

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO
TẠO
TỈNH QUẢNG NAM

ĐỀ CHÍNH THỨC

KỲ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
NĂM HỌC 2024 – 2025 ĐỢT 2

Môn thi: TOÁN 11 (chuyên)

Thời gian: 180 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 07/3/2025

Câu 1 (3,0 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + \frac{2n+11}{n+5} \quad (n \geq 1) \end{cases}$$

Chứng minh $x_n \leq \frac{2n+13}{2n+8} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và tìm giới hạn của dãy số (x_n) .

Câu 2. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn
 $f(2025x - 2024y) = 2025f(x) - 2024f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

Câu 3. (3,0 điểm)

a) Cho n là số nguyên dương, đặt $A = (n+1)(n+2)\dots(2n)$. Chứng minh $2^n | A$.

b) Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c, m, n thỏa mãn $a = \sqrt{b^2 + c} - \sqrt{m^2 + n}$.

Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AC > AB$) có đường cao AK ($K \in BC$) và trực tâm H . Đường thẳng BH cắt đường tròn đường kính AC tại M, N (M nằm giữa B và N). Đường thẳng CH cắt đường tròn đường kính AB tại E, F (E nằm giữa C và F). Đường tròn ngoại tiếp tam giác MKE cắt BC tại điểm thứ hai là P .

a) Chứng minh tứ giác $MENF$ nội tiếp và $\angle ENF = \angle BAE$.

b) Chứng minh ba đường thẳng BE, CM, PH đồng quy.

Câu 5. (3,0 điểm) Lớp chuyên Toán 11T có 35 học sinh. Thầy giáo chủ nhiệm muốn tổ chức chương trình trải nghiệm gồm bốn chuyến đi khác nhau sao cho mỗi học sinh trong lớp phải tham gia ít nhất một chuyến đi.

a) Tính số cách để thầy giáo chủ nhiệm thực hiện chương trình trải nghiệm đó.

b) Nếu có thêm điều kiện: Với mỗi $k \in \{2; 3; 4\}$, trong chuyến đi thứ k phải có ít nhất một học sinh đã tham gia chuyến đi thứ $k-1$ thì thầy giáo chủ nhiệm có bao nhiêu cách thực hiện chương trình trải nghiệm đó.

Câu 6. (3,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $ab + ac \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$T = \frac{2+a+b+c}{1+a+b+c+ab+ac} - \frac{16}{ab+ac+3}.$$

----- HẾT -----

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu và máy tính cầm tay. Giám thị không giải thích gì thêm.

- Họ và tên thí sinh:.....; Số báo danh:.....

SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỶ THI CHỌN HỌC SINH GIỎI CẤP TỈNH THPT
TỈNH QUẢNG NAM NĂM HỌC 2024 – 2025 ĐỢT 2

HDC CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN: TOÁN LỚP 11 (CHUYÊN)

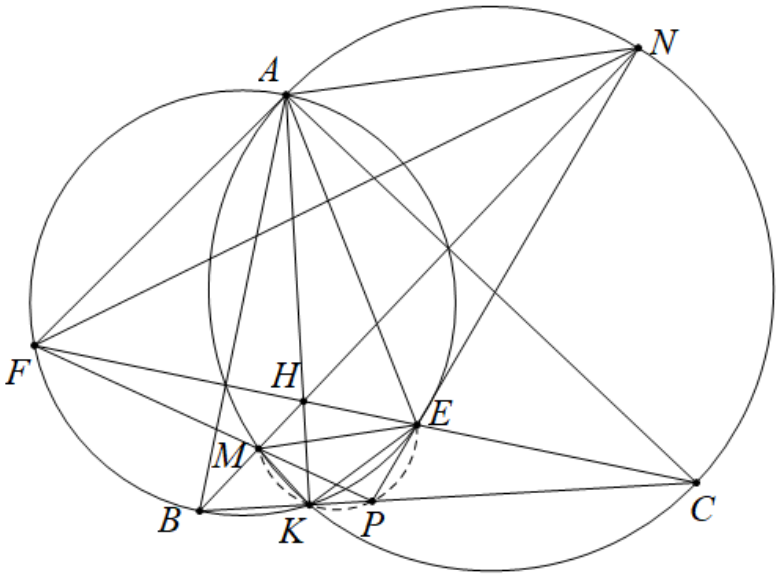
(Bản hướng dẫn này gồm 07 trang)

