thấy đường tròn cần tìm có tâm thuộc góc phần tư thứ nhất và tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm của đường tròn có tọa độ là $(2;2)$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB là: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 4$.

Bài tập 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai đường thẳng $d_1:\sqrt{3}x+y=0$ và $d_2:\sqrt{3}x-y=0$. Gọi (C) là đường tròn tiếp xúc với d_1 tại A, cắt d_2 tại hai điểm B,C sao cho tam giác ABC vuông tại B. Viết phương trình của (C), biết tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{\sqrt{3}}{2}$ và điểm A có hoành độ dương.

Lời giải



Vì $A\in d_1\Rightarrow A\left(a;-\sqrt{3}a\right),\ a>0;\ \ B,C\in d_2\Rightarrow B\left(b;\sqrt{3}b\right),\ C\left(c;\sqrt{3}c\right)$

Suy ra $\overrightarrow{AB}\left(b-a;\sqrt{3}(a+b)\right),\ \overrightarrow{AC}\left(c-a;\sqrt{3}(c+a)\right)$

Tam giác ABC vuông tại B do đó AC là đường kính của đường tròn (C)

Do đó $AC\perp d_1\Rightarrow \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{u_1}=0\Leftrightarrow -1.(c-a)+\sqrt{3}.\sqrt{3}(a+c)=0\Leftrightarrow 2a+c=0\ \ (1)$

$AB\perp d_2\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{u_2}=0\Leftrightarrow 1.(b-a)+3(a+b)=0\Leftrightarrow 2b+a=0\ \ (2)$

Mặt khác $S_{ABC}=\frac{1}{2}d(A;d_2).BC\Rightarrow \frac{1}{2}.\frac{\left|2\sqrt{3}a\right|}{2}\sqrt{(c-b)^2+3(c-b)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow 2a\left|c-b\right|=1\ (3)$

Từ $(1),(2)$ suy ra $2(c-b)=-3a$ thế vào (3) ta được $a\left|-3a\right|=1\Leftrightarrow a=\frac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó $b=-\frac{\sqrt{3}}{6},\ c=-\frac{2\sqrt{3}}{3}\Rightarrow A\left(\frac{\sqrt{3}}{3};-1\right),\ C\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3};-2\right)$

Suy ra (C) nhận $I\left(-\frac{\sqrt{3}}{6};-\frac{3}{2}\right)$ là trung điểm AC làm tâm và bán kính là $R=\frac{AC}{2}=1$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $(C):\left(x+\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2+\left(x+\frac{3}{2}\right)^2=1$.

Bài tập 5: Trong mặt phẳng Oxy, viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2),\ B(5;2),\ C(1;-3)$

Lời giải

Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Đường tròn này qua A,B,C nên

$$\begin{cases}1+4-2a-4b+c=0\\25+4-10a-4b+c=0\\1+9-2a+6b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-\dfrac{1}{2}\\c=-1\end{cases}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-6x+y-1=0$.

Bài tập 6: Cho hai điểm $A(5;-1)$, $B(-3;7)$. Viết phương trình đường tròn có đường kính AB.

Lời giải

Tâm I của đường tròn là trung điểm AB nên $I(1;3)$.

Bán kính $R=\dfrac{1}{2}AB=\dfrac{1}{2}\sqrt{(-3-5)^2+(7+1)^2}=4\sqrt{2}$

Vậy phương trình đường tròn là: $(x-1)^2+(y-3)^2=32\Leftrightarrow x^2+y^2-2x-6y-22=0$

Bài tập 7: Viết phương trình đường tròn (C) tâm $I(-4;3)$ và tiếp xúc với trục tung .

Lời giải

Đường tròn (C) tiếp xúc với $y'Oy$ và có tâm $I(-4;3)$ nên: $a=-4, b=3, R=|a|=4$.

Do đó (C) có phương trình $(x+4)^2+(y-3)^2=16$.

Bài tập 8: Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;3)$, $B(3;1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $d:2x-y+7=0$.

Lời giải

Do $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C) nên $AI^2=BI^2\Rightarrow(a-1)^2+(b-3)^2=(a-3)^2+(b-1)^2$

Khi đó $a=b(1)$ mà $I(a;b)\in d:2x-y+7=0$ nên $2a-b+7=0\ (2)$.

Thay (1) vào (2) ta có: $a=-7\Rightarrow b=-7\Rightarrow R^2=AI^2=164$.

Vậy phương trình đường tròn $(C):(x+7)^2+(y+7)^2=164$.

Bài tập 9: Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta:x-2y+7=0$. Tính diện tích hình tròn tương ứng với đường tròn (C) đã cho.

Lời giải

Vì đường tròn (C) tiếp xúc với Δ nên $R=d(I;\Delta)=\dfrac{|-1-2.2+7|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Diện tích hình tròn: $S=\pi.R^2=\frac{4}{5}\pi.$

Bài tập 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn có phương trình $(C_1):x^2+y^2=4$ và các đường thẳng $d:x-y-4=0,\Delta:3x+y+8=0$. Lập phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên Δ, tiếp xúc với d và cắt (C_1) tại hai điểm phân biệt A,B sao cho AB vuông góc với d. Gọi $I(a;b)$ là tâm đường tròn (C). Tính $a+b$.

Lời giải

Gọi $I,I_1(0;0)$ lần lượt là tâm các đường tròn $(C),(C_1)$.

Vì (C) và (C_1) cắt nhau tại A,B nên $AB\perp I_1I$ mà $AB\perp d$ do đó I_1I song song d.

Suy ra phương trình của đường thẳng $I_1I:x-y=0$.

Mặt khác ta lại có $I\in\Delta:3x+y+8=0$ nên $I(-2;-2)$.

Vậy $a+b=-4$.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Đường tròn tâm $I(3;-7)$, bán kính $R=3$ có phương trình là

A. $(x-3)^2+(y+7)^2=3$.
B. $(x+3)^2+(y-7)^2=9$.
C. $(x-3)^2+(y+7)^2=9$.
D. $(x+3)^2+(y+7)^2=9$.

Lời giải

Đường tròn tâm $I(3;-7)$, bán kính $R=3$ có phương trình là $(x-3)^2+(y+7)^2=9$.

Câu 2: Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho $A(-1;4)$, $B(5;-2)$. Phương trình đường tròn đường kính AB là

A. $(x-3)^2+(y-2)^2=20$.
B. $(x-4)^2+(y-2)^2=29$.
C. $(x-2)^2+(y-1)^2=72$.
D. $(x-2)^2+(y-1)^2=18$.

Lời giải

Đường tròn đường kính AB có tâm $I(2;1)$ là trung điểm của AB, bán kính $R=IA=3\sqrt{2}$.

Do đó phương trình đường tròn đường kính AB là $(x-2)^2+(y-1)^2=18$.

Câu 3: Đường tròn tâm $I(3;-7)$ đi qua $A(-3;-1)$ có phương trình là

A. $(x-3)^2+(y+7)^2=\sqrt{72}$.
B. $(x-3)^2+(y+7)^2=72$.
C. $(x+3)^2+(y-7)^2=72$.
D. $(x+3)^2+(y+7)^2=\sqrt{72}$.

Lời giải

Đường tròn tâm $I(3;-7)$, đi qua $A(-3;-1)$ nên có bán kính $R = IA = 6\sqrt{2}$.

Do đó phương trình đường tròn tâm $I(3;-7)$, đi qua $A(-3;-1)$ là $(x-3)^2(y+7)^2 = 72$.

Câu 4: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ và điểm $A(3;4)$. Viết phương trình đường tròn (C) có tâm là tâm của đường tròn (C_1) và đi qua điểm A.

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 10$.
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$.
C. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 8$.
D. $(x+1)^2 + (y+2)^2 = 10$.

Lời giải

Đường tròn $(C_1): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 5 = 0$ có tâm $I(1;2)$, suy ra tâm của đường tròn (C) là $I(1;2)$.

Đường tròn (C) đi qua điểm $A(3;4)$ nên bán kính đường tròn (C) là $R = IA = 2\sqrt{2}$.

Phương trình đường tròn (C) cần tìm là: $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 8$.

Câu 5: Đường tròn đi qua 3 điểm $A(1;7)$, $B(-2;6)$, $C(5;-1)$ có phương trình là

A. $x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$.
B. $x^2 + y^2 + 2x + 4y - 20 = 0$.
C. $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.
D. $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$.

Lời giải

Thay toạ độ điểm A vào phương án **A** ta được $0 = 0$ (luôn đúng)

Thay toạ độ điểm B vào phương án **A**, ta được $0 = 0$ (luôn đúng)

Thay toạ độ điểm C vào phương án **A**, ta được $0 = 0$ (luôn đúng)

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng $\Delta: x - 2y + 3 = 0$. Viết phương trình đường tròn có tâm $I(3;-2)$ và tiếp xúc với Δ.

A. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 20$.
B. $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 20$.
C. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 10$.
D. $(x+3)^2 + (y-2)^2 = 10$.

Lời giải

Do đường tròn cần tìm tiếp xúc với đường thẳng Δ nên bán kính đường tròn là

$$R = d(I,\Delta) = \frac{|3 - 2(-2) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2}} = 2\sqrt{5}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-3)^2 + (y+2)^2 = 20$.

Câu 7: Viết phương trình đường tròn có tâm $A(2;-5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y-1=0$

A. $(x-2)^2+(y+5)^2=25$. **B.** $(x+2)^2+(y-5)^2=25$.

C. $(x-2)^2+(y+5)^2=5$. **D.** $(x+2)^2+(y-5)^2=5$.

Lời giải

Đường tròn có tâm $A(2;-5)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y-1=0$

$$\Rightarrow R=d(A,d)=\frac{|3.2-4.(-5)-1|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{25}{5}=5.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-2)^2+(y+5)^2=25$.

Câu 8: Cho tam giác MNP biết $M(-6;3)$ và N,P là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng $\Delta_1: x-y+9=0$, $\Delta_2: 2x+y+1=0$. Gọi $Q(2;-1)$ là điểm thỏa $\overrightarrow{NQ}=3\overrightarrow{NP}$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP?

A. $(x+4)^2+(y-3)^2=4$. **B.** $(x+4)^2+\left(y-\frac{11}{3}\right)^2=\frac{10}{9}$.

C. $(x-4)^2+(y+3)^2=2$. **D.** $(x+6)^2+(y-3)^2=\frac{5}{2}$.

Lời giải

$N\in\Delta_1: x-y+9=0\Rightarrow N(x_N;x_N+9)$; $P\in\Delta_2: 2x+y+1=0\Rightarrow P(x_P;-2x_P-1)$.

Mà $\overrightarrow{NQ}=3\overrightarrow{NP}\Rightarrow\begin{cases}2-x_N=3(x_P-x_N)\\-1-y_N=3(y_P-y_N)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_N-3x_P=-2\\2x_N+6x_P=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_N=-4\\x_P=-2\end{cases}$.

Với $x_N=-4\Rightarrow y_N=5\Rightarrow N(-4;5)$; $x_P=-2\Rightarrow y_P=3\Rightarrow P(-2;3)$.

Ta có: $\begin{cases}\overrightarrow{MN}=(2;2)\\\overrightarrow{NP}=(2;-2)\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP}=0$ $\Rightarrow\overrightarrow{MN}\perp\overrightarrow{NP}$ hay ΔMNP vuông tại N.

Gọi E là trung điểm $MP\Rightarrow E(-4;3)$.

Suy ra, đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP có tâm $E(-4;3)$ và bán kính $R=\frac{MP}{2}=2$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP: $(x+4)^2+(y-3)^2=4$.

Câu 9: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+(y-3)^2=1$ và điểm $M(1;3)$ thuộc đường tròn (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;3)$.

A. $x+3y-10=0$. **B.** $x+1=0$. **C.** $y-3=0$. **D.** $x-1=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm là $I(0;3)$.

Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;3)$có vecto pháp tuyến $\overrightarrow{IM}=(1;0)$ nên ta có phương trình $1(x-1)+0(y-3)=0\Leftrightarrow x-1=0$.

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(0;2)$, $B\left(0;-\frac{4}{5}\right)$. Đường tròn (T) đi qua A và cắt hai đường thẳng $d:x-y-1=0$, $\Delta:2x+y+2=0$ lần lượt tại M và N. Biết AM song song với BN và O,M,N thẳng hàng. Phương trình đường tròn (T) là

A. $x^2+y^2+2x-y-1=0$. **B.** $x^2+y^2+x-y+2=0$.

C. $x^2+y^2+x+y-2=0$. **D.** $x^2+y^2-x-y-2=0$.

Lời giải

Vì $M\in d$, $N\in\Delta\Rightarrow M(t;t-1)$, $N(s;-2s-2)$.

Nếu $t=0\Rightarrow M(0;-1)\Rightarrow A,M\in Oy$ (loại).

Nếu $t\neq 0$ ta có: Do AM song song với BN và O,M,N thẳng hàng nên có:

$$\begin{cases}\overrightarrow{OM}=k\overrightarrow{ON}\\ \overrightarrow{AM}=l\overrightarrow{BN}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{s}{t}=\frac{-2-2s}{-1+t}\\ \frac{s}{t}=\frac{-\frac{6}{5}-2s}{-3+t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3st=s-2t\\ 15st=15s-6t\end{cases}\Rightarrow t=-\frac{5}{2}s\Rightarrow\begin{cases}t=2\\ s=-\frac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}M(2;1)\\ N\left(-\frac{4}{5};-\frac{2}{5}\right)\end{cases}$$

Giả sử đường tròn (T) có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0\left(a^2+b^2-c>0\right)$.

Vì đường tròn (T) qua ba điểm A,M,N nên có hệ:

$$\begin{cases}4-4b+c=0\\ 5-4a-2b+c=0\\ \frac{4}{5}+\frac{8}{5}a+\frac{4}{5}b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\ b=\frac{1}{2}\\ c=-2\end{cases}$$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy phương trình đường tròn (T) là $x^2+y^2-x-y-2=0$.

Câu 11: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(3;2)$ và phương trình cạnh $BD:3x+4y-7=0$. Khi đó đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có phương trình là:

A. $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=4$. **B.** $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{1}{5}\right)^2=2$.

C. $\left(x+\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=4$. **D.** $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=2$.

Lời giải

Gọi I là tâm hình vuông $ABCD$.

Đường thẳng AC qua $A(3;2)$ và vuông góc với $BD:3x+4y-7=0$ có phương trình là $AC:4x-3y-6=0$.

Vì $I=AC\cap BD$ nên $I\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$ nên ta có: $IA=d(A,BD)=\frac{|3.3+4.2-7|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$.

Do đó $R=\frac{IA}{\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Vậy đường tròn nội tiếp hình vuông $ABCD$ có tâm $I\left(\frac{9}{5};\frac{2}{5}\right)$, bán kính $R=\sqrt{2}$ có phương trình là $\left(x-\frac{9}{5}\right)^2+\left(y-\frac{2}{5}\right)^2=2$.

Câu 12: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2+6x-4y-4=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $\Delta:x-4y+2022=0$.

A. $4x+y+27=0$; $4x-y-7=0$. **B.** $x-4y+27=0$; $x-4y-7=0$.

C. $4x+y+27=0$; $4x+y-7=0$. **D.** $4x+y-27=0$; $4x+y-7=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm là $I(-3;2)$ và có bán kính $R=\sqrt{17}$.

Đường thẳng $d\perp\Delta\Rightarrow d:4x+y+c=0$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I,d)=R\Leftrightarrow\frac{|-12+2+c|}{\sqrt{4^2+1^2}}=\sqrt{17}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=27\\c=-7\end{array}\right.$.

Phương trình tiếp tuyến d là $4x+y+27=0$; $4x+y-7=0$.

Câu 13: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+8y-5=0$. Viết phương trình tiếp tuyến với (C) song song với với đường thẳng $3x-4y+5=0$.

A. $\left[\begin{array}{l}3x-4y-3=0\\3x-4y+47=0\end{array}\right.$. **B.** $\left[\begin{array}{l}4x+3y-25=0\\4x+3y+29=0\end{array}\right.$. **C.** $\left[\begin{array}{l}4x+3y+25=0\\4x+3y-29=0\end{array}\right.$. **D.** $\left[\begin{array}{l}3x-4y+3=0\\3x-4y-47=0\end{array}\right.$.

Lời giải

Đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+8y-5=0$ có tâm $I(2;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-4)^2+5}=5$

Phương trình tiếp tuyến d song song với $3x-4y+5=0$ có dạng $3x-4y+c=0 \ (c\neq 5)$.

Do (d) tiếp xúc với đường tròn nên: $d(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|3.2-4.(-4)+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

$\Leftrightarrow |c+22|=25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=3 \\ c=-47 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đường thẳng d: $3x-4y+3=0$ và $3x-4y-47=0$.

Câu 14: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$ (Biết tung độ của tâm là số không âm). Viết phương trình đường tròn (C).

A. $(C):\left(x-\dfrac{10}{43}\right)^2+\left(y+\dfrac{70}{43}\right)^2=\left(\dfrac{7}{43}\right)^2$.

B. $(C):(x-10)^2+y^2=49$.

C. $(C):(x-10)^2+y^2=25$.

D. $(C):x^2+(y-10)^2=49$.

Lời giải

Vì đường tròn (C) có tâm I nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ nên gọi $I(6a+10;a)$, với $a\geq 0$.

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm I đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=\frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5} \Leftrightarrow |22a+35|=|21a+35| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \ (loai) \\ a=\dfrac{-70}{43}(nhan) \end{array}\right.$$

Với $a=0$ thì $I(10;0)$ và $R=\dfrac{|3(6a+10)+4a+5|}{5}=7$.

Vậy đường tròn (C) có phương trình là: $(x-10)^2+y^2=49$.

Câu 15: Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y=0$ biết tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$ là

A. $x+y-2=0$, $x+y+2=0$.

B. $x-y+2=0$, $x-y-2=0$.

C. $x-y+4=0$, $x-y-4=0$.

D. $x+y+4=0$, $x+y-4=0$.

Lời giải

Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y=0$ có tâm $I(1;1), r=\sqrt{2}$

Do tiếp tuyến vuông góc đường thẳng $\Delta: x+y-1=0$ nên tiếp tuyến có dạng $d: x-y+c=0$

Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) khi: $d(I,d)=r \Leftrightarrow \dfrac{|1-1+c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=-2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $x-y+2=0$, $x-y-2=0$.

Câu 16: Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên trục hoành đồng thời đi qua hai điểm $A(2;-5)$ và $B(4;3)$.

A. $x^2+y^2+2x-33=0$. **B.** $x^2+y^2-2x+33=0$.

C. $x^2+y^2+2y-33=0$. **D.** $x^2+y^2-2y+33=0$.

Lời giải

(C) có tâm I nằm trên trục hoành $\Rightarrow I(a;0) \Rightarrow (C): x^2+y^2-2ax+c=0$

(C) đi qua $A(2;-5) \Leftrightarrow 4+25-4a+c=0 \Leftrightarrow -4a+c=-29$.

(C) đi qua $B(4;3) \Leftrightarrow 16+9-8a+c=0 \Leftrightarrow -8a+c=-25$.

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases} -4a+c=-29 \\ -8a+c=-25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ c=-33 \end{cases}$.

Vậy phương trình đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-33=0$.

Câu 17: Cho tam giác ABC có M là trung điểm BC, biết $A\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$, $M\left(\dfrac{7}{2};3\right)$ và B, C là các điểm lần lượt thuộc các đường thẳng $d: 4x-2y+1=0$, $d': x-2y-2=0$. Phương trình nào dưới đây là phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

A. $x^2+y^2-7x-6y+\dfrac{15}{4}=0$. **B.** $(x-3)^2+\left(y-\dfrac{5}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$.

C. $x^2+y^2-6x-5y+\dfrac{41}{4}=0$. **D.** $\left(x-\dfrac{7}{2}\right)^2+(y-3)^2=\dfrac{17}{2}$.

Lời giải

Điểm $B \in d: 4x-2y+1=0 \Rightarrow B\left(x_B;\dfrac{4x_B+1}{2}\right)$; $C \in d': x-2y-2=0 \Rightarrow C\left(x_C;\dfrac{x_C-2}{2}\right)$.

Vì M là trung điểm BC $\Rightarrow \begin{cases} x_B+x_C=2x_M \\ y_B+y_C=2y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B+x_C=7 \\ 4x_B+x_C=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=2 \\ x_C=5 \end{cases}$.

Với $x_B=2 \Rightarrow y_B=\dfrac{9}{2} \Rightarrow B\left(2;\dfrac{9}{2}\right)$; $x_C=5 \Rightarrow y_C=\dfrac{3}{2} \Rightarrow C\left(5;\dfrac{3}{2}\right)$.

Gọi $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_A^2+y_A^2-2ax_A-2by_A+c=0 \\ x_B^2+y_B^2-2ax_B-2by_B+c=0 \\ x_C^2+y_C^2-2ax_C-2by_C+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a-3b+c=-\dfrac{13}{4} \\ -4a-9b+c=-\dfrac{97}{4} \\ -10a-3b+c=-\dfrac{109}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=\dfrac{5}{2} \\ c=\dfrac{41}{4} \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác ABC: $x^2+y^2-6x-5y+\dfrac{41}{4}=0$.

Câu 18: Viết phương trình đường tròn đi qua 3 điểm $A(-1;1),\ B(3;1),\ C(1;3)$.

