

CÁC DẠNG TOÁN BÀI PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC CƠ BẢN

Dạng 1: Giải các phương trình lượng giác cơ bản

Phương pháp: Cần chú ý một số điều kiện sau:

- Nhận dạng (biến đổi) về đúng loại phương trình cơ bản, xem số "a" quy về góc đẹp hay xấu.
- Chọn và lắp vào công thức nghiệm

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $2\cos x = -\sqrt{2}$

c) $\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1$

d) $\cot(2x - 1) = \cot \frac{\pi}{5}$

e) $\sin 2x + \cos 4x = 0$ f) $\cos 3x = -\cos 7x$

Lời giải

$$\text{a) } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

và

$$\text{b) } 2\cos x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là

và

$$\sqrt{3}\tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = 1 \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \tan\left(\frac{x}{2} + 15^\circ\right) = \tan 30^\circ$$

c)

$$\Leftrightarrow \frac{x}{2} + 15^\circ = 30^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 30^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$\cot(2x - 1) = \cot \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow 2x - 1 = \frac{\pi}{5} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

d)

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{1}{2} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là

$$\sin 2x + \cos 4x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x = -\sin 2x \Leftrightarrow \cos 4x = \sin(-2x) \Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-2x)\right)$$

e)

$$\Leftrightarrow \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x = \frac{\pi}{2} + 2x + k2\pi \\ 4x = -\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là và .

$$\cos 3x = -\cos 7x \Leftrightarrow \cos 3x = \cos(\pi + 7x) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \pi + 7x + k2\pi \\ 3x = -(\pi + 7x) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

f)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \\ x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là $x = -\frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ và $x = -\frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$

Bài tập 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$

e) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

f) $\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1$

Lời giải

a) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

b) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 4x - \frac{\pi}{3} = k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

c) $\cos\left(\frac{\pi}{5} - x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{5} - x = \pi + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{-4\pi}{5} - k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

d) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 3x + \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

$$\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$$

e)

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} + 2x\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{6} + 2x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

f)

Bài tập 3: Giải các phương trình lượng giác sau:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} & \cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7} & \text{b)} \quad \cot 3x = -2; \quad \text{c)} \quad \cot(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a)} \quad \cot 4x = \cot \frac{2\pi}{7} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{7} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{14} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{b)} \quad \cot 3x = -2 = \cot \alpha \Leftrightarrow 3x = \alpha + k\pi \Leftrightarrow \frac{1}{3}\alpha + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{array}{l} \text{c)} \text{ Vì } \frac{1}{\sqrt{3}} = \cot 60^\circ \quad \text{nên} \quad \cot(2x - 10^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot(2x - 10^\circ) = \cot 60^\circ \\ \Leftrightarrow 2x - 10^\circ = 60^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow 2x = 70^\circ + k180^\circ \Leftrightarrow x = 35^\circ + k90^\circ, k \in \mathbb{Z}. \end{array}$$

Bài tập 4: Giải các phương trình lượng giác sau:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \sin\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \quad \text{với } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \\ \text{b)} & \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \quad \text{với } x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right). \end{array}$$

Lời giải

$$\text{a)} \quad \sin\left(2x + \frac{2\pi}{5}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{5} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Do } x \in \left(\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right) \quad \text{nên} \quad \frac{\pi}{2} < -\frac{\pi}{5} + k\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{7}{5} < k < \frac{17}{5} \quad \text{mà } k \in \mathbb{Z} \quad \text{nên} \quad k \in \{2; 3\}.$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{\frac{4\pi}{5}; \frac{13\pi}{10}\right\}.$$

$$\text{b)} \quad \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{5\pi}{6} + k2\pi$$

Do $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $-\frac{\pi}{2} < -\frac{5\pi}{6} + k2\pi < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{2}{3}$.

Mặt khác $k \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị nào của k thoả mãn.

Vậy phương trình không có nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Bài tập 5: Tìm m để phương trình $\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = m$ có nghiệm $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

Lời giải

Ta có: $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} < x + \frac{\pi}{4} < \frac{3\pi}{4} \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} < \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$

Phương trình đã cho có nghiệm khi $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{m}{\sqrt{2}} \leq 1 \Leftrightarrow 1 < m \leq \sqrt{2}$.

Bài tập 6: Giả sử một vật dao động điều hoà xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình

$$x = 2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right)$$

Ở đây thời gian t tính bằng giây và quãng đường x tính bằng centimet. Hãy cho biết trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng bao nhiêu lần?

Lời giải

Vị trí cân bằng của vật dao động điều hoà là vị trí vật đứng yên khi đó $x = 0$ ta có:

$$2\cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(5t - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow 5t - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}$$

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, tức là $0 \leq t \leq 6$ hay $0 \leq \frac{2\pi}{15} + k\frac{\pi}{5} \leq 6$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{3} \leq k \leq \frac{90 - 2\pi}{3\pi} \quad k \in \mathbb{Z} \quad k \in \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 6 giây, vật đi qua vị trí cân bằng 9 lần.

$$v_0 = 500 \text{ (m/s)}$$

Bài tập 7: Một quả đạn pháo được bắn khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu v_0 hợp với phương ngang một góc α . Trong Vật lí, ta biết rằng, nếu bỏ qua sức cản của không khí và coi quả đạn

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

pháo được bắn ra từ mặt đất thì quỹ đạo của quả đạn tuân theo phương trình $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$, ở đó $g = 9,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$

là gia tốc trọng trường.

a) Tính theo góc bắn α tầm xa mà quả đạn đạt tới (tức là khoảng cách từ vị trí bắn đến điểm quả đạn chạm đất).

b) Tìm góc bắn α để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m.

c) Tìm góc bắn α để quả đạn đạt độ cao lớn nhất.

Lời giải

$$v_0 = 500 \text{ (m/s)}, g = 9,8 \text{ (m/s}^2\text{)}$$

Vì $y = 0$ nên ta có phương trình quỹ đạo của quả đạn là

$$y = \frac{-9,8}{2 \cdot 500^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \quad y = \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

hay

$$y = 0 \quad \frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha = 0$$

a) Quả đạn chạm đất khi $y = 0$, khi đó

$$\Leftrightarrow x \left(\frac{-49}{2500000 \cos^2 \alpha} x + \tan \alpha \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2500000 \cos^2 \alpha \cdot \tan \alpha}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2500000 \cos \alpha \cdot \sin \alpha}{49} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} \end{cases}$$

Loại $x = 0$ (đạn pháo chưa được bắn).

$$x = \frac{1250000 \sin 2\alpha}{49} \text{ (m)}$$

Vậy tầm xa mà quả đạn đạt tới là

b) Để quả đạn trúng mục tiêu cách vị trí đặt khẩu pháo 22000 m thì $x = 22000 \text{ m}$.

$$\frac{1250000\sin 2\alpha}{49} = 22000 \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{539}{625}$$

Khi đó

$$\beta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin \beta = \frac{539}{625} \quad \sin 2\alpha = \sin \beta$$

Gọi β là góc thỏa mãn . Khi đó ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = \beta + k2\pi \\ 2\alpha = \pi - \beta + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{\beta}{2} + k\pi \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{\beta}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$y = \frac{-49}{2500000\cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$$

c) Hàm số là một hàm số bậc hai có đồ thị là một parabol có tọa

$$l(x_1; y_1)$$

độ đỉnh là

$$\begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} = -\frac{\tan \alpha}{2 \cdot \frac{-99}{2500000\cos^2 \alpha}} = \frac{1250000\cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = f(x_I) = \frac{-49}{2500000\cos^2 \alpha} \left(\frac{1250000\cos \alpha \sin \alpha}{49} \right)^2 + \frac{1250000\cos \alpha \sin \alpha}{49} \tan \alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_I = \frac{1250000\cos \alpha \sin \alpha}{49} \\ y_I = \frac{625000\sin^2 \alpha}{49} \end{cases}$$

Hay

$$y_{\max} = \frac{625000\sin^2 \alpha}{49}$$

Do đó, độ cao lớn nhất của quả đạn là

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tìm tập nghiệm của phương trình $\sin x = 0$.

