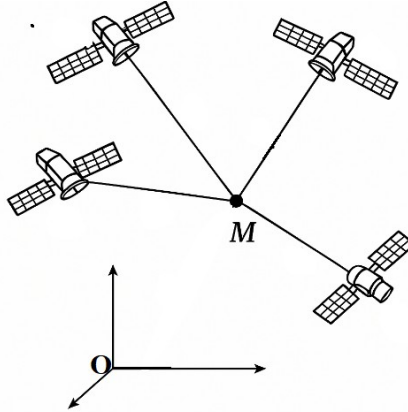
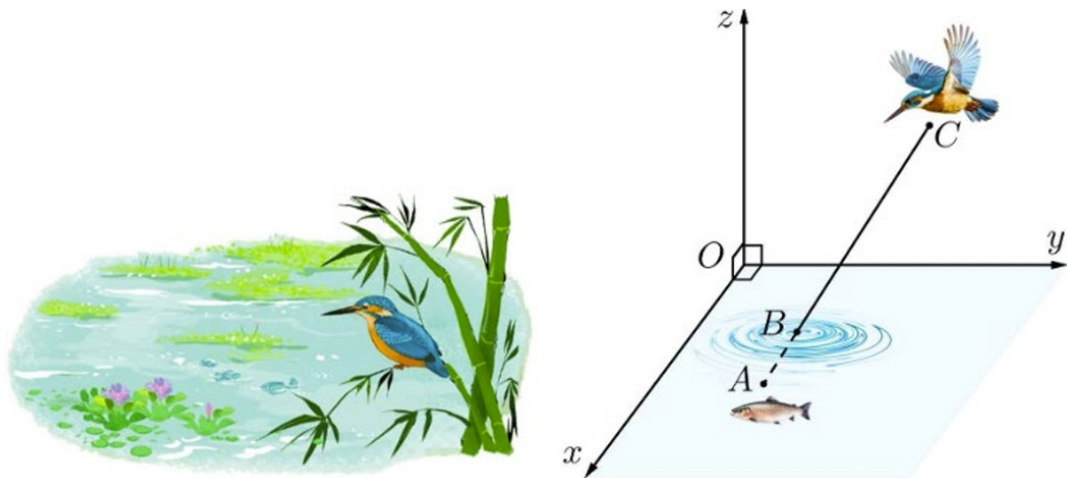


BÀI TOÁN THỰC TẾ TỌA ĐỘ CỦA ĐIỂM VÀ VEC TƠ TRONG KHÔNG GIAN

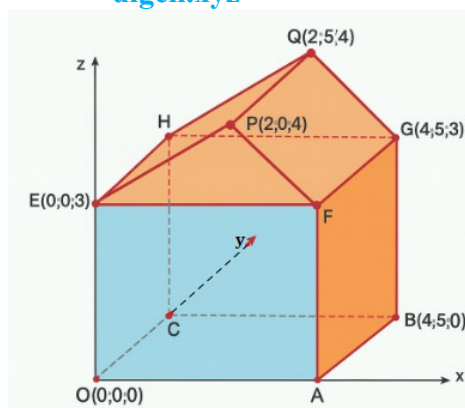
Câu 1. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = 3$, $MB = 6$, $MC = 5$, $MD = 13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?



Câu 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước $2m$, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là $3m$ và $1m$ phóng thẳng xuống vị trí con cá cách mặt nước $50cm$, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là $1m$ và $1,5m$. Tọa độ điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là $(a;b;c)$. Tính $T = 5a + 15b + 25c$.

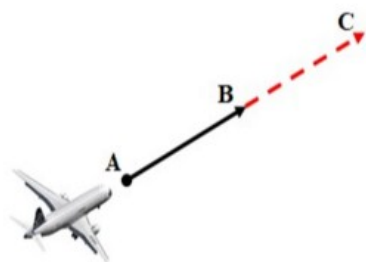


Câu 3. Hình sau đây minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết $F(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



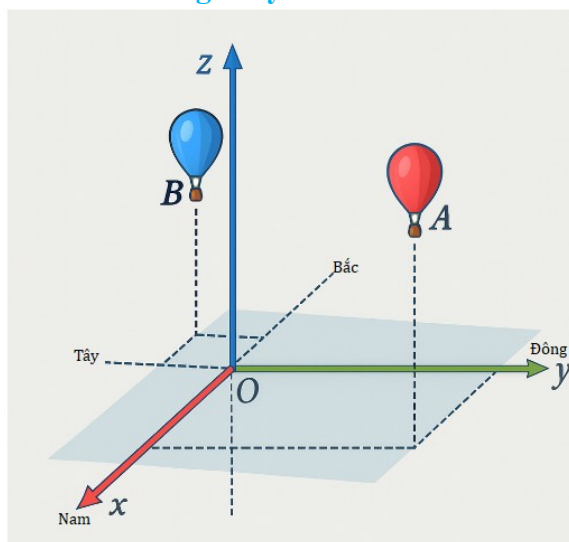
Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là $1m$), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10;3;0)$ và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí D cách A $4050m$. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ $\vec{u}(2;-2;1)$ và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đến vị trí B có hoành độ $x_B = 550$. Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là bao nhiêu phút?

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(812;600;5)$ đến điểm $B(950;530;6)$ trong 10 phút.

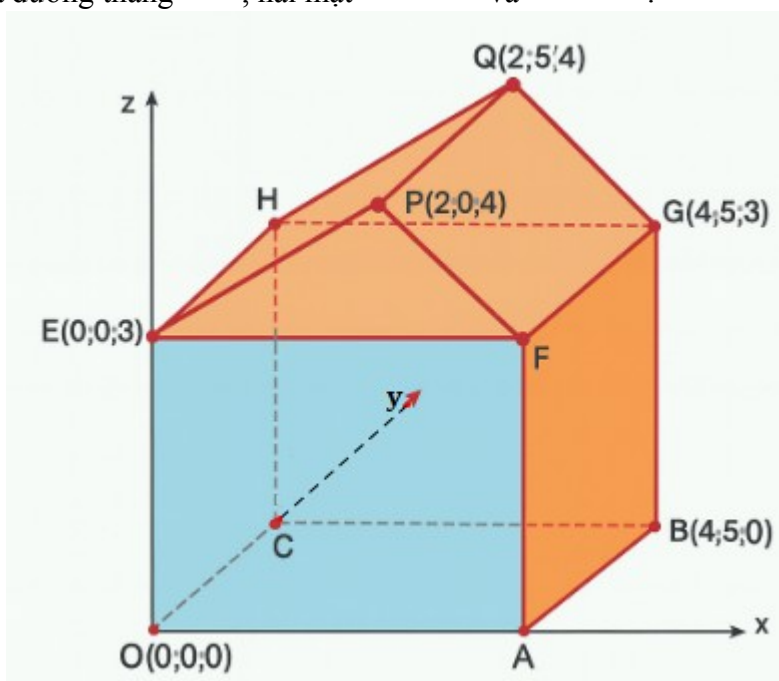


Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x;y;z)$. Khi đó $x+y+z$ bằng bao nhiêu?

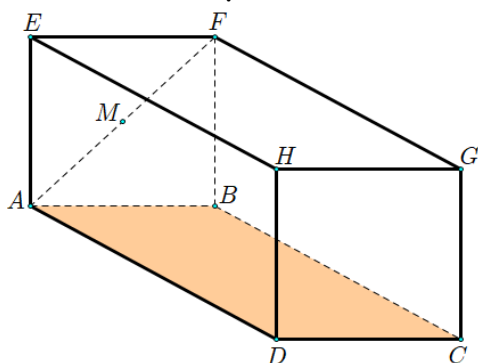
Câu 6. Hai chiếc kính khí cầu **A** và **B** bay lên từ cùng một vị trí **O** trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, kính khí cầu **A** nằm cách điểm xuất phát $4km$ về phía Đông và $3km$ về phía Nam, đồng thời cách mặt đất $1km$; kính khí cầu **B** nằm cách điểm xuất phát $1km$ về phía Bắc và $1,5km$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8km$ (hình minh họa bên dưới). Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai kính khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai kính khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 7. Hình bên dưới minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Tính số đo góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt $(FGQP)$ và $(FGHE)$.