A. $x^2+y^2-2x-2y-2=0$. **B.** $x^2+y^2+2x-2y=0$.

C. $x^2+y^2-2x-2y+2=0$. **D.** $x^2+y^2+2x+2y-2=0$.

Lời giải

Gọi phương trình đường tròn cần tìm có dạng $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0,\ (a^2+b^2-c>0)$.

Vì (C) đi qua 3 điểm $A;B;C$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 1+1+2a-2b+c=0 \\ 9+1-6a-2b+c=0 \\ 1+9-2a-6b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-2b+c=-2 \\ -6a-2b+c=-10 \\ -2a-6b+c=-10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-2 \end{cases} (tm).$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(C): x^2+y^2-2x-2y-2=0$.

Câu 19: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC nội tiếp trong đường tròn $(C): x^2+y^2=25$, điểm $K(2;1)$ thuộc đường thẳng AC. Hai đường cao BM và CN, phương trình đường thẳng $MN: 4x-3y+10=0$ và điểm A có hoành độ âm. Phương trình đường tròn tâm O tiếp xúc với đường thẳng AC là

A. $x^2+y^2=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **B.** $x^2+y^2=\dfrac{10}{2}$. **C.** $x^2+y^2=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$. **D.** $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$.

Tứ giác $BCMN$ nội tiếp nên $\widehat{ACB}=\widehat{MNA}$.

Giả sử d là tiếp tuyến của đường tròn (C) tại A, ta có $\widehat{ACB}=\widehat{A_1}$ do đó $\widehat{A_1}=\widehat{MNA}$, mà hai góc lại ở vị trí so le trong nên d song song MN suy ra $OA\perp MN$.

Phương trình đường thẳng OA đi qua $O(0;0)$ vuông góc với MN là: $3x+4y=0$.

A là giao điểm của OA và (C) nên tọa độ A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 3x+4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=4 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-4 \\ y=3 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow A(-4;3)$$ (A có hoành độ âm).

Phương trình đường thẳng AC đi qua $A(-4;3)$, $K(2;1)$ là $x+3y-5=0$.

Đường tròn tâm O tiếp xúc với đường thẳng AC nên bán kính bằng: $R=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$ suy ra phương trình là: $x^2+y^2=\dfrac{5}{2}$.

Câu 20: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-4x+2y=0$ và điểm $M(1;1)$ thuộc đường tròn (C). Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;1)$

A. $x+y-1=0$. **B.** $x+2y+1=0$. **C.** $x-2y-1=0$. **D.** $x-2y+1=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm là $I(2;-1)$.

Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}=(-1;2)$ nên ta có phương trình $-1(x-1)+2(y-1)=0 \Leftrightarrow x-2y+1=0$.

Câu 21: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2+y^2=4$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến có hệ số góc là 2.

A. $2x-y+2\sqrt{5}-4=0$.

B. $2x-y+2\sqrt{5}+4=0$; $2x-y+2\sqrt{5}-4=0$.

C. $2x-y+2\sqrt{5}-4=0$; $2x-y-2\sqrt{5}-4=0$.

D. $2x-y+2\sqrt{5}-4=0$; $2x+y+2\sqrt{5}-4=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm là $I(2;0)$ và có bán kính $R=2$.

Đường thẳng d có hệ số góc bằng 2 có dạng $y=2x+b \Leftrightarrow 2x-y+b=0$.

d là tiếp tuyến của $$(C) \Leftrightarrow d(I,d)=R \Leftrightarrow \frac{|4+b|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=2\sqrt{5}-4 \\ b=-2\sqrt{5}-4 \end{array}\right.$$.

Phương trình tiếp tuyến d là $2x-y+2\sqrt{5}-4=0$; $2x-y-2\sqrt{5}-4=0$.

Câu 22: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=8$ .Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn. Biết tiếp tuyến qua điểm $N(5;-2)$.

A. $\Delta: x-5=0$.

B. $\Delta: x+y-3=0$ hoặc $\Delta: x-y-7=0$.

C. $\Delta: x-5=0$ hoặc $\Delta: x+y-3=0$.

D. $\Delta: y+2=0$ hoặc $\Delta: x-y-7=0$.

Lời giải

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+2)^2=8$ có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(5;-2)$ có dạng: $(d): ax+by-5a+2b=0$ với $a^2+b^2>0$.

Để (d) là tiếp tuyến đường tròn (C) khi và chỉ khi: $d(I,d)=R \Leftrightarrow \dfrac{|a-2b-5a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow |-4a|=2\sqrt{2}\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 16a^2=8a^2+8b^2 \Leftrightarrow a^2=b^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b \\ a=-b \end{array}\right.$.

Với $a=b$, chọn $a=b=1$ ta được phương trình tiếp tuyến: $(d): x+y-3=0$.

Với $a=-b$, chọn $a=1 \Rightarrow b=-1$ ta được phương trình tiếp tuyến: $(d): x-y-7=0$

Câu 23: Trong hệ trục tọa độ Oxy, phương trình đường tròn (C) có tâm I có tọa độ nguyên nằm trên đường thẳng $3x+2y=0$, qua điểm $A(2;-5)$ và tiếp xúc với trục tung có phương trình là:

A. $(x+2)^2+(y-3)^2=4$.

B. $(x+4)^2+(y-6)^2=5$.

C. $(x-4)^2+(y+6)^2=5$.

D. $(x-2)^2+(y+3)^2=4$.

Lời giải

Do tâm I nằm trên đường thẳng $3x+2y=0$ nên tọa độ điểm $I(2t;-3t)$.

Đường tròn (C) qua điểm $A(2;-5)$ tiếp xúc với trục tung nên ta có:

$IA=d(I,Oy) \Leftrightarrow \sqrt{(2t-2)^2+(-3t+5)^2}=|2t| \Leftrightarrow 13t^2-38t+29=4t^2 \Leftrightarrow 9t^2-38t+29=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{29}{9} \end{array}\right.$

Do tâm I có tọa độ nguyên nên chọn $t=1 \Rightarrow I=(2;-3)$. Khi đó bán kính $R=2$.

Vậy đường tròn $(C):(x-2)^2+(y+3)^2=4$.

Câu 24: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y=0$ biết tiếp tuyến có hệ số góc $k=1$

A. $x+y-2=0$, $x+y+2=0$.
B. $x-y+2=0$, $x-y-2=0$.
C. $x-y+4=0$, $x-y-4=0$.
D. $x+y+4=0$, $x+y-4=0$.

Lời giải

Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-2y=0$ có tâm $I(1;1), r=\sqrt{2}$.

Do tiếp tuyến có hệ số góc $k=1 \Rightarrow \vec{u}=(1;1) \Rightarrow \vec{n}=(1;-1)$

Vậy tiếp tuyến có dạng $d: x-y+c=0$.

Điều kiện tiếp xúc $d(I;d)=r \Leftrightarrow \dfrac{|1-1+c|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=2 \\ c=-2 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $x-y+2=0$, $x-y-2=0$.

Câu 25: Viết phương trình đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2;0)$ và $B(0;1)$ và có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: x+y+1=0$

A. $\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{6}\right)^2=\dfrac{85}{18}$.
B. $\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{6}\right)^2=\dfrac{170}{6}$.
C. $\left(x+\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{6}\right)^2=\dfrac{85}{18}$.
D. $\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{6}\right)^2=\dfrac{170}{6}$.

Lời giải

Ta có phương trình tham số của $\Delta: \left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=-t-1 \end{array}\right.$. Do tâm I của (C) nằm trên Δ nên $I(t;-1-t)$

Ta có $IA=IB \Rightarrow (2-t)^2+(1+t)^2=(-t)^2+(2+t)^2 \Leftrightarrow t=\dfrac{1}{6}$, suy ra $I\left(\dfrac{1}{6};-\dfrac{7}{6}\right)$

Bán kính của đường tròn khi đó là: $IA=\dfrac{\sqrt{170}}{6}$.

Phương trình đường tròn cần tìm có dạng: $\left(x-\dfrac{1}{6}\right)^2+\left(y+\dfrac{7}{6}\right)^2=\dfrac{85}{18}$.

Câu 26: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC có $BC=2AB$, phương trình đường trung tuyến BM là $x+y-2=0$. Biết $\widehat{ABC}=120^\circ$ và $A(3;1)$. Phương trình đường tròn tâm B đi qua A là

A. $x^2+(y-2)^2=2$.
B. $(x-2)^2+(y-2)^2=2$.
C. $x^2+y^2=2$.
D. $(x-2)^2+y^2=2$.

Lời giải

Đặt $AB = x \Rightarrow BC = 2x\ (x > 0)$. Áp dụng định lí Cosin vào tam giác ABC ta có

$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.AB.BC.\cos ABC = 7x^2 \Rightarrow AC = x\sqrt{7}$.

Áp dụng công thức tính đường trung tuyến vào tam giác ABC ta được

$BM^2 = \dfrac{AB^2 + BC^2}{2} - \dfrac{AC^2}{4} = \dfrac{3x^2}{4}$.

Trong tam giác ABM có $AB^2 = x^2,\ BM^2 = \dfrac{3x^2}{4},\ AM^2 = \dfrac{7x^2}{4} \Rightarrow AM^2 = AB^2 + BM^2$

$\Rightarrow \Delta ABM$ vuông tại $B \Rightarrow AB \perp BM$.

Phương trình đường thẳng AB đi qua A vuông góc với BM là $x - y - 2 = 0$.

B là giao điểm của AB và BM nên tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow B(2;0)$.

Đường tròn tâm B đi qua A có bán kính $AB = \sqrt{2}$ suy ra phương trình là $(x-2)^2 + y^2 = 2$.

Câu 27: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 4$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(2;1)$.

A. $2x + y - 2 = 0$. **B.** $y + 1 = 0$. **C.** $2x - y - 3 = 0$. **D.** $y - 1 = 0$.

Lời giải

Vì $(2-2)^2 + (1+1)^2 = 4$ nên điểm $M(2;1)$ thuộc đường tròn (C).

Đường tròn (C) có tâm là $I(2;-1)$.

Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(2;1)$ có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM} = (0;2)$ nên ta có phương trình $0(x-2) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow y - 1 = 0$.

Câu 28: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) có phương trình $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 11 = 0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 31 = 0$.

A. $3x + 4y - 9 = 0$. **B.** $3x - 4y - 31 = 0$ và $3x - 4y - 9 = 0$

C. $3x - 4y + 9 = 0$. **D.** $3x - 4y + 9 = 0$ và $3x - 4y - 31 = 0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm là $I(1;-2)$ và có bán kính $R = 4$.

Đường thẳng $d\ //\Delta \Rightarrow d:3x-4y+c=0\ (c\neq -31)$.

d là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I,d)=R\Leftrightarrow \dfrac{|3+8+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=4\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=9\ (TM) \\ c=-31\ (L)\end{array}\right.$

Phương trình tiếp tuyến d là $3x-4y+9=0$.

Câu 29: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C):x^2+y^2-4x+8y-5=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $3x-4y+5=0$ là

A. $4x+3y+29=0;\ 4x+3y-21=0$.

B. $4x+3y-25=0;4x+3y+29=0$.

C. $\left[\begin{array}{l} 3x+4y+15=0 \\ 3x+4y-35=0\end{array}\right.$.

D. $\left[\begin{array}{l} 3x+4y+15=0 \\ 3x+4y-35=0\end{array}\right.$.

Lời giải

Đường tròn $(C):x^2+y^2-4x+8y-5=0$ có tâm $I(2;-4)$ và bán kính $R=\sqrt{2^2+(-4)^2+5}=5$

Phương trình tiếp tuyến d vuông góc với $3x-4y+5=0$ có dạng $4x+3y+c=0$.

Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi:

$$d(I,d)=R\Leftrightarrow \frac{|4.2+3.(-4)+c|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5\Leftrightarrow |c-4|=25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=-21 \\ c=29\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đường thẳng d: $4x+3y+29=0;\ 4x+3y-21=0$.

Câu 30: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $(C):x^2+y^2+4x-4y-1=0$. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua điểm $M(0;-1)$ là

A. $y-1=0;-12x+5y+5=0$.

B. $y+1=0;-12x+5y+5=0$.

C. $y-1=0;12x+5y+5=0$.

D. $y+1=0;12x+5y+5=0$.

Lời giải

Đường tròn $(C):x^2+y^2+4x-4y-1=0$ có tâm $I(-2;2)$ và bán kính $R=\sqrt{(-2)^2+2^2+1}=3$

Phương trình đường thẳng đi qua điểm $M(0;-1)$ có dạng: $d:ax+by+b=0$ với $a^2+b^2>0$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến đường tròn (C) khi và chỉ khi: $d(I,d)=R\Leftrightarrow \dfrac{|-2a+2b+b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3$

$\Leftrightarrow |-2a+3b| = 3\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 4a^2-12ab+9b^2 = 9a^2+9b^2 \Leftrightarrow 5a^2+12ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=-\dfrac{12}{5}b \end{array}\right.$.

Với $a=0$, chọn $b=1$ ta được phương trình tiếp tuyến: $d: y+1=0$.

Với $a=-\dfrac{12}{5}b$, chọn $b=5 \Rightarrow a=-12$ ta được phương trình tiếp tuyến: $d: -12x+5y+5=0$.

Câu 31: Phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-4=0$ song song đường thẳng $\Delta: 3x+4y-17=0$ là

A. $3x+4y-13=0$. **B.** $3x+4y+13=0$. **C.** $4x-3y+13=0$. **D.** $4x-3y-13=0$.

Lời giải

Đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+2y-4=0$ có tâm $I(2;-1), r=3$

Do tiếp tuyến song song đường thẳng $\Delta: 3x+4y-17=0$ nên tiếp tuyến có dạng

$d: 3x+4y+c=0 \, (c \neq -17)$

Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C) khi và chỉ khi:

$$d(I,d)=r \Leftrightarrow \frac{|3.2+4.(-1)+c|}{5}=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c=13 \\ c=-17 \end{array}\right.$$

So với điều kiện $c=-17$ loại.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là $3x+4y+13=0$.

Câu 32: Cho đường tròn (C) có tâm $I(1;1)$, (C) cắt đường thẳng $\Delta: 3x+4y+13=0$ theo một dây cung có độ dài bằng 8. Phương trình của đường tròn (C) là

A. $x^2+y^2-2x+2y-30=0$. **B.** $x^2+y^2-2x-2y+30=0$.

C. $x^2+y^2-2x-2y-30=0$. **D.** $x^2+y^2+2x+2y-30=0$.

Lời giải

Gọi giao điểm của đường thẳng Δ và (C) là A và B, H là hình chiếu của I xuống AB.

Khi đó $d(I;\Delta)=IH=\dfrac{|3.1+4.1+13|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4$.

Áp dụng định lý Pytago cho tam giác vuông AHB ta có:

$AI^2=AH^2+IH^2 \Leftrightarrow R^2=4^2+4^2=32.$

Do đó phương trình của (C) là $(x-1)^2+(y-1)^2=32 \Leftrightarrow x^2+y^2-2x-2y-30=0$.

Câu 33: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có $A(1;3)$, $B(-1;-1)$, $C(1;1)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(a;b)$. Tính $a-b$.

A. 4. **B.** -4. **C.** 2. **D.** 0.

Lời giải

Vì $I(a;b)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $IA = IB = IC = R$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-a)^2 + (3-b)^2 = (-1-a)^2 + (-1-b)^2 \\ (1-a)^2 + (3-b)^2 = (1-a)^2 + (1-b)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=2 \\ b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=2 \end{cases} \Rightarrow I(-2;2).$$ Vậy $a-b=-4$.

Câu 34: Cho đường thẳng $d: x-3y+5=0$, Viết phương trình đường tròn (C) có tâm nằm trên đường thẳng $\Delta: 2x+y=0$ và tiếp xúc với d tại điểm $A(1;2)$

A. $(x-3)^2+(y+6)^2=160$. **B.** $(x+3)^2+(y-6)^2=\frac{64}{5}$.

C. $(x-5)^2+(y+10)^2=160$. **D.** $(x-5)^2+(y+10)^2=16$.

Lời giải

Đường thẳng d có một vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{u_d}=(3;1)$.

Do tâm I của đường tròn (C) nằm trên đường thẳng Δ nên tọa độ $I(t;-2t)$.

Do đường tròn (C) tiếp xúc với d tại điểm $A(1;2)$ nên ta có $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{u_d}$ và $R = IA$.

Từ $\overrightarrow{IA} \perp \overrightarrow{u_d} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{u_d} = 0 \Leftrightarrow 3.(1-t)+1(2+2t)=0 \Leftrightarrow t=5$, suy ra $I(5;-10)$, $R = IA = 4\sqrt{10}$.

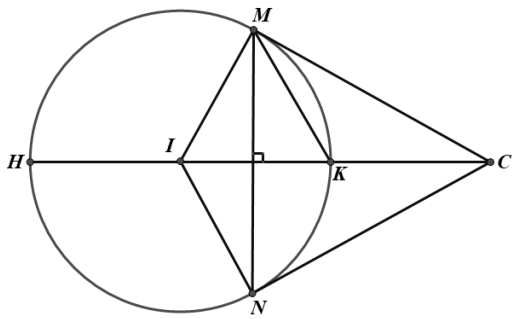
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-5)^2+(y+10)^2=160$.

Câu 35: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường tròn (C) tâm I bán kính R. Từ điểm C nằm ngoài đường tròn kẻ 2 tiếp tuyến CM, CN sao cho M và N là các tiếp điểm. Đường thẳng IC cắt (C) tại K và H sao cho $CK < CH$. Biết khoảng cách từ K đến CM bằng $\sqrt{17}$ và MN có phương trình $x-4y+3=0$ và H, K lần lượt thuộc các đường thẳng $5x+y-1=0$, $2x-y-7=0$. Biết K có tung độ âm. Phương trình đường tròn (C) là

A. $x^2+y^2+2x-18y-71=0$. **B.** $x^2+y^2-2x+18y-71=0$.

C. $x^2+y^2+2x-18y+71=0$. **D.** $x^2+y^2-2x-18y-71=0$.

Lời giải



Vì $\widehat{KMC}=\widehat{KMN}=\frac{1}{2}sd\overset{\frown}{MN}$, suy ra MK là phân giác trong $\widehat{CMN}$.

Lại có CK là phân giác trong $\widehat{MCN}$. Từ đó ta có K là tâm đường tròn nội tiếp ΔCMN $\Rightarrow d(K,CM)=d(K,MN)=\sqrt{17}$.

Gọi $K(a,2a-7)$ (với $2a-7<0$) thuộc đường thẳng $2x-y-7=0$.

Vì $d(K,MN)=\sqrt{17}\Leftrightarrow\frac{|a-4(2a-7)+3|}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2\\a=\frac{48}{7}\ (loai)\end{array}\right.\Rightarrow K(2;-3)$.

Do $CK\perp MN\Rightarrow CK:4x+y+m=0$.

Vì $K(2;-3)\in CK\Rightarrow m=-5$ nên phương trình đường thẳng $CK:4x+y-5=0$.

Tọa độ điểm H là nghiệm hệ phương trình $\begin{cases}4x+y-5=0\\5x+y-1=0\end{cases}\Rightarrow H(-4;21)$.

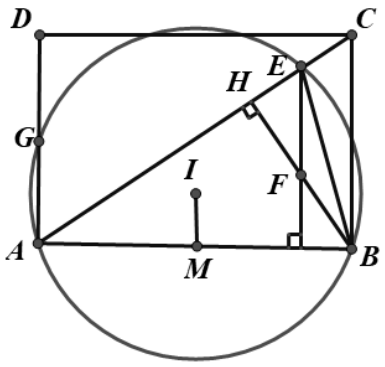
Do I là trung điểm $HK\Rightarrow I(-1;9)$; Đường tròn (C) có tâm I bán kính $R=IK=\sqrt{153}$.

Vậy phương trình đường tròn là: $(x+1)^2+(y-9)^2=153\Leftrightarrow x^2+y^2+2x-18y-71=0$.

Câu 36: Cho hình chữ nhật $ABCD$, qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AC tại H. Gọi $E\left(\frac{17}{5};\frac{29}{5}\right)$; $F\left(\frac{17}{5};\frac{9}{5}\right);G(1;5)$ lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng CH,BH,AD. Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE có tâm $I(a;b)$. Tính $a+b$.

A. 0. **B.** 4. **C.** 6. **D.** 9.

Lời giải



Xét tam giác ΔHBC có E là trung điểm của HC, F là trung điểm của $HB \Rightarrow EF$ là đường trung bình của tam giác $\Delta HBC \Rightarrow EF // BC \Rightarrow EF \perp AB.$

Xét $\Delta ABE : EF \perp AB, BH \perp AE \Rightarrow F$ là trực tâm của tam giác.

Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE,

Ta thấy ngay EF là đường trung bình của tam giác ΔHBC

$\Rightarrow \overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AG} \Rightarrow A(1;1)$

Đường thẳng AE đi qua điểm $A(1;1); \vec{u} = \overrightarrow{AE} = \left(\frac{12}{5}; \frac{24}{5}\right) = \frac{12}{5}(1;2) \Rightarrow \vec{n} = (2;-1)$

$\Rightarrow AE : -2x + y + 1 = 0$

Đường thẳng AB qua $A(1;1)$ và vuông góc với AG nên nhận $\overrightarrow{AG} = (0;4)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow AB : y - 1 = 0$

Đường thẳng BH qua $F\left(\frac{17}{5}; \frac{9}{5}\right)$ và vuông góc với AE nên nhận $\overrightarrow{AE} = \frac{12}{5}(1;2)$ là vectơ pháp tuyến $\Rightarrow BH : x + 2y - 7 = 0$

$B = BH \cap AB \Rightarrow$ tọa độ B là nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x + 2y - 7 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow B(5;1).$

Vậy đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE là đường tròn (C) đi qua ba điểm A, B, E có dạng là $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0;\ a^2 + b^2 - c > 0$

Vì $A, B, E \in (C) \Rightarrow \begin{cases} -2a - 2b + c = -2 \\ -10a - 2b + c = -26 \\ -\frac{34}{5}a - \frac{58}{5}b + c = -\frac{226}{5} \end{cases} \Leftrightarrow a = 3; b = 3; c = 10$

Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABE có tâm $I(3;3)$. Khi đó $a + b = 6$.

Câu 37: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn tâm I có phương trình $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=10$. Gọi Δ là một tiếp tuyến của (C). Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

A. $d(I,\Delta)=5$. **B.** $d(I,\Delta)=\sqrt{10}$. **C.** $d(I,\Delta)=10$. **D.** $d(I,\Delta)=\sqrt{5}$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{10}$.

Vì Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) nên $d(I,\Delta)=R=\sqrt{10}$.

Câu 38: Cho đường tròn $(C):(x+3)^2+(y-2)^2=8$. Phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm $M(-1;4)$ là

A. $x+y+1=0$. **B.** $2x-2y-10=0$. **C.** $x-2y-9=0$. **D.** $x+y-3=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-3;2)$.

Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(-1;4)$ vuông góc với IM do đó nhận $\overrightarrow{IM}=(2;2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $2(x+1)+2(y-4)=0\Leftrightarrow x+y-3=0$.

Câu 39: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, phương trình nào dưới đây là phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):(x+5)^2+(y-1)^2=20$ tại điểm $K(-1;-1)$?

A. $y=2x+1$. **B.** $y=-x-4$. **C.** $y=2x+11$. **D.** $y=5x+4$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-5;1)$.

Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $K(-1;-1)$ vuông góc với IK do đó nhận $\overrightarrow{IK}=(4;-2)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình tiếp tuyến cần tìm là: $4(x+1)-2(y+1)=0\Leftrightarrow 4x-2y+2=0\Leftrightarrow y=2x+1$.

Câu 40: Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$. Phương trình tiếp tuyến d của (C) tại điểm $M(-2;-2)$ là

A. $-3x-4y+14=0$. **B.** $-3x-4y+11=0$. **C.** $3x+4y+14=0$. **D.** $3x+4y+15=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$.

Tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(-2;-2)$ vuông góc với IM do đó nhận $\overrightarrow{MI}=(3;4)$ làm vectơ pháp tuyến.

Vậy phương trình tiếp tuyến d là: $3(x+2)+4(y+2)=0\Leftrightarrow 3x+4y+14=0$.

Câu 41: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):x^2+(y-2)^2=25$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $d:4x-3y+31=0$.

A. $4x-3y+2=0$. **B.** $4x-3y+31=0$. **C.** $3x+4y+17=0$. **D.** $4x-3y-19=0$.

Lời giải

Đường tròn $(C):x^2+(y-2)^2=25$ có tâm $I(0;2)$ và bán kính $R=5$.

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d:4x-3y+31=0$

$\Rightarrow \Delta$ có phương trình dạng $4x-3y+c=0$ $(c\in\mathbb{R},c\neq 31)$.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $(C)\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow \dfrac{|4.0-3.2+c|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=5$

$\Leftrightarrow \dfrac{|c-6|}{5}=5\Leftrightarrow |c-6|=25\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}c=31\\c=-19\end{array}\right.$.

$c=31$ không thỏa mãn điều kiện $c\neq 31$.

$c=-19$ thỏa mãn điệu kiện $c\neq 31$ khi đó đường thẳng Δ có phương trình là $4x-3y-19=0$.

Vậy phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) song song với đường thẳng d là $4x-3y-19=0$.

Câu 42: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C):x^2+y^2=16$ biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d:x+y=0$.

A. $x-y+3\sqrt{2}=0, x-y-4\sqrt{2}=0$. **B.** $x+y+4\sqrt{2}=0, x+y-4\sqrt{2}=0$.

C. $x+y+4\sqrt{2}=0, x+y-3\sqrt{2}=0$. **D.** $x-y+4\sqrt{2}=0, x-y-4\sqrt{2}=0$.

Lời giải

Đường tròn $(C):x^2+y^2=16$ có tâm $O(0;0)$ bán kính $R=4$.

Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $d:x+y=0\Rightarrow \Delta$ có phương trình dạng $x-y+c=0$ $(c\in\mathbb{R})$.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $(C) \Leftrightarrow d(O,\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|0-0+c|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = 4$ $\Leftrightarrow |c| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow c = \pm 4\sqrt{2}$.

Với $c = 4\sqrt{2}$ đường thẳng Δ có phương trình là $x - y + 4\sqrt{2} = 0$.

Với $c = -4\sqrt{2}$ đường thẳng Δ có phương trình là $x - y - 4\sqrt{2} = 0$.

Vậy đường tròn (C) có hai tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d là $x - y + 4\sqrt{2} = 0$, $x - y - 4\sqrt{2} = 0$.

Câu 43: Tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x = 0$ đi qua điểm $M(1;1)$ là

A. $y - 1 = 0$. **B.** $x - 1 = 0$. **C.** $2x - y - 1 = 0$. **D.** $x + y - 1 = 0$.

Lời giải

$(C): x^2 + y^2 - 2x = 0 \Rightarrow$ đường tròn (C) có tâm $I(1;0)$ bán kính $R = 1$.

$\overrightarrow{IM} = (0;1) \Rightarrow IM = 1 = R \Rightarrow M \in (C)$.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn (C) đi qua điểm M.

Do $M \in (C)$ nên Δ nhận $\overrightarrow{IM} = (0;1)$ làm vectơ pháp tuyến.

Phương trình đường thẳng Δ là: $0.(x-1) + 1.(y-1) = 0 \Leftrightarrow y - 1 = 0$.

Vậy tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x = 0$ đi qua điểm $M(1;1)$ là $y - 1 = 0$.

Câu 44: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ biết tiếp tuyến song song với đường thẳng $x + 3y + 10 = 0$

A. $x + 3y - 5 = 0$. **B.** $3x - y = 0$. **C.** $x + 3y - 10 = 0$. **D.** $x + 3y + 10 = 0$.

Lời giải

Đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 6x + 2y = 0$ có tâm $I(3;-1)$, bán kính $R = \sqrt{10}$.

Đường thẳng Δ song song với đường thẳng $d: x + 3y + 10 = 0$ nên đường thẳng Δ có phương trình dạng $x + 3y + c = 0$ $(c \in \mathbb{R}, c \neq 10)$.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $(C) \Leftrightarrow d(I,\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3 + 3.(-1) + c|}{\sqrt{1^2 + 3^2}} = \sqrt{10}$ $\Leftrightarrow |c| = 10 \Leftrightarrow c = \pm 10$.

$c = 10$ không thỏa mãn điều kiện $c \neq 10$.

$c=-10$ thỏa mãn điều kiện $c\neq 10 \Rightarrow$ phương trình đường thẳng Δ là $x+3y-10=0$.

Vậy đường tròn (C) có một tiếp tuyến song song với đường thẳng $x+3y+10=0$ là $x+3y-10=0$.

Câu 45: Trong mặt phẳng Oxy, cho (C): $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $M(3;5)$. Lập phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm M.

A. $\Delta_1: -3x-4y+11=0$ và $\Delta_2: y=3$.
B. $\Delta_1: 3x+4y-11=0$ và $\Delta_2: y=-3$.
C. $\Delta_1: 3x+4y+11=0$ và $\Delta_2: x=-3$.
D. $\Delta_1: 3x-4y+11=0$ và $\Delta_2: x=3$.

Lời giải

Ta có (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $IM=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}>R$. Do đó qua M có hai tiếp tuyến đến (C).

Cách 1: Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (C)

Gọi $\vec{n}=(a;b)\neq\vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

$\Delta: a(x-3)+b(y-5)=0 \Leftrightarrow ax+by-3a-5b=0$.

Δ là tiếp tuyến của $(C) \Leftrightarrow d(I;\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|a+b-3a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$

$\Leftrightarrow |-2a-4b|=2\sqrt{a^2+b^2} \Leftrightarrow 3b^2+4ab=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=-\dfrac{4a}{3}\end{array}\right.$

Với $b=0$ chọn $a=1\Rightarrow \vec{n}=(1;0)\Rightarrow \Delta_1: 1(x-3)+0(y-5)=0\Leftrightarrow x=3$.

Với $b=-\dfrac{4a}{3}$ chọn $a=3\Rightarrow b=-4\Rightarrow \vec{n}=(3;-4)\Rightarrow \Delta_2: 3x-4y+11=0$.

Cách 2: Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (C).

Trường hợp 1: Δ có hệ số góc k có phương trình $y=k(x-3)+5\Leftrightarrow kx-y+5-3k=0$.

Δ tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \dfrac{|k-1+5-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{4}$.

Vậy tiếp tuyến $\Delta_1: y=\dfrac{3}{4}(x-3)+5\Leftrightarrow 3x-4y+11=0$.

Trường hợp 2: $\Delta_2: x=3$ đi qua $M(3;5)$

Ta có $d\left(I,\Delta_2\right)=\dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0}}=2=R$. Do đó $\Delta_2:x=3$ đi qua M và là tiếp tuyến của (C).

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Delta_1:3x-4y+11=0$ và $\Delta_2:x=3$.

Câu 46: Trong mặt phẳng (Oxy), cho $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=5$. Gọi phương trình tiếp tuyến của (C) cắt $Ox;Oy$ lần lượt tại $A;B$ sao cho $OA=2OB$ là $ax+by-9=0$, với $a;b$ là các số nguyên dương và ước chung lớn nhất của $a;b$ là 1. Tính $a+2b$.

A. 5. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

Tiếp tuyến cắt $Ox;Oy$ lần lượt tại $A;B$ sao cho $OA=2OB$

Tiếp tuyến có hệ số góc $k=\pm\dfrac{OB}{OA}=\pm\dfrac{1}{2}$.

Trường hợp 1: Với $k=\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $\Delta:y=\dfrac{1}{2}x+n$

Δ là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d\left(I,\Delta\right)=R\Leftrightarrow\dfrac{|2n|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}n=\dfrac{5}{2}\\n=-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l}y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}\\y=\dfrac{1}{2}x-\dfrac{5}{2}\end{array}\right.$

Trường hợp 2: Với $k=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow$ Phương trình tiếp tuyến có dạng $d:y=-\dfrac{1}{2}x+m$

d là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d\left(I,d\right)=R\Leftrightarrow\dfrac{|4-2m|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{9}{2}\\m=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$.

Suy ra phương trình tiếp tuyến cần tìm là $\left[\begin{array}{l}y=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{9}{2}\\y=-\dfrac{1}{2}x-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+2y-9=0\\x+2y+1=0\end{array}\right.$

Vậy $a=1;b=2\Rightarrow a+2b=5$.

Câu 47: Trong mặt phẳng (Oxy), cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+1)^2=10$. Có thể lập được bao nhiêu phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) biết tiếp tuyến tạo với $\Delta: 2x+y-4=0$ một góc bằng 45°.

A. 4. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{10}$.

Gọi tiếp điểm $M(x_0;y_0)$, khi đó phương trình tiếp tuyến có dạng:

$$d:(x-1)(x_0-1)+(y+1)(y_0+1)=10\Leftrightarrow(x_0-1)x+(y_0+1)y-x_0+y_0-8=0 \quad (1)$$

Vì $M(x_0;y_0)\in(C)\Leftrightarrow(x_0-1)^2+(y_0+1)^2=10$ (2)

Đường thẳng d tạo với Δ một góc bằng 45° khi và chỉ khi

$$\cos 45^\circ=\frac{|2(x_0-1)+1.(y_0+1)|}{\sqrt{4+1}.\sqrt{(x_0-1)^2+(y_0+1)^2}}\Leftrightarrow|2x_0+y_0-1|=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}y_0=6-2x_0 & (3)\\ y_0=-4-2x_0 & (4)\end{array}\right.$$

Giải hệ phương trình tạo bởi $(2),(3)$ ta được: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0=2\\y_0=2\end{cases}\\ \begin{cases}x_0=4\\y_0=-2\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M_1(2;2)\\M_2(4;-2)\end{array}\right.$.

Giải hệ phương trình tạo bởi $(2),(4)$ ta được: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x_0=0\\y_0=-4\end{cases}\\ \begin{cases}x_0=-2\\y_0=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M_3(0;-4)\\M_4(-2;0)\end{array}\right.$.

Với $M_1(2;2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến $d_1: x+3y-8=0.$

Với $M_2(4;-2)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến $d_2: 3x-y-14=0.$

Với $M_3(0;-4)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến $d_3: x+3y+12=0.$

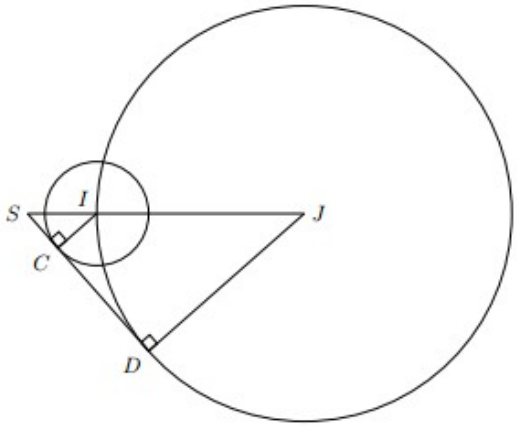
Với $M_4(-2;0)$, thay vào (1) ta được tiếp tuyến $d_4: 3x-y+6=0.$

Vậy có bốn tiếp tuyến $d_1,\ d_2,\ d_3,\ d_4$ tới (C) thỏa mãn điều kiện đề bài.

Câu 48: Trong mặt phẳng toạ độ, cho hai đường tròn $(C_1):(x+2)^2+y^2=1$ và $(C_2):(x-2)^2+y^2=16$. Biết đường thẳng $d: ax+by-10=0$ là một tiếp tuyến chung của hai đường tròn (C_1) và (C_2). Tính $S=a^2+b^2$.

A. $S=12$. **B.** $S=16$. **C.** $S=20$. **D.** $S=24$

Lời giải



Cách 1: Gọi R_1, R_2 lần lượt là bán kính đường tròn (C_1) và (C_2). Ta có $I(-2;0)$ và $J(2;0)$ lần lượt là tâm đường tròn đó. Vì $IJ=4<1+4=R_1+R_2$ nên hai đường tròn đã cho cắt nhau, do đó chúng chỉ có hai tiếp tuyến chung ngoài. Gọi S là giao điểm của IJ và tiếp tuyến chung ngoài CD của hai đường tròn.

Ta có $\frac{SI}{SJ}=\frac{IC}{JD}=\frac{1}{4}$, suy ra $4\overrightarrow{SI}-\overrightarrow{SJ}=\vec{0}$ hay $3\overrightarrow{OS}=4\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OJ}$. Do đó $S\left(-\frac{10}{3};0\right)$.

Giả sử tiếp tuyến CD có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(u;v)$. Phương trình đường thẳng CD là $u\left(x+\frac{10}{3}\right)+vy=0$. Suy ra

$$1=R_1=d(I,CD)=\frac{\left|\frac{4}{3}u\right|}{\sqrt{u^2+v^2}}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{7}}{3}u=\pm v.$$

$$\frac{a}{u}=\frac{b}{v}=\frac{-10}{\frac{10u}{3}}$$

Kết hợp giả thiết ta có hay $a=-3$ và $b=\pm v$. Từ đó $b=\pm\sqrt{7}$.

Trong tất cả các trường hợp ta đều có $S=a^2+b^2=16$.

Cách 2: (d) tiếp xúc với (C_1) nên $\frac{|-2a-10|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\Leftrightarrow\sqrt{a^2+b^2}=|2a+10|\quad(1)$

(d) tiếp xúc với (C_2) nên $\frac{|2a-10|}{\sqrt{a^2+b^2}}=4\Leftrightarrow 4\sqrt{a^2+b^2}=|2a-10|\quad(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $|2a-10|=4|2a+10|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a-10=8a+40\\2a-10=-8a-40\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=-\frac{25}{3}\\a=-3\end{array}\right.$

Với $a=-3$ thì ta có $\sqrt{a^2+b^2}=4\Leftrightarrow a^2+b^2=16$. Lúc này $b=\pm\sqrt{7}$ (Nhận)

Với $a=-\frac{25}{3}$ thì ta có $\sqrt{a^2+b^2}=\frac{20}{3}\Leftrightarrow a^2+b^2=\frac{400}{9}$. Lúc này $b^2=-\frac{225}{9}$ (Loại)

Vậy $a^2+b^2=16$.

Câu 49: Một cửa hàng ăn nhanh đặt ở vị trí I trong mặt phẳng tọa độ (đơn vị trên hai trục là 1 km). Vùng ship đồ ăn của cửa hàng được mô tả bởi $(x-1)^2+(y-1)^2\le 100$. Địa điểm nào sau đây thuộc vùng ship đồ của cửa hàng?

A. $M(7;10)$. **B.** $N(-4;-8)$. **C.** $P(9;-6)$. **D.** $Q(-7;5)$.

Lời giải

Ta có vị trí đặt cửa hàng là $I(1;1)$, bán kính vùng ship hàng là $R=10$.

Để nằm trong vùng được ship hàng thì khoảng cách từ cửa hàng đến địa điểm đó phải nhỏ hơn hoặc bằng R. Ta xét:

$IM=\sqrt{(7-1)^2+(10-1)^2}=\sqrt{117}>R$.

$IN=\sqrt{(-4-1)^2+(-8-1)^2}=\sqrt{106}>R$.

$IP=\sqrt{(9-1)^2+(-6-1)^2}=\sqrt{113}>R$.

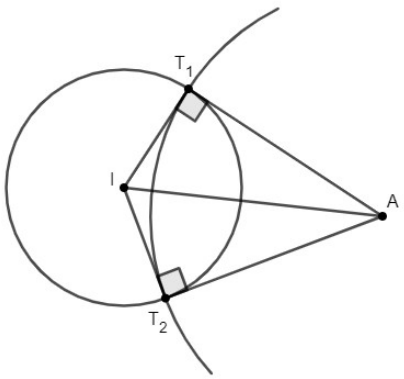
$IQ=\sqrt{(-7-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{80}<R$.

Vậy Q thuộc vùng ship đồ của cửa hàng.

Câu 50: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-8x+2y-8=0$ và $A(-1;0)$ Gọi T_1,T_2 là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ A đến (C). Phương trình đường thẳng T_1T_2 là

A. $5x-y+4=0$. **B.** $5x-y-4=0$. **C.** $10x-2y-17=0$. **D.** $10x-2y+1=0$.

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(4;-1)$, bán kính $R=5=IT_1=IT_2$.

Ta có $IA=\sqrt{(-1-4)^2+(0+1)^2}=\sqrt{26}$.

Xét ΔIT_1A vuông tại T_1 có $AT_1=\sqrt{IA^2-IT_1^2}=\sqrt{26-25}=1=AT_2$.

Đường tròn (C_1) tâm A, bán kính $r=AT_1=AT_2=1$ có phương trình là:

$(x+1)^2+y^2=1\Leftrightarrow x^2+y^2+2x=0$.

Do $\{T_1,T_2\}=(C)\cap(C_1)$ nên phương trình đường thẳng T_1T_2 là

$(x^2+y^2-8x+2y-8)-(x^2+y^2+2x)=0\Leftrightarrow -10x+2y-8=0\Leftrightarrow 5x-y+4=0$.

Câu 51: Cho đường tròn $(C):x^2+y^2-4x-2y=0$. Từ điểm $A(3;-2)$ có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến phân biệt có phương trình là

A. $2x+y-8=0$ và $x-2y+1=0$.

B. $a^2+b^2\neq 0$ $2x+y+8=0$ và $x-2y-1=0$

C. $2x-y+8=0$ và $x+2y-1=0$.

D. $2x-y-8=0$ và $x+2y+1=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}$.

Gọi $\vec{n}=(a;b)$ (điều kiện $a^2+b^2\neq 0$) là vectơ pháp tuyến của tiếp tuyến của (C) qua A.

Phương trình tiếp tuyến Δ có dạng $a(x-3)+b(y+2)=0$.

Ta có $d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow\frac{|-a+3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{5}\Leftrightarrow 5(a^2+b^2)=(a-3b)^2$ $\Leftrightarrow 4a^2+6ab-4b^2=0$

$\Leftrightarrow(2a-b)(a+2b)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2a=b\\a=-2b\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Với $2a=b$, do $a^2+b^2\neq 0$ nên chọn $a=1\Rightarrow b=2$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là $1.(x-3)+2.(y+2)=0\Leftrightarrow x+2y+1=0$.

Trường hợp 2: Với $a=-2b$, do nên chọn $b=1\Rightarrow a=-2$.

Phương trình tiếp tuyến Δ là $-2.(x-3)+1.(y+2)=0\Leftrightarrow 2x-y-8=0$.

