

**ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC
TỰ NHIÊN**

**THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN KHTN
NĂM HỌC 2025 – 2026**

Môn: TOÁN

ĐỀ CHÍNH THỨC

Thời gian làm bài: 120 phút

Câu I.

- 1) Giải phương trình $x + 2\sqrt{(x+1)(x+6)} + 2\sqrt{x+1} = 2 + 2\sqrt{x+6}$
- 2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + 6y^2 + 7xy + x + 6y = 21 \\ 21(22 - 5y^2 - 5xy + x - 4y) = 27(x + 6y) \end{cases}$$

Câu II.

- 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn

$$y + \frac{1}{y} = \frac{x^4 + 6x^2 + 1}{2x(x^2 + 1)}$$

- 2) Với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = \frac{3}{2}$, tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)} + \frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)} + \frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)}$$

Câu III.

Cho tam giác ABC nhọn, không cân. Trên các cạnh CA, AB lần lượt lấy các điểm E, F (không trùng các đỉnh tam giác) sao cho $AE = AF$. Trên đường thẳng EF lấy các điểm M, N sao cho CM vuông góc CA, BN vuông góc BA. K là giao điểm của BN và CM.

- 1) Chứng minh rằng $KM = KN$.

- 2) Dùng các hình bình hành ANQF và AMRE. Chứng minh rằng $\angle NQK = \angle MRK$.

- 3) Gọi L, J lần lượt là hình chiếu vuông góc của M, N lên đường thẳng BC, S là giao điểm của JF và LE, T là điểm đối xứng với S qua EF. Chứng minh rằng A, T, K thẳng hàng.

Câu IV.

Tìm số nguyên dương k nhỏ nhất sao cho với mọi cách sắp xếp 99 điểm màu đỏ và 100 điểm màu xanh trên mặt phẳng (không có 3 điểm nào thẳng hàng), ta luôn vẽ được k đường thẳng, mỗi đường thẳng không đi qua điểm nào trong các điểm trên và các đường thẳng đó chia mặt phẳng thành các miền mà trong mỗi miền không có 2 điểm khác màu.

ĐÁP ÁN**Bài 1.**

a) Cách 1. Điều kiện $x \geq -1$

Đặt $a = \sqrt{x+1}, b = \sqrt{x+6}$ khi đó phương trình có thể được viết lại thành

$$a^2 - 1 + 2ab + 2a = 2 + 2b$$

Hay $2b(a-1) + a^2 + 2a - 3 = 0$

Một cách tương đương, ta được

$$(a-1)(2b+a+3) = 0$$

Mà $2b+a+3 > 0$ nên $a = 1$, hay $\sqrt{x+1} = 1$

Từ đó, ta có $x = 0$ (thử lại thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

Cách 2. Điều kiện $x \geq -1$

Dễ thấy $x = 0$ là nghiệm của phương trình

Xét trường hợp $x \neq 0$ khi đó phương trình có thể được viết lại thành

$$x = 2(1 - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+6} + 1)$$

Hay $x = -\frac{2x}{1 + \sqrt{x+1}}(\sqrt{x+6} + 1)$

Một cách tương đương ta có $1 = -\frac{2x}{1 + \sqrt{x+1}}(\sqrt{x+6} + 1)$, mâu thuẫn vì vế phải có giá trị âm. Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 0$.

b) Phương trình thứ nhất của hệ có thể được viết lại thành

$$(x+6y)(x+y+1) = 21$$

Thay vào phương trình thứ hai của hệ ta được

$$(x+6y)(x+y+1)[(x+6y)(x+y+1) + 1 - 5y^2 - 5xy + x - 4y] = 27(x+6y)$$

Hay $(x+6y)(x+y+1)(x+y+1)^2 = 27(x+6y)$

Từ đây, với chú ý $x+6y \neq 0$ (suy ra từ phương trình thứ nhất)

Ta được $x+y = 2$

Kết hợp với $(x+6y)(x+y+1) = 21$ ta được $x+6y = 7$

Từ đó $x = y = 1$

Thử lại thỏa mãn

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x; y) = (1; 1)$.

Bài 2.

a) Điều kiện: $x, y \neq 0$

Chú ý rằng nếu (x, y) là nghiệm thì $(-x, -y)$ cũng là nghiệm và x, y cùng dấu nên không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x, y > 0$

Tiếp theo, ta có hai cách giải sau

Cách 1. Từ giả thiết, ta có $y + \frac{1}{y} = \frac{x^2 + 1}{2x} + \frac{2x}{x^2 + 1}$.