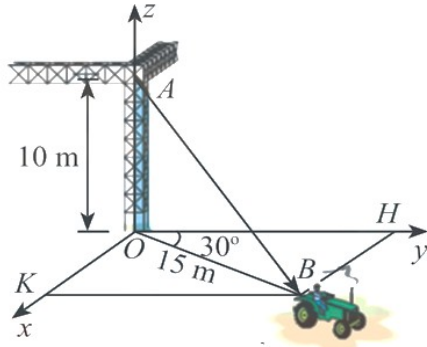


Câu 8. Một bể cá đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB = 6$ (dm), $AD = 8$ (dm) và cạnh bên bằng 10 (dm). Một chú cá con bơi theo những đoạn thẳng từ điểm G đến chạm mặt đáy của hồ, rồi từ điểm đó bơi đến vị trí điểm M là trung điểm của AF được mô hình hóa như hình vẽ sau:

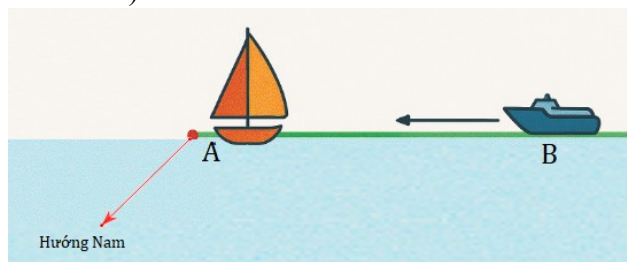


Để đường đi ngắn nhất thì chú cá bơi đến điểm dưới đáy hồ cách BA và BC những đoạn bằng a và b . Khi đó tổng $D = 3a + 6b$ bao nhiêu?

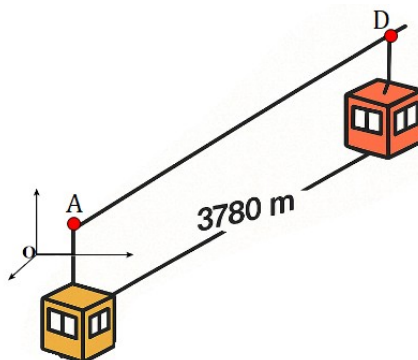
Câu 9. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Biết $\vec{AB} = (x; y; z)$. Tính $x + 2y - z$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Câu 10. Ở trên biển, hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 10 hải lý. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với vận tốc 8 hải lý/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 6 hải lý/giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là ngắn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

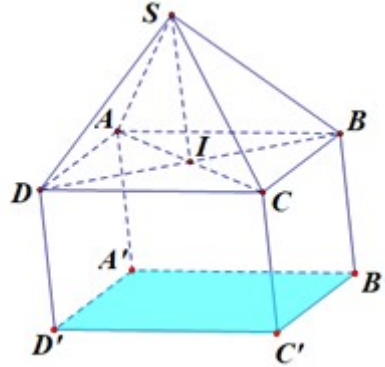


Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là $1m$), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí D cách điểm A một khoảng $3780m$. Biết đường đi của cabin cùng phương với vector $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đi đến vị trí B có hoành độ $x_B = 550$. Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là bao nhiêu giây?

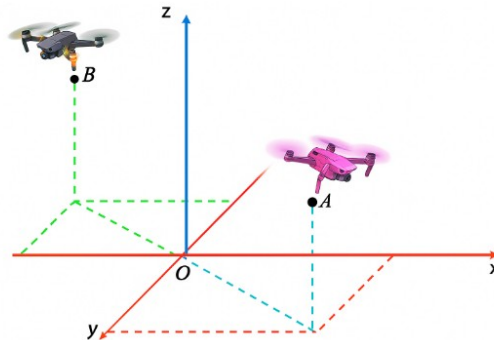


Câu 12. Để chuẩn bị cho một buổi triển lãm quốc tế, các trang sức có giá trị lớn được đặt bảo mật trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và đặt lên phía trên một trụ hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông (như hình vẽ). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) sao cho

$A'(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;0;5;1)$. Biết rằng, bạn tổ chức sự kiện dự định dùng các tấm kính cường lực hình tam giác cân có cạnh bên là 60 cm để lắp ráp thành khối chóp nói trên. Khi đó, tọa độ điểm S là $(a;b;c)$. Tính giá trị của $a+b+c$. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

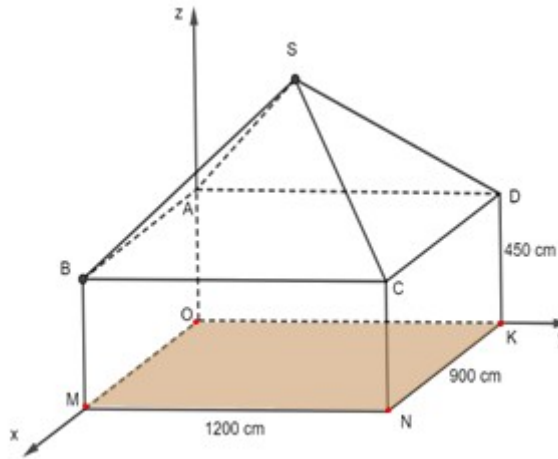


Câu 13. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất 5 m , cách điểm xuất phát 3 m về phía nam và 2 m về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất 5 m , cách điểm xuất phát 6 m về phía bắc và 6 m về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Trên mặt đất, người ta xác định được một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó đến hai chiếc flycam ngắn nhất.

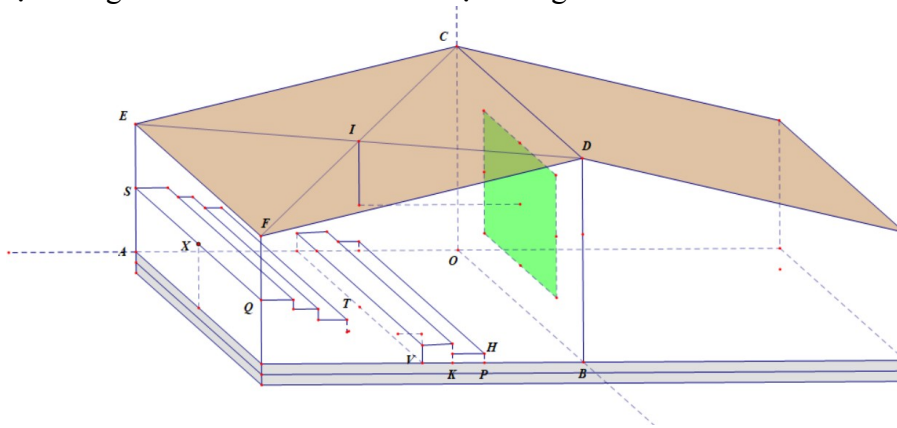


Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí đó bằng bao nhiêu mét?

Câu 14. Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNK$ có chiều dài 1200 cm , chiều rộng 900 cm , chiều cao 450 cm . Phần mái nhà dạng hình chóp $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và tạo với mặt đáy góc α với $\tan \alpha = \frac{1}{5}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho M thuộc tia Ox , K thuộc tia Oy , A thuộc tia Oz (như hình vẽ). Biết $S(a;b;c)$ (đơn vị của a, b, c là centimet). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.



Câu 15. Một toà nhà được thiết kế để làm 2 phòng dạy học có trang bị máy chiếu. Mái nhà là dạng mái vát $CDFE$ như hình vẽ. Chiều dài của mỗi phòng học là $OA = 30m$ và chiều rộng là $OB = 20m$, chiều cao các bức tường $BD = 10m$ và $EA = 6m$. Từ vị trí P cách B một khoảng 10 m, người ta xây các bậc thang cao dần về phía cuối của phòng học để đặt các dãy bàn ghế học sinh trên các bậc thang đó. Chiều rộng mỗi bậc thang là 2 m và chiều cao mỗi bậc thang là 20 cm.