Câu 52: Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+3)^2=10$ và đường thẳng $\Delta:x+y+1=0$ biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A,B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\frac{19}{2}$.

B. $\sqrt{38}$.

C. $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

D. $\frac{\sqrt{38}}{2}$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{10}$.

Gọi H là trung điểm dây cung AB nên $IH = d(I;\Delta) = \dfrac{|1-3+1|}{\sqrt{1+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Tam giác AIH vuông tại H nên $AH = \sqrt{IA^2 - IH^2} = \sqrt{10 - \dfrac{1}{2}} = \dfrac{\sqrt{38}}{2}$.

Độ dài đoạn thẳng $AB = 2AH = \sqrt{38}$.

Câu 53: Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 8 = 0$, biết tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $d: 2x - 3y + 2022 = 0$.

A. $3x + 2y - 17 = 0$ hoặc $3x + 2y - 9 = 0$. **B.** $3x + 2y + 17 = 0$ hoặc $3x + 2y + 9 = 0$.

C. $3x + 2y + 17 = 0$ hoặc $3x + 2y - 9 = 0$. **D.** $3x + 2y - 17 = 0$ hoặc $3x + 2y + 9 = 0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-2;1), R = \sqrt{13}$ và tiếp tuyến có dạng $\Delta: 3x + 2y + c = 0.$

Ta có $R = d[I;\Delta] \Leftrightarrow \dfrac{|c-4|}{\sqrt{13}} = \sqrt{13} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 17 \\ c = -9 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình tiếp tuyến là $3x + 2y + 17 = 0$ hoặc $3x + 2y - 9 = 0$.

Câu 54: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ và đường thẳng $d: 4x - 3y - 1 = 0$. Đường thẳng Δ vuông góc với d và tiếp xúc với đường tròn (C) có phương trình là

A. $3x + 4y = 0, 3x + 4y + 50 = 0$. **B.** $3x - 4y = 0, 3x - 4y + 50 = 0$.

C. $4x - 3y = 0, 4x - 3y + 50 = 0$. **D.** $3x + 4y = 0, 3x + 4y - 50 = 0$.

Lời giải

Đường thẳng Δ vuông góc với $d: 4x - 3y - 1 = 0$ nên Δ có phương trình dạng: $3x + 4y + c = 0$

Đường tròn $(C): (x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$ có tâm $I(3;4)$ và bán kính $R = 5$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc với đường tròn (C) $\Leftrightarrow d(I;\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|3.3 + 4.4 + c|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 5$

$\Leftrightarrow |25 + c| = 25 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = 0 \\ c = -50 \end{array}\right.$

Vậy đường thẳng Δ có dạng: $3x+4y=0$ hoặc $3x+4y-50=0$.

Câu 55: Trong mặt phẳng Oxy, cho (C): $x^2+y^2-2x-2y-2=0$ và $M(3;5)$. Phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm M là

A. $\Delta_1:-3x-4y+11=0$ và $\Delta_2:y=3$.

B. $\Delta_1:3x+4y-11=0$ và $\Delta_2:y=-3$.

C. $\Delta_1:3x+4y+11=0$ và $\Delta_2:x=-3$.

D. $\Delta_1:3x-4y+11=0$ và $\Delta_2:x=3$.

Lời giải

Ta có (C) có tâm $I(1;1)$ và bán kính $R=2$.

Ta có $IM=\sqrt{(3-1)^2+(5-1)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}>R$. Do đó qua M có hai tiếp tuyến đến (C).

Cách 1: Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (C)

Gọi $\vec{n}=(a;b)\neq\vec{0}$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.

$\Delta: a(x-3)+b(y-5)=0\Leftrightarrow ax+by-3a-5b=0$.

Δ là tiếp tuyến của $(C)\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow\dfrac{|a+b-3a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2$

$\Leftrightarrow|-2a-4b|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow 3b^2+4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\b=-\dfrac{4a}{3}\end{array}\right.$

$b=0$ chọn $a=1\Rightarrow\vec{n}=(1;0)\Rightarrow\Delta_1:1(x-3)+0(y-5)=0\Leftrightarrow x=3$.

Với

$b=-\dfrac{4a}{3}$ chọn $a=3\Rightarrow b=-4\Rightarrow\vec{n}=(3;-4)\Rightarrow\Delta_2:3x-4y+11=0$.

Với

Cách 2: Gọi Δ là đường thẳng đi qua M và tiếp xúc với (C).

TH1: Δ có hệ số góc k có phương trình $y=k(x-3)+5\Leftrightarrow kx-y+5-3k=0$.

Δ tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R\Leftrightarrow\dfrac{|k-1+5-3k|}{\sqrt{k^2+1}}=2\Leftrightarrow k=\dfrac{3}{4}$.

Vậy tiếp tuyến $\Delta_1:y=\dfrac{3}{4}(x-3)+5\Leftrightarrow 3x-4y+11=0$.

TH2: $\Delta_2 : x = 3$ đi qua $M(3;5)$

Ta có $d(I;\Delta_2) = \dfrac{|1-3|}{\sqrt{1^2+0}} = 2 = R$. Do đó $\Delta_2 : x = 3$ đi qua M và là tiếp tuyến của (C).

Vậy có hai tiếp tuyến thỏa mãn yêu cầu bài toán $\Delta_1 : 3x - 4y + 11 = 0$ và $\Delta_2 : x = 3$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho ba điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình tổng quát là: $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$

b) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(1;2)$

c) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $R = \sqrt{5}$

d) Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = \sqrt{5}$?

Lời giải

Giả sử phương trình đường tròn đi qua 3 điểm A, B, C có dạng $(C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$

Thay tọa độ 3 điểm $A(0;4)$, $B(2;4)$, $C(2;0)$ ta được:

$$\begin{cases} 8b + c = -16 \\ 4a + 8b + c = -20 \\ 4a + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow (C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0.$$

Suy ra (C) có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R = \sqrt{5}$.

a) Đúng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình tổng quát là:

$$(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$$

b) Đúng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $I(1;2)$.

c) Đúng: Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có bán kính $R = \sqrt{5}$.

d) Sai: Vì Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có phương trình chính tắc là:

$$(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$$

Câu 2: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho điểm $I(1;1)$ và đường thẳng $(d): 3x + 4y - 2 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng cách từ điểm $I(1;1)$ đến đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$ bằng 1

b) Đường tròn tâm $I(1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$ có phương trình chính tắc là $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

c) Đường tròn tâm $I(1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$ có phương trình tổng quát là $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

d) Đường thẳng đi qua điểm $I(1;1)$ và vuông góc với đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$ có phương trình tổng quát là $3x+4y-7=0$

Lời giải

a) Đúng: Khoảng cách từ điểm $I(1;1)$ đến đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$ bằng 1

Vì $d(I,d)=\dfrac{|3.1+4.1-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$

b) Đúng: Đường tròn tâm $I(1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$ có phương trình chính tắc là $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

Vì $R=d(I,d)=\dfrac{|3.1+4.1-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$ nên phương trình chính tắc là $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

c) Đúng: Đường tròn tâm $I(1;1)$ và tiếp xúc với đường thẳng $(d): 3x+4y-2=0$ có phương trình tổng quát là $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

Vì $R=d(I,d)=\dfrac{|3.1+4.1-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=1$ nên phương trình chính tắc là $x^2+y^2-2x-2y+1=0$

d) Sai: Phương trình tổng quát đường thẳng qua $I(1;1)$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(-4;3)$ là $(d'): -4x+3y+1=0$

Câu 3: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm $I(1;2)$ và cắt đường thẳng $\Delta: 3x+4y-6=0$ tại hai điểm A,B sao cho $AB=4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

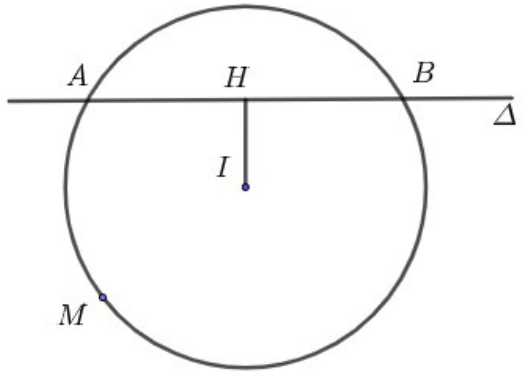
a) Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ bằng 2.

b) Bán kính đường tròn bằng $\sqrt{5}$.

c) Phương trình đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y=0$.

d) Điểm $M(3;1)$ nằm trong đường tròn (C).

Lời giải



a) Sai: Kẻ $IH \perp \Delta$ thì ta có $IH = d_{(I,\Delta)} = \dfrac{|3+8-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1$.

b) Đúng: $IH \perp AB \Rightarrow H$ là trung điểm AB và $AH = 2$

Khi đó ta có $R = IA = \sqrt{IH^2 + AH^2} = \sqrt{1^2+2^2} = \sqrt{5}$.

c) Đúng: Phương trình đường tròn (C) tâm $I(1;2)$, bán kính $R = \sqrt{5}$ là $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 5$ hay $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y = 0$.

d) Sai: Ta có $\overline{IM} = (2;-1) \Rightarrow IM = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} = R$ suy ra $M \in (C)$.

Câu 4: Trong hệ trục tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) tâm $I(1;2)$ và cắt đường thẳng $\Delta: 3x + 4y - 6 = 0$ tại hai điểm A, B sao cho $S_{IAB} = 4$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

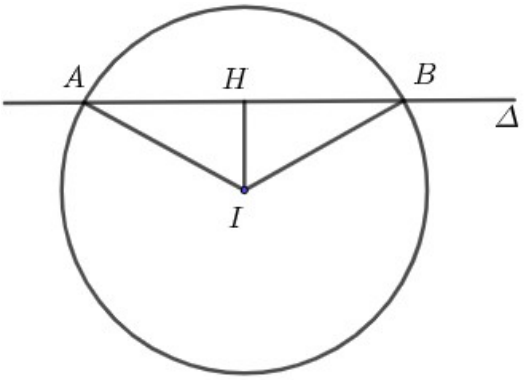
a) Khoảng cách từ tâm I đến đường thẳng Δ bằng 1.

b) Bán kính đường tròn (C) nhỏ hơn 4.

c) Phương trình đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y + 12 = 0$.

d) Điểm O nằm trên đường tròn (C).

Lời giải



a) Đúng: Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng $AB \Rightarrow IH \perp AB$

Ta có $IH = d_{(I,\Delta)} = \dfrac{|3+8-6|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 1$.

b) Sai: $IH \perp AB \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2} AB.IH \Leftrightarrow 4 = \frac{1}{2} AB.1 \Leftrightarrow AB = 8 \Rightarrow AH = 4$ và $R = \sqrt{AH^2 + IH^2} = \sqrt{17} \Rightarrow R > 4$.

c) Sai: Phương trình đường tròn (C) tâm $I(1;2)$, bán kính $R = \sqrt{17}$ là $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 17$ hay $(C): x^2 + y^2 - 2x - 4y - 12 = 0$.

d) Sai: Ta có $\overrightarrow{IO} = (-1;-2) \Rightarrow IO = \sqrt{(-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{5} < R = \sqrt{17}$ suy ra O nằm trong (C).

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho hai điểm $A(1;-4), B(-2;0)$ và đường thẳng $d: 2x - 4y + 1 = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm A, B cách đều đường thẳng d.

b) Tọa độ tâm của đường tròn đi qua hai điểm A, B và có tâm thuộc đường thẳng d là $I\left(1;\frac{3}{4}\right)$.

c) Phương trình đường tròn (C) đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d là $4x^2 + 4y^2 - 60x - 32y - 136 = 0$

d) Giá trị nhỏ nhất của OM với M là điểm chuyển động trên đường tròn là $\frac{5\sqrt{17} - 17}{2}$.

Lời giải

a) Sai: Khoảng cách từ điểm A đến đường thẳng d là $d(A,d) = \frac{|2.1 - 4(-4) + 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{19\sqrt{5}}{10}$

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là $d(B,d) = \frac{|2.(-2) - 4.0 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$

Vậy hai điểm A, B không cách đều đường thẳng d.

b) Sai: Đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $d: 2x - 4y + 1 = 0$ nên gọi I là tâm đường tròn thì $I\left(2a - \frac{1}{2}; a\right)$.

Mặt khác đường tròn đi qua A, B nên

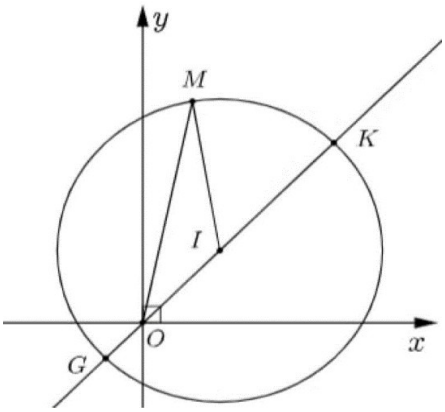
$$IA = IB \Leftrightarrow |\overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IB}| \Leftrightarrow \sqrt{\left(1 - 2a + \frac{1}{2}\right)^2 + (-4 - a)^2} = \sqrt{\left(-2 - 2a + \frac{1}{2}\right)^2 + (0 - a)^2} \Leftrightarrow a = 4$$

Vậy đường tròn đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d có tọa độ tâm là $I\left(\frac{15}{2}; 4\right)$

c) Đúng: $R = IB = |\overrightarrow{IB}| = \sqrt{\left(-2 - \frac{15}{2}\right)^2 + (0 - 4)^2} = \frac{5\sqrt{17}}{2}$

Phương trình đường tròn đi qua A, B và có tâm thuộc đường thẳng d là

$$\left(x-\frac{15}{2}\right)^2+(y-4)^2=\left(\frac{5\sqrt{17}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow 4x^2+4y^2-60x-32y-136=0$$



d) Đúng: Gọi G,K lần lượt là giao điểm của đường thẳng IO và đường tròn.

Với ba điểm I,O,M ta có

$$IM-IO\le OM\le IM+IO\Rightarrow IG-IO\le OM\le IK+IO\Rightarrow OG\le OM\le OK$$

Trong đó $OG=IG-IO=\frac{5\sqrt{17}}{2}-\frac{17}{2}=\frac{5\sqrt{17}-17}{2}$

Vậy OM đạt giá trị nhỏ nhất là $\frac{5\sqrt{17}-17}{2}$ khi M trùng G.

Câu 6: Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=9$ và hai điểm $A(-4;3),B(2;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm A nằm trên đường tròn (C).

b) Điểm B nằm ngoài đường tròn (C).

c) Phương trình đường thẳng d đi qua điểm A sao cho khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng d là lớn nhất là $x-y-1=0$

d) Giá trị lớn nhất của BM với M là điểm chuyển động trên đường tròn là $2\sqrt{5}+3$.

Lời giải

Đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=9$ có tâm $I(-2;1)$ và bán kính $R=3$

a) Sai: Ta có $(-4+2)^2+(3-1)^2=8\neq 9$ nên điểm A không nằm trên đường tròn (C).

b) Đúng: Đường tròn $(C):(x+2)^2+(y-1)^2=9$ có tâm $I(-2;1)$ và bán kính $R=3$

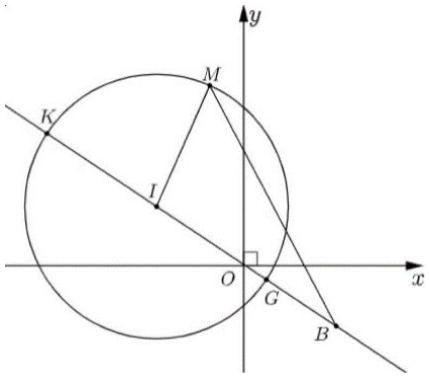
Mà $IB=\left|\overline{IB}\right|=2\sqrt{5}>3$ nên điểm B nằm ngoài đường tròn (C).

c) Sai: Gọi H là hình chiếu vuông góc của I lên đường thẳng d. Khi đó $IH\le IA$

Do đó khoảng cách lớn nhất là IA, khi đó đường thẳng d đi qua A và vuông góc với IA.

Ta có $\overrightarrow{IA}=(-2;2)$ nên phương trình đường thẳng *d*: $-2(x+4)+2(y-3)=0\Leftrightarrow x-y+7=0$

d) Đúng: Gọi *G, K* lần lượt là giao điểm của đường thẳng *IB* và đường tròn (C).



Với ba điểm I,B,M ta có

$IB-IM\le MB\le IB+IM\Rightarrow IB-IG\le MB\le IB+IK\Rightarrow BG\le BM\le BK$

Trong đó: $BG=IB-IG=2\sqrt{5}-3$; $BK=IB+IK=2\sqrt{5}+3$

Vậy *BM* đạt giá trị lớn nhất là $2\sqrt{5}+3$ khi *M* trùng *K*.

Câu 7: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):\ x^2+y^2-2x+4y-11=0$ và đường thẳng $d:\ 4x-3y+5=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d và đường tròn (C) tiếp xúc

b) Đường thẳng d cắt đường tròn (C) theo một dây cung có độ dài bằng 1.

c) Đường thẳng song song với d và tiếp xúc với đường tròn (C) có phương trình: $d:\ 4x-3y-10=0$.

d) Khoảng cách lớn nhất từ một điểm thuộc đường tròn (C) đến đường thẳng d là bằng 10.

Lời giải

Đường tròn $(C):\ x^2+y^2-2x+4y-11=0$ có tâm $I(1;-2)$ bán kính $R=\sqrt{1^2+2^2+11}=4$.

a) Sai: $d=d(I;d)=\dfrac{|4.1-3(-2)+5|}{\sqrt{3^3+4^2}}=3<R$ nên do đó *d* cắt (C) chứ không tiếp xúc với (C)

b) Sai: Do $d(I;d)=3<R$ nên *d* cắt (C) theo dây cung AB. Gọi H là trung điểm của AB

Ta có: $AB=2AH=2\sqrt{IA^2-IH^2}=2\sqrt{R^2-d^2}=2\sqrt{4^2-3^2}=2\sqrt{7}$.

c) Sai: Phương trình đường thẳng $\Delta\ d$ có dạng $4x-3y+c=0\ (c\ne 5)$.

Ta có Δ tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$.

Khi đó ta có: $\dfrac{|4-3(-2)+c|}{5}=4\Leftrightarrow|c+10|=20\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=10\\c=-30\end{array}\right.$.

Khoảng cách lớn nhất từ một điểm thuộc đường tròn (C) đến đường thẳng d bằng

d) Sai:

$d(I,\Delta)+R=2\sqrt{7}+4$

Câu 8: Cho đường tròn $(C):x^2+(y-1)^2=5$. Gọi Δ là phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M(1;-1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Δ cách tâm của đường tròn (C) một khoảng bằng 5.

b) Δ có hệ số góc $k=\frac{1}{2}$.

c) Δ tạo với các trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng $\frac{9}{4}$

d) Δ cắt đường tròn $(C'):(x+2)^2+y^2=9$ theo dây cung có độ dài bằng 4

Lời giải

a) Sai: Do Δ là tiếp tuyến của đường tròn $(C)\Rightarrow$ Δ cách tâm của đường tròn (C) một khoảng bằng $R=\sqrt{5}$.

b) Đúng: Đường tròn (C) có tâm $I(0;1)$

Đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\overrightarrow{IM}=(1;-2)$ và đi qua điểm $M(1;-1)$

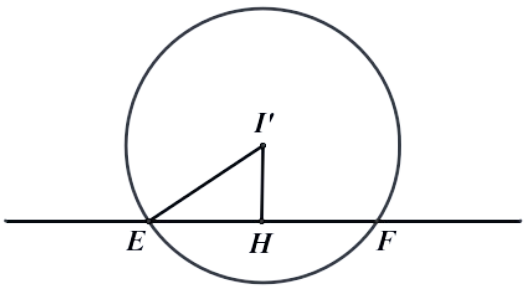
Phương trình đường thẳng $\Delta:1(x-1)-2(y+1)=0\Rightarrow\Delta:x-2y-3=0\Rightarrow\Delta:y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$.

Vậy Δ có hệ số góc $k=\frac{1}{2}$.

c) Đúng: $\Delta:x-2y-3=0\Rightarrow\Delta$ cắt trục Ox tại $A(3;0)$, cắt trục Oy tại $B\left(0;-\frac{3}{2}\right)$.

$S_{\Delta OAB}=\frac{1}{2}OA.OB=\frac{9}{4}$.

d) Đúng: (C') có tâm $I'(-2;0)$, bán kính $R'=3$.



Giả sử Δ cắt (C') theo dây cung EF và H là trung điểm của EF.

Ta có $I'H = d\left(I';\Delta\right) = \dfrac{\left|-2-2.0-3\right|}{\sqrt{1^2+\left(-2\right)^2}} = \sqrt{5}$, $EF = 2EH = 2\sqrt{R'^2 - I'H^2} = 2\sqrt{9-5} = 4$.

Vậy Δ cắt đường tròn $\left(C'\right)$ theo dây cung có độ dài bằng 4.

Câu 9: Cho đường tròn $\left(C\right): x^2+\left(y+1\right)^2 = 5$ và đường thẳng $\Delta: x+2y-3=0$. Gọi $d: ax+by+c=0$ là đường thẳng song song với Δ và là tiếp tuyến của $\left(C\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) d có hệ số góc $k=2$.

b) $\dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{7}$.

c) Khoảng cách giữa d và Δ bằng 10.

d) d cắt đường tròn $\left(C'\right):\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2 = 6$ tại 2 điểm A, B. Diện tích $\Delta I'AB$ bằng $\sqrt{5}$ (với I' là tâm của đường tròn $\left(C'\right)$).