A. $S = \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

B. $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

C. $S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

D. $S = \{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

Lời giải

Ta có $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$. Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

Câu 2: Nghiệm của phương trình $2\sin x + 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.
 B. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi$.
 C. $x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{8} + k2\pi$.
 D. $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi$.

Lời giải

$$2\sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi + \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \ (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có:

$$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi.$$

Vậy phương trình có nghiệm là

Câu 3: Nghiệm của phương trình $\sin \frac{x}{2} = 1$ là

- A. $x = \pi + k2\pi$.
 B. $x = k2\pi$.
 C. $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.
 D. $x = \pi + k4\pi$.

Lời giải

$$\sin \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \pi + k4\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Câu 4: Phương trình $1 - \cos 2x = 0$ có tập nghiệm là:

- A. $\left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 B. $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 C. $\{k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.
 D. $\left\{\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

$$1 - \cos 2x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Câu 5: Giải phương trình $2\cos x = -1$ được nghiệm là

- A. $\left\{\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 B. $\left\{\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 C. $\left\{-\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
 D. $\left\{\pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

$$2\cos x = -1 \Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Câu 6: Số nghiệm của phương trình $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ với $\pi \leq x \leq 5\pi$ là:

- A. 0. B. 3. C. 1. D. 2.

Lời giải

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = k2\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có:

Mà $\pi \leq x \leq 5\pi$ nên $\pi \leq -\frac{\pi}{4} + k2\pi \leq 5\pi \Leftrightarrow \frac{5}{8} \leq k \leq \frac{21}{8}$; $k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \{1; 2\}$ vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm trên $[\pi; 5\pi]$.

Câu 7: Nghiệm của phương trình $\cos x = \cos 60^\circ$ là

- A. $x = 120^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$ B. $\begin{cases} x = 60^\circ + k360^\circ \\ x = 120^\circ + k360^\circ \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$
C. $x = \pm 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$ D. $x = 60^\circ + k180^\circ, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$\cos x = \cos 60^\circ \Leftrightarrow x = \pm 60^\circ + k360^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Câu 8: Tập nghiệm S của phương trình $\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0$

- A. $S = \left\{ -\frac{\pi}{9} + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ B. $S = \left\{ -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
C. $S = \left\{ -\pi + k3\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ D. $S = \left\{ \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$\sqrt{3} \tan \frac{x}{3} + 3 = 0 \Leftrightarrow \tan \frac{x}{3} = -\sqrt{3} = \tan\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \frac{x}{3} = -\frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = -\pi + k3\pi$$

Ta có

Câu 9: Giải phương trình $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0$

- A. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ B. $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} (k \in \mathbb{Z})$
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad \sqrt{3} \tan x - 1 = 0$$

Điều kiện: . Ta có

Với điều kiện $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ thì phương trình $\sqrt{3} \tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Leftrightarrow \tan x = \tan \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$ $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

. Vậy phương trình có nghiệm là .

Câu 10: Nghiệm của phương trình $\tan x - 1 = 0$ là

- A. $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$. B. $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi$. C. $x = \frac{-\pi}{4} + k\pi$. D. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

Lời giải

$\tan x - 1 = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Ta có:

Câu 11: Chọn khẳng định sai.

- A. $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. B. $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.
- C. $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$. D. $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$.

Lời giải

$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$

Ta có C sai.

Câu 12: Tập nghiệm của phương trình $\sin x = 2 \cos x$ là

- A. $\{\arctan 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. B. $\emptyset$.
- C. $\{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$. D. $\{\tan 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$.

Lời giải

Ta có $\sin x = 2 \cos x$

Với $\cos x = 0$ thay vào phương trình, ta thấy vô nghiệm.

$\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $\tan x = 2 \Leftrightarrow x = \arctan(2) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Với , ta có

$$\{\arctan 2 + k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$$

So với điều kiện ta có tập nghiệm của phương trình là

Câu 13: Nghiệm của phương trình $\cot 2x = -\sqrt{3}$ là

- A. $x = \operatorname{arccot}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. B. $x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.

C. $x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$\cot 2x = -\sqrt{3} \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có:

Câu 14: Tìm nghiệm của phương trình $\cot x = \sqrt{3}$.

A. $x = 60^\circ + k.180^\circ$

B. $x = 60^\circ + k.360^\circ$

C. $x = 30^\circ + k.180^\circ$

D. $x = -60^\circ + k.180^\circ$

Lời giải

$$\cot x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot 30^\circ \Leftrightarrow x = 30^\circ + k.180^\circ, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có:

Câu 15: Phương trình $3 \cot x - \sqrt{3} = 0$ có họ nghiệm là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. vô nghiệm.

Lời giải

$$3 \cot x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \cot x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow \cot x = \cot \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Phương trình:

Câu 16: Nghiệm của phương trình $\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ là

A. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

$$\cot x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot x = \cot \left(\frac{\pi}{3} \right) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có:

Câu 17: Hỏi trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, phương trình $\sin x = \frac{1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có:

Trên đoạn $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ chỉ có một nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ thoả mãn.

- Câu 18:** Số nghiệm của phương trình $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$ trên $[0; 2\pi]$ là:
A. 5. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 2

Lời giải

Ta có $\sin\left(5x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow 5x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{5}; k \in \mathbb{Z}$

Khi đó $x \in [0; 2\pi] \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{5} \leq 2\pi \Leftrightarrow \frac{-5}{12} \leq k \leq \frac{55}{12}; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k = 0; 1; 2; 3; 4$

Vậy có 5 nghiệm thuộc khoảng $[0; 2\pi]$.

- Câu 19:** Tập nghiệm của phương trình $2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$ là:
A. $S = \left\{\frac{\pi}{6} + k2\pi; \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **B.** $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k4\pi; \frac{5\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
C. $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + k4\pi; \frac{\pi}{3} + k4\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$. **D.** $S = \left\{\frac{\pi}{3} + k2\pi; \frac{5\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Lời giải

$$2\sin\frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sin\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ \frac{x}{2} = \pi - \frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k4\pi \\ x = \frac{5\pi}{3} + k4\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

- Câu 20:** Phương trình $\sin 2x = \frac{-1}{2}$ có bao nhiêu nghiệm thoả mãn $0 < x < \pi$.
A. 1. **B.** 3. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

$$\sin 2x = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có:

$$x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Trường hợp 1:

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \frac{-\pi}{12} + k\pi < \pi \Rightarrow \frac{1}{12} < k < \frac{13}{12} \Rightarrow k = 1 \Rightarrow x = \frac{11\pi}{12}$$

Do

$$x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Trường hợp 2:

$$0 < x < \pi \Rightarrow 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \Rightarrow \frac{-7}{12} < k < \frac{5}{12} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$$

Do

- Câu 21:** Số nghiệm của phương trình $\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ trong khoảng $(0; 3\pi)$ là
- A. 4. B. 1. C. 6. D. 2.