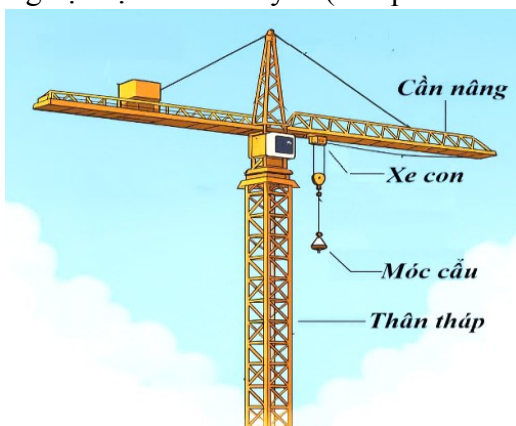


Chủ toà nhà muốn lắp giá treo máy chiếu tại vị trí I là giao của DE và CF như hình vẽ, vuông góc với mặt sàn sao cho không vướng vào đầu học sinh khi học sinh đó đứng tại bậc thang ngay dưới máy chiếu (chiều cao học sinh đó là 1,8 m) và cũng không che khuất tầm nhìn của học sinh ngồi ở hàng ghế sau cùng, tại vị trí X trung điểm SQ , theo phương vuông góc bức tường $OBDC$ (chiều cao mắt học sinh so với bậc thang tại đó là 1,2m). Hỏi tổng độ dài thanh treo máy chiếu và cả thân máy chiếu lớn nhất là bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

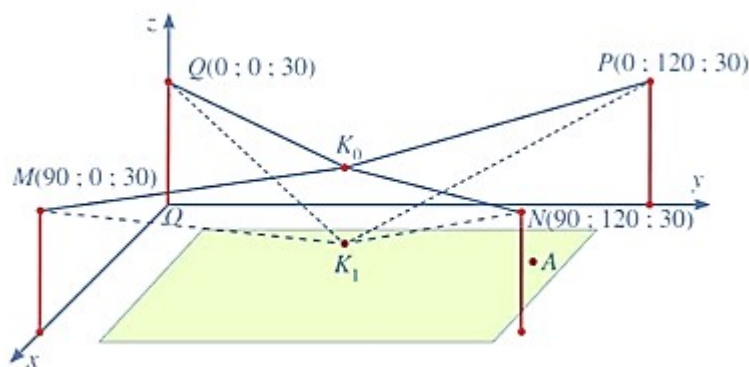
Câu 16. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo là kilômét, một rada phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1100; 650; 14)$ đến điểm N trong 20 phút. Nếu đến N máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $Q(1500; 860; 16)$. Biết một khẩu pháo ở tọa độ vị trí điểm $E\left(\frac{1700}{3}; 370; \frac{34}{3}\right)$ được bắn ra với vận tốc không đổi gấp 5 lần vận tốc máy bay nhằm bắn trúng máy bay tại vị trí N . Sau bao nhiêu phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển pháo phải bắn.



Câu 17. Người ta thường dùng cầu trục tháp (như hình vẽ) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cầu trục dùng móc cầu nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn $1m$ so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cầu trục quay cần nâng một góc $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng (P) chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng (P) so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống $1m$ theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, thân tháp là trục Oz và mặt đất là mặt phẳng Oxy (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm $A(6; 8; 0)$ và vị trí cần đặt vật liệu là điểm $B(4; -3; 15)$. Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

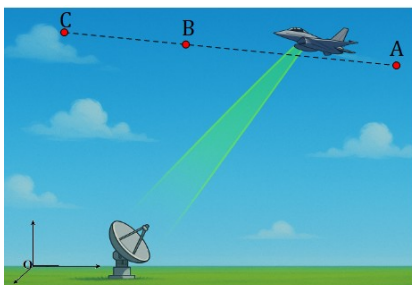


Câu 18. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kỹ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao 30 m và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là 1 m), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90; 0; 30)$, $N(90; 120; 30)$, $P(0; 120; 30)$, $Q(0; 0; 30)$ (Hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 . (Nguồn: <https://mwww.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie V).

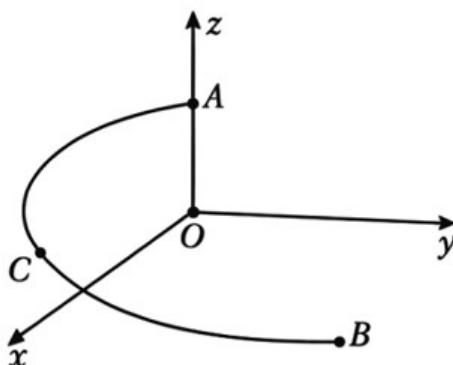


Tọa độ vectơ $\overrightarrow{K_0 K_1} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số thực. Tính $P = a + b + 3c$?

Câu 19. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(800; 500; 7)$ đến điểm $B(940; 550; 9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là điểm $C(x; y; z)$. Tính $x + y + z$



Câu 20. Trượt nước là một trò chơi vận động được nhiều người yêu thích trong các công viên nước. Một cái máng trượt nước có thiết kế dạng cung tròn với hai đầu mút là A và B . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại hình chiếu của A trên mặt đất, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo mét (tham khảo hình vẽ dưới đây). Biết các điểm A, B và một điểm C nằm trên máng trượt lần lượt có tọa độ là $(0; 0; 5)$, $(6; 7; 1)$ và $(5; 0; 2)$. Độ dài máng trượt nước đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?

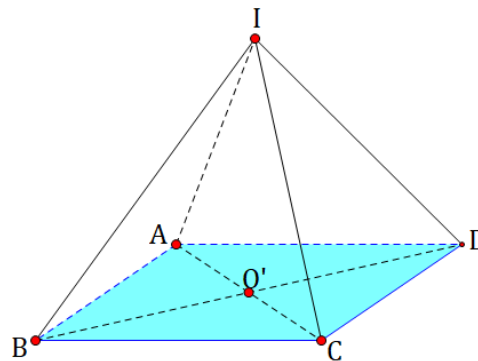


Câu 21. Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị đo lấy theo kilomet, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0; 35; 10)$, bay theo hướng vectơ $\vec{v}_1 = (3; 4; 0)$ với tốc độ không đổi $900(km/h)$ và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31; 10; 11)$, bay theo hướng vectơ $\vec{v}_2 = (5; 12; 0)$ với tốc độ không đổi $910(km/h)$. Biết rằng

khoảng cách an toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng 9,3 km). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



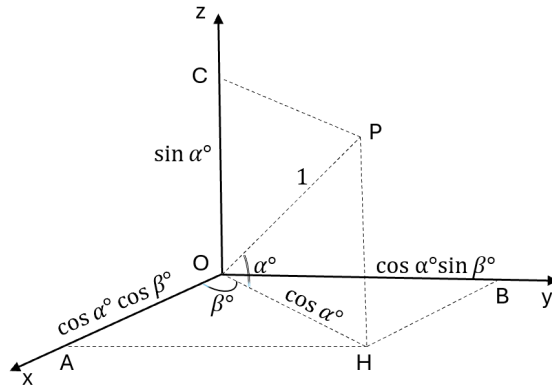
Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tấm bảng đồng chất có dạng hình vuông $ABCD$ tâm O' được treo nghiêng bởi 4 sợi dây IA, IB, IC, ID gắn cố định tại điểm $I(0;0;9)$ như hình vẽ. Biết điểm $O'(0;0;5)$, $A(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 5)$, điểm $D(a;b;c)$ với $a > 0, c > 5$ và góc $\angle O'ID$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ lần lượt là lực căng của dây IB, IC, ID, IA , biết $|\vec{F}_1| = 50N$ và $|\vec{F}_2| = 40N$.



Tính khối lượng $m(\text{kg})$ của tấm bảng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) (cho gia tốc trọng trường $g = 9,8 \text{ m/s}^2$) và trọng lượng của tấm bảng được tính bằng công thức $P = mg$).

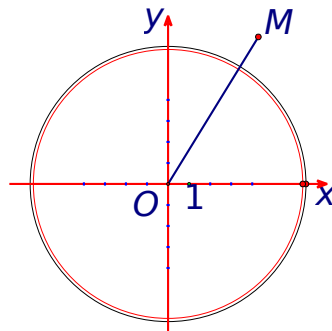
Câu 23. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$. Một đội gồm ba drone giao hàng $A; B; C$ đang có tọa độ là $A(1;1;1); B(5;7;9); C(9;11;4)$. Gọi $d_1; d_2; d_3$ lần lượt là khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng trên. Tính $d_1 + d_2 + d_3$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 24. Xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm Trái Đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực bắc N , tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, một đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trong thực tế. Biết rằng nếu điểm M có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ N; \beta^\circ E$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) thì điểm M có tọa độ là $M(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$.

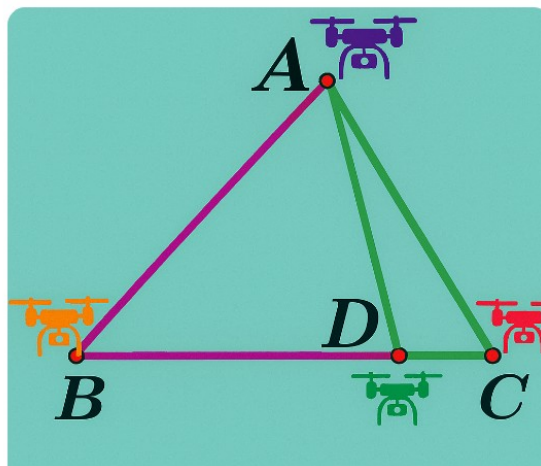


Tính khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất là cầu Hiền Lương (cũ) (Quảng Trị) có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $17,0045^\circ N; 107,0517^\circ E$ và Dinh Độc Lập (TP Hồ Chí Minh) có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $10,777^\circ N; 106,695^\circ E$ (đơn vị: km, làm tròn kết quả đến hàng chục)

Câu 25. Thiên thạch với kích thước chỉ 30 cm đến 40 cm đến từ vùng không gian giữa các hành tinh, khi xuyên vào khí quyển Trái Đất ở độ cao 150 km so với mực nước biển, tạo ra vùng không khí bốc cháy quanh nó rộng vài trăm mét gây nên hiện tượng sao băng. Xem Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) được phát hiện ở vị trí điểm $M(4, 29; 7; 0)$ và đang chuyển động thẳng với tốc độ không đổi 960 km/phút đến tâm Trái Đất. Xác định thời điểm (đơn vị phút) thiên thạch bị bốc cháy kể từ lúc phát hiện (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Câu 26. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$ (đơn vị mét). Một đội gồm 4 drone giao hàng A, B, C, D xếp đội hình bay có dạng tam giác $A; B; C$ và D nằm trên cạnh BC sao cho $DB = 4DC$ (Hình vẽ bên dưới).