Chuyển vế, phân tích nhân tử, ta được

$$\left(y - \frac{x^2 + 1}{2x}\right) \left[1 - \frac{2x}{y(x^2 + 1)}\right] = 0$$

Từ đó, ta có hai trường hợp sau:

TH1: $y = \frac{x^2 + 1}{2x}$. Trong trường hợp này, với chú ý y là số nguyên, ta suy ra $x^2 + 1$ chia hết cho x . Từ đó 1 chia hết cho x , kéo theo $x = 1$ (do $x > 0$). Suy ra $y = 1$. Thử lại thỏa mãn

TH2: $1 - \frac{2x}{y(x^2 + 1)} = 0$

Trong trường hợp này ta có $\frac{2x}{x^2 + 1} = y$. Chú ý rằng $0 < \frac{2x}{x^2 + 1} \leq \frac{2x}{2x} = 1$

Ta có $0 < y \leq 1$, suy ra $y = 1$.

Từ đó $\frac{2x}{x^2 + 1} = 1$ hay $(x - 1)^2 = 0$

Suy ra $x = 1$. Thử lại thỏa mãn

Vậy có tất cả hai cặp số (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(1, 1)$ và $(-1, -1)$

Cách 2. Phương trình có thể được viết lại thành

$$2x(x^2 + 1)(y^2 + 1) = y(x^4 + 6x^2 + 1)$$

Từ đây ta suy ra $y(x^4 + 6x^2 + 1)$ chia hết cho x

Mà $(x^4 + 6x^2 + 1, x) = 1$ nên y chia hết cho x

Bây giờ, đặt $y = kx$ với k nguyên dương

Phương trình có thể được viết lại thành

$$2(x^2 + 1)(k^2 x^2 + 1) = k(x^4 + 6x^2 + 1) \quad (1)$$

Với $x = 1$, thay vào phương trình trên, ta dễ dàng tìm được $k = 1$. Từ đó $y = 1$.

Thử lại thỏa mãn

Với $k = 1$, thay vào phương trình trên, ta dễ dàng tìm được $x = 1$. Từ đó $y = 1$.

Thử lại thỏa mãn

Xét trường hợp $x \geq 2, k \geq 2$. Khi đó phương trình (1) không thể thỏa mãn vì

$$2(x^2 + 1)(k^2 x^2 + 1) > 2k^2 x^2 (x^2 + 1) \geq 4kx^2 (x^2 + 1) = k(4x^4 + 4x^2) > k(x^4 + 6x^2 + 1)$$

Vậy, có tất cả hai cặp số (x, y) thỏa mãn yêu cầu đề bài là $(1, 1)$ và $(-1, -1)$

b)

Cách 1: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

$$M = \frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2(a+2b)} + \frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2(b+2c)} + \frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2(c+2a)}$$

$$M = \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-a}\right)^2}{a^2+2ab} + \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{b^2}}{2-b}\right)^2}{b^2+2bc} + \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{c^2}}{2-c}\right)^2}{c^2+2ca}$$

$$M \geq \frac{\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-a} + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{2-b} + \frac{\sqrt[3]{c^2}}{2-c}\right)^2}{(a+b+c)^2} = \frac{4\left(\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-a} + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{2-b} + \frac{\sqrt[3]{c^2}}{2-c}\right)^2}{9}$$

Mặt khác, theo bất đẳng thức AM-GM, với mọi $0 < x < \frac{3}{2}$ thì

$$\frac{\sqrt[3]{x^2}}{2-x} = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2}(2-x)} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{x}{\sqrt[3]{x \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot (2-x)}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{3x}{\left(x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)(2-x)}$$

$$= \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{x}{(x+1)(2-x)} \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{x}{\left(\frac{x+1+2-x}{2}\right)^2} = \frac{3}{\sqrt[3]{4}} \cdot \frac{4}{9}x = \frac{4}{3\sqrt[3]{4}}x$$

Sử dụng đánh giá này ta có

$$\frac{\sqrt[3]{a^2}}{2-a} + \frac{\sqrt[3]{b^2}}{2-b} + \frac{\sqrt[3]{c^2}}{2-c} \geq \frac{4}{3\sqrt[3]{4}}(a+b+c) = \sqrt[3]{2}$$

$$M \geq \frac{4(\sqrt[3]{2})^2}{9} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$$

Do đó

Mặt khác, với $a = b = c = \frac{1}{2}$ thì $M = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$. Vậy $\min M = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$

Cách 2. Sử dụng bất đẳng thức AM-GM ta có

$$\frac{\sqrt[3]{a}}{(2-a)^2} = \frac{3a\sqrt[3]{4}}{3\sqrt[3]{2a \cdot 2a \cdot 1(2-a)^2}} \geq \frac{3a\sqrt[3]{4}}{(4a+1)(2-a)^2} = \frac{12a\sqrt[3]{4}}{(4a+1)(4-2a)(4-2a)}$$

$$\geq \frac{27 \cdot 12a\sqrt[3]{4}}{(4a+1+4-2a+4-2a)^3} = \frac{4a\sqrt[3]{4}}{9}$$