Câu	Nội dung	Điểm
1	<p>Câu 1. (3,0 điểm) Cho dãy số (x_n) xác định bởi:</p> $\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} \\ x_{n+1} = x_n^2 - 2x_n + \frac{2n+11}{n+5} \quad (n \geq 1) \end{cases}$ <p>Chứng minh $x_n \leq \frac{2n+13}{2n+8} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ và tìm giới hạn của dãy số (x_n).</p>	3,0
	<p>Chứng minh $x_n \leq \frac{2n+13}{2n+8} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$ (*) bằng PP quy nạp.</p>	
	<p>Thật vậy, với $n = 1$ thì (*) đúng.</p> <p>Giả sử (*) đúng với $n = k \quad (k \geq 1)$, tức là $x_k \leq \frac{2k+13}{2(k+4)}$.</p>	0,25
	<p>Ta cần chứng minh (*) đúng với $n = k+1$ tức là $x_{k+1} \leq \frac{2k+15}{2(k+5)}$.</p>	0,25
	<p>Thật vậy, do hàm số $f(x) = x^2 - 2x$ đồng biến trên $(1+\infty)$ và $x_k > 1$ nên (chú ý $k \geq 1$)</p>	0,5

	$x_{k+1} - \frac{2k+15}{2(k+5)} = f(x_k) + \frac{2k+7}{2(k+5)} \leq f\left(\frac{2k+13}{2(k+4)}\right) + \frac{2k+7}{2(k+5)}$ <p>Mà</p> $f\left(\frac{2k+13}{2(k+4)}\right) + \frac{2k+7}{2(k+5)} = \left(\frac{2k+13}{2(k+4)}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{2k+13}{2(k+4)}\right) + \frac{2k+7}{2(k+5)}$ $= -\frac{(k-1)(6k+29)}{4(k+4)^2(k+5)} \leq 0$ <p>Do đó $x_n \leq \frac{2n+13}{2n+8} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$</p>	0,5
	<p>Nhận xét</p> $x_{n+1} = (x_n - 1)^2 + 1 + \frac{1}{n+5} > 1, \forall n \geq 1$	0,5
	<p>Tính được $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n+13}{2n+8} = 1$ và kết luận dãy số (x_n) có giới hạn bằng 1.</p>	0,5
2	<p>Câu 2. (3,0 điểm) Tìm tất cả các hàm $f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn</p> $f(2025x - 2024y) = 2025f(x) - 2024f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$	3,0
	<p>Ta giả sử tồn tại hàm số $f(x)$ thỏa yêu cầu đề bài nên ta gọi $f(0) = b$ là một hằng số</p>	0,25
	<p>Ta được</p> $f(2025x - 2024y) = 2025f(x) - 2024f(y)$ $\Leftrightarrow f(2025x - 2024y) - ff(0) = 2025(f(x) - ff(0)) - 2024(f(y) - f(0)), \forall x, y \in \mathbb{R} \quad (1)$	0,5
	<p>+ Từ (1) thay $y = 0$ ta được $f(2025x) - ff(0) = 2025[f(x) - f(0)]$</p>	0,25
	<p>Thay $x = 0$ ta được $f(-2024y) - ff(0) = -2024[f(y) - f(0)]$</p>	0,25
	<p>+ Gọi hàm số $g(x) = f(x) - ff(0)$ thì $g(0) = ff(0) - (0) = 0$</p>	0,25
	<p>+ Xét</p> $g(2025x - 2024y) = f(2025x - 2024y) - f(0)$ $= 2025(f(x) - ff(0)) - 2024(f(y) - f(0))$ $= 2025g(x) - 2024g(y) \quad (2)$	0,5
	$g(2025x) = f(2025x) - ff(0) = 2025[f(x) - f(0)] = 2025g(x) \quad (3)$	0,25
	$g(-2024y) = f(-2024y) - ff(0) = -2024[f(y) - f(0)] = -2024g(y) \quad (4)$	
	<p>Từ (2), (3), (4) suy ra $g(2025x - 2024y) = g(2025x) + g(-2024y)$</p>	0,25
	<p>Suy ra $g(x) = ax, \forall x \in \mathbb{R}$ với $a \in \mathbb{R}$ tùy ý.</p> <p>Suy ra $ax = f(x) - ff(0) \Leftrightarrow f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{R}$ với $a, b \in \mathbb{R}$ là hằng số tùy ý.</p>	0,25

