

ĐỀ 5

Phần 1. Câu hỏi trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 12. Mỗi câu hỏi, thí sinh chỉ chọn 1 phương án.

Câu 1: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $\mathbb{R}$ và có bảng biến thiên như hình bên dưới

x	$-\infty$	-2	3	$+\infty$	
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$-\infty$	4	-3	$+\infty$	

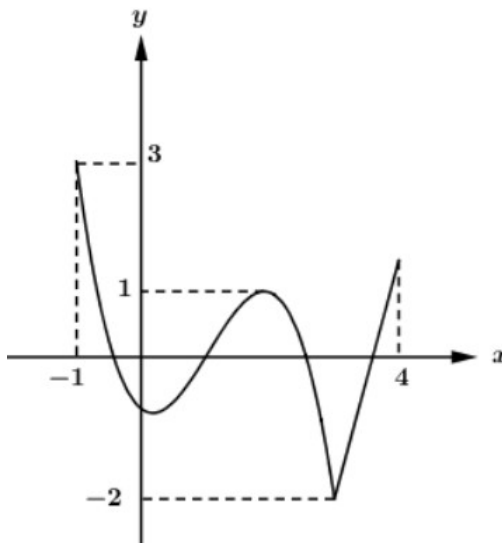
Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A. $(-\infty; 0)$. B. $(-2; 3)$. C. $(1; +\infty)$. D. $(3; +\infty)$.

Lời giải

Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy hàm số đồng biến trên $(3; +\infty)$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ xác định, liên tục trên $[-1; 4]$ và có đồ thị như hình vẽ



Giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên $[-1; 4]$ là

- A. -1 . B. 3 . C. 1 . D. -2 .

Lời giải

Từ đồ thị hàm số, ta thấy hàm số đạt giá trị lớn nhất bằng 3 tại $x = -1$.

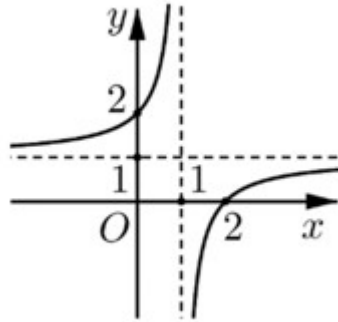
Câu 3: Tiệm cận đứng của đồ thị hàm số $y = \frac{2x+3}{x-1}$ là đường thẳng có phương trình

- A. $y = 5$. B. $x = 0$. C. $x = 1$. D. $y = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} y = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x+3}{x-1} = +\infty \Rightarrow x=1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} y = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x+3}{x-1} = -\infty \Rightarrow x=1 \text{ là tiệm cận đứng của đồ thị hàm số.}$$

Câu 4: Hình dưới đây là đồ thị của hàm số nào?



A. $y = \frac{x-2}{x-1}$

B. $y = \frac{-2+x}{x+1}$

C. $y = \frac{x-1}{x-1}$

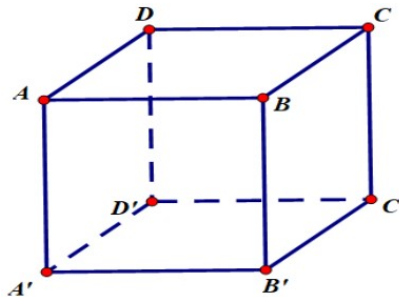
D. $y = \frac{1-2x}{x+1}$

Lời giải

Từ đồ thị, ta thấy hàm số có tiệm cận đứng $x=1$ nên loại B, D

Đồ thị hàm số qua cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 2 và cắt trục hoành tại điểm có hoành độ bằng 2 nên chọn **A**

Câu 5: Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Khẳng định nào dưới đây là sai?



A. $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{B'C'}$

B. $\overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{D'C'} - \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{D'B'}$

C. $\overrightarrow{A'D'} + \overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AC}$

D. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{A'A} = \overrightarrow{AC}$

Lời giải

Theo quy tắc hình hộp ta có $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC}$. Vậy D sai.