Chúng minh tương tự ta có

$$\frac{\sqrt[3]{b}}{(2-b)^2} \geq \frac{4b\sqrt[3]{4}}{9}; \frac{\sqrt[3]{c}}{(2-c)^2} \geq \frac{4c\sqrt[3]{4}}{9}$$

Từ đó, theo bất đẳng thức Cauchy-Schwarz ta có

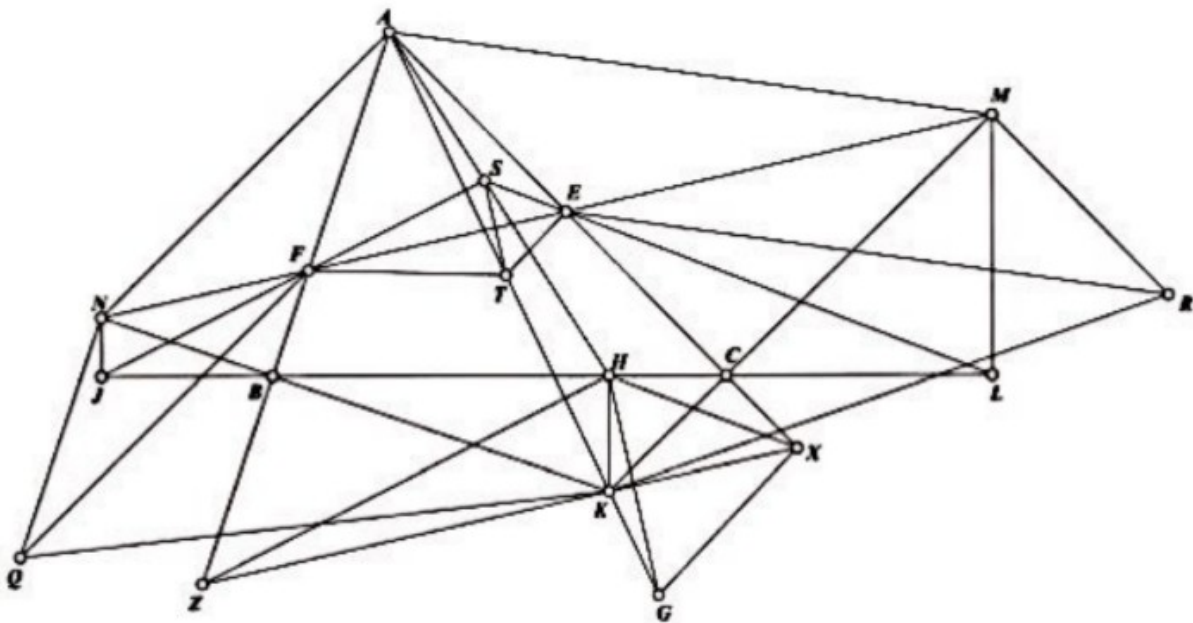
$$M \geq \frac{4\sqrt[3]{4}}{9} \left(\frac{a}{a+2b} + \frac{b}{b+2c} + \frac{c}{c+2a} \right)$$

$$M \geq \frac{4\sqrt[3]{4}}{9} \left(\frac{a^2}{a^2+2ab} + \frac{b^2}{b^2+2bc} + \frac{c^2}{c^2+2ca} \right)$$

$$M \geq \frac{4\sqrt[3]{4}}{9} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca} = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $a = b = c = \frac{1}{2}$. Vậy $\min M = \frac{4\sqrt[3]{4}}{9}$.

Bài 3.



a) Do $AE = AF$ nên tam giác AEF cân tại A

Suy ra: $\angle AEF = \angle AFE$. Từ đó $\angle BFN = \angle CEM$

Bây giờ, xét hai tam giác BFN và CEM có $\angle BFN = \angle CEM$

Và $\angle FBN = \angle ECM = 90^\circ$ nên $\triangle BFN \sim \triangle CEM$ (g.g)

Từ đó $\angle BNF = \angle CME$ hay $\angle KNM = \angle KMN$

Suy ra tam giác KMN cân tại K , từ đó $KM = KN$

b) Do tứ giác $ANQF$ là hình bình hành nên $NQ = AF$ và $NQ \parallel AF$

Vì $NQ \parallel AF$ và $BN \perp BA$ nên $NQ \perp NK$ từ đó $\angle KNQ = 90^\circ$

Kết hợp với $KN = KM$ suy ra $\triangle KNQ = \triangle KMR$ (c.c.c) từ đó $\angle NQK = \angle MRK$

c) Qua điểm K, kẻ đường thẳng song song với đường thẳng EF, cắt các đường thẳng AC và AB theo thứ tự tại các điểm X, Z. Kẻ đường thẳng KH vuông góc với đường thẳng BC tại điểm H.