Lời giải

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có

$$\begin{matrix} \text{Mà} & x \in (0; 3\pi) & \text{nên} & \begin{cases} 0 < \frac{\pi}{6} + k\pi < 3\pi \\ 0 < \frac{\pi}{3} + k\pi < 3\pi \end{cases} & \Leftrightarrow & \begin{cases} -\frac{1}{6} < k < \frac{17}{6} \\ -\frac{1}{3} < k < \frac{8}{3} \end{cases} & \text{và do} & k \in \mathbb{Z} & \text{nên} & \begin{cases} k \in \{0; 1; 2\} \\ k \in \{0; 1; 2\} \end{cases} \end{matrix}$$

$$\sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (0; 3\pi)$$

Vậy phương trình có 6 nghiệm trong khoảng

- Câu 22:** Tập nghiệm của phương trình $2 \sin 2x = \sqrt{2}$ là:

- A. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; \frac{3\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ B. $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k\pi; \frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$
- C. $S = \left\{ \frac{\pi}{8} + k2\pi; \frac{3\pi}{8} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ D. $S = \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; \frac{3\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$2 \sin 2x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k\pi \\ x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Câu 23: Nghiệm của phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Câu 24: Số nghiệm của phương trình $\cos x = \frac{2}{5}$ trên khoảng $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right)$ là:

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Ta có $\cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \frac{2}{5} + k2\pi$. Vì $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right) \Rightarrow x = \arccos \frac{2}{5}; x = -\arccos \frac{2}{5} + 2\pi$ là thỏa mãn.

Câu 25: Tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $5\cos x - 2 = 0$ là

A. $S = 3\pi$.

B. $S = 2\pi$.

C. $S = 0$.

D. $S = 4\pi$.

Lời giải

$$5\cos x - 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{2}{5} \Leftrightarrow x = \pm \arccos \left(\frac{2}{5}\right) + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Xét trên $(0; 2\pi)$ phương trình có hai nghiệm $x = \arccos \left(\frac{2}{5}\right)$ và $x = -\arccos \left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi$.

$$\arccos \left(\frac{2}{5}\right) - \arccos \left(\frac{2}{5}\right) + 2\pi = 2\pi$$

Do vậy tổng tất cả các nghiệm của phương trình bằng

Câu 26: Tính tổng S tất cả các nghiệm trên khoảng $(0; 3\pi)$ của phương trình $2\cos 3x = 1$

A. $S = \frac{121\pi}{9}$.

B. $S = \frac{120\pi}{9}$.

C. $S = \frac{122\pi}{9}$.

D. $S = \frac{20\pi}{3}$.

Lời giải

$$2\cos 3x = 1 \Leftrightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}$$

Ta có:

$$S = \left(\frac{\pi}{9} + \frac{7\pi}{9} + \frac{13\pi}{9} + \frac{19\pi}{9} + \frac{25\pi}{9} \right) + \left(\frac{5\pi}{9} + \frac{11\pi}{9} + \frac{17\pi}{9} + \frac{23\pi}{9} \right) = \frac{121\pi}{9}$$

Câu 27: Phương trình $\cos 3x = \cos \frac{\pi}{15}$ có nghiệm là:

A. $x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$. **B.** $x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi$. **C.** $x = \frac{\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$. **D.** $x = \frac{-\pi}{45} + \frac{2k\pi}{3}$.

Lời giải

$$\cos 3x = \cos 12^\circ \Leftrightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{15} \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{15} + k2\pi \Leftrightarrow 3x = \pm \frac{\pi}{45} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

Ta có

Câu 28: Tổng nghiệm dương nhỏ nhất và nghiệm âm lớn nhất của phương trình $\cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

A. $\frac{\pi}{12}$. **B.** $\frac{-2\pi}{3}$. **C.** $\frac{\pi}{4}$. **D.** $\frac{-3\pi}{4}$.

Lời giải

$$\cos \left(2x - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 2x = k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = k\pi \end{cases}$$

Ta có:

$$k = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} \\ x = 0 \end{cases} \quad k = -1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-5\pi}{6} \\ x = -\pi \end{cases}$$

Cho

Cho

Câu 29: Cho phương trình $\sqrt{3} \tan 2x = 3$ có nghiệm x_0 khi đó $\cos x_0$ nhận giá trị là

A. $\frac{-\sqrt{3}}{2}$. **B.** $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2}$. **C.** $\pm \frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\pm \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$\sqrt{3} \tan 2x = 3 \Leftrightarrow \tan 2x = \frac{3}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}$$

Ta có

$$x_0 \in \left\{ \frac{\pi}{6} + 2k\pi, \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \quad \cos x_0 \in \left\{ \pm \frac{\sqrt{3}}{2}; \pm \frac{1}{2} \right\}$$

Suy ra . Do vậy

Câu 30: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 2x = \tan x$ trên $[-\pi; 2\pi]$ là

- A.** π . **B.** $\frac{\pi}{2}$. **C.** 4π . **D.** 2π .

Lời giải

$$\begin{cases} \cos 2x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Điều kiện xác định:

$\tan 2x = \tan x \Leftrightarrow 2x = x + k\pi \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Do $x \in [-\pi; 2\pi]$ nên $x \in \{-\pi; 0; \pi; 2\pi\}$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình trên $[-\pi; 2\pi]$ là 2π

Câu 31: Tổng các nghiệm của phương trình $\tan 5x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; \pi)$ bằng

- A.** π . **B.** $\frac{5\pi}{2}$. **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** 2π .

Lời giải

Ta có: $\tan 5x - \tan x = 0$ (1) . Điều kiện: $\begin{cases} 5x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{10} + k\frac{\pi}{5} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow \tan 5x = \tan x \Leftrightarrow 5x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{4}$ ($k \in \mathbb{Z}$)

Do $x \in [0; \pi)$ và kết hợp với điều kiện suy ra $x \in \left\{ 0; \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4} \right\}$

$$0 + \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} = \pi$$

Tổng các nghiệm:

Câu 32: Nghiệm của phương trình $\tan 3x = \tan x$ là :

- A.** $x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **B.** $x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. **C.** $x = \frac{k\pi}{6}, k \in \mathbb{Z}$. **D.** $x = k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Lời giải

$$\begin{cases} x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \end{cases}$$

Điều kiện:

Ta có: $\tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

$$x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Kết hợp điều kiện, khi đó phương trình có nghiệm là

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

Câu 33: Nghiệm của phương trình

là

- A.** $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$ **C.** $x = \frac{\pi}{3} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$\tan 2x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$$

Ta có

$$\sqrt{3} \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

Câu 34: Nghiệm của phương trình

là:

- A.** $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$ **B.** $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$
C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ **D.** $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$\Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Phương trình

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Câu 35: Nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình

thuộc khoảng

- A.** $\left(-\pi; \frac{\pi}{2}\right)$ **B.** $(0; \pi)$ **C.** $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ **D.** $(\pi; 3\pi)$

Lời giải

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Xét phương trình:

$$x = \frac{2\pi}{3} \in (0; \pi)$$

Vậy nghiệm dương nhỏ nhất của phương trình là

$$\sqrt{3} \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 1$$

Câu 36: Nghiệm của phương trình là:

A. $x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

B. $x = \pm \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

C. $x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

D. $x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$\Leftrightarrow \cot\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

Phương trình

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho phương trình lượng giác $\sin 2x = -\frac{1}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho tương đương $\sin 2x = \sin \frac{\pi}{6}$

b) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 3 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{3\pi}{2}$

d) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$

Lời giải

$$\sin 2x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin 2x = \sin -\frac{\pi}{6}$$

a) Sai:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = \frac{-\pi}{6} + k2\pi \\ 2x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

b) Sai: Phương trình đã cho

$$0 < x < \pi \Rightarrow \begin{cases} 0 < \frac{-\pi}{12} + k\pi < \pi \\ 0 < \frac{7\pi}{12} + k\pi < \pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 \\ k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} \\ x = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$$