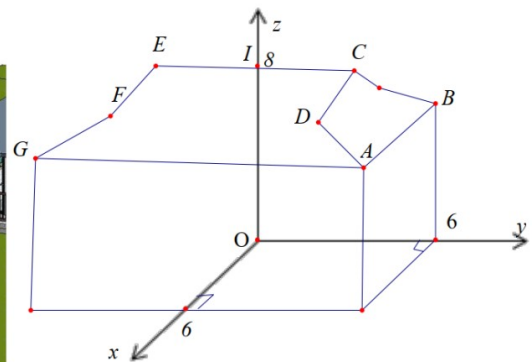


Tại thời điểm các drone có tọa độ là $A(80; 20; 80)$, $B(70; 20; 20)$, $C(420; 120; 120)$. Khoảng cách giữa drone A và drone D bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Câu 27. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại một điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc 55km và về phía Tây 20km , đồng thời cách mặt đất $1,5\text{km}$. Khi đó, khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát bằng bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn một chữ số thập phân)



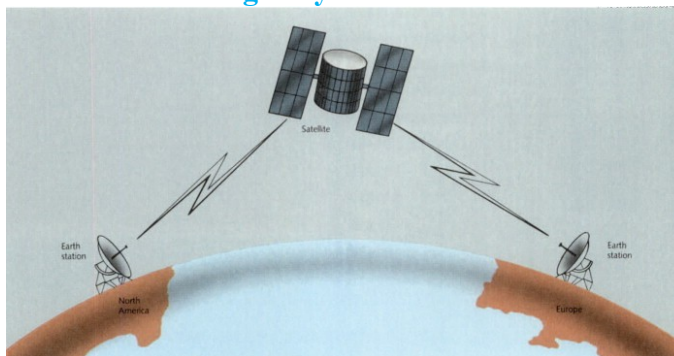
Câu 28. Con bão Yagi gây thiệt hại nghiêm trọng về người và tài sản cho nước ta, trong đó nặng nề nhất là tại thôn Làng Nủ, xã Phúc Khánh, huyện Bảo Yên, tỉnh Lào Cai, lũ quét và sạt lở đất đã vùi lấp 40 ngôi nhà. Cả nước đã chung tay ủng hộ và xây dựng lại nhà sàn cho người dân Làng Nủ theo thiết kế như hình vẽ dưới đây.



Giả sử áp dụng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên các trục là mét). Xét một bên của mái nhà gồm có một hình chữ nhật $CDFE$ và một hình thang $ADFG$ với các điểm $G(6; -6; 6)$, $C(3; 4; 8)$, $F(4; -4; 7)$ và điểm I là trung điểm CE .

Biết góc giữa hai vector $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng a° . Tìm a (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

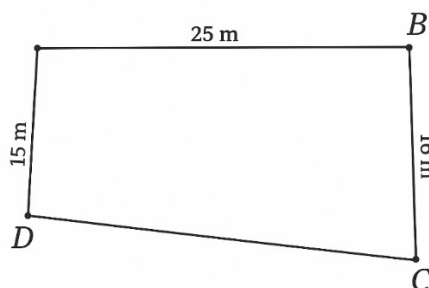
Câu 29. Có hai trạm thu phát sóng tín hiệu mặt đất đặt ở hai điểm O, A và vệ tinh thu phát tín hiệu tại vị trí M , biết vệ tinh di chuyển luôn cách mặt đất 35000km . Tín hiệu tại O phát lên vệ tinh M rồi truyền đến trạm thu tại A . Xét hệ trục $Oxyz$ được chọn thỏa $O(0; 0; 0)$, $A(30; 40; 0)$, $M(x; y; 35)$ (đơn vị tọa độ là ngàn km). Biết vận tốc trung bình truyền tín hiệu giữa vệ tinh với trạm thu phát khoảng 270000km/s . Một tín hiệu phát từ O đến M , rồi truyền về A mất ít nhất bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 30. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Sau một thời gian chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 300 m về phía Nam và 100 m về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 100 m. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 200 m về phía Bắc và 100 m về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 50 m. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất quan sát thấy hai chiếc khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát trên mặt đất, vị trí người đứng có tổng khoảng cách đến hai chiếc khinh khí cầu là nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ vị trí người quan sát đến địa điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

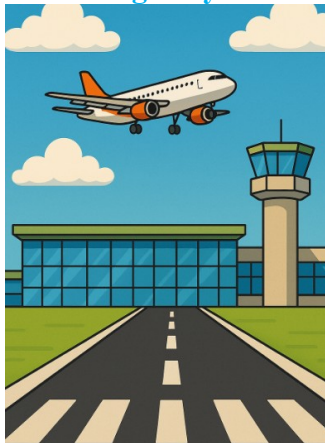
Câu 31. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m, người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài là 4 m, $4\sqrt{4}$ m, $4\sqrt{8}$ m. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Câu 32. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ.



Bước đầu chúng ta lấy thẳng bằng để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25m, AD = 15m, BC = 18m$. Do yêu cầu kỹ thuật khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10cm, a\text{ cm}, 6cm$ tương ứng sao cho 4 điểm A', B', C', D' đồng phẳng. Tìm a

Câu 33. Để xác định vị trí của máy bay khi đang bay, người ta gắn một hệ trục tọa độ O_{xyz} với gốc tọa độ đặt tại một sân bay để xác định tọa độ của sân bay. Biết rằng cao độ của tọa độ máy bay chính là độ cao của máy bay đối với mặt đất. Đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 100 m. Một máy bay đang bay với quỹ đạo là một đường thẳng trong không gian với vận tốc bay không đổi. Tại một thời điểm nào đó, máy bay đang ở vị trí có tọa độ $(200; 70; 118)$. Sau 50 giây, độ cao của máy bay so với mặt đất giảm 400 m. Hỏi sau $2\sqrt{5}$ giây nữa, khoảng cách từ sân bay tới máy bay là bao nhiêu km, biết rằng trong suốt quá trình bay này, máy bay có đi qua điểm có tọa độ $(80; 105; 113)$?



Câu 34. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đa phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng $(a; b; c)$ với $a \in \square$. Tính a .



Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay đặt ở gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$, đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét. Một máy bay chuyển động theo đường thẳng, bay qua hai vị trí $M(-400; -200; 350)$ và $N(-100; -100; 550)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát không lưu nhất thì khoảng cách giữa vị trí của máy bay và đài kiểm soát không lưu là bao nhiêu km? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Câu 36. Trong một cuộc diễn tập phòng không, một bộ phóng tên lửa phòng không được đặt tại vị trí $O(0; 0; 0)$ (trong không gian $Oxyz$ với đơn vị trên các hệ trục tính theo ki-lô-mét) có tầm bắn tối đa là 30 km và tên lửa được phóng ra với vận tốc không đổi là 500 m/s. Một máy bay không người lái bay theo một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -4; 0)$ với vận tốc không đổi là 900 km/h. Khi phát hiện máy bay không người lái tại vị trí $A(6; -20; 16)$ thì tên lửa rời bộ phóng, khai hỏa và đã bắn hạ được mục tiêu. Hỏi khoảng cách từ bộ phóng tên lửa đến vị trí máy bay không người lái bị bắn hạ bằng bao nhiêu ki-lô-mét? (Giả sử cả máy bay không người lái và tên lửa đều bay theo đường thẳng và không chịu tác động của trọng lực hay lực cản không khí).

Câu 37. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo là kilômét, ra đa phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(a; b; c)$. Tính $a + b + 2c$?