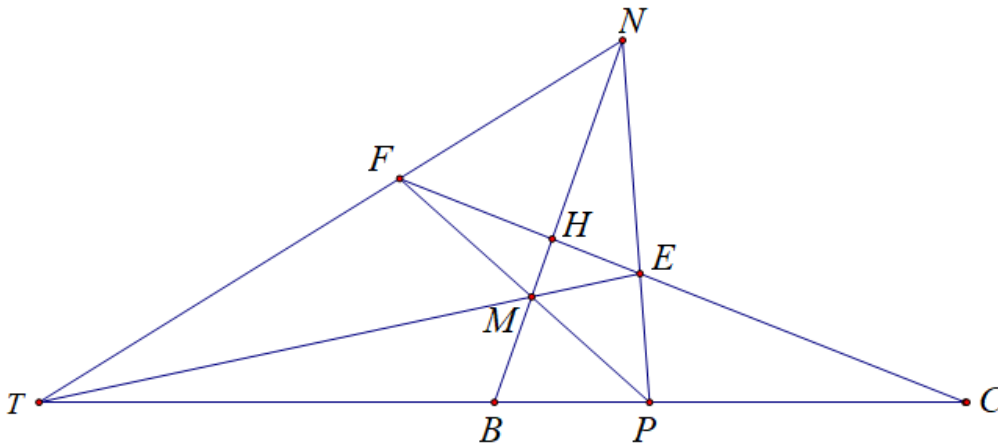
	Thử lại $f(x) = ax + b, \forall x \in \mathbb{Z}$ thỏa yêu cầu đề bài	0,25
3	Câu 3. (3,0 điểm)	
a.	<p>a) (1 điểm) Cho $A = (n+1)(n+2)\dots(2n)$ là số nguyên dương, đặt $2^n A$. Chứng minh.</p>	1,0
	<p>Biến đổi</p> $A = (n+1)(n+2)(n+3)\dots(2n) = \frac{(2n)!}{n!}$ $= \frac{1.3.5\dots(2n-1).2.4.6\dots(2n)}{n!}$ $= \frac{1.3.5\dots(2n-1).(n!).2^n}{n!} = 1.3.5\dots(2n-1).2^n$	0,25 0,25 0,25
	Vậy $2^n A$.	0,25
b.	Câu 3.	
	<p>b) (2 điểm) Tìm tất cả các số nguyên tố a, b, c, m, n thỏa mãn $a = \sqrt{b^2 + c} - \sqrt{m^2 + n}$</p>	2,0
	<p>Nhận thấy vế phải $\sqrt{b^2 + c} - \sqrt{m^2 + n}$ là nguyên dương nên hai số $b^2 + c, m^2 + n$ là hai số chính phương. Ta đặt $b^2 + c = x^2, m^2 + n = y^2$</p>	0,25
	<p>Suy ra $c = x^2 - b^2 = (x-b)(x+b)$, vì c là nguyên tố nên $x-b=1$ và $x+b=c$ suy ra $c = 2b+1$</p>	0,25
	chứng minh tương tự ta được $n = 2m+1$,	
	thay vào biểu thức ban đầu suy ra	
	$a = \sqrt{b^2 + 2b+1} - \sqrt{m^2 + 2m+1} \Leftrightarrow a = b-m \Leftrightarrow a+m=b$	0,25
	<p>Khi đó a, m khác nhau về tính chẵn lẻ nên, ta xét 2 trường hợp sau.</p> <p>- Với $a=2$ ta có $c=2b+1$ và $n=2m+1$ $b=2+m$ $c=2m+5$</p> <p>Nếu $m \geq 5$ thì xét $m=6k+h$ ($k \in \mathbb{Z}; h \in \{1;5\}$) lần lượt thử vào $n=2m+1, c=2b+1$ thấy vô lý vì n, c là số nguyên tố.</p>	0,5
	<p>Suy ra $m=3$, thử lại ta được bộ số $b=5; n=7; c=11$ thỏa mãn.</p> <p>Nên $\{a, b, c, m, n\} = \{2; 5; 11; 3; 7\}$.</p>	0,25
	- Với $m=2$, từ $c=2b+1$ $n=2m+1$ $2+a=b$ tương tự như trên ta cũng suy ra	