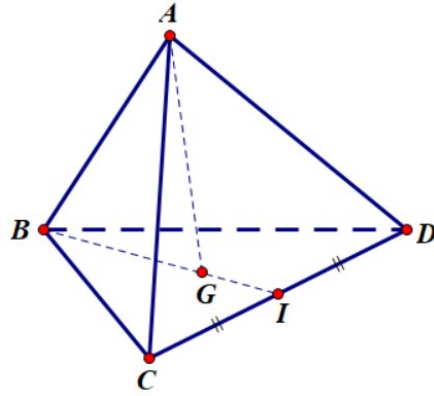
Câu 6: Cho tứ diện đều $ABCD$ cạnh a . Tính $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}|$ theo a ?

A. $a\sqrt{6}$

B. $a\sqrt{3}$

C. $\frac{a\sqrt{6}}{2}$

D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$



Gọi G là trọng tâm của $\triangle BCD$. Do đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = |3\overrightarrow{AG}| = 3AG$.

Ta có $BG = \frac{2}{3}BI = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Mà $ABCD$ là tứ diện đều nên $AG \perp (BCD) \Rightarrow AG \perp BG$. Suy ra

$$AG = \sqrt{AB^2 - BG^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}.$$

Vậy $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}| = 3 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = a\sqrt{6}$.

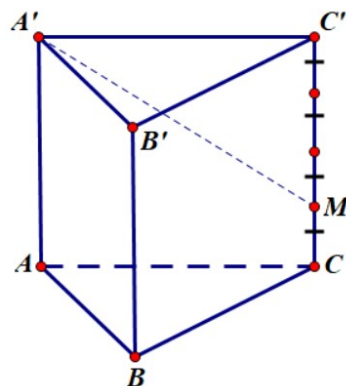
Câu 7: Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$, điểm M trên CC' sao cho $\overrightarrow{MC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MC'}$. Đặt

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA'} = \vec{c}$. Khẳng định nào dưới đây là đúng ?

A. $\overrightarrow{A'M} = \vec{a} - \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **B.** $\overrightarrow{A'M} = \frac{-3}{2}\vec{a} + \vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c}$.

C. $\overrightarrow{A'M} = -\vec{a} + 2\vec{b} - \frac{2}{3}\vec{c}$. **D.** $\overrightarrow{A'M} = \vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c}$.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'C'} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA'} = -\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'} = \vec{b} - \frac{3}{4}\vec{c}$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(-1; 2; 0)$, $B(3; 4; -2)$ và $C(1; 0; -3)$. Biết tọa độ điểm $D(x_0; y_0; z_0)$ để tứ giác $BACD$ là hình bình hành. Tính $x_0 + y_0 + z_0$?

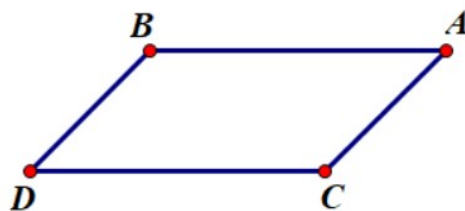
A. 12.

B. 2.

C. -5.

D. -8.

Lời giải



Ta có $\overrightarrow{BA} = (-4; -2; 2)$; $\overrightarrow{DC} = (1 - x_0; -y_0; -3 - z_0)$.

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - x_0 = -4 \\ -y_0 = -2 \\ -3 - z_0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 5 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = -5 \end{cases}.$$

Để tứ giác $BACD$ là hình bình hành

Vậy $x_0 + y_0 + z_0 = 5 + 2 + (-5) = 2$.