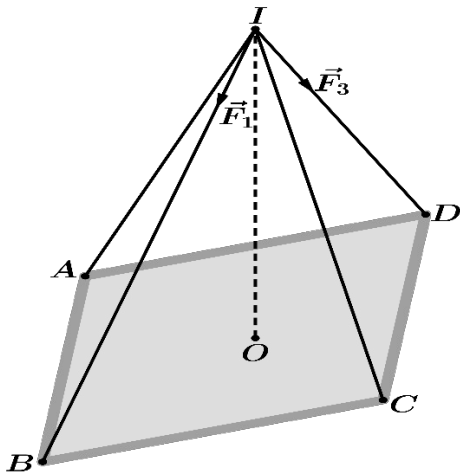
Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một thiết bị phát sóng wifi được đặt tại vị trí $I(3; 4; 2)$. Vùng phủ sóng của thiết bị là một hình cầu có bán kính $R = 10$ m. Một người sử dụng điện thoại đứng ở vị trí $K(x - 7; 7; 1)$. Sau đó, người đó di chuyển đến vị trí $H(x + 11; 7; 1)$. Tìm giá trị nguyên của x sao cho cả hai vị trí K và H đều có thể bắt được tín hiệu wifi từ thiết bị.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vector chỉ phương là $\vec{u}(2; -2; 1)$ với tốc độ $4,5$ m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Một camera giám sát an toàn đặt tại $I(50; -10; 50)$. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi cabin xuất phát thì cabin gần camera giám sát an toàn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 40. Nhân dịp lễ 30/4/2025, tại Quảng trường trung tâm TP. Hồ Chí Minh diễn ra màn trình diễn máy bay trực thăng kéo cờ Tổ quốc và cờ Đảng. Hai máy bay cất cánh cùng lúc từ một địa điểm. Sau một thời gian chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 3 km về phía Nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 1 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 500m. Cùng thời điểm đó, một chiến sĩ công an đứng trên mặt đất quan sát thấy hai chiếc máy bay nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát trên mặt đất, vị trí chiến sĩ công an đứng có tổng khoảng cách đến hai chiếc máy bay là nhỏ nhất. Khoảng cách từ vị trí chiến sĩ công an quan sát đến địa điểm xuất phát của hai chiếc máy bay là bao nhiêu km (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

Câu 41. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3km về phía Đông và 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km, chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1km về phía Bắc và 1 km về phía Tây đồng thời cách mặt đất 0,3km. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có khoảng cách đến hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tấm bảng đồng chất có dạng hình vuông $ABCD$ tâm O được treo nghiêng bởi 4 sợi dây IA, IB, IC, ID gắn cố định tại điểm $I(0; 0; 9)$ như hình vẽ. Điểm $O(0; 0; 5)$; $A(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 5)$ và góc $\widehat{OID}$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ lần lượt là lực căng của các sợi dây IB, IC, ID, IA . Biết rằng $|\vec{F}_1| = 50$ N và $|\vec{F}_2| = 40$ N



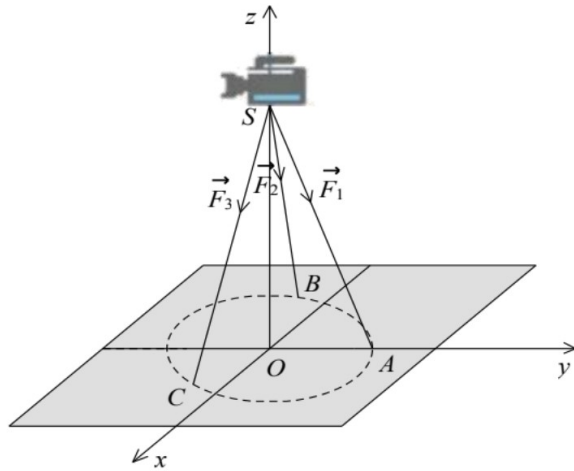
Tính khối lượng m (kg) của tấm bảng (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) (Cho gia tốc trọng trường $g = 9,8$ (m/s²) và trọng lượng của tấm bảng được tính bằng công thức $P = m \cdot g$)

Câu 43. Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $M(m+100; m+370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Câu 44. Trong không gian $Oxyz$, một chiếc máy quay phim được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0; 0; 5)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là

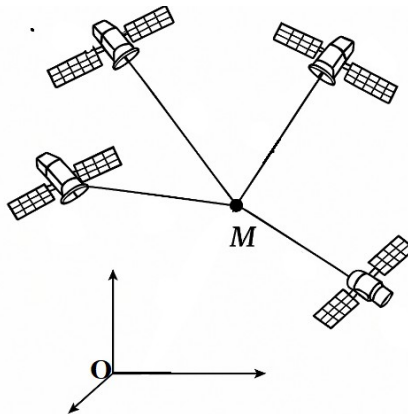
$$A(0;1;0), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2};-\frac{1}{2};0\right)$$

(hình vẽ bên). Biết lực tác dụng của máy quay phim lên các giá đỡ SA, SB, SC lần lượt là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và trọng lượng của chiếc máy là 60 N , giá trị của $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| + |\vec{F}_3|$ bằng bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



LỜI GIẢI

Câu 1. Hệ thống định vị toàn cầu GPS là một hệ thống cho phép xác định vị trí của một vật thể trong không gian. Trong cùng một thời điểm, vị trí của một điểm M trong không gian sẽ được xác định bởi bốn vệ tinh cho trước nhờ các bộ thu phát tín hiệu đặt trên các vệ tinh. Giả sử trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, có bốn vệ tinh lần lượt đặt tại các điểm $A(3;1;0)$, $B(3;6;6)$, $C(4;6;2)$, $D(6;2;14)$; vị trí $M(a;b;c)$ thỏa mãn $MA = 3$, $MB = 6$, $MC = 5$, $MD = 13$. Khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: 3.

$$M(a; b; c)$$

$$MA = 3, MB = 6, MC = 5, MD = 13$$

Do vị trí thỏa mãn

$$\overline{AM} = (a-3; b-1; c) \Rightarrow (a-3)^2 + (b-1)^2 + c^2 = 3^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 2b + 1 = 0(1)$$

$$\overline{BM} = (a-3; b-6; c-6) \Rightarrow (a-3)^2 + (b-6)^2 + (c-6)^2 = 6^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 6a - 12b - 12c + 45 = 0 \quad (2)$$

$$\overline{CM} = (a-4; b-6; c-2) \Rightarrow (a-4)^2 + (b-6)^2 + (c-2)^2 = 5^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 8a - 12b - 4c + 31 = 0 \quad (3)$$

$$\overline{DM} = (a-6; b-2; c-14) \Rightarrow (a-6)^2 + (b-2)^2 + (c-14)^2 = 13^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - 12a - 4b - 28c + 67 = 0 \quad (4)$$

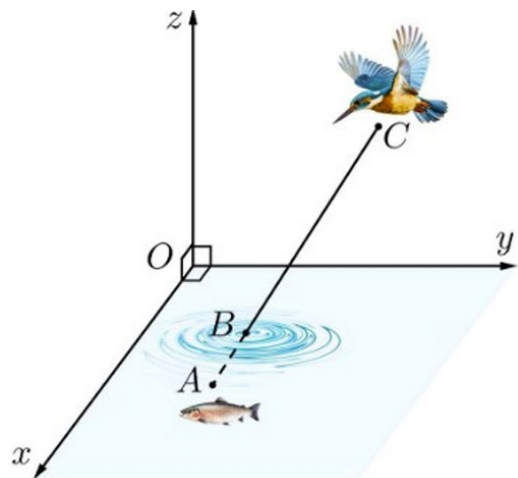
$$(1), (2), (3), (4) \Leftrightarrow \begin{cases} 10b + 12c = 44 \\ 2a + 10b + 4c = 30 \\ 6a + 2b + 28c = 66 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

Từ ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow M(1; 2; 2) \Rightarrow \overline{OM}(1; 2; 2) \Rightarrow OM = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3$$

Vậy khoảng cách từ điểm M đến điểm O bằng 3.

Câu 2. Với hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho O nằm trên mặt nước, mặt phẳng (Oxy) là mặt nước, trục Oz hướng lên trên (đơn vị đo: mét), một con chim bói cá đang ở vị trí cách mặt nước $2m$, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là $3m$ và $1m$ phóng thẳng xuống vị trí con cá cách mặt nước $50cm$, cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là $1m$ và $1,5m$. Tọa độ điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước là $(a; b; c)$. Tính $T = 5a + 15b + 25c$.



Lời giải

Đáp án: 28.

Ta quy ước cứ $1m = 1$ đơn vị trong hệ tọa độ $Oxyz$.

Gọi vị trí của con chim bói cá ban đầu là C , khi đó nó cách phía trên mặt nước $2m$ nên $z_C = 2$, ngoài ra cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là $3m$ và $1m$ nên $y_C = 3$ và $x_C = 1$. Do đó tọa độ điểm $C(1;3;2)$.