Lời giải

a) Sai: Do $d \;//\; \Delta: x+2y-3=0 \Rightarrow d$ có hệ số góc $k = -\dfrac{1}{2}$.

b) Đúng: Do $d \;//\; \Delta: x+2y-3=0 \Rightarrow d: x+2y+m=0 \;\left(m \neq -3\right)$

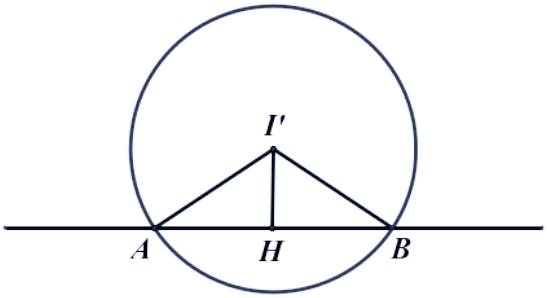
Đường tròn $\left(C\right)$ có tâm $I\left(0;-1\right)$, bán kính $R = \sqrt{5}$.

d là tiếp tuyến của $\left(C\right) \Leftrightarrow d\left(I,d\right) = R \Leftrightarrow \dfrac{\left|0+2.\left(-1\right)+m\right|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \left|m-2\right| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=7 \\ m=-3 \;\left(l\right) \end{array}\right.$.

Vậy $d: x+2y+7=0 \Rightarrow \dfrac{a}{c} = \dfrac{1}{7}$.

c) Sai: Ta có: $d\left(d;\Delta\right) = \dfrac{\left|7-\left(-3\right)\right|}{\sqrt{1^2+2^2}} = 2\sqrt{5}$.

d) Đúng: $\left(C'\right):\left(x-2\right)^2+\left(y+2\right)^2 = 6$ có tâm $I'\left(2;-2\right)$, bán kính $R' = \sqrt{6}$.



Gọi H là trung điểm AB ta có $I'H = d(I',d) = \dfrac{|2+2.(-2)+7|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \sqrt{5}$.

$AH = \sqrt{R'^2 - I'H^2} = 1 \Rightarrow AB = 2AH = 2$ nên $S_{\Delta I'AB} = \dfrac{1}{2} I'H.AB = \dfrac{1}{2}.\sqrt{5}.2 = \sqrt{5}$.

Câu 10: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$ và đường thẳng $(d):4x-3y+2=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C).

b) Khoảng cách giữa hai tiếp tuyến của đường tròn (C) vuông góc với đường thẳng d bằng 10

c) Đường thẳng $m:3x+4y+14=0$ là tiếp tuyến của đường tròn (C) vuông góc với đường thẳng d.

d) Tiếp tuyến của đường tròn (C) vuông góc với đường thẳng d đi qua điểm $A(0;9)$.

Lời giải

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-2)^2=25$ có tâm $I(1;2)$ và bán kính $R=5$.

a) Sai: Ta có $d(I,d) = \left|\dfrac{4.1-3.2+2}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right| = 0$

Vậy đường thẳng d không tiếp xúc với đường tròn (C).

b) Đúng: Khoảng cách giữa hai tiếp tuyến của đường tròn (C) vuông góc với đường thẳng d bằng đường kính nên bằng 10.

c) Đúng: Gọi m là đường thẳng vuông góc với $d:4x-3y+2=0$.

Khi đó m có dạng $3x+4y+C=0$.

Đường thẳng m tiếp xúc với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I,m)=R \Leftrightarrow \left|\frac{3.1+4.2+C}{\sqrt{3^2+4^2}}\right| = 5 \Leftrightarrow |11+C| = 25 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 11+C=25 \\ 11+C=-25 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} C=14 \\ C=-36 \end{bmatrix}$$

Suy ra có hai tiếp tuyến của đường tròn (C) vuông góc với đường thẳng d là $m_1:3x+4y+14=0$ và $m_2:3x+4y-36=0$.

d) Đúng: Điểm $A(0;9)$ thuộc tiếp tuyến $m_2:3x+4y-36=0$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn đi qua ba điểm $A(1;2)$, $B(5;2)$, $C(1;-3)$ có phương trình dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Tính giá trị $a+b+c$.

Lời giải

Phương trình đường tròn có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$. Đường tròn này qua A,B,C nên

$$\begin{cases}1+4-2a-4b+c=0\\25+4-10a-4b+c=0\\1+9-2a+6b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\\b=-\dfrac{1}{2}\\c=-1\end{cases}.$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-6x+y-1=0$.

Câu 2: Phương trình đường tròn đi qua hai điểm $A(3;0),B(0;2)$ và có tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng $d:x+y=0$. Khi đó giá trị của biểu thức $2a+5b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$A(3;0)$, $B(0;2)$, $d:x+y=0$.

Gọi I là tâm đường tròn vậy $I(x;-x)$ vì $I\in d$.

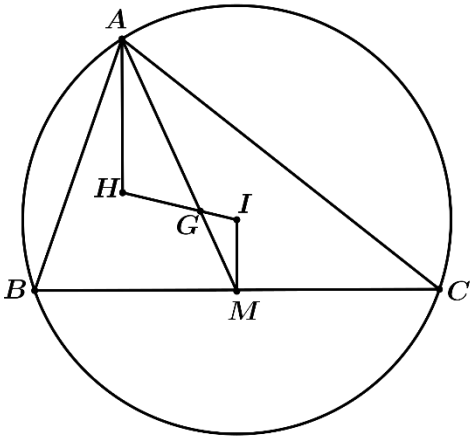
$IA^2=IB^2\Leftrightarrow(3-x)^2+x^2=x^2+(2+x)^2\Leftrightarrow-6x+9=4x+4\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$. Vậy $I\left(\dfrac{1}{2};-\dfrac{1}{2}\right)$.

$IA=\sqrt{\left(3-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ là bán kính đường tròn.

Phương trình đường tròn cần lập là: $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{13}{2}$.

Câu 3: Cho tam giác ABC biết $H(3;2)$, $G\left(\dfrac{5}{3};\dfrac{8}{3}\right)$ lần lượt là trực tâm và trọng tâm của tam giác, đường
thẳng BC có phương trình $x+2y-2=0$. Tìm bán kính của phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC?

Lời giải



Gọi I là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

$$\Rightarrow \overrightarrow{HI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{HG} \Rightarrow \begin{cases} x_I - 3 = \frac{3}{2}\left(\frac{5}{3} - 3\right) \\ y_I - 2 = \frac{3}{2}\left(\frac{8}{3} - 2\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_I = 1 \\ y_I = 3 \end{cases}.$$

Gọi M là trung điểm của $BC \Rightarrow IM \perp BC \Rightarrow IM: 2x - y + 1 = 0$.

Khi đó: $M = IM \cap BC \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = -1 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow M(0;1)$.

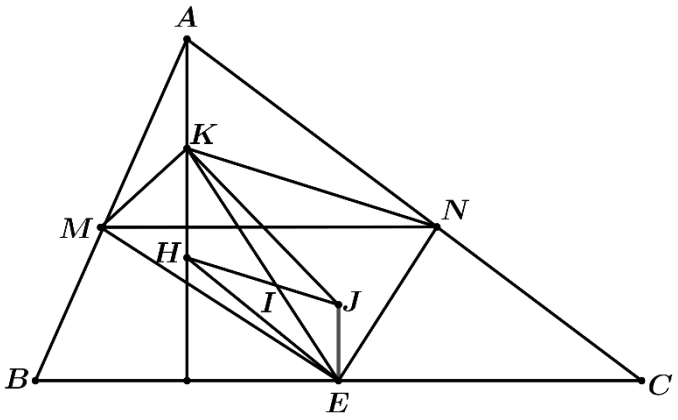
Lại có: $\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MG} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 3.\frac{5}{3} \\ y_A - 1 = 3.\left(\frac{8}{3} - 1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_A = 5 \\ y_A = 6 \end{cases}$.

Suy ra: bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $R = IA = 5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 25$.

Câu 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm $G(-1;3)$. Gọi K, M, N lần lượt là trung điểm của AH, AB, AC. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ Tính giá trị $a + b + R$.

Lời giải



Gọi E là trung điểm BC, J là tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có $\begin{cases} MK \perp BH \\ ME \perp AC \\ BH \perp AC \end{cases} \Rightarrow MK \perp ME \ (1)$, $\begin{cases} KN \perp CH \\ NE \perp AB \\ CH \perp AB \end{cases} \Rightarrow KN \perp NE (2)$

Từ $(1),(2) \Rightarrow KMEN$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính KE.

Đường tròn $(C): x^2 + y^2 + 4x - 4y - 17 = 0$ có tâm $I(-2;2)$ bán kính $r = 5 \Rightarrow I$ là trung điểm KE.

$KHEJ$ là hình bình hành $\Rightarrow I$ là trung điểm JH

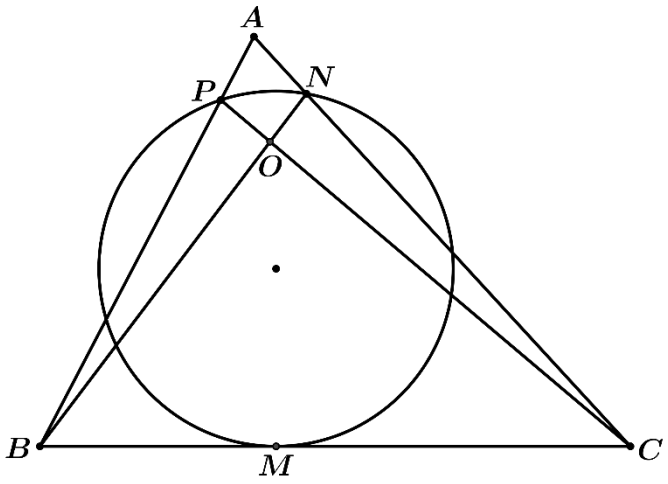
Ta có: $\overrightarrow{IJ} = 3\overrightarrow{IG} \Rightarrow \begin{cases} x_J + 2 = 3(-1+2) \\ y_J - 2 = 3(3-2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_J = 1 \\ y_J = 5 \end{cases} \Rightarrow J(1;5)$.

Bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC là $R = JA = 2IK = 2r = 10$.

Phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC là: $(x-1)^2 + (y-5)^2 = 100$.

Câu 5: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy,cho tam giác ABC có trực tâm O. Gọi M là trung điểm của BC; N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn đi qua ba điểm M, N, P có phương trình là $(T): (x-1)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$. Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có dạng $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 25$. Tính giá trị của $3a + 4b$

Lời giải



Ta có M là trung điểm của BC; N, P lần lượt là chân đường cao kẻ từ B và C. Đường tròn đi qua ba điểm M, N, P là đường tròn Euler. Do đó đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC chính là ảnh của đường tròn Euler qua phép vị tự tâm là O, tỷ số $k=2$.

Gọi I và I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP và tam giác ABC.

Gọi R và R' lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác MNP và tam giác ABC.

Ta có $I\left(1;-\frac{1}{2}\right)$ và do đó $\overrightarrow{OI'}=2\overrightarrow{OI}\Rightarrow I'(2;-1)$.

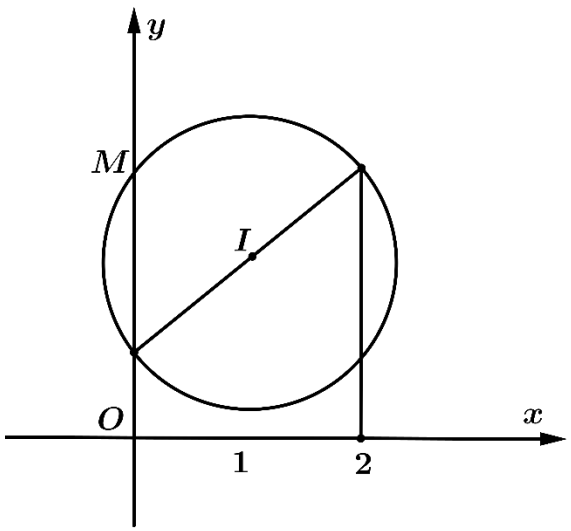
Mặt khác $R=\frac{5}{2}\Rightarrow R'=5$.

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là: $(x-2)^2+(y+1)^2=25$.

Nhận xét: Đề bài này rất khó đối với học sinh nếu không biết đến đường tròn Euler.

Câu 6: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y+3=0$. Tọa độ điểm $M(x_0;y_0)$ nằm trên đường tròn (C) sao cho $T=x_0+y_0$ đạt giá trị lớn nhất. Tính giá trị $S=2x_0+3y_0$

Lời giải



Đường tròn $(C):x^2+y^2-2x-4y+3=0$, (C) có tâm $I(1;2)$, $R=\sqrt{2}$.

Suy ra $(C):(x-1)^2+(y-2)^2-2=0$.

Có $T=x_0+y_0=(x_0-1)+(y_0-2)+3$.

Áp dụng bất đẳng thức bunhiacossiki cho 2 bộ số $(1;1),((x_0-1);(y_0-2))$.

$|(x_0-1)+(y_0-2)|\le\sqrt{2\left[(x_0-1)^2+(y_0-2)^2\right]}=2$, do $(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=2$.

$\Rightarrow -2\le(x_0-1)+(y_0-2)\le 2\Rightarrow 1\le(x_0-1)+(y_0-2)+3\le 5\Rightarrow 1\le T\le 5$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi $\begin{cases}(x_0-1)=(y_0-2)\\(x_0-1)^2+(y_0-2)^2=2\end{cases}$

$\Rightarrow(x_0-1)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0-1=1\\x_0-1=-1\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=2,y_0=3,T=5\\x_0=0,y_0=1,T=1\end{array}\right.$.

Vậy $\max T=5$ khi $x_0=2,y_0=3$ nên $S=2x_0+3y_0=2.2+3.3=13$.

Dạng 3: Vị trí tương đối của đường tròn

Phương pháp: Xét vị trí tương đối của đường tròn

Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (C): Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính IM

- Nếu $\mathrm{IM<R}$ suy ra M nằm trong đường tròn
- Nếu $\mathrm{IM=R}$ suy ra M thuộc đường tròn
- Nếu $\mathrm{IM>R}$ suy ra M nằm ngoài đường tròn

Vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và đường tròn (C): Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d(I;\Delta)$

- Nếu $d(I;\Delta)<R$ suy ra Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt
- Nếu $d(I;\Delta)=R$ suy ra Δ tiếp xúc với đường tròn
- Nếu $d(I;\Delta)>R$ suy ra Δ không cắt đường tròn

Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C'): Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính II', $R+R',|R-R'|$

- Nếu $II' > R + R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau
- Nếu $II' = R + R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau
- Nếu $II' < |R - R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau
- Nếu $II' = |R - R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau
- Nếu $|R - R'| < II' < R + R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Nếu biết tiếp điểm là $M(x_0; y_0)$ thì tiếp tuyến đó đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM} = (x_0 - a; y_0 - b)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$

Nếu không biết tiếp điểm thì dùng điều kiện: Đường thẳng Δ tiếp xúc đường tròn (C) khi và chỉ khi $d(I;\Delta) = R$ để xác định tiếp tuyến.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho đường thẳng $\Delta : x - y + 1 = 0$ và đường tròn $(C): x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

a) Chứng minh điểm $M(2;1)$ nằm trong đường tròn

b) Xét vị trí tương đối giữa Δ và (C)

c) Viết phương trình đường thẳng Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất.

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R = 3$.

Ta có $IM = \sqrt{(2-2)^2 + (1+1)^2} = 2 < 3 = R$ do đó M nằm trong đường tròn.

b) Vì $d(I;\Delta) = \dfrac{|2 + 1 + 1|}{\sqrt{1+1}} = 2\sqrt{2} < 3 = R$ nên Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt.

c) Vì Δ' vuông góc với Δ và cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt sao cho khoảng cách của chúng là lớn nhất nên Δ' vuông góc với Δ và đi qua tâm I của đường tròn (C).

Do đó Δ' nhận vectơ $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;1)$ làm vectơ pháp tuyến suy ra $\Delta' : 1(x-2) + 1(y+1) = 0$ hay $x + y - 1 = 0$

Vậy phương trình đường thẳng cần tìm là $\Delta' : x + y - 1 = 0$

Bài tập 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai đường tròn có phương trình $(C): x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$ và $(C'): x^2 + y^2 - 6x - 2y - 3 = 0$

a) Chứng minh rằng hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B

b) Viết phương trình đường thẳng đi qua A và B

c) Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A,B và O

Lời giải

a) **Cách 1:** (C) có tâm $I(1;3)$ và bán kính $R=5$, (C) có tâm $I'(3;1)$ và bán kính $R=\sqrt{13}$

Khi đó: $II'=\sqrt{(3-1)^2+(1-3)^2}=2\sqrt{2}$

Ta thấy $|R_1-R_2|<I_1I_2<|R_1+R_2|$ suy ra hai đường tròn cắt nhau.

Cách 2: Xét hệ phương trình $\begin{cases}x^2+y^2-2x-6y-15=0\\x^2+y^2-6x-2y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-2x-6y-15=0\\x-y-3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(y+3)^2+y^2-2(y+3)-6y-15=0\\x=y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2-y-6=0\\x=y+3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=-2\\y=3\end{array}\right.\\x=y+3\end{cases}$

Suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm có tọa độ là $A(1;-2)$ và $B(6;3)$

b) Đường thẳng đi qua hai điểm A,B nhận $\overrightarrow{AB}=(5;5)$ làm vectơ chỉ phương suy ra phương trình đường thẳng cần tìm là $\begin{cases}x=1+5t\\y=-2+5t\end{cases}$

c) **Cách 1:** Đường tròn cần tìm (C'') có dạng $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$

(C'') đi qua ba điểm A,B và O nên ta có hệ $\begin{cases}1+4-2a+4b+c=0\\36+9-12a-6b+c=0\\c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{7}{2}\\b=\dfrac{1}{2}\\c=0\end{cases}$

Vậy $(C''):x^2+y^2-7x-y=0$

Cách 2: Vì A,B là giao điểm của hai đường tròn (C) và (C') nên tọa độ đều thỏa mãn phương trình $x^2+y^2-2x-6y-15+m\left(x^2+y^2-6x-2y-3\right)=0$ (*)

Tọa độ điểm O thỏa mãn phương trình $(*)$ khi và chỉ khi $-15+m.(-3)=0\Leftrightarrow m=-5$

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành $x^2+y^2-7x-y=0$

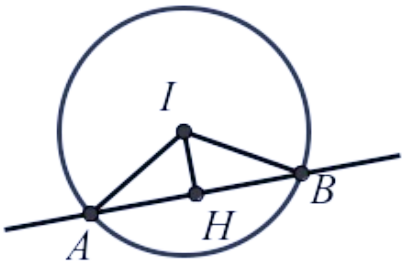
Vậy phương trình đường tròn cần tìm là $x^2+y^2-7x-y=0$

Bài tập 3: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$

a) Tìm m để đường thẳng Δ cắt đường tròn (C) tại hai điểm phân biệt A, B

b) Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất

Lời giải



a) Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$, bán kính $R=3$ và đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt khi và chỉ khi: $d(I;\Delta)<R \Leftrightarrow \dfrac{\left|\sqrt{2}-2m+1-\sqrt{2}\right|}{\sqrt{2+m^2}}<3$

$\Leftrightarrow 5m^2+5m+17>0$ (đúng với mọi m)

b) Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{9}{2}\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{9}{2}$

Suy ra: $\max S_{IAB}=\dfrac{9}{2}$ khi và chỉ khi $\sin\widehat{AIB}=1\Leftrightarrow\widehat{AIB}=90^\circ$

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ khi đó $\widehat{AIH}=45^\circ\Rightarrow IH=IA.\cos 45^\circ=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Ta có: $d(I;\Delta)=IH\Leftrightarrow\dfrac{|1-2m|}{\sqrt{2+m^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m^2+8m+16=0\Leftrightarrow m=-4$

Bài tập 4: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và điểm hai điểm $A(1;-1);\ B(1;3)$

a) Chứng minh rằng điểm A thuộc đường tròn, điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A.

c) Viết phương trình tiếp tuyến của (C) kẻ từ B.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R=\sqrt{3^2+1-6}=2$.

a) Ta có: $IA=2=R; IB=2\sqrt{5}>R$ suy ra điểm A thuộc đường tròn và điểm B nằm ngoài đường tròn

b) Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{IA}=(2;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-1)+0(y+1)=0$ hay $x=1$

b) Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng:

$a(x-1)+b(y-3)=0$ (với $a^2+b^2\neq 0$) hay $ax+by-a-3b=0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I;\Delta)=R$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow (a-2b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow 3b^2-4ab=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b=0 \\ 3b=4a \end{array}\right.$$

Nếu $b=0$, chọn $a=1$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $x=1$.