Câu 9: Trong không gian $Oxyz$, điểm đối xứng của điểm $M(1; 2; 3)$ qua trục Ox có tọa độ là

A. $(1; -2; -3)$.

B. $(1; 0; 0)$.

C. $(0; 2; 3)$.

D. $(-1; -2; -3)$.

Lời giải

Gọi M' là điểm đối xứng của $M(1; 2; 3)$ qua trục Ox .

Hình chiếu vuông góc của $M(1; 2; 3)$ lên trục Ox là $H(1; 0; 0)$

Khi đó $H(1; 0; 0)$ là trung điểm của $M'M$. Do đó tọa độ của M' là $(1; -2; -3)$

Câu 10: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai véc tơ $\vec{u} = (-3; 0; 1)$ và $\vec{v} = (0; 2; -2)$. Tọa độ của véc tơ $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$ tương ứng là:

A. $(-6; -2; 4)$.

B. $(-6; 2; 0)$.

C. $(-2; 1; 3)$.

D. $(1; -2; 5)$.

Lời giải

Ta có: $2\vec{u} = (-6; 0; 2)$.

$$\vec{v} = (0; 2; -2)$$

Suy ra $\vec{w} = (-6 - 0; 0 - 2; 2 + 2) = (-6; -2; 4)$.

Câu 11: Một hãng xe ô tô thống kê lại số lần gặp sự cố về động cơ của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng đầu tiên ở bảng sau. Hãy tìm khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm này? (Làm tròn các kết quả đến hàng phần trăm).

Số lần gặp sự cố	$[0, 5; 2, 5)$	$[2, 5; 4, 5)$	$[4, 5; 6, 5)$	$[6, 5; 8, 5)$	$[8, 5; 10, 5)$
Số xe	17	33	25	20	5

A. 5,32.

B. 3,52.

C. 2,53.

D. 5,23.

Lời giải

Do cỡ mẫu $n = 100$

Gọi $x_1; x_2; \dots; x_{100}$ là mẫu số liệu gốc gồm số lần gặp sự cố của 100 chiếc xe cùng loại sau 2 năm sử dụng, sắp xếp theo thứ tự không giảm.

Ta có $x_1, \dots, x_{17} \in [0, 5; 2, 5)$; $x_{18}, \dots, x_{50} \in [2, 5; 4, 5)$; $x_{51}, \dots, x_{75} \in [4, 5; 6, 5)$; $x_{76}, \dots, x_{95} \in [6, 5; 8, 5)$; $x_{96}, \dots, x_{100} \in [8, 5; 10, 5)$.

Nên tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{25} + x_{26}) \in [2, 5; 4, 5)$. Do đó tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$Q_1 = 2,5 + \frac{\frac{100}{4} - 17}{33} \cdot (4,5 - 2,5) \approx 2,98$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{1}{2}(x_{75} + x_{76}) \in [2, 5; 4, 5)$.

Mà $x_{75} \in [4, 5; 6, 5)$; $x_{76} \in [6, 5; 8, 5)$. Nên $Q_3 = 6,5$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm là $\Delta_Q = Q_3 - Q_1 \approx 6,5 - 2,98 = 3,52$

Câu 12: Mỗi ngày bác Hương đều đi bộ để rèn luyện sức khỏe. Quãng đường đi bộ mỗi ngày (đơn vị: km) của bác Hương trong 20 ngày được thống kê lại ở bảng sau:

Quãng đường (km)	$[2, 7; 3, 0)$	$[3, 0; 3, 3)$	$[3, 3; 3, 6)$	$[3, 6; 3, 9)$	$[3, 9; 4, 2)$
Số ngày	3	6	5	4	2

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là (làm tròn đến hàng phần trăm)

A. 3,39.

B. 11,62.

C. 0,13.

D. 0,36.

Lời giải

+ Cỡ mẫu: $n = 20$.

+ Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x} = \frac{2,85 \cdot 3 + 3,15 \cdot 6 + 3,45 \cdot 5 + 3,75 \cdot 4 + 4,05 \cdot 2}{20} = 3,39$$

+ Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S^2 = \frac{1}{20} (2,85^2 \cdot 3 + 3,15^2 \cdot 6 + 3,45^2 \cdot 5 + 3,75^2 \cdot 4 + 4,05^2 \cdot 2) - 3,39^2 \approx 0,13$$

Phân 2. Trắc nghiệm lựa chọn đúng sai. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 4. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$ và $g(x) = f(x^2 - 2)$

a) Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

b) Hàm số $f(x)$ có 2 cực trị

c) Hàm số $g(x)$ đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$

d) Hàm số $g(x)$ đồng biến trên $(0; 1)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Đúng	d) Đúng
--------	---------	---------	---------

a) Sai

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$		
y'		$+$	0	$-$	0	$+$

Hàm số nghịch biến trên $(0; 2)$, đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và $(2; +\infty)$

b) Đúng

Hàm số có 2 cực trị tại $x = 0$ và $x = 2$

c) Đúng

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= 2xf'(x^2 - 2) \\
 &= 6x(x^2 - 2)(x^2 - 2 - 2) \\
 &= 6x(x^2 - 2)(x^2 - 4) \\
 g'(x) = 0 &\Rightarrow 6x(x^2 - 2)(x^2 - 4) = 0 \\
 &\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \\ x = \pm\sqrt{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-2	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$	
y'		-	0	+	0	-	0	+

Hàm số đạt cực đại tại $x = \pm\sqrt{2}$

d) Đúng

Câu 2: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; -1; 2)$, $B(-2; 0; 3)$. Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$.

b) Tọa độ của vector $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; 1)$.

c) Điểm A' là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) thì $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; 2)$

d) Tọa độ điểm C để tứ giác $OABC$ là hình bình hành là $C(1; 1; -3)$

Lời giải

a) Sai	b) Đúng	c) Sai	d) Sai
---------------	----------------	---------------	---------------

a) Điểm $A(1; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = (1; -1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

b) $\overrightarrow{AB} = (-2 - 1; 0 + 1; 3 - 2) = (-3; 1; 1)$.

c) A' là hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng tọa độ (Oxy) nên $A'(1; -1; 0)$.

Suy ra $\overrightarrow{AA'} = (0; 0; -2)$.

d) Gọi $C(x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{OC} = (x; y; z)$.

Ta có $\overrightarrow{AB} = (-3; 1; 1)$.

$$\overline{OC} = \overline{AB} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow C(-3; 1; 1).$$

Tứ giác $OABC$ là hình bình hành nên

Câu 3: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(4; 2; 1)$, $B(2; 1; 3)$, $C(-1; 3; -2)$. Khi đó,

a) $\overline{AB}(-2; -1; 2)$; $\overline{BC}(-3; 2; -5)$; $\overline{AC}(-5; 1; -3)$.

b) Ba điểm không A, B, C thẳng hàng và tọa độ trọng tâm tam giác ABC bằng $\left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

c) Chu vi tam giác ABC được tính bằng công thức $C_{\Delta ABC} = 3 + \sqrt{34} + \sqrt{37}$.

d) Diện tích tam giác ABC bằng $\frac{3\sqrt{34}}{2}$.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Sai	d) Đúng
---------	---------	--------	---------

a) Đúng: Vì $\overline{AB}(-2; -1; 2)$; $\overline{BC}(-3; 2; -5)$; $\overline{AC}(-5; 1; -3)$.

b) Đúng: Vì $\begin{cases} \overline{AB} = (-2; -1; 2) \\ \overline{AC} = (-5; 1; -3) \end{cases}$. Ta có: $\frac{-2}{-5} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{-3} \Rightarrow A, B, C$ không thẳng hàng.