- c) Đúng: Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ $\frac{11\pi}{12} + \frac{7\pi}{12} = \frac{3\pi}{2}$
- d) Đúng: Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{11\pi}{12}$

Câu 2: Cho phương trình lượng giác $\tan(2x - 15^\circ) = 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình đã cho có nghiệm $x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$
- b) Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ thì phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng -30°
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ bằng 180°
- d) Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng 60°

Lời giải

$$\tan(2x - 15^\circ) = 1 \Leftrightarrow x = 30^\circ + k90^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

a) Đúng:

$$-180^\circ < x < 90^\circ \Rightarrow -180^\circ < 30^\circ + k90^\circ < 90^\circ (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow k = \{-2; -1; 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = -150^\circ \\ x = -60^\circ \\ x = 30^\circ \end{cases}$$

b) Sai:

$$-150 + (-60) + 30 = -180$$

c) Sai:

- d) Sai: Trong khoảng $(-180^\circ; 90^\circ)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng 30°

Câu 3: Cho phương trình lượng giác $\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình đã cho tương đương $\cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right)$
- b) Phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$
- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ bằng $\frac{-5\pi}{9}$
- d) Trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{9}$

Lời giải

$$\cot 3x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow \cot 3x = \cot\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$

a) Sai:

$$\Leftrightarrow 3x = \frac{-\pi}{6} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{-\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} (k \in \mathbb{Z})$$

b) Sai: Phương trình đã cho

$$-\frac{\pi}{2} < \frac{-\pi}{9} + k\frac{\pi}{3} < 0 (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{1}{3} \Rightarrow k = \{-1; 0\} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{9} \\ x = \frac{-4\pi}{9} \end{cases}$$

c) Đúng:

d) Đúng: Trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{9}$

Câu 4: Cho phương trình lượng giác $2\cos x = \sqrt{3}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình có nghiệm $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$

b) Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có 4 nghiệm

c) Tổng các nghiệm của phương trình trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ bằng $\frac{25\pi}{6}$

d) Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$

Lời giải

$$2\cos x = \sqrt{3} \Leftrightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

a) Sai: Ta có:

$$x \in \left[0; \frac{5\pi}{2}\right] \quad x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$$

b) Sai: Vì nên

$$x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}; \frac{13\pi}{6}\right\}$$

Vậy nghiệm x thỏa mãn đề bài là:

$$\frac{\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{13\pi}{6} = \frac{25\pi}{6}$$

c) Đúng:

d) Đúng: Trong đoạn $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{13\pi}{6}$

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$$

Câu 5: Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình đã cho có nghiệm $\begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$

b) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có 2 nghiệm

- c) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $(0; \pi)$ bằng $\frac{7\pi}{6}$
- d) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{5\pi}{6}$

Lời giải

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

a) Đúng: Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$\text{Vì } x \in (0; \pi) \quad \text{nên } x \in \left\{\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right\}$$

b) Đúng:

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}; x = \frac{5\pi}{6}$.

$$\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$$

c) Sai:

- d) Trong khoảng $(0; \pi)$ phương trình có nghiệm lớn nhất bằng $\frac{5\pi}{6}$

Câu 6: Cho phương trình lượng giác $\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

a) Phương trình có nghiệm

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{2\pi}{9}$

c) Trên khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có 3 nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ bằng $\frac{7\pi}{9}$

Lời giải

a) Sai: Phương trình có nghiệm

$$\begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\sin\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 3x + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

b) Đúng: Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

c) Sai: Vì $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ nên $x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{4\pi}{9}$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm thuộc khoảng $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$.

$$\frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{9} = \frac{7\pi}{9}$$

d) Đúng:

Câu 7:

Cho phương trình lượng giác

$$3 - \sqrt{3} \tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

a) Phương trình đã cho có nghiệm

b) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$

c) Khi $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3}$ thì phương trình có ba nghiệm

d) Tổng các nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{2\pi}{3}\right)$ bằng $\frac{\pi}{6}$

Lời giải

$$\tan\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

a) Sai: Phương trình tương đương với:

$$-\frac{\pi}{6}$$

b) Sai: Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng

$$\frac{-\pi}{4} < x < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-\pi}{4} < \frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7\pi}{12} < \frac{k\pi}{2} < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \frac{-7}{6} < k < \frac{2}{3}$$

c) Sai: Vì

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên $k \in \{-1; 0\}$. Với $k = -1$ thì $x = \frac{-\pi}{6}$, với $k = 0$ thì $x = \frac{\pi}{3}$.

Vậy $x = \frac{-\pi}{6}$ và $x = \frac{\pi}{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

$$\frac{-\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

d) Đúng:

Câu 8: Cho phương trình lượng giác $\sin x = -\frac{1}{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$\sin x = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

a) Phương trình đã cho tương đương

b) Phương trình đã cho có nghiệm là: $x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$.

c) Phương trình đã cho có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{3}$

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là ba nghiệm

Lời giải

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

a) Sai: Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

b) Đúng: Phương trình đã cho

$$x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{6} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

c) Sai: Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng $-\frac{\pi}{6}$

d) Sai: Khi $x \in (-\pi; \pi)$ phương trình có hai nghiệm

Câu 9: Cho phương trình lượng giác $2 \sin x = \sqrt{2}$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

- a) Phương trình đã cho tương đương $\sin x = \sin \frac{\pi}{4}$
- b) Phương trình đã cho có nghiệm là: $x = \frac{\pi}{3} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$
- c) Phương trình đã cho có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{4}$
- d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là hai nghiệm

Lời giải

$$2 \sin x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{4}$$

a) Đúng: Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Sai: Phương trình đã cho

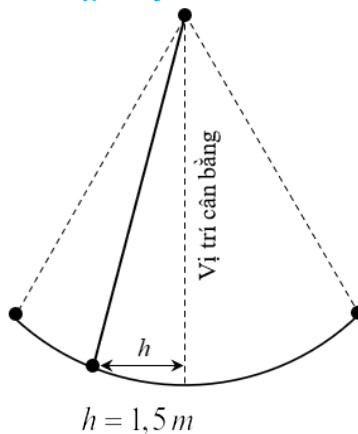
$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm là:

b) Đúng: Phương trình có nghiệm dương nhỏ nhất bằng $\frac{\pi}{4}$

d) Sai: Số nghiệm của phương trình trong khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ là một nghiệm

Câu 10: Một vật dao động xung quanh vị trí cân bằng theo phương trình $x = 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right)$; trong đó t là thời gian được tính bằng giây và quãng đường $h = |x|$ được tính bằng mét là khoảng cách theo phương ngang của chất điểm đối với vị trí cân bằng. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là

b) Trong 10 giây đầu tiên, có hai thời điểm vật ở xa vị trí cân bằng nhất

$$\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$$

c) Khi vật ở vị trí cân bằng thì

d) Trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật đi qua vị trí cân bằng 4 lần?