	$a = 3$ Nên $\{a, b, c, m, n\} = \{3; 5; 11; 2; 5\}$	0,5
	Vậy có 2 bộ số $\{2; 5; 11; 3; 7\}; \{3; 5; 11; 2; 5\}$	

Câu	Nội dung	Điểm
4	<p>Câu 4. (5,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC ($AC > AB$) có đường cao AK ($K \in BC$) và trực tâm H. Đường thẳng BH cắt đường tròn đường kính AC tại M, N (M nằm giữa B và N). Đường thẳng CH cắt đường tròn đường kính AB tại E, F (E nằm giữa C và F). Đường tròn ngoại tiếp tam giác MKE cắt BC tại điểm thứ hai là P.</p> <p>a) Chứng minh tứ giác $MENF$ nội tiếp và $\angle ENF = \angle BAE$.</p> <p>b) Chứng minh ba đường thẳng BE, CM, PH đồng quy.</p>	5,0
a.	<p>a) Chứng minh tứ giác $MENF$ nội tiếp và $\angle ENF = \angle BAE$.</p>	2,0
		0,25
	<p>Ta có $P_{H/(\angle EKF)} = \overline{HE} \cdot \overline{HF} = \overline{HA} \cdot \overline{HK}$ và $P_{H/(\angle AMN)} = \overline{HA} \cdot \overline{HK} = \overline{HM} \cdot \overline{HN}$</p> <p>nên $\overline{HM} \cdot \overline{HN} = \overline{HE} \cdot \overline{HF}$</p> <p>Suy ra tứ giác $MENF$ nội tiếp.</p>	0,75
	<p>Từ giả thiết ta có AB, AC lần lượt là đường trung trực của EF, MN suy ra A là tâm của đường tròn $(MENF)$.</p>	0,5