Tọa độ trọng tâm tam giác ABC $\left(\frac{4+2-1}{3}; \frac{2+1+3}{3}; \frac{1+3-2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}; 2; \frac{2}{3}\right)$.

c) Sai: Vì

$$\overline{AB}(-2; -1; 2); \overline{BC}(-3; 2; -5); \overline{AC}(-5; 1; -3)$$

$$AB = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + 2^2} = 3$$

$$BC = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + (-5)^2} = \sqrt{38}$$

$$AC = \sqrt{(-5)^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}$$

$$C_{\Delta ABC} = 3 + \sqrt{38} + \sqrt{35}.$$

d) Đúng: Vì

$$p = \frac{3 + \sqrt{38} + \sqrt{35}}{2}$$

$$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$= \sqrt{\frac{3 + \sqrt{38} + \sqrt{35}}{2} \left(\frac{3 + \sqrt{38} + \sqrt{35}}{2} - 3 \right) \left(\frac{3 + \sqrt{38} + \sqrt{35}}{2} - \sqrt{38} \right) \left(\frac{3 + \sqrt{38} + \sqrt{35}}{2} - \sqrt{35} \right)}$$

$$= \frac{3\sqrt{34}}{2}.$$

Câu 4: Khảo sát thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A1 và 12A2 của trường trung học phổ thông X, thu được mẫu số liệu ghép nhóm sau:

Thời gian (phút)	$[0; 60)$	$[60; 120)$	$[120; 180)$	$[180; 240)$
Số học sinh của lớp 12A1	0	5	20	15
Số học sinh của lớp 12A2	9	12	18	0

s

- a) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A2 là 180 phút.
- b) Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A1 và 12A2 bằng nhau.
- c) Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A1 là 65 phút.
- d) Dựa vào khoảng tứ phân vị thì thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A1 phân tán hơn so với lớp 12A2.

Lời giải

a) Đúng	b) Đúng	c) Đúng	d) Sai
----------------	----------------	----------------	---------------

a) Đúng

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A2 là $180 - 0 = 180$ (phút).

b) Đúng

Khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A1 là $240 - 60 = 180$ (phút).

Nên khoảng biến thiên của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A1 và 12A2 bằng nhau.

c) Đúng

Xét mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12A1:

Cỡ mẫu là: $n = 5 + 20 + 15 = 40$

Gọi $x_1, \dots, x_{40}$ là thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A1 và giả sử dãy số liệu gốc này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_{10} + x_{11}}{2}$. Do x_{10} và x_{11} đều thuộc nhóm $[120; 180)$ nên nhóm này chứa Q_1 .

$$Q_1 = 120 + \frac{\frac{40}{4} - 5}{20} \cdot 60 = 135$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là $\frac{x_{30} + x_{31}}{2}$. Do x_{30} và x_{31} đều thuộc nhóm $[180; 240)$ nên nhóm này chứa Q_3 .

$$Q_3 = 180 + \frac{\frac{3 \cdot 40}{4} - 25}{15} \cdot 60 = 200$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A1 là:

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 200 - 135 = 65 \text{ phút.}$$

d) Sai

Xét mẫu số liệu ghép nhóm của lớp 12A2:

Cỡ mẫu là: $n = 9 + 12 + 18 = 39$

Gọi $y_1, \dots, y_{39}$ là thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A2 và giả sử dãy số liệu gốc này đã được sắp xếp theo thứ tự tăng dần.

Tứ phân vị thứ nhất của mẫu số liệu gốc là y_{10} . Do y_{10} thuộc nhóm $[60; 120)$ nên nhóm này chứa Q_1 .

$$Q_1 = 60 + \frac{\frac{39}{4} - 9}{12} \cdot 60 = 63,75$$

Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu gốc là y_{30} . Do y_{30} thuộc nhóm $[120; 180)$ nên nhóm này chứa Q_3 .

$$Q_3 = 120 + \frac{\frac{3 \cdot 39}{4} - 21}{18} \cdot 60 = 147,5$$

Vậy khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm về thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A2 là:

$$\Delta Q = Q_3 - Q_1 = 147,5 - 63,75 = 83,75$$

Dựa vào khoảng tứ phân vị thì thời gian dành cho việc tự học ở nhà mỗi ngày của học sinh lớp 12A2 phân tán hơn so với lớp 12A1.