Lời giải

$$h = |x| = \left| 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) \right| \leq 1,5$$

Ta có

a) Đúng: Vật ở xa vị trí cân bằng nhất nghĩa là $h = 1,5 m$

$$\cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t\pi}{4} = k2\pi \\ \frac{t\pi}{4} = \pi + k2\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 8k \\ t = 4 + 8k \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Khi đó

b) Sai: Vậy trong 10 giây đầu tiên thì vật ở xa vị trí cân bằng nhất tại các thời điểm:

$$t = 0, t = 4, t = 8 \text{ (giây)}.$$

$$x = 0 \Leftrightarrow 1,5 \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos\left(\frac{t\pi}{4}\right) = 0$$

c) Đúng: Khi vật ở vị trí cân bằng thì

$$\Leftrightarrow \frac{t\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow t = 2 + 4k (k \in \mathbb{Z}).$$

d) Sai: Vậy trong khoảng từ 0 đến 20 giây thì vật ở vị trí cân bằng tại các thời điểm $t = 2, t = 6, t = 10, t = 14, t = 18$;

(giây); tức là có 5 lần vật qua vị trí cân bằng.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $\sin(2x) + 2 = m$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$\sin(2x) + 2 = m \Leftrightarrow \sin(2x) = m - 2$
Ta có: có nghiệm khi và chỉ khi
 $-1 \leq m - 2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3 \Leftrightarrow m \in [1; 3]$ $a + b = 4$
. Vậy

Câu 2: Tập hợp các giá trị của tham số m để phương trình $3\sin^2 x = 2m - 1$ có nghiệm là $[a; b]$. Khi đó $2a + b$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

$3\sin^2 x = 2m - 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{2m - 1}{3}$
Ta có:
$$\begin{cases} \frac{2m - 1}{3} \leq 1 \\ \frac{2m - 1}{3} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 2 \\ m \geq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq 2$$

Đề phương trình có nghiệm thì

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = 2 \end{cases} \quad 2a + b = 2 \cdot \frac{1}{2} + 2 = 3$$

Vậy nên suy ra

Câu 3: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos x) = 0$ trên đoạn $[1; 2021]$.

Lời giải

$\sin(\cos x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$
Ta có:

$$-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq k\pi \leq 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{\pi} \leq k \leq \frac{1}{\pi} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0$$

Mà:

$$\Rightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + m\pi \ (m \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{x \in [1; 2021]} \frac{1}{\pi} - \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{2021}{\pi} - \frac{1}{2} \xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} m \in \{0; 1; 2; \dots; 642\}$$

$\Rightarrow$ 643
có nghiệm thỏa mãn bài toán.

Câu 4: Phương trình $\cos x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc nửa khoảng $(0; 2021\pi]$?

Lời giải

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

Ta có

$$(0; 2\pi]$$

Do đó phương trình có 2 nghiệm trên nửa khoảng

$$(0; 2020\pi]$$

Suy ra phương trình có 2020 nghiệm trên nửa khoảng

$$(2020\pi; 2021\pi]$$

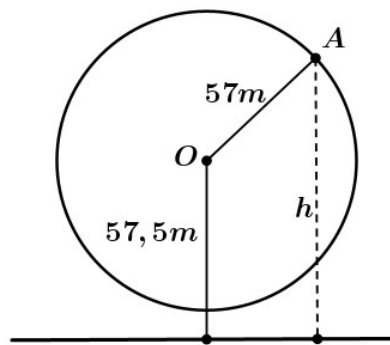
Trên nửa khoảng phương trình có thêm 1 nghiệm nữa.

$$\cos x = 0$$

$$(0; 2021\pi]$$

Vậy phương trình có 2021 nghiệm thuộc nửa khoảng

- Câu 5:** Một vòng quay trò chơi có bán kính 57 m, trục quay cách mặt đất 57,5 m, quay đều mỗi vòng hết 15 phút. Khi vòng quay quay đều, khoảng cách h (m) từ một cabin gắn tại điểm A của vòng quay đến mặt đất được tính bởi công thức:
- $$h(t) = 57 \sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) + 57,5$$
- với t là thời gian quay của vòng quay tính bằng phút ($t \geq 0$). Khi quay một vòng lần thứ nhất tính từ thời điểm $t = 0$ (phút), tại thời điểm nào của t thì cabin ở vị trí cao nhất?



Lời giải

$$\sin\left(\frac{2\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \quad t = 7,5$$

Khi quay một vòng, cabin ở vị trí cao nhất khi hay (phút)

- Câu 6:** Hằng ngày, Mặt Trời chiếu sáng, bóng của một toà chung cư cao 40 m in trên mặt đất, độ dài

$$S(t) = 40 \left| \cot \frac{\pi}{12}t \right|,$$

bóng của toà nhà này được tính bằng công thức ở đó S được tính bằng mét, còn t là số giờ tính từ 6 giờ sáng. Tại thời điểm nào thì độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà?

Lời giải

Độ dài bóng của toà nhà bằng chiều cao toà nhà khi:

$$S(t) = 40 \Leftrightarrow 40 \left| \cot \frac{\pi}{12}t \right| = 40 \Leftrightarrow \cot \frac{\pi}{12}t = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{12}t = \pm \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow t = \pm 3 + 12k \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$0 \leq t \leq 12 \quad t = 3 \quad t = 9$$

Vì nên hoặc , tức là tại thời điểm 9 giờ sáng hoặc 3 giờ chiều thì bóng của toà nhà dài bằng chiều cao của toà nhà.

Dạng 2: Giải các phương trình lượng giác mở rộng

Phương pháp: Cần chú ý một số điều đặc biệt sau đây

- Biến đổi về một trong các công thức sau:

$$\square \sin u = \sin v$$

$$\square \cos u = \cos v$$

$$\square \tan u = \tan v$$

$$\square \cot u = \cot v$$

- Chú ý các công thức biến đổi lượng giác:

$$\square -\sin x = \sin(-x)$$

$$\square -\cos x = \cos(\pi - x)$$

$$\square \sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\square \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $2 \cos 3x + 1 = 0$

b) $2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0$

c) $\cos 2x + 5 \sin x - 3 = 0$

d) $4 \sin^2 x + \cos 2x - 5 \sin x + 1 = 0$

e) $\cos 2x - \sin 2x = 1$

f) $\sin 4x + \cos 5x = 0$

Lời giải

$$2 \cos 3x + 1 = 0 \Leftrightarrow \cos 3x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ 3x = -\frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases}$$

Giải phương trình:

a)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

b) Ta có $2 \sin^2 x + \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 1 \\ \sin x = -\frac{3}{2} \end{cases}$

Với $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Với $\sin x = -\frac{3}{2} \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

$$\cos 2x + 5 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow 1 - 2 \sin^2 x + 5 \sin x - 3 = 0 \Leftrightarrow -2 \sin^2 x + 5 \sin x - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \\ \sin x = 2 \end{cases}$$

c)

Với $\sin x = 2$, phương trình vô nghiệm.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Với

$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm

d) Ta có $4 \sin^2 x + \cos 2x - 5 \sin x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 \sin^2 x + 1 - 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2 \sin^2 x - 5 \sin x + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = \frac{1}{2} \text{ (TM)} \\ \sin x = 2 \text{ (L)} \end{cases}$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Với

$$\cos 2x - \sin 2x = 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = 1$$

e) Ta có

$$\Leftrightarrow \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}; k \in \mathbb{Z}$$

f) $\sin 4x + \cos 5x = 0 \Leftrightarrow \cos 5x = -\sin 4x \Leftrightarrow \cos 5x = \cos \left(\frac{\pi}{2} + 4x \right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x = \frac{\pi}{2} + 4x + k2\pi \\ 5x = -\frac{\pi}{2} - 4x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{9} \end{cases}$$

Bài tập 2: Giải các phương trình lượng giác sau:

a) $\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$

b) $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$

c) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$

d) $\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$

Lời giải

$$\cos x \cdot \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ 2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

a) Ta có:

$$S = \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là:

b) $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

c) $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x \neq 0 \\ \cos \frac{x}{2} \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

d) Điều kiện:

$$\cot x + \sin x \left(1 + \tan x \cdot \tan \frac{x}{2}\right) = 4$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(1 + \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}\right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(\frac{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2} + \sin x \cdot \sin \frac{x}{2}}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}}\right) = 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \sin x \left(\frac{\cos \left(x - \frac{x}{2} \right)}{\cos x \cdot \cos \frac{x}{2}} \right) = 4 \Leftrightarrow \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{\cos x} = 4 \Leftrightarrow 4 \sin x \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \end{cases}, \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(thỏa mãn điều kiện)