Nếu $3b=4a$, chọn $a=3, b=4$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $3x+4y-15=0$

Vậy qua A kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là $x=1$ và $3x+4y-15=0$

Bài tập 5: Viết phương trình tiếp tuyến Δ của đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+4y-1=0$ trong các trường hợp sau:

a) Đường thẳng Δ vuông góc với đường thẳng $\Delta': 2x+3y+4=0$

b) Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45°

Lời giải

a) Đường tròn (C) có tâm $I(2;-2)$, bán kính $R=3$

Vì đường thẳng $\Delta\perp\Delta'$ nên Δ nhận $\vec{u}(-3;2)$ làm vectơ pháp tuyến do đó phương trình có dạng $-3x+2y+c=0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta)=3\Leftrightarrow \frac{|-10+c|}{\sqrt{13}}=3\Leftrightarrow c=10\pm 3\sqrt{13}$$

Vậy có hai tiếp tuyến là $\Delta: -3x+2y+10\pm 3\sqrt{13}=0$

b) Giả sử phương trình đường thẳng $\Delta: ax+by+c=0, a^2+b^2\neq 0$

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến với đường tròn (C) khi và chỉ khi

$$d(I;\Delta)=3\Leftrightarrow\frac{|2a-2b+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=3\Leftrightarrow(2a-2b+c)^2=9(a^2+b^2)\ (*)$$

Đường thẳng Δ hợp với trục hoành một góc 45° suy ra

$$\cos(\Delta;Ox)=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Rightarrow\cos 45^0=\frac{|b|}{\sqrt{a^2+b^2}}\Leftrightarrow a=b$$ hoặc $a=-b$

Trường hợp 1: Nếu $a=b$ thay vào (*) ta có $18a^2=c^2\Leftrightarrow\pm c=3\sqrt{2}a$

Chọn $a=b=1\Rightarrow c=\pm3\sqrt{2}$ suy ra $\Delta:x+y\pm3\sqrt{2}=0$

Trường hợp 2: Nếu $a=-b$ thay vào $(*)$ ta có $18a^2=(4a+c)^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}c=\left(3\sqrt{2}-4\right)a\\c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)a\end{array}\right.$

Với $c=\left(3\sqrt{2}-4\right)a$, chọn $a=1,b=-1,c=\left(3\sqrt{2}-4\right)\Rightarrow\Delta:x-y+3\sqrt{2}-4=0$

Với $c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)a$, chọn $a=1,b=-1,c=-\left(3\sqrt{2}+4\right)\Rightarrow\Delta:x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Vậy có bốn đường thẳng thỏa mãn bài toán là $\Delta_{1,2}:x+y\pm3\sqrt{2}=0,\Delta_3:x-y+3\sqrt{2}-4=0$ và $\Delta_4:x-y-3\sqrt{2}-4=0$

Bài tập 6: Lập phương trình tiếp tuyến chung của hai đường tròn sau: $(C_1):x^2+y^2-4y-5=0$ và $(C_2):x^2+y^2-6x+8y+16=0$

Lời giải

Đường tròn (C_1) có tâm $I_1(0;2)$ bán kính $R_1=3$

Đường tròn (C_2) có tâm $I_2(3;-4)$ bán kính $R_2=3$

Gọi tiếp tuyến chung của hai đường tròn có phương trình $\Delta:ax+by+c=0$ với $a^2+b^2\neq0$

Δ là tiếp tuyến chung của (C_1) và $(C_2)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}d(I_1,\Delta)=3\\d(I_2,\Delta)=3\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}|2b+c|=3\sqrt{a^2+b^2}\ (*)\\|3a-4b+c|=3\sqrt{a^2+b^2}\end{array}\right.$

Suy ra $|2b+c|=|3a-4b+c|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=2b\\c=\dfrac{-3a+2b}{2}\end{array}\right.$

Trường hợp 1: Nếu $a=2b$ chọn $a=2,b=1$ thay vào $(*)$ ta được $c=-2\pm3\sqrt{5}$ nên ta có 2 tiếp tuyến là $2x+y-2\pm3\sqrt{5}=0$

Trường hợp 2: Nếu $c=\dfrac{-3a+2b}{2}$ thay vào $(*)$ ta được $|2b-a|=2\sqrt{a^2+b^2}\Leftrightarrow a=0$ hoặc $3a+4b=0$

Với $a=0\Rightarrow c=b$, chọn $b=c=1$ ta được $\Delta: y+1=0$

Với $3a+4b=0\Rightarrow c=3b$, chọn $a=4, b=-3, c=-9$ ta được $\Delta: 4x-3y-9=0$

Vậy có 4 tiếp tuyến chung của hai đường tròn là: $2x+y-2\pm 3\sqrt{5}=0, y+1=0, 4x-3y-9=0$

$m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập 7: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x-2y+5=0$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(-4;2)$, cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của MN. Khi đó hãy viết phương trình của đường thẳng d.

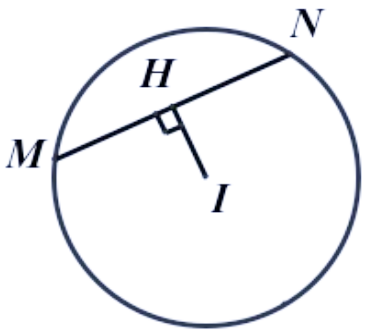
Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-3;1), R=\sqrt{5}$ nên do đó $IA=\sqrt{2}<R\Rightarrow A$ ở trong (C).

Mặt khác A là trung điểm của $MN\Rightarrow IA\perp MN\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-1;1)$ là vectơ pháp tuyến của d nên d có phương trình: $-1(x+4)+1(y+2)=0\Leftrightarrow x-y+6=0$.

Bài tập 8: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+6y+6=0$ và đường thẳng $d: 4x-3y+5=0$. Viết phương trình đường thẳng d' song song với đường thẳng d và chắn trên (C) một dây cung có độ dài bằng $2\sqrt{3}$.

Lời giải



Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3), R=2$

Do $d'//d\Rightarrow d'$ có phương trình $4x-3y+m=0\ (m\neq 5)$.

Vẽ $IH\perp MN\Rightarrow HM=\sqrt{3}\Rightarrow IH^2=R^2-HM^2=4-3=1$.

Khi đó: $d(I,d')=IH\Leftrightarrow \dfrac{|4.1-3.(-3)+m|}{\sqrt{16+9}}=1\Leftrightarrow |m+13|=5\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=-8 \\ m=-18. \end{array}\right.$

Vậy: $\left[\begin{array}{l} d': 4x-3y-8=0 \\ d': 4x-3y-18=0 \end{array}\right.$.

Bài tập 9: Cho đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-2)^2=9$. Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(-5;1)$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;2)$ và bán kính $R=3$.

Khi đó: $\vec{n}=(A;B)$ là vecto pháp tuyến nên $D: A(x-5)+B(y+1)=0$.

Đường thẳng D là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi :

$$d(I,\Delta)=R \Leftrightarrow \frac{|A(2-5)+B(2+1)|}{\sqrt{A^2+B^2}}=3 \Leftrightarrow A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \xrightarrow{B=0} y=-1 \\ B=0 \xrightarrow{A=0} x=5 \end{array}\right.$$

Bài tập 10: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-6x+2y+5=0$ và đường thẳng $d: 2x+(m-2)y-m-7=0$ .Với giá trị nào của m thì là tiếp tuyến của (C)?

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi va chỉ khi:

$$d(I,d)=R \Leftrightarrow \frac{|6-m+2-m-7|}{\sqrt{4+(m-2)^2}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow m^2-16m+39=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=3 \\ m=13 \end{array}\right.$$

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Cho đường tròn $(C):(x+1)^2+(y-3)^2=4$ và đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$. Phương trình của đường thẳng d' song song với đường thẳng d và chắn trên (C) một dây cung có độ dài lớn nhất là

A. $4x+3y+13=0$. **B.** $3x-4y+25=0$. **C.** $3x-4y+15=0$. **D.** $4x+3y+20=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và $R=2. d'//d \Rightarrow d': 3x-4y+c=0$.

Yêu cầu bài toán có nghĩa là d' qua tâm $I(-1;3)$ của (C) tức là : $-3-12+c=0 \Leftrightarrow c=1$

Vậy $d': 3x-4y+15=0$.

Câu 2: Tìm tọa độ giao điểm của đường thẳng $\Delta: x-2y+3=0$ và đường tròn $(C): x^2+y^2-2x-4y=0$

A. $(3;3)$ và $(-1;1)$. **B.** $(-1;1)$ và $(3;-3)$. **C.** $(3;3)$ và $(1;1)$. **D.** $(2;1)$ và $(2;-1)$.

Lời giải

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình sau

$$\begin{cases} x-2y+3=0 \\ x^2+y^2-2x-4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y-3 \\ (2y-3)^2+y^2-2(2y-3)-4y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y+3=0 \\ x=2y-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=-1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} y=3 \\ x=3 \end{cases}$$. Vậy tọa độ giao điểm là $(3;3)$ và $(-1;1)$.

Câu 3: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x-6y+5=0$. Đường thẳng d đi qua $A(3;2)$ và cắt (C) theo một dây cung ngắn nhất có phương trình là

A. $2x-y+2=0$. **B.** $x+y-1=0$. **C.** $x-y-1=0$. **D.** $x-y+1=0$.

Lời giải

$$f(x;y)=x^2+y^2-4x-6y+5 \Leftrightarrow f(3;2)=9+4-12-12+5=-6<0.$$

Vậy $A(3;2)$ ở trong (C).

Dây cung MN ngắn nhất $\Leftrightarrow IH$ lớn nhất $\Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow MN$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{IA}=(1;-1)$ Vậy d có phương trình: $1(x-3)-1(y-2)=0 \Leftrightarrow x-y-1=0$.

Câu 4: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y-3=0$. Mệnh đề nào sau đây đúng?

(I) Điểm $A(1;1)$ nằm ngoài (C).

(II) Điểm $O(0;0)$ nằm trong (C).

(III) (C) cắt trục tung tại hai điểm phân biệt.

A. Chỉ (I). **B.** Chỉ (II). **C.** Chỉ (III). **D.** Cả (I), (II) và (III).

Lời giải

Đặt $f(x;y)=x^2+y^2-4x+6y-3 \Rightarrow f(1;1)=1+1-4+6-3=1>0 \Rightarrow A$ ở ngoài (C).

Do $f(0;0)=-3<0 \Rightarrow O(0;0)$ ở trong (C).

Khi $x=0 \Rightarrow y^2+6y-3=0$. Phương trình này có hai nghiệm suy ra (C) cắt $y'Oy$ tại 2 điểm.

Câu 5: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+6x-2y+5=0$ và đường thẳng d đi qua điểm $A(-4;2)$, cắt (C) tại hai điểm M, N sao cho A là trung điểm của MN. Phương trình của đường thẳng d là

A. $x-y+6=0$. **B.** $7x-3y+34=0$. **C.** $7x-3y+30=0$. **D.** $7x-y+35=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-3;1), R=\sqrt{5}$ nên $IA=\sqrt{2}<R\Rightarrow A$ ở trong (C).

Điểm A là trung điểm của $MN\Rightarrow IA\perp MN\Rightarrow \overrightarrow{IA}=(-1;1)$ là vectơ pháp tuyến của d nên d có phương trình: $-1(x+4)+1(y+2)=0\Leftrightarrow x-y+6=0$.

Câu 6: Đường tròn $x^2+y^2-2x-2y-23=0$ cắt đường thẳng $x+y-2=0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. 10. **B.** 8. **C.** 6. **D.** $3\sqrt{2}$.

Lời giải

Giải hệ: $\begin{cases}x^2+y^2-2x-2y-23=0\\x+y-2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x^2-4x-23=0\\y=2-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{2+5\sqrt{2}}{2}\\y=\dfrac{2-5\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

Hay $\begin{cases}x=\dfrac{2-5\sqrt{2}}{2}\\y=\dfrac{2+5\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ nên độ dài dây cung $AB=10$.

Câu 7: Tìm giao điểm 2 đường tròn $(C_1):x^2+y^2-4=0$ và $(C_2):x^2+y^2-4x-4y+4=0$

A. $(\sqrt{2};\sqrt{2})$ và $(\sqrt{2};-\sqrt{2})$. **B.** $(0;2)$ và $(0;-2)$.

C. $(2;0)$ và $(0;2)$. **D.** $(2;0)$ và $(-2;0)$.

Lời giải

Giải hệ $\begin{cases}x^2+y^2-4=0\\x^2+y^2-4x-4y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-4=0\\4-4x-4y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+y^2-4=0\\x+y=2\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+(2-x)^2-4=0\\y=2-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+(2-x)^2-4=0\\y=2-x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=2\end{cases}hay\begin{cases}x=2\\y=0\end{cases}$.

Vậy giao điểm $A(0;2)$, $B(2;0)$.

Câu 8: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1):x^2+y^2=4$ và $(C_2):(x+10)^2+(y-16)^2=1$.

A. Cắt nhau. **B.** Không cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Lời giải

(C_1) có tâm và bán kính: $I_1\equiv(0;0)$, $R_1=2$; (C_2) có tâm và bán kính: $I_2(-10;16)$, $R_2=1$

Khoảng cách giữa hai tâm $I_1I_2=\sqrt{10^2+16^2}=2\sqrt{89}>R_1+R_2$.

Vậy (C_1) và (C_2) không có điểm chung.

Câu 9: Với những giá trị nào của m thì đường thẳng $\Delta: 4x+3y+m=0$ tiếp xúc với đường tròn $(C): x^2+y^2-9=0$.

A. $m=-3$. **B.** $m=3$ và $m=-3$. **C.** $m=3$. **D.** $m=15$ và $m=-15$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm và bán kính là $I\equiv(0;0)$ và bán kính $R=3$.

Đường thẳng Δ tiếp xúc $(C)\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R\Leftrightarrow \dfrac{|m|}{5}=3\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m=15 \\ m=-15 \end{array}\right.$

Câu 10: Một đường tròn có tâm $I(1;3)$ tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: 3x+4y=0$. Hỏi bán kính đường tròn bằng bao nhiêu?

A. $\dfrac{3}{5}$. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 15.

Lời giải

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow R=d(I;\Delta)=\dfrac{|3.1+3.4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$.

Câu 11: Đường tròn $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ cắt đường thẳng $x+y-a-b=0$ theo một dây cung có độ dài bằng bao nhiêu?

A. $2R$. **B.** $R\sqrt{2}$. **C.** $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$. **D.** R.

Lời giải

Vì đường tròn có tâm $I(a;b)$, bán kính R và tâm $I(a;b)$ thuộc đường thẳng $x+y-a-b=0$.

Nên độ dài của dây cung bằng độ dài đường kính bằng $2R$.

Câu 12: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x=0$ và $(C_2): x^2+y^2+8y=0$.

A. Tiếp xúc trong. **B.** Không cắt nhau. **C.** Cắt nhau. **D.** Tiếp xúc ngoài.

Lời giải

Đường tròn $(C_1): x^2+y^2-4x=0$ có tâm $I_1(2;0)$, bán kính $R_1=2$.

Đường tròn $(C_2): x^2+y^2+8y=0$ có tâm $I_2(0;-4)$, bán kính $R_2=4$.

Ta có $R_2-R_1<I_1I_2=2\sqrt{5}<R_2+R_1$ nên hai đường tròn cắt nhau.

Câu 13: Đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và tiếp xúc với đường thẳng $d: 3x-4y+5=0$ tại điểm H có tọa độ là

A. $\left(-\dfrac{1}{5};-\dfrac{7}{5}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5}\right)$. **C.** $\left(\dfrac{1}{5};-\dfrac{7}{5}\right)$. **D.** $\left(-\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5}\right)$.

Lời giải

Hai đường thẳng $IH \perp d \Rightarrow IH: 4x+3y+c=0$.

Đường thẳng IH qua $I(-1;3)$ nên $4(-1)+3.3+c=0 \Leftrightarrow c=-5$ nên $IH: 4x+3y-5=0$.

Giải hệ: $\begin{cases} 4x+3y-5=0 \\ 3x-4y+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1}{5} \\ y=\dfrac{7}{5} \end{cases} \Rightarrow H\left(\dfrac{1}{5};\dfrac{7}{5}\right)$.

Câu 14: Xác định vị trí tương đối giữa 2 đường tròn $(C_1): x^2+y^2=4$ và $(C_2): (x-3)^2+(y-4)^2=25$.

A. Không cắt nhau. **B.** Cắt nhau. **C.** Tiếp xúc ngoài. **D.** Tiếp xúc trong.

Lời giải

Tâm $I_1(0;0), I_2(3;4)$, bán kính $R_1=2, R_2=5$ nên $R_2-R_1=3<I_1I_2=5<R_2+R_1=7$

Vậy hai đường tròn trên cắt nhau.

Câu 15: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2+2x-6y+5=0$. Phương trình tiếp tuyến của (C) song song với đường thẳng $D: x+2y-15=0$ là

A. $x+2y=0$ và $x+2y-10=0$. **B.** $x-2y=0$ và $x+2y+10=0$.

C. $x+2y-1=0$ và $x+2y-3=0$. **D.** $x-2y-1=0$ và $x-2y-3=0$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(-1;3)$ và bán kính $R=\sqrt{1+9-5}=\sqrt{5}, d: x+2y-m=0$.

Đường thẳng d là tiếp tuyến của (C) khi và chỉ khi:

$$d(I,d)=R \Leftrightarrow \frac{|-1+6-m|}{\sqrt{1+4}}=\sqrt{5} \Leftrightarrow |m-5|=5 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m-5=-5 \\ m-5=5 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} m=0 \Rightarrow d: x+2y=0 \\ m=10 \Rightarrow d: x+2y-10=0 \end{bmatrix}$$

Câu 16: Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+8y-23=9$ và điểm $M(8;-3)$. Độ dài đoạn tiếp tuyến của (C) xuất phát từ M là:

A. 10. **B.** $2\sqrt{10}$. **C.** $\dfrac{\sqrt{10}}{2}$. **D.** $\sqrt{10}$.

Lời giải

Đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+8y-23=9$ có tâm $I(1;-4)$ bán kính $R=\sqrt{40}$.

Độ dài tiếp tuyến là $\sqrt{IM^2-R^2}=\sqrt{10}$.

Câu 17: Nếu đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-3)^2=R^2$ tiếp xúc với đường thẳng $d: 5x+12y-60=0$ thì giá trị của R là:

A. $R=2\sqrt{2}$. **B.** $R=\frac{19}{13}$. **C.** $R=\sqrt{5}$. **D.** $R=\sqrt{2}$.

Lời giải

Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-3)^2=R^2$ có tâm $I(1;3)$ bán kính R.

Đường thẳng $d:5x+12y-60=0$ tiếp xúc với đường tròn (C) khi và chỉ khi:

$$d=d(I,d)=\frac{|5.1+12.3-60|}{\sqrt{5^3+12^3}}=\frac{19}{13}$$

Câu 18: Cho đường tròn $(T):x^2+y^2+2x-4y-20=0$ và điểm $A(5;-6)$. Gọi B, C lần lượt là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ điểm A đến đường tròn (T). Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

A. $(x-2)^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}$. **B.** $(x-2)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$

C. $(x+2)^2+(y+2)^2=\frac{25}{4}$. **D.** $(x+2)^2+(y-2)^2=\frac{25}{4}$

Lời giải

Ta thấy điểm A nằm ngoài đường tròn (T) nên từ A luôn kẻ được 2 tiếp tuyến AB và AC đến đường tròn (T) (với B, C lần lượt là các tiếp điểm).

Đường tròn (T) có tâm $I(-1;2)$, bán kính $R=5$ và có $AI=\sqrt{(-1-5)^2+(2+6)^2}=10$.

Xét ΔBAI vuông tại B có: $\cos\widehat{AIB}=\frac{IB}{AI}=\frac{1}{2}\Rightarrow\widehat{AIB}=60^\circ\Rightarrow\widehat{BAI}=30^\circ\Rightarrow\widehat{BAC}=60^\circ$

Từ đó ta có tam giác ΔABC là tam giác đều và gọi H là giao điểm của BC và AI.

Trong $\square BAI$ vuông tại B và BH là đường cao nên $IH.IA=IB^2\Rightarrow IH=\frac{IB^2}{IA}=\frac{5}{2}$

Suy ra $IH=\frac{1}{4}IA\Rightarrow\overline{IH}=\frac{1}{4}\overline{IA}\ (*)$.

Gọi $H(x_0;y_0)$, từ $(*)$ suy ra $\begin{cases}x_0=\frac{1}{2}\\ y_0=0\end{cases}\Rightarrow H\left(\frac{1}{2};0\right)$.

Do ΔABC đều nên tâm đường tròn nội tiếp ΔABC là trọng tâm G của tam giác đó.

Khi đó ta có $\overline{AG}=\frac{2}{3}\overline{AH}\Rightarrow G(2;-2)$.

Vậy đường tròn nội tiếp ΔABC có tâm $G(2;-2)$ và bán kính $r = GH = \frac{5}{2}$ nên có phương trình: $(x-2)^2 + (y+2)^2 = \frac{25}{4}$.

Câu 19: Cho đường tròn $(C):(x-1)^2 + (y+3)^2 = 10$ và đường thẳng $\Delta : x + y + 1 = 0$ biết đường thẳng Δ cắt (C) tại hai điểm phân biệt A, B. Độ dài đoạn thẳng AB bằng

A. $\frac{19}{2}$. **B.** $\sqrt{38}$. **C.** $\frac{\sqrt{19}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{38}}{2}$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-3)$ và bán kính $R = IA = \sqrt{10}$.

Gọi H là trung điểm dây cung AB. Khi đó ta có: $IH = d_{(I;\Delta)} = \frac{|1-3+1|}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Tam giác AIH vuông tại H nên $AH = \sqrt{10 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{38}}{2}$.

