PHÒNG GD& ĐT NGA SƠN
CỤM CHUYÊN MÔN SỐ 3

ĐỀ CHÍNH THỨC

(Đề thi gồm 01 trang)

ĐỀ THI KHẢO SÁT HỌC SINH GIỎI LỚP 8
NĂM HỌC: 2024 - 2025
Môn thi: **Toán**
Thời gian làm bài: 150 phút
Ngày thi: 7/11/2024

ĐỀ BÀI:

Câu 1 (4đ)

1. a. Cho a + b + c = 2m. Chứng minh $2bc + b^2 + c^2 – a^2 = 4m(m-a)$

b) Cho các số a, b, c thỏa mãn $a \neq b$, $b \neq c$ và $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3 = 0$ Rút gọn biểu thức $A = (a^3 + b^3 + c^3)(a - c)^{2024} – b + 2025$

2. Cho các số x, y, z khác 0 thỏa mãn đồng thời $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 3$ và $\frac{2}{xz} - \frac{1}{y^2} = 9$. Tính giá trị của biểu thức: $A = (3x + y + z)^{2025}$.

Câu 2: (4đ)

1. Tìm x biết

a) $(x^2 – 2x)(x^2 – 2x – 1) = 6$

b) $(x^2 – x + 1)^2 + 2(x+1)^2 = 3(x^3 +1)$

2. Tìm đa thức $f(x)$ biết $f(x)$ chia cho (x + 4) dư 15; $f(x)$ chia cho (x – 5) dư (-3) và $f(x)$ chia cho $(x^2 – x – 20)$ được thương là $(3x^2 + 2)$ và còn dư.

Câu 3: (4đ)

1. Tìm các số nguyên dương x, y thỏa mãn $4x^2 +10y^2 + 4xy – 4x + 10y - 68 = 0$

2. Tìm số nguyên a để $a^4 + 4a^3 + 5a^2 + 2a + 4$ là số chính phương.

Câu 4: (6đ)

1. Cho hình vuông ABCD. Gọi M là điểm bất kỳ trên đường chéo AC (M ≠ A, C). Gọi E, F theo thứ tự là hình chiếu của M trên AD và CD

a. Chứng minh tứ giác DEMF là hình chữ nhật; Tìm vị trí của điểm M để DEMF là hình vuông.

b. Chứng minh $BM \perp EF$

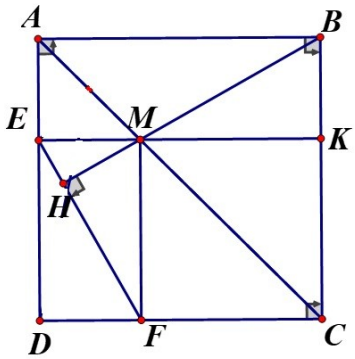
2. Cho hình thang MNPQ (MN // PQ), gọi I là giao điểm của MP và NQ. Qua I vẽ các đường thẳng song song với MQ và NP lần lượt cắt PQ tại K và H. Chứng minh QK = PH.

Câu 5: (2đ) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{(x^3 + y^3) - (x^2 + y^2)}{(x-1)(y-1)}$ (x >1, y >1)

Hết

Đáp án và hướng dẫn chấm

Câu	Nội dung	Điểm
1	a Bằng nhiều cách để HS chứng minh $2bc + b^2 + c^2 – a^2 = 4m(m-a)$ b) Đặt a – b = x , b – c = y, c – a = x thì x + y + z = 0. HS chứng minh được $x^3+y^3+z^3=3xyz$ Suy ra $(a-b)^3+(b-c)^3+(c-a)^3=3(a-b)(b-c)(c-a) = 0$. Mà $a \neq b$, $b \neq c$ nên a – c = 0. Khi đó A = -b + 2025 2. Đặt $\frac{1}{x} = a$, $\frac{1}{y} = b$, $\frac{1}{z} = c$, khi đó ta có a + b + c = 3 và $2ac – b^2 = 9$. $(a + b + c)^2 = 9 = 2ac – b^2$ $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc – 2ac + b^2 = 0$ $(a + b)^2 + (b+c)^2 = 0$ Suy ra a = c = -b Suy ra a=c=3, b = -3 hay x = z = $\frac{1}{3}$, y = $\frac{-1}{3}$ Khi đó A = $(3.\frac{1}{3} + \frac{-1}{3} + \frac{1}{3})^{2025} = 1$.	1 1 2
2	1. b. Vì $x=-1$ không là nghiệm của phương trình nên chia cả hai vế cho x^3+1 ta được: $\frac{x^2-x+1}{x+1} + 2\frac{x+1}{x^2-x+1} = 3$ Đặt a = $\frac{x^2-x+1}{x+1}$ Suy ra a + $\frac{2}{a}$ = 3 $a^2 + 2 – 3a = 0$ Tìm được a = 1, a=2 Với: a = 1 Suy ra $\frac{x^2-x+1}{x+1} = 1$, suy ra x = 0, x = 2 Với: $a=2 \Leftrightarrow x^2-3x-1=0 \Leftrightarrow x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$ Vậy $x=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2}$; x = 0; x = 2 2. Do f(x) chia cho $(x^2 – x – 20) = (x + 4)(x – 5)$ được thương là $3x^2 + 2$ còn dư nên ta có: $f(x) = (x + 4)(x – 5)(3x^2 + 2) + ax + b$ Cho x = -4, f(-4) = -4a + b = 15 (1) Cho x = 5, f(5) = 5a + b = -3 (2) Từ (1) và (2) ta được a = -2, b = 7.	2 2