Phân 3. Câu hỏi trắc nghiệm trả lời ngắn. Thí sinh trả lời từ câu 1 đến câu 6

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{3x^2 + 2x}{4x + 4}$. Khoảng cách từ điểm $M(3; -2)$ đến đường tiệm cận xiên của đồ thị hàm số này bằng bao nhiêu ?

Lời giải

Đáp án: 3,2

Ta có: $y = \frac{3x^2 + 2x}{4x + 4} = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{4x + 4}$.

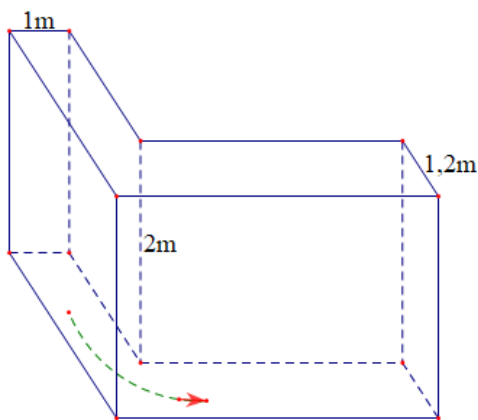
Xét $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(y - \left(\frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \right) \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{4x + 4} = 0$.

Vậy đường tiệm cận xiên có phương trình $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3x - 4y - 1 = 0$.

$$d = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{16}{5} = 3,2.$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường tiệm cận xiên là:

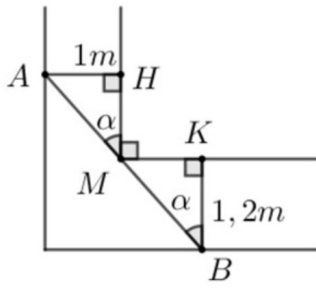
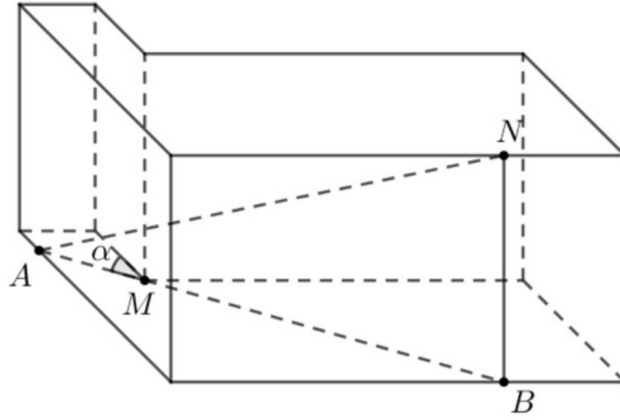
Câu 2: Hành lang trong một tòa nhà có dạng chữ L (hình vẽ) có chiều cao 2 m, một phía rộng 1 m, một phía rộng 1,2 m. Một người thợ cần mang một số ống thép cứng các loại có độ dài 2 m, 2,5 m, 3 m, 3,5 m, 4 m, từ bên này qua bên kia. Hỏi có thể mang được mấy loại qua lối đi đó ?



Lời giải

Đáp Án: 4

Ống thép muốn qua được hành lang (bên này qua bên kia) phải qua được góc vuông giữa hành lang.



$$\forall \alpha \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow l \leq \min AN (*)$$

Vì vậy chiều dài l của ống thép phải thỏa mãn $l \leq AN$,

Ta có $AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{AB^2 + 4}$ trong đó $AB = AM + MB = \frac{AH}{\sin \alpha} + \frac{BK}{\cos \alpha} = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1,2}{\cos \alpha}$.