Do đó	$\widehat{ENF} = \frac{1}{2}\widehat{EAF} = \widehat{BAE}$	0,5

b.	Câu 4.	3,0
	b) Chứng minh ba đường thẳng BE, CM, PH đồng quy.	
	Vì tứ giác $MENF$ nội tiếp nên $\widehat{ENF} + \widehat{EMF} = 180^\circ$ (1). Trong $(MEPK)$ ta có $\widehat{EMP} = \widehat{EKP}$ và trong $(ABKE)$ ta có $\widehat{EKP} = \widehat{BAE}$ nên $\widehat{EMP} = \widehat{BAE}$ (2)	0,5
	Từ (1), (2) và $\widehat{ENF} = \widehat{BAE}$ ta được $\widehat{EMP} + \widehat{EMF} = 180^\circ$, do đó P, M, F thẳng hàng.	0,25
	Tương tự như trên, ta cũng chứng minh được P, E, N thẳng hàng	0,25
	Ta có $\widehat{FKA} = \widehat{AKE}$ và $\widehat{AKN} = \widehat{AKM}$. Do đó $\widehat{FKN} = \widehat{FKA} + \widehat{AKN} = \widehat{AKE} + \widehat{AKM} = \widehat{MKE} = \widehat{MPE} = \widehat{FPN}$	0,25
	Suy ra các điểm N, P, K, F cùng thuộc một đường tròn	0,5
	Hai đường tròn $(MENF), (MKPE)$ có trục đẳng phương là ME ; hai đường tròn $(MENF), (KPNF)$ có trục đẳng phương là NF ; hai đường tròn $(MKPE), (KPNF)$ có trục đẳng phương là KP , khi đó ba đường thẳng ME, NF, KP đồng qui tại một điểm, gọi điểm đó là T .	0,5



Xét tam giác TCF , ta có $(NMHB) = -1$ nên $\frac{NH}{NB} = \frac{MH}{MB}$.	0,25
Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác CBH với cát tuyến NEP ta có $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{EC}{EH} \cdot \frac{NH}{NB} = 1$ $\frac{PB}{PC} \cdot \frac{EC}{EH} \cdot \frac{MH}{MB} = 1$ Do đó .	0,25
Áp dụng định lý Ceva cho tam giác CBH suy ra ba đường thẳng BE, CM, PH đồng quy.	0,25

5	Câu 5. (3,0 điểm) Lớp chuyên Toán 11T có 35 học sinh. Thầy giáo chủ nhiệm muốn tổ chức cho lớp này chương trình trải nghiệm gồm bốn chuyến đi khác nhau sao cho mỗi học sinh trong lớp phải tham gia ít nhất một chuyến đi. a) Tính số cách để thầy giáo chủ nhiệm thực hiện chương trình trải nghiệm đó. b) Nếu có thêm điều kiện: Với mỗi $k \in \{2; 3; 4\}$, trong chuyến đi thứ k phải có ít nhất một học sinh đã tham gia chuyến đi thứ $k-1$ thì thầy giáo chủ nhiệm có bao nhiêu cách thực hiện chương trình trải nghiệm đó.	3,0
	a) Tính số cách để thầy giáo chủ nhiệm thực hiện chương trình trải nghiệm đó.	1.0 điểm
	a) Thầy giáo chủ nhiệm có thể cho các học sinh lớp 11T đăng kí tham gia chương trình trải nghiệm bằng các phiếu đăng kí dạng $(x_1; x_2; x_3; x_4)$, trong đó với mỗi $i \in \{1; 2; 3; 4\}$ thì $x_i = 1 \text{ nếu học sinh tham gia chuyến đi thứ } i.$ $x_i = 0 \text{ nếu học sinh không tham gia chuyến đi thứ } i.$	0,5
	Vì mỗi học sinh trong lớp phải tham gia ít nhất một chuyến đi nên mỗi học sinh có $2^4 - 1 = 15$ cách đăng kí khác nhau. Như vậy có thể có 15^{35} cách thực hiện chương trình trải nghiệm.	0,5
	b) Nếu có thêm điều kiện: Với mỗi $k \in \{2; 3; 4\}$, trong chuyến đi thứ k phải có ít nhất một học sinh đã tham gia chuyến đi thứ $k-1$ thì thầy giáo chủ nhiệm có bao nhiêu cách thực hiện chương trình trải nghiệm đó.	2.0 điểm
	Gọi A_k là tập hợp những đăng kí mà không có học sinh nào tham gia cả hai chuyến đi thứ k	0,5