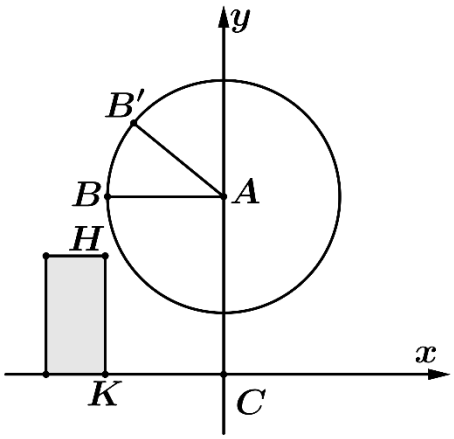
Độ dài đoạn thẳng $AB = 2AH = \sqrt{38}$.

Câu 20: Một cành cây dài 4 m, rẽ nhánh tại điểm cao 7 m trên thân cây mọc thẳng đứng so với mặt đất. Cành cây này có nguy cơ gãy tại gục A (giả sử khi gãy sẽ rơi theo một cung tròn) tại điểm rẽ nhánh tại thân cây trong mùa mưa bão. Hỏi các công trình xây theo phương thẳng đứng cao 3,7m nằm theo hướng gãy của cành cây, phải cách thân cây ít nhất bao nhiêu để được an toàn?

A. 4 m. **B.** 6,17 m. **C.** 7 m. **D.** 2,26 m.

Lời giải

Ta mô hình hóa bài toán như hình vẽ:



Với gốc cây là điểm C, điểm rẽ nhánh của cành cây tại A và điểm cuối cùng của cành cây là B

Công trình xây dựng có các điểm gần thân cây nhất là HK

Theo giả thiết thì $AC = 7$, $AB = AB' = 4\text{m}$; $HK = 3,7$ m.

Ta đặt hệ trục gắn với bài toán như hình vẽ

Khi đó ta có: $A = (0;7)$, $B' = (-4;7)$, $C \equiv O = (0;0)$; điểm $K = (x;3,7)$, $H = (x;0)$.

Cách 1:

Cung tròn tạo ra bởi điểm B khi cành cây gãy gục thuộc đường tròn tâm A và bán kính là 4, đường tròn có phương trình: $x^2 + (y-7)^2 = 4^2 \ \ (C)$.

Điểm $K = (x;3,7)$, thuộc đường thẳng $d: \ y = 3,7$.

Tọa độ các điểm giao điểm của đường tròn (C) và đường thẳng d là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x^2 + (y-7)^2 = 4^2 \\ y = 3,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{511}{100} \\ y = 3,7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\pm\sqrt{511}}{10} \approx \pm 2,26 \\ y = 3,7 \end{cases}.$$

Vậy ta có các giao điểm là $M\left(\dfrac{\sqrt{511}}{10};3,7\right)$, $N\left(\dfrac{-\sqrt{511}}{10};3,7\right)$.

Ta thấy công trình sẽ bị cành cây va phải nếu đường tròn và đoạn MN có điểm chung.

Vậy công trình phải cách thân cây ít nhất 2,26 m theo phương gãy của cành cây.

Cách 2: Công trình sẽ không bị tổn hại nếu xảy ra $AK > 4$

$$\Leftrightarrow AK^2 > 16 \Leftrightarrow x^2 + (7-3,7)^2 > 16 \Leftrightarrow x^2 > \frac{511}{100} \Leftrightarrow |x| > \frac{\sqrt{511}}{10}$$

Hay ta có kết quả xấp xỉ $|x| > 2,26$.

Vậy công trình phải cách thân cây ít nhất 2,26 m theo phương gãy của cành cây.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho $(C):(x-1)^2+y^2=10$; và điểm $A(4;1)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm $A\in(C)$.

b) Đường kính của đường tròn (C) bằng $\sqrt{10}$.

c) Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(4;1)$ có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=(3;1)$.

d) Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $A(4;1)$ đi qua điểm $N(4;3)$.

Lời giải

a) Đúng: Thay $x=4, y=1$ vào phương trình đường tròn (C) ta có: $(4-1)^2+1^2=10$.

Do đó $A\in(C)$.

b) Sai: Bán kính của (C) bằng $\sqrt{10}$. Do đó đường kính của (C) là $2\sqrt{10}$.

c) Đúng: Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;4)$ có $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=(3;1)$.

d) Sai: Phương trình tiếp tuyến đi qua điểm $A(1;4)$ có $\vec{n}=\overrightarrow{IA}=(3;1)$ nên có phương trình là $3x+y-13=0$.

Thay $x=4, y=3$ vào phương trình tiếp tuyến ta có: $3.4+3-13=2\neq 0$.

Do đó N không thuộc tiếp tuyến.

Câu 2: Cho đường tròn (C) có tâm $I(-1;2)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: x-2y+7=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $d(I,\Delta)=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

b) Đường kính của đường tròn có độ dài bằng $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$

c) Phương trình đường tròn là $(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{5}$

d) Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

Lời giải

a) Sai: (C) có tâm I và tiếp xúc Δ nên có bán kính $R=d(I,\Delta)=\dfrac{|-1-4+7|}{\sqrt{1+4}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

b) Đúng: Từ $R=d(I,\Delta)=\dfrac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow$ đường kính của đường tròn có độ dài bằng $\dfrac{4}{\sqrt{5}}$.

c) Đúng: Vậy phương trình đường tròn (C) là: $(x+1)^2+(y-2)^2=\dfrac{4}{5}$.

d) Sai: Xét $\left|\overrightarrow{OI}\right|=\sqrt{(-1)^2+(2)^2}=\sqrt{5}>R=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$.

Do đó điểm $O(0;0)$ nằm bên ngoài đường tròn (C)

Câu 3: Đường tròn (C) đi qua $A(2;-1)$ và tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox và Oy. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tâm của (C) có dạng $I(R;-R)$, R là bán kính đường tròn (C)

b) $R^2=(R-2)^2+(R-1)^2$

c) Có 2 đường tròn thỏa mãn

d) Tổng bán kính các đường tròn thỏa mãn bằng 5

Lời giải

a) Đúng: Vì điểm $A(2;-1)$ nằm ở góc phần tư thứ tư của hệ trục tọa độ và đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ

Nên tâm của đường tròn có dạng $I(R;-R)$ trong đó R là bán kính đường tròn (C).

b) Đúng: Ta có: $R^2=IA^2\Leftrightarrow R^2=(2-R)^2+(-1+R)^2\Leftrightarrow R^2-6R+5=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}R=1\\R=5\end{array}\right.$.

c) Đúng: Vậy có hai đường tròn thoả mãn đề bài là: $(x-1)^2+(y+1)^2=1$;

$(x-5)^2+(y+5)^2=25$.

d) Sai: Ta có: $\begin{cases}R_1=1\Rightarrow d_1=2\\R_2=5\Rightarrow d_2=10\end{cases}\Rightarrow d_1+d_2=12$.

Câu 4: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(2;3),B(-1;1)$ có tâm thuộc $\Delta: x-3y-11=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tâm của đường tròn (C) là $I\left(7;-\frac{4}{3}\right)$

b) Đường kính của đường tròn (C) bằng 65

c) Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

d) Đường tròn (C) đi qua điểm $N(0;2)$

Lời giải

a) Sai: Gọi tâm đường tròn là $I(3t+11;t)\in\Delta$.

Ta có: $IA=IB\Leftrightarrow IA^2=IB^2$

$\Leftrightarrow(3t+11-2)^2+(t-3)^2=(3t+11+1)^2+(t-1)^2\Leftrightarrow 22t=-55\Leftrightarrow t=-\frac{5}{2}$.

Suy ra $I\left(\frac{7}{2};-\frac{5}{2}\right)$;

b) Sai: Ta có bán kính đường tròn $R=IA=\sqrt{\left(2-\frac{7}{2}\right)^2+\left(3+\frac{5}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{65}{2}}=\frac{\sqrt{130}}{2}$.

Vậy đường kính của đường tròn (C) bằng $2.\frac{\sqrt{130}}{2}=\sqrt{130}$

c) Đúng: Xét $\left|\overrightarrow{OI}\right|=\sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2+\left(-\frac{5}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{74}}{2}<R=\frac{\sqrt{130}}{2}$.

Do đó điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

d) Đúng: Thay điểm $N(0;2)$ vào $(C):\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

$\Rightarrow\left(0-\frac{7}{2}\right)^2+\left(2+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{2}=R^2$

Do đó $N(0;2)$ nằm trên đường tròn $(C):\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{65}{2}$

Câu 5: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;2),B(3;4)$ và tiếp xúc $\Delta:3x+y-3=0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $IB=d(I,\Delta)$

b) Tổng đường kính của các đường tròn (C) bằng: $2\sqrt{10}$

c) Có hai đường tròn (C) thỏa mãn

d) Điểm $N(1;0)$ nằm trên ít nhất một đường tròn (C)

Lời giải

a) Đúng: Đường tròn (C) đi qua hai điểm $A(1;2),B(3;4)\Rightarrow IA=IB=R$

Đường tròn (C) tiếp xúc $\Delta:3x+y-3=0\Rightarrow d(I,\Delta)=R$

Vậy $IB=d(I,\Delta)$

b) Đúng: Gọi tâm đường tròn là $I(a;b)$, ta có: $d(I,\Delta)=\frac{|3a+b-3|}{\sqrt{10}}$.

Theo giả thiết $\begin{cases}IA^2=IB^2\\IA^2=\left(d(I,\Delta)\right)^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+(b-2)^2=(a-3)^2+(b-4)^2\\(a-1)^2+(b-2)^2=\frac{(3a+b-3)^2}{10}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=5 & (1)\\a^2-2a+9b^2-34b+41-6ab=0 & (2)\end{cases}$

Thay (1) vào $(2):(5-b)^2-2(5-b)+9b^2-34b+41-6(5-b)b=0$

$\Leftrightarrow 4b^2-18b+14=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=1\Rightarrow a=4\Rightarrow R_1=\sqrt{10}\\b=\frac{7}{2}\Rightarrow a=\frac{3}{2}\Rightarrow R_2=\frac{\sqrt{10}}{2}\end{array}\right.$.

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn: $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$ và $(x-4)^2+(y-1)^2=10$

c) Sai: Ta có $\begin{cases}R_1=\sqrt{10}\\R_2=\frac{\sqrt{10}}{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}d_1=2\sqrt{10}\\d_2=\sqrt{10}\end{cases}\Rightarrow d_1+d_2=3\sqrt{10}$

d) Đúng: Thay điểm $N(1;0)$ vào đường tròn $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

$\Rightarrow\left(1-\frac{7}{2}\right)^2+\left(0-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{17}{2}\neq\frac{5}{2}$

Do đó $N(1;0)$ không nằm trên đường tròn $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{5}{2}$

Thay điểm $N(1;0)$ vào đường tròn $(x-4)^2+(y-1)^2=10\Rightarrow(1-4)^2+(0-1)^2=10=R^2$

Do đó $N(1;0)$ nằm trên đường tròn $(x-4)^2+(y-1)^2=10$

Vậy điểm $N(1;0)$ nằm trên ít nhất một đường tròn (C)

Câu 6: Cho đường tròn (C) có phương trình $x^2+y^2-6x+2y+6=0$ và hai điểm $A(1;-1),B(1;3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Điểm A thuộc đường tròn

b) Điểm B nằm trong đường tròn

c) $x=1$ phương trình tiếp tuyến của (C) tại điểm A

d) Qua B kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là: $x=1$; $3x+4y-12=0$

Lời giải

a) Đúng: Đường tròn (C) có tâm $I(3;-1)$ bán kính $R=\sqrt{9+1-6}=2$.

Ta có: $IA=2=R$

$\Rightarrow A$ thuộc đường tròn

b) Sai: $IB=2\sqrt{5}>R\Rightarrow$ điểm B nằm ngoài đường tròn.

c) Đúng: Tiếp tuyến của (C) tại điểm A nhận $\overrightarrow{AI}=(2;0)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $2(x-1)+0(y+1)=0\Leftrightarrow x=1$.

d) Sai: Phương trình đường thẳng Δ đi qua B có dạng: $a(x-1)+b(y-3)=0$ (với $a^2+b^2\neq0$) hay $ax+by-a-3b=0$.

Đường thẳng Δ là tiếp tuyến của đường tròn $\Leftrightarrow d(I,\Delta)=R$

$\Leftrightarrow\frac{|3a-b-a-3b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2\Leftrightarrow(a-2b)^2=a^2+b^2\Leftrightarrow3b^2-4ab=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b=0\\3b=4a\end{array}\right.$.

» Với $b=0$, chọn $a=1$; phương trình tiếp tuyến là $x=1$.

» Với $3b=4a$, chọn $a=3\Rightarrow b=4$; phương trình tiếp tuyến là $3x+4y-15=0$.

Vậy qua B kẻ được hai tiếp tuyến với (C) có phương trình là: $x=1$; $3x+4y-15=0$.

Câu 7: Đường tròn (C) đi qua ba điểm $A(2;0),B(0;-3),C(5;-3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường kính của đường tròn (C) bằng $\sqrt{26}$

b) Hoành độ của tâm đường tròn (C) bằng $-\frac{5}{2}$

c) Đường tròn (C) đi qua điểm $N(3;0)$

d) Gọi I là tâm của đường tròn (C) khi đó độ dài đoạn $IO = 5\sqrt{2}$

Lời giải

Gọi tâm đường tròn là $I(a;b)$.

Theo giả thiết $\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-2)^2 + b^2 = a^2 + (b+3)^2 \\ (a-2)^2 + b^2 = (a-5)^2 + (b+3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 6b = -5 \\ 6a - 6b = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{5}{2} \\ b = -\dfrac{5}{2} \end{cases}$$

Bán kính đường tròn là $R = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 2\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{13}{2}}$.

a) Đúng: Ta co $R = \sqrt{\frac{13}{2}} \Rightarrow d = 2\sqrt{\frac{13}{2}} = \sqrt{26}$.

b) Sai: Ta có tâm $I\left(\frac{5}{2};-\frac{5}{2}\right) \Rightarrow$ hoành độ của tâm bằng $\frac{5}{2}$.

c) Đúng: Xét $\left|\overrightarrow{NI}\right| = \sqrt{\left(\frac{5}{2} - 3\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2} = R$.

Do đó đường tròn (C) đi qua điểm $N(3;0)$

d) Sai: Xét $\left|\overrightarrow{IO}\right| = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Câu 8: Đường tròn (C) đi qua điểm $A(-2;6)$ và tiếp xúc với đường thẳng $\Delta : 3x - 4y - 15 = 0$ tại $B(1;-3)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường kính của đường tròn (C) bằng 10

b) Tâm của đường tròn (C) có tung độ bằng -2

c) Khoảng cách từ tâm của đường tròn (C) đến đường thẳng Δ bằng 4

d) Điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

Lời giải

Gọi tâm đường tròn $I(a;b)$.

Ta có vectơ chỉ phương của Δ là $\vec{u}_\Delta = (4;3)$ và $\overrightarrow{IB} = (1-a;-3-b)$.

Theo giả thiết: $\overrightarrow{IB} \perp \vec{u}_\Delta \Rightarrow \overrightarrow{IB}.\vec{u}_\Delta = 0 \Rightarrow 4a + 3b + 5 = 0 \quad (1)$.

Ta lại có $IA = IB \Leftrightarrow IA^2 = IB^2$

$\Leftrightarrow (-2-a)^2 + (6-b)^2 = (1-a)^2 + (-3-b)^2 \Leftrightarrow a - 3b + 5 = 0 \quad (2)$

Giải hệ (1) và (2): $\begin{cases} 4a+3b=-5 \\ a-3b=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=1 \end{cases}$.

Suy ra $R=IA=\sqrt{(-2+2)^2+(6-1)^2}=5$.

a) Đúng: Từ $R=IA=5 \Rightarrow$ Đường kính của đường tròn (C) bằng 10.

b) Sai: Ta có tâm $I(-2;1) \Rightarrow$ tung độ của tâm bằng 1.

c) Sai: $\mathrm{d}(I;\Delta)=\dfrac{|3.(-2)-4.1-15|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=5$

d) Đúng: Xét $|\overrightarrow{OI}|=\sqrt{(-2)^2+(1)^2}=\sqrt{5}<R=5$.

Do đó điểm $O(0;0)$ nằm bên trong đường tròn (C)

Câu 9: Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm $I(-2;3)$ và điểm $M(2;5)$ và hai đường thẳng $d:12x-5y+13=0$ và $\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Đường tròn tâm I và đi qua M có bán kính $R=2\sqrt{5}$.

b) Đường tròn tâm I và đi qua M có phương trình $(x+2)^2+(y-3)^2=10$.

c) Đường tròn tâm I và tiếp xúc đường thẳng d có phương trình $(x+2)^2+(y-3)^2=4$.

d) Phương trình đường tròn có tâm thuộc đường thẳng $\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases}$ và đi qua hai điểm I và M là: $(x+4)^2+(y-4)^2=85$.

Lời giải

a) Đúng: Đường tròn tâm $I(-2;3)$ và đi qua $M(2;5)$ có bán kính

$R=IM=\sqrt{(2+2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{5}$.

b) Sai: Đường tròn tâm $I(-2;3)$ và đi qua $M(2;5)$ có bán kính

$R=IM=\sqrt{(2+2)^2+(5-3)^2}=2\sqrt{5}$.

Suy ra phương trình đường tròn cần tìm: $(x+2)^2+(y-3)^2=20$.

c) Đúng: Đường tròn tâm $I(-2;3)$ và tiếp xúc đường thẳng $d:12x-5y+13=0$ có bán kính

$R=d(I,d)=\dfrac{|12.(-2)-5.3+13|}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=2$.

Phương trình đường tròn cần tìm: $(x+2)^2+(y-3)^2=4$

d) Sai: Gọi K là tâm của đường tròn, ta có $K\in\Delta$ và $KI=KM=R$.

$K\in\Delta:\begin{cases} x=t \\ y=-t \end{cases} \Rightarrow K(t;-t)$.

$KI = KM \Leftrightarrow KI^2 = KM^2 \Leftrightarrow (-2-t)^2 + (3+t)^2 = (2-t)^2 + (5+t)^2 \Leftrightarrow -4t + 16 = 0 \Leftrightarrow t = 4$.

Suy ra đường tròn có tâm $K(4;-4)$ và bán kính $R = KM = \sqrt{85}$ có phương trình là: $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 85$.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho điểm $M(2;1)$ và đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ .Phương trình đường thẳng (d) qua điểm M và cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A;B$ sao cho độ dài AB ngắn nhất có dạng $(d): ax + by + c = 0$ Tính $a+b+c$.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R = 2$ và $IM = \sqrt{2} < R = 2$ nên điểm M nằm trong đường tròn.

Giả sử gọi H là trung điểm của AB khi đó $AB = 2HB = 2.\sqrt{IB^2 - IH^2} = 2\sqrt{4 - IH^2}$

Vì $IH \le IM = \sqrt{2}$ nên $AB = 2\sqrt{4 - IH^2} \ge 2\sqrt{4 - IM^2} = 2\sqrt{2}$

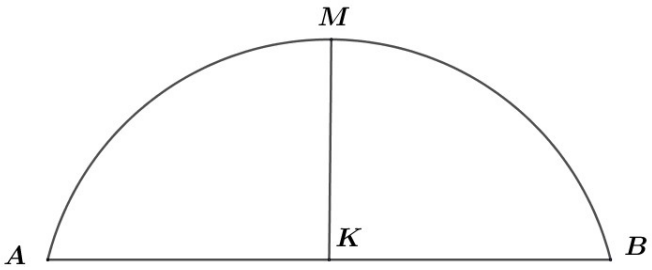
Do đó AB ngắn nhất khi $IH = IM$

Lúc đó đường thẳng d qua $M(2;1)$ và nhận $\overrightarrow{IM} = (1;-1)$ làm vecto pháp tuyến

Phương trình đường thẳng (d) là: $1(x-2) - 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow (d): x - y - 1 = 0$

Khi đó $a = 1; b = -1; c = -1$ nên $a + b + c = -1$.

Câu 2: Một chiếc cầu được thiết kế dưới dạng 1 cung tròn (Hình vẽ)

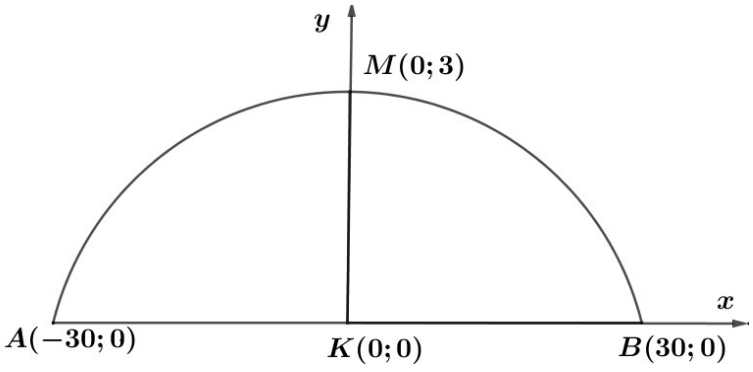


Biết độ dài $AB = 60\text{m}$, chiều cao $MK = 3\text{m}$. Tính bán kính của đường tròn chứa cung AMB

(Biết MK đi qua tâm của đường tròn chứa cung AMB)

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Kxy như hình vẽ $\Rightarrow A(-30;0), B(30;0), M(0;3)$.