Xét hàm số $g(\alpha) = \frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1,2}{\cos \alpha} \Rightarrow g'(\alpha) = -\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} + \frac{1,2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha} = 0$

$$\Leftrightarrow 1,2 \sin^3 \alpha = \cos^3 \alpha \Leftrightarrow \tan \alpha = \frac{1}{\sqrt[3]{1,2}} \Leftrightarrow \alpha = \arctan \frac{1}{\sqrt[3]{1,2}}$$

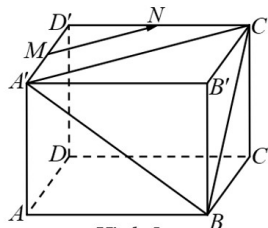
Vì vậy $\min_{\left(0; \frac{\pi}{2}\right)} g(\alpha) = g\left(\arctan \frac{1}{\sqrt[3]{1,2}}\right) \Rightarrow (*) \Leftrightarrow l \leq \sqrt{\left[g\left(\arctan \frac{1}{\sqrt[3]{1,2}}\right)\right]^2 + 4} \approx 3,69504$.

Vậy các ống thép có chiều dài $2m, 2,5m, 3m, 3,5m$ sẽ qua được hành lang.

Câu 3: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của $A'D'$ và $C'D'$. Tích vô hướng $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = na^2$ (n là số thập phân). Giá trị của n bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: $-0,5$.



Vì $MN \parallel A'C'$ nên $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{C'B}) = (\overrightarrow{A'C'}, \overrightarrow{C'B}) = 180^\circ - \angle A'C'B = 120^\circ$.

Ta có: $MN = \frac{a\sqrt{2}}{2}, C'B = a\sqrt{2}$.

Suy ra $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{C'B} = |\overrightarrow{MN}| \cdot |\overrightarrow{C'B}| \cdot \cos(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{C'B}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \cos 120^\circ = -0,5a^2$

Vậy $n = -0,5$.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1; -1; 3)$, $B(0; 2; 0)$ và $C(5; -2; 1)$.

Điểm $D(a; b; c)$ sao cho tứ giác $ABCD$ là hình bình hành. Tính $S = a + b + c$

Lời giải

Đáp án: 3.

Gọi $D = (x; y; z) \Rightarrow \overrightarrow{DC} = (5 - x; -2 - y; 1 - z)$

$\overrightarrow{AB} = (1; 3; -3)$

Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow \begin{cases} 5 - x = 1 \\ -2 - y = 3 \\ 1 - z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = -5 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow D(4; -5; 4)$$

$ABCD$ là hình bình hành nên

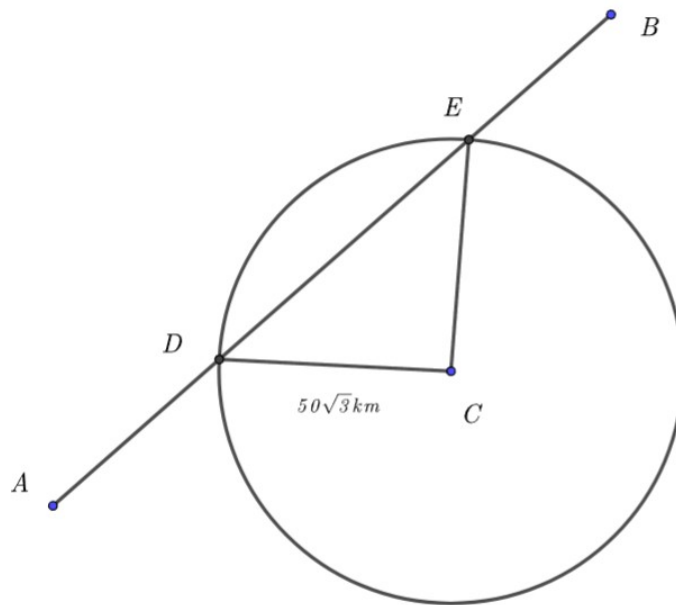
Vậy $S = a + b + c = 3$.