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad x = \frac{5\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là

;

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Họ nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{\pi}{5}$ là

A. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$

B. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$

C. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$

D. $\begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{5} + l\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$

Lời giải

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + k2\pi \\ x = \pi - \alpha + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$$

Áp dụng công thức nghiệm của phương trình

$$\sin x = \sin \frac{\pi}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{5} + k2\pi \\ x = \frac{4\pi}{5} + l2\pi \end{cases}, k, l \in \mathbb{Z}$$

Ta có

Câu 2: Tập nghiệm của phương trình $\sin x = \sin \frac{5\pi}{3}$ là

A. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-2\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{7\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k2\pi; \frac{-5\pi}{3} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $S = \left\{ \frac{5\pi}{3} + k\pi; \frac{-2\pi}{3} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\sin x = \sin \frac{5\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \pi - \frac{5\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{5\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{-2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Áp dụng công thức nghiệm:

Câu 3: Phương trình $2\sin x - \sqrt{3} = 0$ có tập nghiệm là:

A. $\left\{ \pm \frac{\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $\left\{ \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $\left\{ \frac{\pi}{6} + k2\pi, \frac{5\pi}{6} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $\left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$2\sin x - \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$S = \left\{ \frac{\pi}{3} + k2\pi, \frac{2\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là:

Câu 4: Tổng các nghiệm của phương trình $2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3}$ trên khoảng $(-180^\circ; 180^\circ)$ là

A. 20°

B. 100°

C. 80°

D. 120°

Lời giải

$$2\sin(x + 40^\circ) = \sqrt{3} \Leftrightarrow \sin(x + 40^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 40^\circ = 60^\circ + k360^\circ \\ x + 40^\circ = 120^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20^\circ + k360^\circ \\ x = 80^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Theo đề bài:

$$-180^\circ < 20^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{5}{9} < k < \frac{4}{9} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 20^\circ$$

$$-180^\circ < 80^\circ + k360^\circ < 180^\circ \Leftrightarrow -\frac{13}{18} < k < \frac{5}{18} \Rightarrow k = 0 \Rightarrow x = 80^\circ$$

$$20^\circ + 80^\circ = 100^\circ$$

Vậy tổng các nghiệm của phương trình là

- Câu 5:** Tìm tổng các nghiệm của phương trình $\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$ trên $[0; \pi]$.
- A. $\frac{47\pi}{18}$. B. $\frac{4\pi}{18}$. C. $\frac{45\pi}{18}$. D. $\frac{7\pi}{18}$.

Lời giải

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên ta có :

Với $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$, do $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k = 1$ nên $x = \frac{11\pi}{18}$.

Với $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}$, do $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$ nên

$$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}$$

$$\frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}$$

Tổng tất cả các nghiệm là:

- Câu 6:** Số nghiệm phương trình $\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0$ thuộc đoạn $[2\pi; 4\pi]$ là
- A. 7 . B. 6 . C. 4 . D. 5 .

Lời giải

Điều kiện: $\cos x + 1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi$

$$\frac{\sin 3x}{\cos x + 1} = 0 \Rightarrow \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3} (k \in \mathbb{Z}).$$

Ta có

$$x = \frac{k\pi}{3} \quad k \in \mathbb{Z}, k \neq 3(2l+1)$$

So với điều kiện nghiệm của phương trình là với

$$2\pi \leq x \leq 4\pi \Leftrightarrow 2\pi \leq \frac{k\pi}{3} \leq 4\pi \Leftrightarrow 6 \leq k \leq 12 \quad k \in \{6, 7, 8, 10, 11, 12\}$$

Vì nên ta chọn

Câu 7: Số nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0$ là

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin 2x \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin(-2x)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = -2x + k 2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \pi + 2x + k 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{9} + k \frac{2\pi}{3} \\ x = -\frac{2\pi}{3} - k 2\pi \end{cases}$$

Các nghiệm thuộc khoảng $(0; 2\pi)$ của phương trình là:

$$-\frac{2\pi}{3} + 2\pi \quad ; \quad \frac{5\pi}{9} \quad ; \quad \frac{11\pi}{9} \quad ; \quad \frac{17\pi}{9} \quad ; \quad \frac{4\pi}{3}$$

hay

Vậy có 4 nghiệm thỏa yêu cầu bài toán.

Câu 8: Tập nghiệm của phương trình $\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right)$ là:

A. $\left\{ \frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ B. $\left\{ \frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z} \right\}$ C. $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$ D. $\left\{ \frac{1}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$\sin(\pi x) = \cos\left(\frac{\pi}{3} + \pi x\right) \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} - \pi x\right) \Leftrightarrow \sin(\pi x) = \sin\left(\frac{\pi}{6} - \pi x\right)$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \pi x = \frac{\pi}{6} - \pi x + k2\pi \\ \pi x = \pi - \frac{\pi}{6} + \pi x + k2\pi \quad (VL) \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{12} + k, k \in \mathbb{Z}$$

Câu 9: Cho phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$. Tính tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình trên.

A. $\frac{7\pi}{2}$. **B.** π . **C.** $\frac{3\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \pi - x - \frac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có:

$$x = \pi + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Xét

$$0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \pi + k2\pi < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < 0$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên không có giá trị k .

$$x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Xét

$$0 < x < \pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < k < \frac{5}{4}$$

Do $k \in \mathbb{Z}$ nên có hai giá trị k là: $k = 0; k = 1$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{6}$$

Với

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{5\pi}{6}$$

Với

Do đó trên khoảng $(0; \pi)$ phương trình đã cho có hai nghiệm $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$.

Vậy tổng các nghiệm của phương trình đã cho trong khoảng $(0; \pi)$ là: $\frac{\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} = \pi$.

Câu 10: Tìm số nghiệm của phương trình $\sin(\cos 2x) = 0$ trên $[0; 2\pi]$.

A. 2.

B. 1.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$\sin(\cos 2x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có

$$\cos 2x \in [-1; 1] \Rightarrow k = 0 \Rightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k_1\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k_1\frac{\pi}{2} \quad (k_1 \in \mathbb{Z}).$$

Vì

$$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow k_1 \in \{0; 1; 2; 3\}.$$

Vậy phương trình có 4 nghiệm trên $[0; 2\pi]$.

Câu 11: Phương trình $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$ có tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ bằng

A. $\frac{7\pi}{2}$.

B. π .

C. $\frac{3\pi}{2}$.

D. $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

$$\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \frac{\pi}{4} = x + \frac{3\pi}{4} + k2\pi \\ 2x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} - x + l2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \end{cases} (k, l \in \mathbb{Z})$$

Ta có

Họ nghiệm $x = \pi + k2\pi$ không có nghiệm nào thuộc khoảng $(0; \pi)$.

$$x = \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} \in (0; \pi) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{6} + l\frac{2\pi}{3} < \pi \Leftrightarrow l \in \{0; 1\}$$

Vậy phương trình có hai nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ là $x = \frac{\pi}{6}$ và $x = \frac{5\pi}{6}$. Từ đó suy ra tổng các nghiệm thuộc khoảng $(0; \pi)$ của phương trình này bằng π .

Câu 12: Phương trình $\sin 5x - \sin x = 0$ có bao nhiêu nghiệm thuộc đoạn $[-2018\pi; 2018\pi]$?
A. 20179. B. 20181. C. 16144. D. 16145.