Đường tròn chứa cung AMB có phương trình dạng: $x^2+y^2+2ax+2by+c=0$ đi qua $A,M,B.$

Nên ta có hệ phương trình:

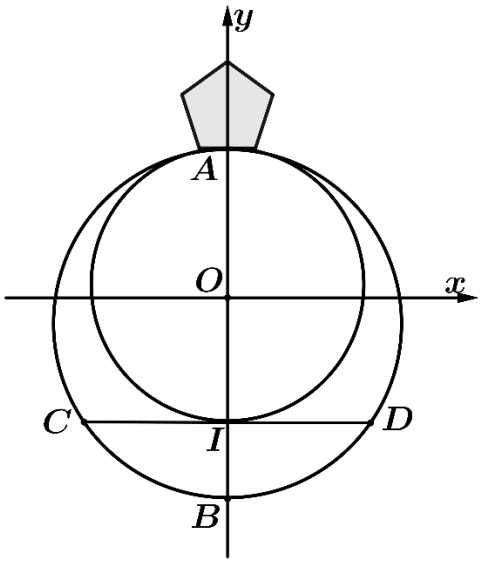
$$\begin{cases}900-60a+c=0\\900+60a+c=0\\9+6b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=0\\c=-900\\b=\dfrac{297}{2}\end{cases}$$

Bán kính đường tròn chứa cung AMB

$$\Rightarrow R=\sqrt{a^2+b^2-c}=\sqrt{0^2+\left(\frac{297}{2}\right)^2+900}=151,5\,\text{m}.$$

Vậy $R=151,5\,\text{m}.$

Câu 3: Giả sử có chiếc nhẫn đường kính $20\,\text{mm}.$ Người thợ muốn sửa thành chiếc nhẫn vừa với ngón tay đường kính $16\,\text{mm}$ thì người thợ tính độ dài dây cung CD để cắt chiếc nhẫn ở hai điểm C và D rồi hàn lại (hình vẽ). Tính độ dài CD.



Lời giải

Đường tròn (C) biểu diễn cho chiếc nhẫn đường kính $20\,\text{mm}$. Đường tròn (C') biểu diễn cho ngón tay đường kính $16\,\text{mm}$.

Ta chọn hệ trục tọa độ có gốc tọa độ O là tâm của đường tròn (C), đơn vị trên các trục là $1\,\text{mm}$

Đường tròn (C) có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=10$ nên phương trình là $x^2+y^2=100$.

Ta có $IA=16\Rightarrow IB=20-16=4\Rightarrow OI=6$.

Điểm $D(d;-6)\ (d>0)$ thuộc (C) nên có: $(-6)^2+d^2=100\Rightarrow d=8$.

Vậy $CD=2d=16\,\text{mm}.$

Câu 4: Có hai hòn đảo xem như hình tròn là (C) có tâm ở vị trí $I(3;4)$, bán kính $R=7\,\text{km}$ và (C') có tâm ở vị trí $J(15;9)$, bán kính $R'=5\,\text{km}$. Người ta dự định xây một cây cầu nối hai hòn đảo. Tính độ dài ngắn nhất của cây cầu?

Lời giải

Ta có khoảng cách giữa tâm của hai đảo là: $IJ=\sqrt{(15-3)^2+(9-4)^2}=13(\text{km})$.

Cây cầu có chiều dài ngắn nhất khi điểm đặt của nó nằm trên giao điểm của đường nối tâm của hai đảo với hai đường tròn. Khi đó khoảng cách ngắn nhất bằng:

$$AB=IJ-R-R'=13-7-5=1(\text{km}).$$

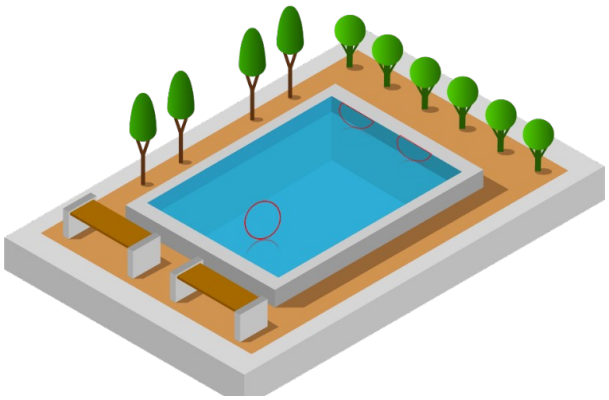
Câu 5: Là một trong bảy kì quan thế giới, ngọn hải đăng Alexandria sừng sững nghìn năm chiếu ánh sáng dẫn đường cho nhiều con tàu cập bến Ai Cập an toàn. Ngọn hải đăng này ở tọa độ $(3;4)$, một trong các điểm được nó chiếu sáng xa nhất có tọa độ $(23;4)$. Tìm bán kính đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà ánh sáng từ ngọn hải đăng chiếu tới.

Lời giải

Đường tròn biểu diễn tập hợp các điểm xa nhất mà ánh sáng từ ngọn hải đăng chiếu tới có tâm tọa độ $(3;4)$ đi qua điểm $(23;4)$ có bán kính: $R=\sqrt{(23-3)^2+(4-4)^2}=20$.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $(x-3)^2+(y-4)^2=400$.

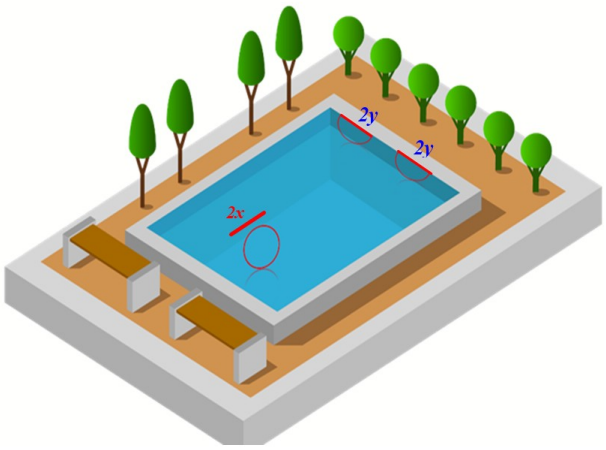
Câu 6: Bên trong một hồ bơi, người ta dự định thiết kế hai bể sục nửa hình tròn bán kính bằng nhau và một bể sục hình tròn (tham khảo hình vẽ) để người bơi có thể tựa lưng vào thành các bể sục thư giãn.



Biết tổng chu vi của ba bể là $32\,\text{m}.$ Tổng diện tích ba bể sục là nhỏ nhất khi bán kính mỗi bể sục lần lượt bằng a (m) và b (m) (trong tính toán lấy $\pi=3,14,$ độ dài tính theo mét và làm tròn tới chữ số thập phân thứ hai). Tính $a+b$.

Lời giải

Gọi bán kính mỗi bể sục hình tròn và nửa hình tròn tương ứng là $x,\ y\ (m)\ (x,y>0)$



Tổng chu vi ba bể là $32\,\text{m}$, ta có:

$$2.3,14.x+2.3,14.y+4y=32 \Leftrightarrow y=\frac{8-1,57x}{2,57} \Leftrightarrow 1,57x+2,57y-8=0.$$

Gọi tổng diện tích của ba bể sục là $S\left(m^2\right)$, $S>0$

Khi đó $3,14x^2+3,14y^2=S \Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{S}{3,14}$.

Ta có $3,14S=x^2+y^2=x^2+\left(\frac{8-1,57x}{2,57}\right)^2=x^2+\frac{1}{2,57^2}\left(1,57^2x^2-16.1,57x+64\right)$

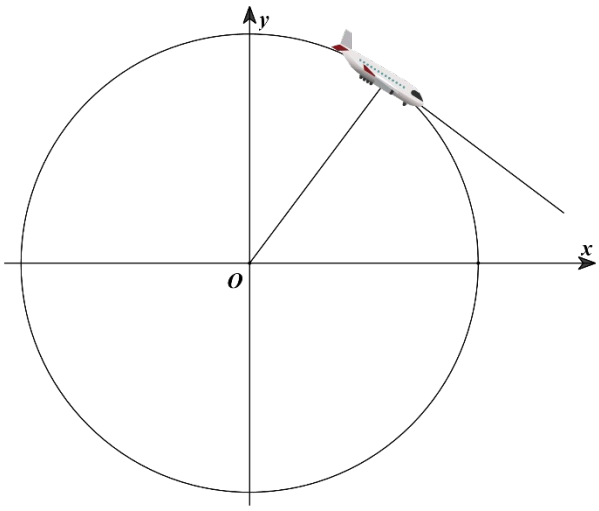
$$=\left(1+\frac{1,57^2}{2,57^2}\right)x^2-\frac{16.1,57}{2,57^2}x+\frac{64}{2,57^2}.$$

$S_{\min}$ khi và chỉ khi $x=\frac{16.1,57}{2,57^2}:\left[2\left(1+\frac{1,57^2}{2,57^2}\right)\right]=1,38>0$ (thỏa mãn) $\Rightarrow y=2,27$.

Vậy tổng diện tích bể sục là nhỏ nhất khi bán kính của bể hình tròn và bể nửa hình tròn tương ứng là $a=1,38\text{m}; b=2,27\,\text{m}.$

Khi đó $a+b=1,38+2,27=3,65$ (m).

Câu 7: Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, một vật chuyển động nhanh trên đường tròn có phương trình $x^2+y^2=25.$ Khi tới vị trí $M(3;4)$ thì vật bị văng khỏi quỹ đạo tròn và ngay sau đó, một khoảng thời gian ngắn bay theo hướng tiếp tuyến của đường tròn (tham khảo hình vẽ).



Hỏi trong khoảng thời gian ngắn ngay sau khi văng, vật chuyển động trên đường thẳng có phương trình $ax+4y+c=0$. Tính giá trị biểu thức $a+c$.

Lời giải

Xét đường tròn $(C):x^2+y^2=25$ có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=5.$

Tiếp tuyến d của đường tròn (C) tại điểm $M(3;4)$ có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{OM}=(3;4)$ và phương trình $d:3(x-3)+4(y-4)=0\Leftrightarrow d:3x+4y-25=0.$

Khi đó $a=3;c=-25$ nên $a+c=-23$.

Câu 8: Chuyển động của một vật thể trong khoảng thời gian 180 phút được thể hiện trong mặt phẳng tọa độ. Theo đó, tại thời điểm $t(0\le t\le 180)$ vật thể ở vị trí có tọa độ $(3+\sin t^\circ;5+\cos t^\circ)$. Kết thúc quá trình chuyển động thì vật bị văng khỏi quỹ đạo tròn chuyển động và ngay sau đó, trong một khoảng thời gian ngắn bay theo hướng tiếp tuyến của đường tròn quỹ đạo. Trong khoảng thời gian ngắn ngay sau khi văng, vật chuyển động trên đường thẳng $y=a$. Tìm a?

Lời giải

Quỹ đạo chuyển động của vật thể trong khoảng thời gian $t(0\le t\le 180)$ là đường tròn (C) có phương trình $(x-3)^2+(y-5)^2=1$.

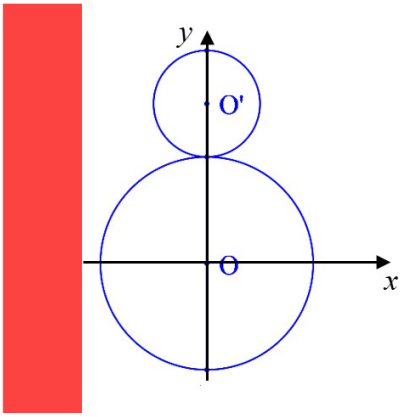
Kết thúc chuyển động, vật thể tới vị trí $M(3;4)$. Sau đó, trong khoảng thời gian ngắn vật chuyển động theo hướng tiếp tuyến của đường tròn (C)tại điểm $M(3;4)$.

Tiếp tuyến này đi qua điểm $M(3;4)$và có VTPT $\vec{n}=(0;1)$nên có phương trình là $y-4=0$.

Hay $y=4$ nên giá trị của $a=4$.

Câu 9: Ở các nước xứ lạnh, vào mùa Đông thường có tuyết rơi dày đặc khắp các con đường, trẻ em tại đây rất thích đắp hình dạng của người tuyết. Có thể xem phần thân dưới và thân trên của người tuyết là hai hình cầu tiếp xúc nhau. Vào ba đêm ta dùng một chiếc đèn pin soi vuông góc với người tuyết thì được hình ảnh là hai hình tròn tiếp xúc nhau như hình vẽ. Tính tổng bán kính

phương trình đường tròn lớn và đường tròn nhỏ biết kích thước của hai viên tuyết cần đắp để được một người tuyết cao 1,8m có đường kính của hần thân dưới phải gấp đôi đường kính của phần thân trên người tuyết (theo đơn vị cm).



Lời giải

Ta có: $1,8\text{ m}=180$ cm. Gọi r (cm) là bán kính của đường tròn nhỏ $(r>0)$.

Đường kính của đường tròn nhỏ là $2r$ (cm); Đường kính của đường tròn lớn là: $2.2r=4r$ (cm).

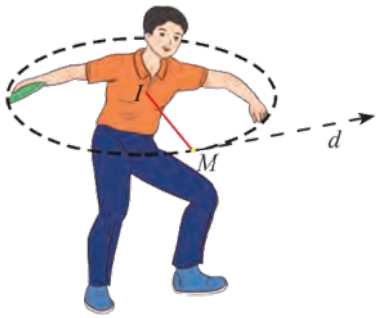
Ta có: $2r+4r=6r=180$ (vì (O) tiếp xúc với (O')) $\Leftrightarrow r=30$ (cm).

Phương trình đường tròn (O) có tâm $O(0;0)$ và bán kính $R=2r=60$: $x^2+y^2=3600$.

Phương trình đường tròn (O') có tâm $O'(0;90)$ và bán kính $r=30$: $(x-90)^2+y^2=900$.

Vậy tổng bán kính hai đường tròn bằng 90 cm.

Câu 10: Trong thể thao, một vận động ném đĩa đã vung đĩa theo một đường tròn (C) có phương trình là $(x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{169}{144}$. Khi đó, người đó vung đĩa đến vị trí điểm $M\left(\dfrac{17}{12};2\right)$ thì buông đĩa. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm M có dạng $(d):ax+by+c=0$. Tính giá trị của $\dfrac{a}{60}+\dfrac{b}{144}+\dfrac{c}{373}$



Lời giải

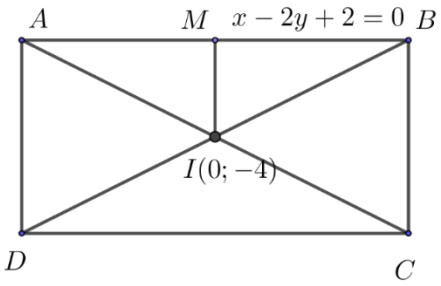
Đường tròn $(C):(x-1)^2+(y-1)^2=\dfrac{169}{144}$ có tâm $I(1;1)$.

Điểm $M\left(\dfrac{17}{12};2\right)$ thuộc đường tròn (C).

Phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) tại điểm $M\left(\frac{17}{12};2\right)$ là đường thẳng đi qua M và nhận vectơ $\overrightarrow{IM}=\left(\frac{5}{12};1\right)$ làm VTPT nên có phương trình $60x+144y-373=0$.

Câu 11: Cho hình chữ nhật $ABCD$ có tâm $I(0;-4)$, phương trình cạnh AB là $x-2y+2=0$ và $AB=2AD$. Biết rằng đỉnh A có tung độ dương. Khi đó, phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC có tâm là $(m;n)$ và bán kính r. Giá trị $T=m+n+r$ là bao nhiêu? (kết quả lấy đến 1 chữ số có nghĩa).

Lời giải



Gọi M là trung điểm của AB.

Đường thẳng IM đi qua $I(0;-4)$ và vuông góc với AB nên IM có phương trình là: $2x+y+4=0$.

Do $M=AB\cap IM$ nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình sau:

$$\begin{cases}x-2y+2=0\\2x+y+4=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\\y=0\end{cases}\Rightarrow M(-2;0).$$

Gọi $A(2t-2;t)\in AB,(t>0)$.

Do M là trung điểm của AB nên $B(-2-2t;-t)$

Do I là trung điểm của BD nên $D(2t+2;t-8)$

Theo bài ra ta có: $AB=2AD\Leftrightarrow AB^2=4AD^2\Leftrightarrow(-4t)^2+(-2t)^2=4\left[4^2+(-8)^2\right]$

$\Leftrightarrow 20t^2=320\Leftrightarrow t^2=16\Leftrightarrow t=\pm 4$

Kết hợp điều kiện ta được điểm $A(6;4)$. Khi đó: $B(-10;-4);C(-6;-12);D(10;-4)$.

Gọi phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC là:

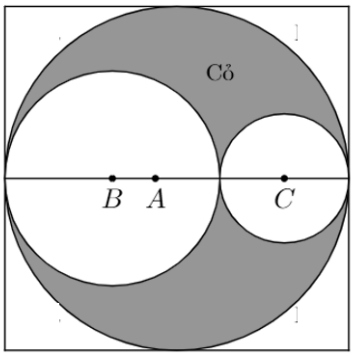
$$x^2+y^2+2ax+2by+c=0,\ (a^2+b^2-c>0).$$

Thay tọa độ các điểm $I;B;C$ vào phương trình trên ta có hệ phương trình sau:

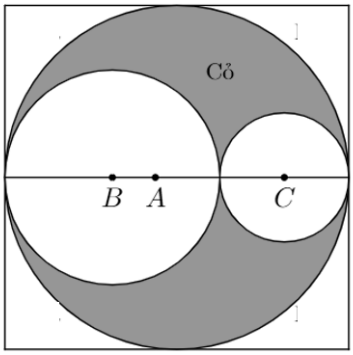
$$\begin{cases} -8b+c=-16 \\ -20a-8b+c=-116 \\ -12a-24b+c=-180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=5 \\ b=\dfrac{13}{2} \\ c=36 \end{cases}$$ (thỏa mãn).

Vậy phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác IBC là: $x^2+y^2+10x+13y+36=0$ với tâm là $\left(-5;-\dfrac{13}{2}\right)$ và bán kính $r=\dfrac{5\sqrt{5}}{2}$. Vậy $T=m+n+r\approx -5.9$.

Câu 12: Thiết kế khu vườn Hạnh Phúc hình vuông cạnh $10\,\text{m}$ như hình vẽ. Phần được tô đậm dùng để trồng cỏ, phần còn lại lát gạch. Biết mỗi mét vuông trồng cỏ chi phí 100 nghìn đồng, mỗi mét vuông lát gạch chi phí 300 nghìn đồng. Khi diện tích phần lát gạch là nhỏ nhất thì tổng chi phí thi công vườn hoa Hạnh Phúc bằng (làm tròn đến hàng nghìn)?



Lời giải

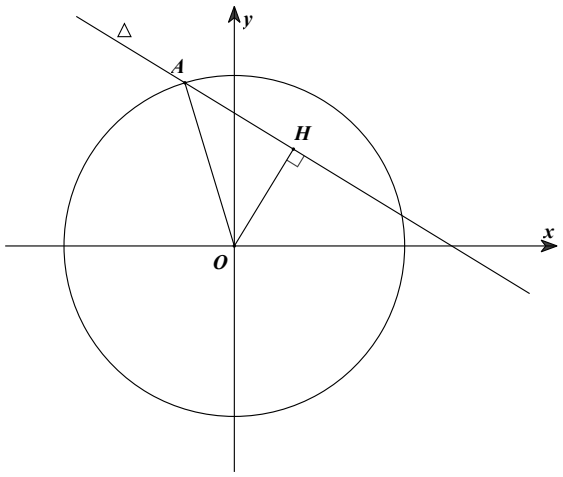


Gọi $x,y(m)$ lần lượt là bán kính của phần lát gạch hình tròn $(x,y>0)$ ta có $x+y=5$.

Gọi $S(m^2)$ là phần diện tích được lát gạch của khu vườn $(S>0)$, ta có

$$S=100-25\pi+\pi x^2+\pi y^2=100+\pi\left(x^2+y^2-25\right) \Leftrightarrow x^2+y^2=\frac{S+25\pi-100}{\pi}.$$

Ta có: $(C): x^2+y^2=\dfrac{S+25\pi-100}{\pi}$ có tâm $O(0;0)$, bán kính $R=\sqrt{\dfrac{S+25\pi-100}{\pi}}$ và đường thẳng $\Delta: x+y-5=0$. Khi đó bài toán trở thành: Tìm R nhỏ nhất để (C) và Δ có ít nhất một điểm chung, với hoành độ và tung độ đều là các số dương?



Ta có (C) và Δ có ít nhất một điểm chung khi và chỉ khi

$$R \ge d(O,\Delta) \Leftrightarrow \sqrt{\frac{S+25\pi-100}{\pi}} \ge \frac{5}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow S+25\pi-100 \ge \frac{25\pi}{2} \Leftrightarrow S \ge 100-\frac{25\pi}{2}.$$

Vậy diện tích phần lát gạch nhỏ nhất bằng $S_{\min}=100-\frac{25\pi}{2}$.

Từ đó chi phí để thi công khu vườn Hạnh phúc là $100.(100-S_{\min})+300.S_{\min}=22146$ nghìn đồng.