Gọi vị trí của con cá là A , khi đi con cá đang dưới mặt nước $50cm = 0,5m$ nên $z_A = -0,5$, ngoài ra cách mặt phẳng (Oxz) , (Oyz) lần lượt là $1m$ và $1,5m$ nên $y_A = 1$ và $x_A = 1,5$. Do đó tọa độ điểm $A(1,5;1;-0,5)$

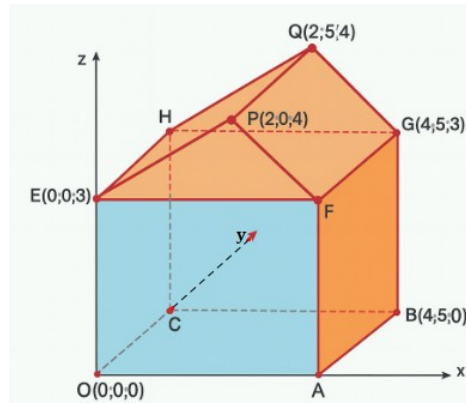
Vì điểm B lúc chim bói cá vừa tiếp xúc với mặt nước nên $B \in (Oxy)$ hay $c = 0$ khi đó tọa độ $B(a;b;0)$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-1=0,5k \\ b-3=-2k \\ -2=-2,5k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{5} \\ b=\frac{7}{5} \\ k=\frac{4}{5} \end{cases}$$

Ta có 3 điểm A, B, C thẳng hàng nên: $\overrightarrow{CB} = k\overrightarrow{CA}$

Vậy $B\left(\frac{7}{5}; \frac{7}{5}; 0\right)$ suy ra $T = 5a + 15b + 25c = 28$.

Câu 3. Hình sau đây minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong hệ trục tọa độ $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Biết $F(a;b;c)$. Giá trị của tổng $a+b+c$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Đáp án: 7.

$$\overrightarrow{QP} = (0; -5; 0)$$

$$\overrightarrow{GF} = (a-4; b-5; c-3)$$

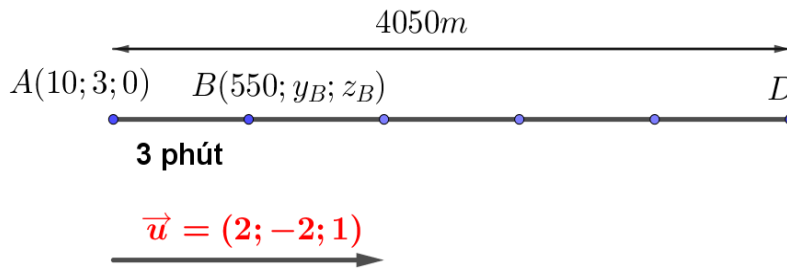
$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{GF} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4=0 \\ b-5=-5 \\ c-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=0 \\ c=3 \end{cases} \text{ nên } a+b+c=7.$$

Do $PQGF$ là hình chữ nhật nên ta có

Câu 4. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là $1m$), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí D cách A $4050m$. Biết đường đi của cabin cùng phương với vectơ $\vec{u}(2; -2; 1)$ và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đến vị trí B có hoành độ $x_B = 550$. Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là bao nhiêu phút?

Lời giải

Đáp án: 15



Ta có: $\overrightarrow{AB} = k\vec{u}$, $k \neq 0$ (do $\overrightarrow{AB}$ và $\vec{u}$ cùng phương)

$$\Leftrightarrow (540; y_B - 3; z_B) = k(2; -2; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 540 = 2k \\ y_B - 3 = -2k \\ z_B = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 270 \\ y_B = -537 \\ z_B = 270 \end{cases}$$

Suy ra $B(550; -537; 270)$.

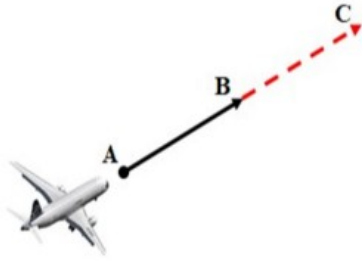
$$\Rightarrow AB = \sqrt{(550 - 10)^2 + (-537 - 3)^2 + (270 - 0)^2} = 810 \text{ (m)}$$

Mặt khác $\frac{AD}{AB} = \frac{4050}{810} = 5$ hay $AD = 5AB$.

Mà vận tốc không đổi chuyển động đều theo cáp thẳng đến D và thời gian di chuyển từ A đến B là 3 phút

Nên thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là $5 \cdot 3 = 15$ (phút).

Câu 5. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị đo lấy theo km), một Radar phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(812; 600; 5)$ đến điểm $B(950; 530; 6)$ trong 10 phút.



Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 10 phút tiếp theo là $C(x; y; z)$. Khi đó $x + y + z$ bằng bao nhiêu?

Lời giải

Đáp án: 1555.

Do chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ A đến B trong 10 phút và từ B đến C trong 10 phút.

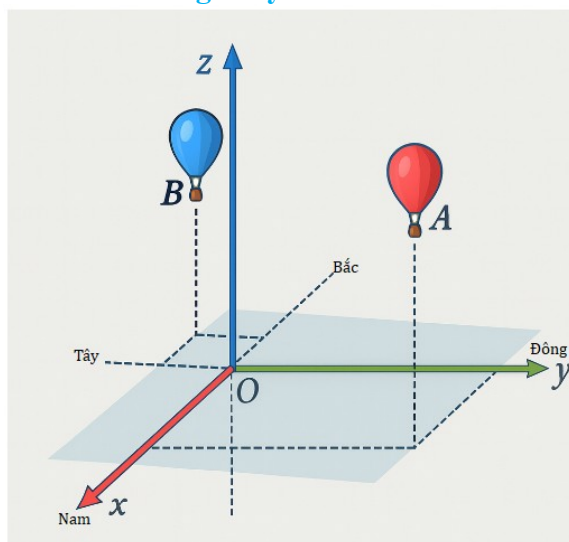
Nên suy ra $AB = BC$ và A, B, C thẳng hàng.

Suy ra B là trung điểm của AC

$$\Rightarrow \begin{cases} x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \\ z_B = \frac{z_A + z_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 950 = \frac{812 + x}{2} \\ 530 = \frac{600 + y}{2} \\ 6 = \frac{5 + z}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1088 \\ y = 460 \\ z = 7 \end{cases}$$

Vậy $x + y + z = 1555$.

Câu 6. Hai chiếc kính khí cầu **A** và **B** bay lên từ cùng một vị trí **O** trên mặt đất. Sau một khoảng thời gian, kính khí cầu **A** nằm cách điểm xuất phát 4km về phía Đông và 3km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 1km ; kính khí cầu **B** nằm cách điểm xuất phát 1km về phía Bắc và $1,5\text{km}$ về phía Tây, đồng thời cách mặt đất $0,8\text{km}$ (hình minh họa bên dưới). Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai kính khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có tổng khoảng cách đến hai kính khí cầu là nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: $7,03$.

Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho điểm xuất phát là gốc O như hình vẽ trên.

Khi đó tọa độ hai kinh khí cầu là $A(3;4;1), B\left(-1;-\frac{3}{2};\frac{4}{5}\right)$

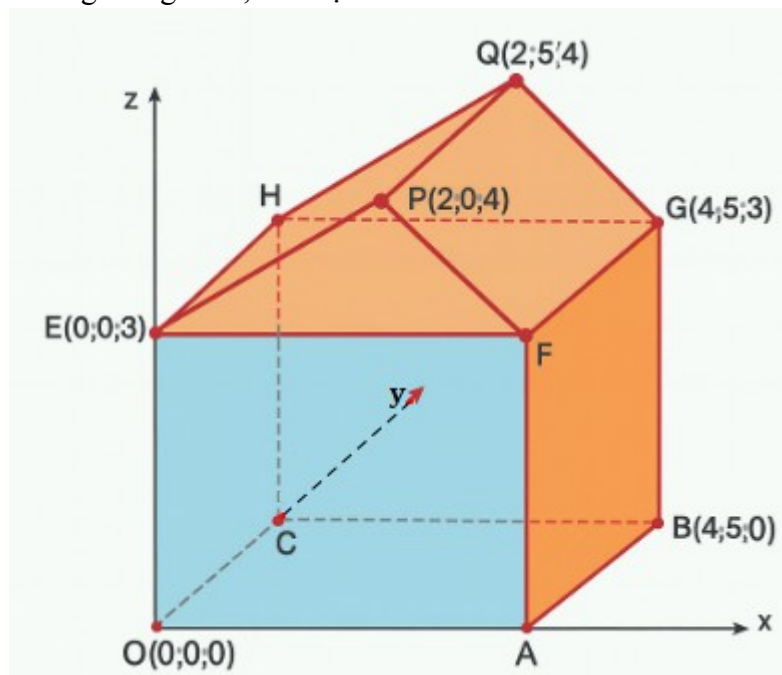
Gọi M là vị trí người quan sát và $B'\left(-1;-\frac{3}{2};-\frac{4}{5}\right)$ là điểm đối xứng với B qua mặt phẳng (Oxy) .

$$MA + MB = MA + MB' \geq AB' = \sqrt{(3+1)^2 + \left(4 + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{4}{5}\right)^2} \approx 7,03 \text{ km}$$

Khi đó

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi M, A, B' thẳng hàng và M thuộc đoạn AB' . Điều này luôn xảy ra.