Lời giải

$$\sin 5x - \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = x + k2\pi \\ 5x = \pi - x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\frac{\pi}{2} & (k \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{5\pi}{6} + m\pi & (m \in \mathbb{Z}) \\ x = \frac{\pi}{6} + n\pi & (n \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$x \in [-2018\pi; 2018\pi] \Rightarrow \begin{cases} -2018\pi \leq k\frac{\pi}{2} \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{5\pi}{6} + m\pi \leq 2018\pi \\ -2018\pi \leq \frac{\pi}{6} + n\pi \leq 2018\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4036 \leq k \leq 4036 \\ -\frac{12113}{6} \leq m \leq \frac{12103}{6} \\ -\frac{12109}{6} \leq n \leq \frac{12107}{6} \end{cases}$$

Vì nên

Do đó có 8073 giá trị k , 4036 giá trị m , 4036 giá trị n , suy ra số nghiệm cần tìm là 16145 nghiệm.

Câu 13: Tìm tổng các nghiệm của phương trình

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \text{ trên } [0; \pi].$$

A. $\frac{47\pi}{18}$

B. $\frac{4\pi}{18}$

C. $\frac{45\pi}{18}$

D. $\frac{7\pi}{18}$

Lời giải

Ta có:

$$\cos\left(5x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - \frac{\pi}{6} = 2x - \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ 5x - \frac{\pi}{6} = -2x + \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

Vì $x \in [0; \pi]$ nên ta có :

Với $x = -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{18} + \frac{k2\pi}{3} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{19}{12}$, do $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k = 1$ nên $x = \frac{11\pi}{18}$

Với $x = \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \Rightarrow 0 \leq \frac{\pi}{14} + \frac{k2\pi}{7} \leq \pi \Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{13}{4}$, do $k \in \mathbf{Z} \Rightarrow k \in \{0; 1; 2; 3\}$ nên

$x \in \left\{ \frac{\pi}{14}; \frac{5\pi}{14}; \frac{9\pi}{14}; \frac{13\pi}{14} \right\}$ $\frac{11\pi}{18} + \frac{\pi}{14} + \frac{5\pi}{14} + \frac{9\pi}{14} + \frac{13\pi}{14} = \frac{47\pi}{18}$

. Tổng tất cả các nghiệm là:

Câu 14: Phương trình $8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0$ tương đương với phương trình nào sau đây?

A. $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

B. $\cos 2x = 0$

C. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

D. $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Lời giải

$$8\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cdot \left(2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - 1 = 0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow 1 - 2\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0$$

Câu 15: Tập nghiệm của phương trình $(1 - \sqrt{2}\cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0$ là

A. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi; -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $\left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $\left\{ -\frac{\pi}{4} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$(1 - \sqrt{2} \cos x)(2022 + \sin^2 x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - \sqrt{2} \cos x = 0 \\ 2022 + \sin^2 x = 0 \text{ (VN)} \end{cases} \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\left\{ \frac{\pi}{4} + k2\pi; -\frac{\pi}{4} + k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

Câu 16: Giải phương trình

A. $S = \{k2\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$

B. $S = \left\{ k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$$

Câu 17: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình

A. $-\frac{35}{36}\pi$

B. $-\frac{11}{36}\pi$

C. $-\frac{11\pi}{12}$

D. $-\frac{\pi}{12}$

Lời giải

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

$$x = -\frac{11}{36}\pi$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là

- Câu 18:** Số nghiệm của phương trình $\tan 3x - \tan x = 0$ trên nửa khoảng $[0; 2\pi)$ bằng:
A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

$$\begin{cases} \cos 3x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3} \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \quad (*)$$

Điều kiện:

$$\tan 3x - \tan x = 0 \Leftrightarrow \tan 3x = \tan x \Leftrightarrow 3x = x + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, m \in \mathbb{Z}.$$

Ta có:

$$0 \leq x < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq m < 4$$

Vì

. Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $m = \{0; 1; 2; 3\}.$

Khi đó nghiệm x nhận giá trị tương ứng trên nửa khoảng $[0; \pi)$ là: $x = \left\{0; \frac{\pi}{2}; \pi; \frac{3\pi}{2}\right\}.$

Vậy số nghiệm cần tìm là 4.

- Câu 19:** Giải phương trình $\left(2\cos \frac{x}{2} - 1\right)\left(\sin \frac{x}{2} + 2\right) = 0$

A. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

B. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$

C. $x = \pm \frac{\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

D. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

Lời giải

Vì $-1 \leq \sin \frac{x}{2} \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sin \frac{x}{2} + 2 > 0$

Vậy phương trình tương đương $2\cos \frac{x}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi$

$\Leftrightarrow x = \pm \frac{2\pi}{3} + k4\pi, (k \in \mathbb{Z})$

- Câu 20:** Phương trình $8.\cos 2x.\sin 2x.\cos 4x = -\sqrt{2}$ có nghiệm là

A.
$$\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

B.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{16} + k \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{16} + k \frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

C.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{8} + k \frac{\pi}{8} \\ x = \frac{3\pi}{8} + k \frac{\pi}{8} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

D.
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Lời giải

Ta có: $8 \cdot \cos 2x \cdot \sin 2x \cdot \cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 4 \cdot \sin 4x \cdot \cos 4x = -\sqrt{2} \Leftrightarrow 2 \cdot \sin 8x = -\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow \sin 8x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin 8x = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy phương trình có nghiệm
$$\begin{cases} x = \frac{-\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{32} + k \frac{\pi}{4} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 21: Phương trình $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0$ có tập nghiệm được biểu diễn bởi bao nhiêu điểm trên đường tròn lượng giác?

A. 1.

B. 2.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

Cung $\frac{5\pi}{8}$ biểu diễn được hai điểm trên đường tròn lượng giác.

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0$$

Câu 22: Giải phương trình

A. $S = \left\{ k2\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

B. $S = \left\{ k2\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

C. $S = \left\{ k\pi, \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

D. $S = \left\{ \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Lời giải

$$\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Leftrightarrow \sin x - \sin 2x = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + k2\pi \\ 2x = \pi - x + k2\pi \end{cases}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Câu 23: Nghiệm âm lớn nhất của phương trình

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x$$

A. $-\frac{35}{36}\pi$ B. $-\frac{11}{36}\pi$ C. $-\frac{11\pi}{12}$ D. $-\frac{\pi}{12}$

Lời giải

$$\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) + \sin^2 x = \cos^2 x \Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - \frac{\pi}{6} = 2x + k2\pi \\ 4x - \frac{\pi}{6} = -2x + k2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{12} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{36} + k\frac{\pi}{3} \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$$

Ta có mỗi họ nghiệm lần lượt có các nghiệm âm lớn nhất là:

$$x_1 = \frac{\pi}{12} - \pi = -\frac{11\pi}{12}; x_2 = \frac{\pi}{36} - \frac{\pi}{3} = -\frac{11\pi}{36}$$

$$x = -\frac{11}{36}\pi$$

Vậy nghiệm âm lớn nhất của phương trình là

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai đồ thị hàm số $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ và $y = \sin x$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x$$

a) Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$$x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z})$$

b) Hoành độ giao điểm của hai đồ thị là

$$x \in [0; 2\pi]$$

c) Khi thì hai đồ thị hàm số cắt nhau tại ba điểm

$$\left(\frac{5\pi}{8}; \sin \frac{5\pi}{8}\right), \left(\frac{7\pi}{8}; \sin \frac{7\pi}{8}\right)$$

d) Khi $x \in [0; 2\pi]$ thì tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

a) Đúng: Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{4} = x + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{4} = \pi - x + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{8} + k\pi (k \in \mathbb{Z}).$$

b) Đúng:

$$x \in [0; 2\pi] \Rightarrow x \in \left\{ \frac{3\pi}{8}; \frac{11\pi}{8} \right\}$$

c) Sai: Vì

$$x = \frac{3\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{3\pi}{8} \approx 0,92 \quad x = \frac{11\pi}{8} \Rightarrow y = \sin \frac{11\pi}{8} \approx -0,92$$