	Khi đó f(x) = (x + 4)(x – 5)(3x^2 + 2) - 2x + 7 = 3x^4 – 3x^3 -58x^2 – 4x - 33	
3	4x^2 +10y^2 + 4xy – 4x + 10y - 68 = 4x^2 + 4xy + y ^{2} – 2(2x + y) + 9y^2 + 12y – 68 = (2x + y)^2 – 2(2x + y) + 1 + (9y^2 + 12y + 4) – 73 = (2x + y - 1)^2 + (3y + 2)^2 – 73 = 0 Suy ra (2x + y - 1)^2 + (3y + 2)^2 = 73 Vì x, y nguyên dương nên 3y + 2 > 4; 2x + y – 1 > 1, mà 73 = 9 + 64 = 3^2 + 8^2 Nên ta có 3y + 2 = 8; 2x + y – 1 = 3 Suy ra x = 1, y = 2. Vậy x = 1, y = 2. 2. a^4 + 4a^3 + 5a^2 + 2a + 4 = a^4 + 4a^3 + 4a^2 + a^2 + 2a + 4 = a^2(a+2)^2 +a(a+2) + 4 Đặt a(a+2) = t Ta có t^2 + t + 4 = k^2 (Vì là số chính phương) Suy ra 4t^2 + 4t + 16 = 4k^2 (2t + 1)^2 +15 = (2k)^2 Suy ra (2k-2a-1)(2k+2a+1) = 15 HS lập bảng (Hoặc lập luận), tìm được a =0, a = 1, a=-3, a = -2 Vậy a =0, a = 1, a=-3, a = -2.	2 2
4	1.  a. *) HS chứng minh được tứ giác $DEMF$ là hình chữ nhật *) HS tìm và chứng minh được M là trung điểm của AC thì DEMF là hình vuông **b. Chứng minh** $BM \perp EF$ $EM \cap BC = K;\ BM \cap EF = H$ Chứng minh được tứ giác CKMF là hình vuông (hình chữ nhật có một đường chéo là phân giác) nên MF = MK (1) Chứng minh được tứ giác ABKE là hình chữ nhật (tứ giác có 3 góc vuông) suy ra AE = BK ΔAME vuông cân tại E nên AE = EM suy ra BK = EM (2) Từ (1), (2) $\Rightarrow \Delta MEF = \Delta KBM\,(c.g.c) \Rightarrow \angle BMK = \angle EFM$	1 1 2

	Mà $\angle BMK = \angle EMH$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle EFM = \angle EMH$ ΔMEF vuông tại M nên $\angle EFM + \angle FEM = 90^\circ$ $\Rightarrow \angle HME + \angle FEM = 90^\circ \Rightarrow \angle MHE = 90^\circ \Rightarrow BM \perp EF\,(dfcm)$ 2. Trên QI lấy D sao cho ID = IN, qua D kẻ đường thẳng song song với PQ cắt IP tại E. Chứng minh được ΔMNI = ΔEDI , suy ra EI = MI. Do DE // PQ nên ta có $\frac{ID}{IQ} = \frac{IE}{IP}$ (Đ/l Thalès), suy ra $\frac{¿}{IQ} = \frac{ℑ}{IP}$ (1) Mặt khác IK // MQ nên ta có $\frac{KQ}{KP} = \frac{ℑ}{IP}$ (Đ/l Thalès) (2) IH // NP nên ta có $\frac{HP}{HQ} = \frac{¿}{IQ}$ (Đ/l Thalès) (3) Từ (1), (2), (3) $\frac{KQ}{KP} = \frac{HP}{HQ}$ hay $\frac{KP}{KQ} = \frac{HQ}{HP}$ Suy ra $\frac{KP+KQ}{KQ} = \frac{HQ+HP}{HP}$ hay $\frac{QP}{KQ} = \frac{QP}{HP}$ Suy ra KQ = HP.	2
5	$P = \frac{(x^3+y^3)-(x^2+y^2)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2(x-1)+y^2(y-1)}{(x-1)(y-1)} = \frac{x^2}{y-1} + \frac{y^2}{x-1}$ Đặt $x-1=a$ và $y-1=b,$ do $x>1$ và $y>1$ nên $a>0$ và $b>0$ đồng thời $x=a+1$ và $y=b+1$. Khi ấy $P = \frac{(a+1)^2}{b} + \frac{(b+1)^2}{a}$ Áp dụng bất đẳng thức $(x+y)^2 \geq 4xy$ và $x+\frac{1}{x} \geq 2$ (với x >0) ta có: $(a+1)^2 \geq 4a; (b+1)^2 \geq 4b;$ Nên $P \geq \frac{4a}{b} + \frac{4b}{a} = 4\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) \geq 8$ Vậy $\min P = 8 \; khi \; a = b = 1$ hay $x = y = 2$.	2