Câu 7. Hình bên dưới minh họa sơ đồ một ngôi nhà trong không gian $Oxyz$, trong đó nền nhà, bốn bức tường và hai mái nhà đều là hình chữ nhật. Tính số đo góc dốc của mái nhà, tức là số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt $(FGQP)$ và $(FGHE)$.



Đáp án: $26,6^\circ$.

Để tính góc của mái nhà, ta tính số đo của góc nhị diện có cạnh là đường thẳng FG , hai mặt lần lượt là $(FGQP)$ và $(FGHE)$.

Do mặt phẳng (Oxy) vuông góc với hai mặt phẳng $(FGQP)$ và $(FGHE)$,
 $FP = (Oxy) \cap (FGQP)$, $FE = (Oxz) \cap (FGHE)$ nên $\widehat{PFE}$ là góc phẳng nhị diện cần tìm.

Tứ giác $OAFE$ là hình chữ nhật nên $x_F = x_A = 4$, $z_F = z_E = 3$.

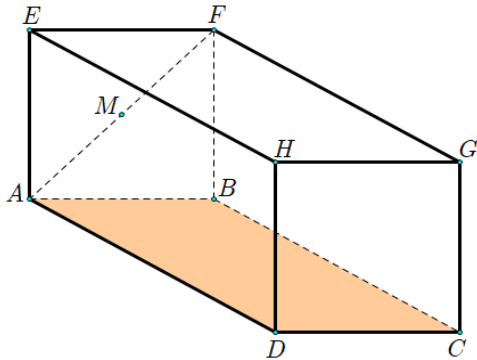
Do F nằm trên mặt phẳng (Oxz) nên tọa độ điểm $F(4; 0; 3)$.

Ta có $\overrightarrow{FP} = (-2; 0; 1)$, $\overrightarrow{FE} = (-4; 0; 0)$ suy ra:

$$\cos \widehat{PFE} = \cos(\overrightarrow{FP}; \overrightarrow{FE}) = \frac{\overrightarrow{FP} \cdot \overrightarrow{FE}}{FP \cdot FE} = \frac{(-2)(-4) + 0 \times 0 + 1 \times 0}{\sqrt{(-2)^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Do đó, $\widehat{PFE} \approx 26,6^\circ$. Vậy góc dốc mái nhà khoảng $26,6^\circ$.

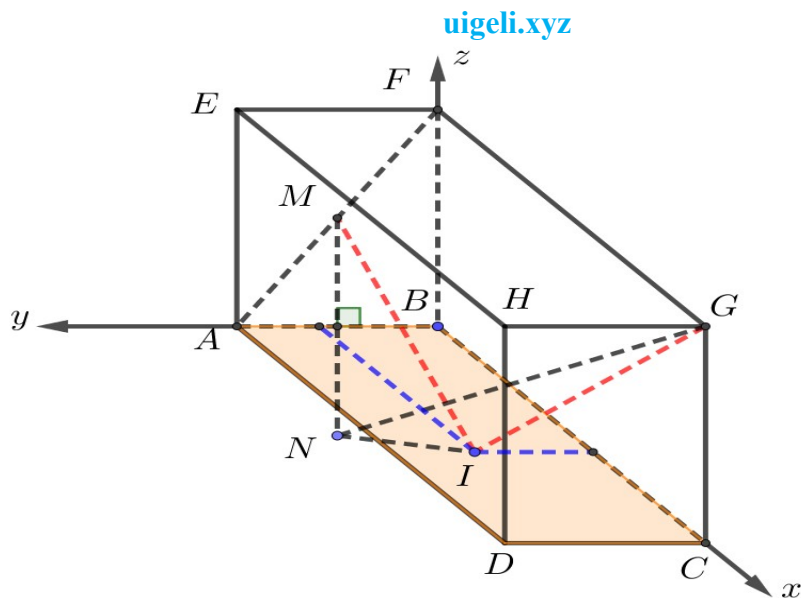
Câu 8. Một bể cá đầy nước có dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.EFGH$ với $AB = 6$ (dm), $AD = 8$ (dm) và cạnh bên bằng 10 (dm). Một chú cá con bơi theo những đoạn thẳng từ điểm G đến chạm mặt đáy của hồ, rồi từ điểm đó bơi đến vị trí điểm M là trung điểm của AF được mô hình hóa như hình vẽ sau:



Để đường đi ngắn nhất thì chú cá bơi đến điểm dưới đáy hồ cách BA và BC những đoạn bằng a và b . Khi đó tổng $D = 3a + 6b$ bao nhiêu?

Lời giải

Đáp số: 20 .



Dựng hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ

Khi đó tọa độ các điểm là $B(0;0;0)$, $C(8;0;0)$, $D(8;6;0)$, $A(0;6;0)$, $G(8;0;10)$, $F(0;0;10)$.

Ta có: M là trung điểm của $AF \Rightarrow M(0;3;5)$.

Con cá bơi từ điểm G đến chạm mặt đáy hồ tại điểm $I(x;y;0) \in (Oxy)$ với $0 \leq x \leq 8$, $0 \leq y \leq 6$.

Gọi N là điểm đối xứng của điểm M qua $(Oxy) \Rightarrow N(0;3;-5)$.

Quãng đường di chuyển của con cá là $G-I-M$

Ta có: $IM + IG = IN + IG \Rightarrow GN = \sqrt{(0-8)^2 + (3-0)^2 + (-5-10)^2} = \sqrt{298}$.

Để $IM + IG$ nhỏ nhất thì ba điểm I , G , N thẳng hàng

Suy ra $\vec{IG}, \vec{NG}$ cùng phương.

$$\vec{IG} = (8-x; -y; 10)$$

$$\vec{NG} = (8; -3; 15)$$

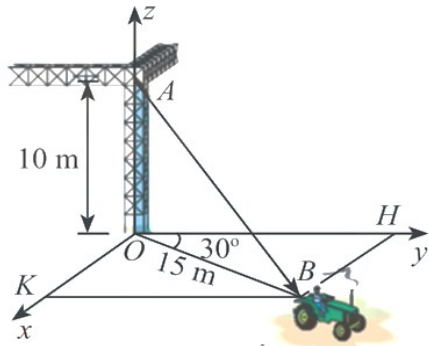
$$\text{Do đó } \frac{8-x}{8} = \frac{-y}{-3} = \frac{10}{15}$$

$$\text{Suy ra } x = \frac{8}{3}, y = 2 \Rightarrow I\left(\frac{8}{3}; 2; 0\right)$$

$$\text{Khi đó, } a = d(I, BA) = \frac{8}{3}, b = d(I, BC) = 2$$

$$\text{Vậy } D = 3a + 6b = 3 \cdot \frac{8}{3} + 6 \cdot 2 = 20$$

Câu 9. Một chiếc xe đang kéo căng sợi dây cáp AB trong công trường xây dựng, trên đó đã thiết lập hệ tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ dưới với độ dài đơn vị trên các trục tọa độ bằng $1m$. Biết $\vec{AB} = (x; y; z)$. Tính $x + 2y - z$ (làm tròn đến hàng phần mười).



Lời giải

Đáp án: 43,5

Vì $\vec{OA}$ cùng hướng với $\vec{k}$ và $OA = 10$ nên $\vec{OA} = 10\vec{k}$.