Câu 5: Một chiếc máy bay đang bay từ điểm A đến điểm B . Giả sử với đơn vị km, điểm A có tọa độ $A(100, 200, 300)$ và điểm B có tọa độ $B(400, 500, 600)$. Máy bay được trạm không lưu thông báo có một cơn bão với tâm bão ở vị trí C với tọa độ $C(250, 350, 450)$, máy bay được an toàn khi cách tâm bão tối thiểu là $50\sqrt{3}$ km. Tính gọi D là điểm trên đường bay (giữa A và B) mà máy bay cần chuyển hướng để tránh cơn bão. Tính độ dài quãng đường AD (kết quả lấy phần nguyên).

Lời giải

173, 21 km

Đáp án:



$$D(x_0, y_0, z_0)$$

Giả sử

Vì D là điểm trên đường bay (giữa A và B). Khi đó ta có ba điểm A, D, B thẳng hàng.

Ta lại có D là điểm mà máy bay cần chuyển hướng để tránh cơn bão. Khi đó $DC = 50\sqrt{3} \text{ km}$

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \overline{AD} = k \overline{AB} \\ DC = 50\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 100 = k \cdot 300 \\ y_0 - 200 = k \cdot 300 \\ z_0 - 300 = k \cdot 300 \\ \sqrt{(x_0 - 250)^2 + (y_0 - 350)^2 + (z_0 - 450)^2} = 50\sqrt{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 100 + 300k \\ y_0 = 200 + 300k \\ z_0 = 300 + 300k \\ \sqrt{(100 + 300k - 250)^2 + (200 + 300k - 350)^2 + (300 + 300k - 450)^2} = 50\sqrt{3} * \end{cases}$$

$$3(k \cdot 300 - 150)^2 = 7500 \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{3} \\ k = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Giải (*) ta có

Vì D là điểm gần A hơn do đó chọn $k = \frac{1}{3}$ hay $D(200, 300, 400)$

$$AD = \sqrt{(200 - 100)^2 + (300 - 200)^2 + (400 - 300)^2} = 100\sqrt{3} \approx 173,21$$

Vậy độ dài quãng đường:

Câu 6: Một công ty sản xuất bóng đèn LED đã kiểm tra chất lượng sản phẩm của một lô hàng và ghi nhận thời gian sử dụng của 250 bóng đèn như sau:

Khoảng thời gian (giờ)	Giá trị đại diện	Số lượng bóng đèn
[0, 1000)	500	5
[1000, 2000)	1500	46
[2000, 3000)	2500	162
[3000, 4000)	3500	25
[4000, 5000)	4500	12
		$N = 250$

Nếu độ lệch chuẩn của của bảng số liệu trên vượt quá 500 thì lô hàng không đạt tiêu chuẩn. Qua tính toán người ta thấy lô hàng đã không đạt tiêu chuẩn để đưa ra thị trường. Hỏi độ lệch chuẩn của của lô hàng trên đã vượt qua tiêu chuẩn là bao nhiêu? (kết quả lấy phần nguyên).

Lời giải

245,13

Đáp án:

$$\frac{s}{x} = \frac{5 \cdot 500 + 46 \cdot 1500 + 162 \cdot 2500 + 25 \cdot 3500 + 12 \cdot 4500}{250} = \frac{618000}{250} = 2472$$

Tính giá trị trung bình

$$s^2 = \frac{5.500^2 + 46.1500^2 + 162.2500^2 + 25.3500^2 + 12.4500^2}{250} - 2472^2 = 555216$$

Tính phương sai:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{555216} \approx 745,13$$

Tính độ lệch chuẩn:

$$745,13 - 500 = 245,13$$

Độ lệch chuẩn của của lô hàng trên đã vượt qua tiêu chuẩn là:

-----Hết-----