Với

với

$$\left(\frac{3\pi}{8}; \sin \frac{3\pi}{8} \right), \left(\frac{11\pi}{8}; \sin \frac{11\pi}{8} \right)$$

d) Đúng: Vậy tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là:

Câu 2:

Cho phương trình lượng giác

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0$$

. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình tương đương

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$x = \frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{7\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

b) Phương trình có nghiệm là:

$$-\frac{\pi}{4}$$

c) Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng

d) Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm

Lời giải

$$2 \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) + \sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$$

a) Sai: Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{\pi}{12} = -\frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x - \frac{\pi}{12} = \pi - (-\frac{\pi}{3}) + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi \\ x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi; x = \frac{17\pi}{12} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

b) Sai: Vậy phương trình có nghiệm là:

$$-\frac{\pi}{4}$$

c) Đúng: Phương trình có nghiệm âm lớn nhất bằng

d) Đúng: Số nghiệm của phương trình trong khoảng $(-\pi; \pi)$ là hai nghiệm

Câu 3: Cho phương trình lượng giác $\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Phương trình tương đương với $\sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$

b) Đồ thị hàm số $y = \sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x)$ cắt trục hoành tại điểm gốc tọa độ

c) Phương trình có nghiệm là: $x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$

d) Trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ phương trình đã cho có một nghiệm

Lời giải

$$\sqrt{2} - 2\sin(45^\circ - 2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(45^\circ - 2x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \sin(45^\circ - 2x) = \sin 45^\circ$$

a), b) Đúng: Ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 45^\circ - 2x = 45^\circ + k360^\circ \\ 45^\circ - 2x = 180^\circ - 45^\circ + k360^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -k180^\circ \\ x = -45^\circ - k180^\circ \end{cases} (k \in \mathbb{Z}).$$

$$x = -k180^\circ; x = -45^\circ - k180^\circ (k \in \mathbb{Z})$$

c) Đúng: Vậy phương trình có nghiệm là:

$$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$$

d) Sai: Trên khoảng phương trình đã cho có hai nghiệm

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình có nghiệm. Tính tổng T của các phần tử trong S .

$$\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2$$

Lời giải

$$\text{Phương trình } \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - m = 2 \Leftrightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = m + 2.$$

$$\text{Phương trình có nghiệm } \Leftrightarrow -1 \leq m + 2 \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq m \leq -1$$

$$\xrightarrow{m \in \mathbb{Z}} S = \{-3; -2; -1\} \longrightarrow T = (-3) + (-2) + (-1) = -6.$$

Câu 2: Có bao nhiêu số nguyên m để phương trình $3 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - m + 5 = 0$ có nghiệm?

Lời giải

$$3 \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) - m + 5 = 0 \Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{m-5}{3}$$

Ta có:

$$-1 \leq \frac{m-5}{3} \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 8$$

Điều kiện để phương trình có nghiệm:

Do m nguyên nên $m = \{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$. Vậy có 7 số nguyên m .

Câu 3: Số nghiệm của phương trình $\cos 2x + 3 \cos x + 1 = 0$ trong khoảng $(0; 2021)$ là bao nhiêu?

Lời giải

$$\cos 2x + 3 \cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \cos x = -\frac{3}{2} \end{cases} \xrightarrow{-1 \leq \cos x \leq 1} \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$x \in (0; 2021) \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{2} + k\pi < 2021 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{2021}{\pi} - \frac{1}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k \in \{0; 1; 2; \dots; 642\}$$

Vậy có 643 nghiệm trong khoảng $(0; 2021)$.

Câu 4: Tìm số giá trị nguyên dương của tham số m để phương trình $\cos 2x - 4 \sin x + m = 0$ có nghiệm trên $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Lời giải

$$x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow t \in [0; 1]$$

Đặt $\sin x = t$. Khi đó với

Yêu cầu đề bài tương đương với tìm số nguyên dương m sao cho $1 - 2t^2 - 4t + m = 0$ có nghiệm $t \in [0; 1]$.

Số nghiệm của phương trình $1 - 2t^2 - 4t + m = 0$ chính là số giao điểm của

Ta có bảng biến thiên của $y(t)$ với $t \in [0; 1]$.

t	0	1
$y'(t)$	+	
$y(t)$	-1	6

Từ đó suy ra $-1 \leq m \leq 6$ thoả mãn yêu cầu đề bài mà m nguyên dương nên $m = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Câu 5: Tính tổng S các nghiệm của phương trình $(2 \cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) = 0$ trong khoảng $(0; 2\pi)$.

Lời giải

$$(2 \cos 2x + 5)(\sin^4 x - \cos^4 x) = 0 \Leftrightarrow (2 \cos 2x + 5) \cdot \cos 2x = 0$$

Xét phương trình:

$$\Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$0 < x < 2\pi \Leftrightarrow 0 < \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < k < \frac{7}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = \{0; 1; 2; 3\}$$

Vì

$$x = \left\{ \frac{\pi}{4}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{7\pi}{4} \right\} \quad S = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi$$

Suy ra các nghiệm cần tìm là nên tổng

Câu 6: Cho phương trình $\cos 2x - \sin x + m - 1 = 0$ với m là tham số. Tìm điều kiện của tham số m để phương trình có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right)$.

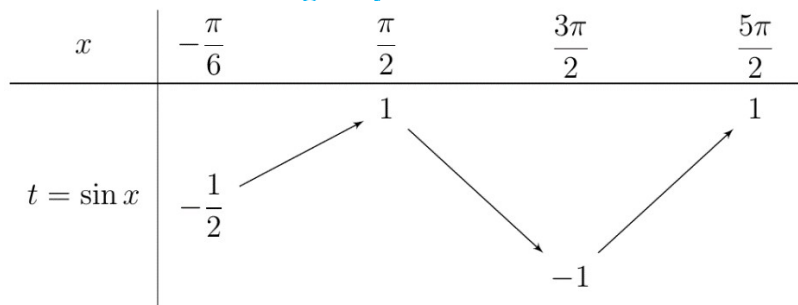
Lời giải

$$\cos 2x - \sin x + m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 2 \sin^2 x + \sin x \quad (1)$$

Ta có

$$\text{Đặt } t = \sin x \quad (1) \quad \text{thì phương trình trở thành } m = 2t^2 + t \quad (2)$$

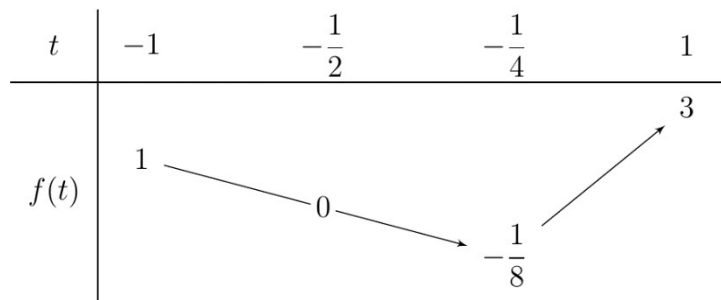
Ta có bảng biến thiên hàm số $t = \sin x$



Từ bảng biến thiên ta có phương trình (1) có 5 nghiệm trên khoảng $\left(-\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}\right)$ khi (2) có 1 nghiệm thuộc $\left(-\frac{1}{2}; 1\right)$ và 1 nghiệm thuộc $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$.

Xét hàm số $f(t) = 2t^2 + t$.

Bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $0 \leq m < 1$.