	<p>và thứ $k+1$ (với $k \in \{1; 2; 3\}$).</p> <p>Trong tập hợp A_1 không có 4 loại phiếu đăng kí dạng $(1; 1; x_3; x_4)$ nên $n(A_1) = (15-4)^{35} = 11^{35}$.</p> <p>Tương tự, ta có $n(A_2) = n(A_3) = 11^{35}$.</p>	
	<p>Trong tập hợp $A_1 \cap A_2$ không có 4 loại phiếu đăng kí dạng $(1; 1; x_3; x_4)$ và 2 loại phiếu đăng kí dạng $(0; 1; 1; x_4)$ nên $n(A_1 \cap A_2) = (15-4-2)^{35} = 9^{35}$.</p> <p>Tương tự, ta có $n(A_2 \cap A_3) = 9^{35}$.</p> <p>Trong tập hợp $A_1 \cap A_3$ không có 4 loại phiếu đăng kí dạng $(1; 1; x_3; x_4)$ và các loại phiếu đăng kí $(1; 0; 1; 1), (0; 1; 1; 1), (0; 0; 1; 1)$ nên $n(A_1 \cap A_3) = (15-4-3)^{35} = 8^{35}$.</p>	0,5
	<p>Tập hợp $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ có đúng 7 loại phiếu đăng kí là $(0; 0; 0; 1), (0; 0; 1; 0), (0; 1; 0; 0), (1; 0; 0; 0), (0; 1; 0; 1), (1; 0; 0; 1), (1; 0; 1; 0)$ nên $n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = 7^{35}$.</p>	0,5
	<p>Do đó</p> $n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) - (n(A_1 \cap A_2) + n(A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_3)) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$ $= 3 \cdot 11^{35} - (2 \cdot 9^{35} + 8^{35}) + 7^{35}$	0,25
	<p>Vậy số cách thực hiện chương trình trải nghiệm là</p> $15^{35} - n(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 15^{35} - 3 \cdot 11^{35} + 2 \cdot 9^{35} + 8^{35} - 7^{35}$	0,25
6	<p>Câu 6. (3,0 điểm) Cho a, b, c là các số dương thỏa $ab + ac \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức</p> $T = \frac{2+a+b+c}{1+a+b+c+ab+ac} - \frac{16}{ab+ac+3}$	3,0
	<p>Ta biến đổi</p> $T = \frac{2+a+b+c}{1+a+b+c+ab+ac} - \frac{16}{ab+ac+3}$ $= \frac{2+a+b+c}{1+a+b+c+ab+ac} - \frac{16}{ab+ac+3} = \frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b+c} - \frac{16}{ab+ac+3}$	0,5
	<p>Đặt $x = a; y = b+c$ điều kiện là $x, y > 0$ và $x \cdot y \geq 1$ khi đó $T = \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} - \frac{16}{xy+3}$</p>	0,5
	<p>Chúng minh được BĐT: $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{4}{xy+3}$ (1)</p>	1,5
	<p>Vậy $T \geq \frac{4}{xy+3} - \frac{16}{xy+3} = \frac{-12}{xy+3} \geq -3$</p> <p>GTNN của T bằng -3 xảy ra khi $xy = 1$ hay $a(b+c) = 1$.</p>	0,5

	<p>Chứng minh bất đẳng thức (1): $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{4}{xy+3}$</p> <p>Ta chứng minh rằng $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} \geq \frac{2}{1+\sqrt{xy}}$ bằng biến đổi tương đương chuyển vế,</p> <p>quy đồng ta được biểu thức $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} - \frac{2}{1+\sqrt{xy}} = \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{y})^2 (\sqrt{xy} - 1)}{(1+x)(1+y)(1+\sqrt{xy})} \geq 0$</p> <p>Theo BĐT AM – GM suy ra $\frac{2}{1+\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{1+\frac{xy+1}{2}} = \frac{4}{xy+3}$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
--	---	----------------------------------

----- HẾT -----

*** Lưu ý:** Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong HDC nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.