Vì $KH \parallel NJ$ và $KZ \parallel FN$ nên $\frac{BF}{BZ} = \frac{BN}{BK} = \frac{BJ}{BH}$ suy ra $FJ \parallel HZ$

Chứng minh tương tự ta cũng có $HX \parallel EL$

Do $XZ \parallel EF$, $HZ \parallel SF$ và $HX \parallel ES$ nên $\triangle SEF \sim \triangle HXZ$ (g-g)

Từ đó $\frac{SE}{HX} = \frac{EF}{XZ} = \frac{AE}{AX}$ suy ra $\triangle AES \sim \triangle AXH$ (c-g-c)

Do đó $\angle SAE = \angle HAX$

Từ đây ta suy ra ba điểm A, S, H thẳng hàng

Chú ý rằng tứ giác ABKC nội tiếp đường tròn đường kính AK, do đó $\angle KAB = \angle KCH$

Mà $\angle KBA = \angle KHC = 90^\circ$ nên $\angle AKB = \angle HKC$

Lại có $AE = AF$ và $EF \parallel XZ$ nên $AX = AZ$ suy ra $\angle AXZ = \angle AZX$

Từ đó $\angle BXZ = \angle CKX$ suy ra $\angle AKZ = \angle HKX$

Gọi G là điểm đối xứng với H qua đường thẳng XZ.

Ta có: $\angle XKG = \angle XKH = \angle AKZ$

Nên ba điểm A, K, G thẳng hàng

Đến đây, với chú ý $\angle TEF = \angle SEF = \angle ZXH = \angle ZXG$ và $\angle AES = \angle AXH$

Ta có $\angle AET = \angle AXG$

Xét hai tam giác AET và AXG có $\frac{AE}{AX} = \frac{ES}{XH} = \frac{ET}{XG}$ và $\angle AET = \angle AXG$

Suy ra: $\triangle AET \sim \triangle AXG$ (c-g-c)

Suy ra: $\angle EAT = \angle XAG$

Do đó ba điểm A, T, G thẳng hàng

Từ đây suy ra ba điểm A, T, K thẳng hàng.

Bài 4.

Xét cấu hình gồm 99 điểm màu đỏ và 99 điểm màu xanh xếp xen kẽ nhau trên đường tròn. Nếu kẻ được k đường thẳng mà chia được mặt phẳng thành các miền mà không có hai điểm khác màu thì k đường thẳng này chia đường tròn thành không quá 2k cung tròn rời nhau. Ta thấy mỗi cung tròn này chỉ chứa nhiều nhất một điểm xanh hoặc một điểm đỏ (thật vậy, nếu tồn tại cung chứa không ít hơn hai điểm thì hai điểm đó phải cùng màu và nếu hai điểm đó cùng màu thì sẽ có một

điểm khác màu nằm giữa dẫn tới vô lý). Như vậy, k đường thẳng này phải chia đường tròn thành không ít hơn $2 - 99$ cung tròn.

Từ đây, ta có $2k \geq 2.99$, hay $k \geq 99$.

Ta chứng minh rằng với $k = 99$ thì ta luôn có thể kẻ được 99 đường chia 99 điểm đỏ và 100 điểm xanh vào các miền mà mỗi miền không có điểm khác màu. Để ý rằng ban đầu, với hai điểm A, B cùng màu thì ta có thể kẻ hai đường thẳng song song với cạnh AB và gần AB để tạo ra một miền mới mà miền này chỉ chứa đúng hai điểm A và B do không có điểm nào nằm trên đường thẳng A, B . (1)

Xét bao lồi của các điểm là S .

+ Nếu bao lồi có một điểm đỏ thì ta kẻ được một đường thẳng tách điểm đỏ này với các điểm xanh. Với 98 điểm đỏ còn lại, ta chia các điểm này thành 49 cặp rồi áp dụng nhận xét (1) liên tiếp 49 lần, tương ứng với mỗi cặp thì ta kẻ thêm 98 đường nữa. Như vậy, ta đã kẻ được tất cả 99 đường và sau khi kẻ thì mỗi điểm đỏ sẽ nằm trong miền chỉ chứa toàn điểm đỏ khác.

+ Nếu bao lồi gồm toàn điểm xanh thì kẻ một đường thẳng song song, đủ gần cạnh của bao lồi thì ta tách được hai điểm xanh ra một miền mới. Từ đó, còn 98 điểm xanh, ta chia các điểm này thành 49 cặp rồi áp dụng nhận xét (1) liên tiếp 49 lần, tương ứng với mỗi cặp thì ta kẻ thêm 98 đường nữa. Sau khi kẻ 99 đường này thì mỗi điểm xanh sẽ nằm trong miền chỉ chứa toàn điểm xanh khác.

Vậy $k_{\min} = 49$.