Xét $\triangle OBH$ vuông tại H , có $BH = OB \cdot \sin 30^\circ = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7.5m$.

$$OH = OB \cdot \cos 30^\circ = 7.5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{15\sqrt{3}}{2}m$$

Vì $\vec{OH}$ cùng hướng với $\vec{j}$ và $OK = 7.5$ nên $\vec{OH} = \frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j}$

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{OH} + \vec{OK} - \vec{OA} = 7.5\vec{i} + \frac{15\sqrt{3}}{2}\vec{j} - 10\vec{k}$$

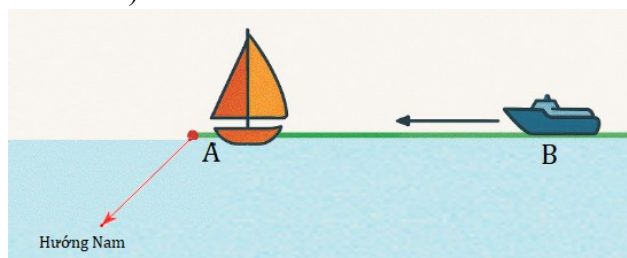
$$\vec{AB} = \left(7.5; \frac{15\sqrt{3}}{2}; -10 \right)$$

Do đó

$$x + 2y - z = 7.5 + 2 \cdot \frac{15\sqrt{3}}{2} - 10 \approx 43.5m$$

Vậy

Câu 10. Ở trên biển, hai con tàu A và B đang ở cùng một vĩ tuyến và cách nhau 10 hải lý. Cả hai tàu đồng thời cùng khởi hành. Tàu A chạy về hướng Nam với vận tốc 8 hải lý/giờ, còn tàu B chạy về vị trí hiện tại của tàu A với vận tốc 6 hải lý/giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ thì khoảng cách giữa hai tàu là ngắn nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp án: 0,8.

Quãng đường con tàu A đi được sau t giờ là: $6t$ (hải lý)

Quãng đường con tàu B đi được sau t giờ là: $8t$ (hải lý)

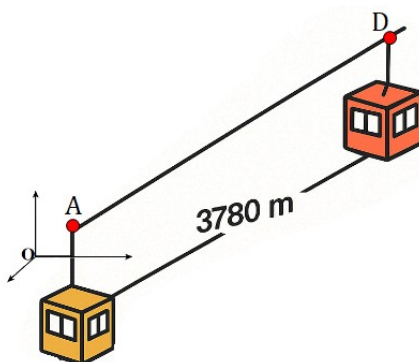
Sau t giờ khoảng cách giữa hai con tàu là:

$$f(t) = \sqrt{(6t)^2 + (10 - 8t)^2} = \sqrt{100t^2 - 160t + 100} = \sqrt{(10t - 8)^2 + 36} \geq 6$$

Khoảng cách giữa hai con tàu ngắn nhất bằng 6 (hải lý) khi $t = \frac{4}{5} = 0,8$ (giờ)

Vậy sau 0,8 giờ thì khoảng cách giữa hai con tàu ngắn nhất.

Câu 11. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là 1m), một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp thẳng đến vị trí D cách điểm A một khoảng 3780m. Biết đường đi của cabin cùng phương với vector $\vec{u} = (2; -2; 1)$ và sau 3 phút kể từ khi xuất phát thì cabin đi đến vị trí B có hoành độ $x_B = 550$. Hỏi thời gian di chuyển của cabin trên quãng đường AD là bao nhiêu giây?



Lời giải

Đáp án: 840.

Gọi tọa độ điểm $B(550; y; z)$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (540; y - 3; z)$.

Do đường đi của cabin cùng phương với vector $\vec{u} = (2; -2; 1)$ nên ta có:

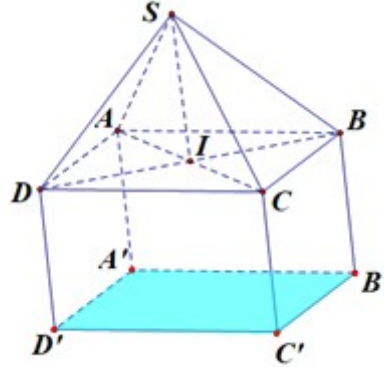
$$\frac{540}{2} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z}{1} \Leftrightarrow \begin{cases} y-3 = -540 \\ z = 270 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -537 \\ z = 270 \end{cases} \Rightarrow B(550; -537; 270)$$

Quãng đường AB bằng $AB = \sqrt{540^2 + (-537-3)^2 + 270^2} = 810$ (m).

Vận tốc của cabin bằng $v = \frac{AB}{3.60} = 4,5$ (m/s).

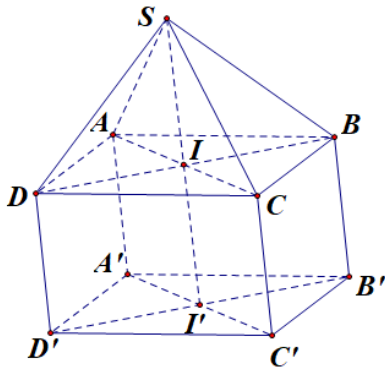
Thời gian để cabin chuyển động đều từ điểm A đến điểm D là: $\frac{3780}{4,5} = 840$ (s).

Câu 12. Để chuẩn bị cho một buổi triển lãm quốc tế, các trang sức có giá trị lớn được đặt bảo mật trong các khối chóp tứ giác đều $S.ABCD$ và đặt lên phía trên một trụ hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy là hình vuông (như hình vẽ). Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét) sao cho $A'(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;0,5;1)$. Biết rằng, ban tổ chức sự kiện dự định dùng các tấm kính cường lực hình tam giác cân có cạnh bên là 60 cm để lắp ráp thành khối chóp nói trên. Khi đó, tọa độ điểm S là $(a;b;c)$. Tính giá trị của $a+b+c$. (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)



Lời giải

Đáp án: 1,98.



Đổi $60\text{ cm} = 0,6\text{ (m)}$

Ta có $SA = 0,6\text{ (m)}$

$$A'(0;0;0), A(0;0;1), B(0;0,5;1) \Rightarrow AB = \frac{1}{2}, AA' = 1.$$

Gọi $I = AC \cap BD$, $I' = A'C' \cap B'D'$

Vì $S.ABCD$ là khối chóp tứ giác đều nên $ABCD$ là hình vuông và $SI \perp (ABCD)$.

Vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình hộp chữ nhật nên $(ABCD) \parallel (A'B'C'D')$, $II' \perp (A'B'C'D')$.

Do đó $SI \perp (A'B'C'D')$. Suy ra S, I, I' thẳng hàng. Vì vậy $SI' \perp (A'B'C'D')$.

$$ABC \text{ có } AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow AI = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Xét tam giác vuông

$$SI = \sqrt{SA^2 - AI^2} = \sqrt{0,6^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{94}}{20}$$

Xét tam giác vuông SIA có

$$A'C' \Rightarrow II' = AA' = 1 \Rightarrow SI' = II' + SI = 1 + \frac{\sqrt{94}}{20} = \frac{20 + \sqrt{94}}{20}$$

Gọi I' là trung điểm của

Ta có $AA'B'B$ là hình chữ nhật và $A'(0;0;0)$, $A(0;0;1)$, $B(0;0,5;1) \Rightarrow B'(0;0,5;0) \in Oy$

Mà $A'(0;0;0) \equiv O$, $A(0;0;1) \in Oz \Rightarrow D' \in Ox$

Mà

$ABCD$ là hình vuông nên $A'B'C'D'$ là hình vuông cạnh $\frac{1}{2} \Rightarrow A'D' = \frac{1}{2} \Rightarrow D'(0,5;0;0)$

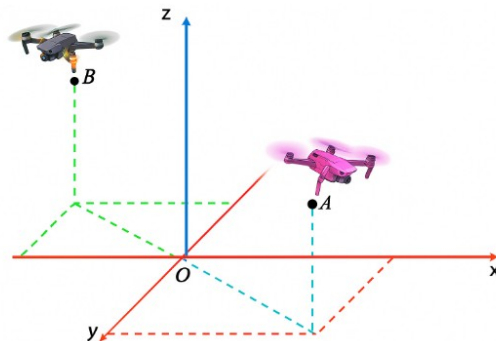
Vì

$$\Rightarrow I'(0,25;0,25;0)$$

Vì $I'(0,25;0,25;0)$ là hình chiếu của S trên mặt phẳng Oxy và $SI' = \frac{20 + \sqrt{94}}{20}$

$$\Rightarrow S\left(0,25;0,25;\frac{20 + \sqrt{94}}{20}\right) \Rightarrow a + b + c = 0,25 + 0,25 + \frac{20 + \sqrt{94}}{20} \approx 1,98$$

Câu 13. Hai chiếc flycam được điều khiển cùng bay lên tại một địa điểm. Sau một thời gian bay, chiếc flycam thứ nhất bay đến vị trí điểm A cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $3m$ về phía nam và $2m$ về phía đông. Chiếc flycam thứ hai bay đến điểm B cách mặt đất $5m$, cách điểm xuất phát $6m$ về phía bắc và $6m$ về phía tây. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai chiếc flycam, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất (coi như phẳng) có trục Ox hướng về phía nam, trục Oy hướng về phía đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời (đơn vị đo mỗi trục là mét). Trên mặt đất, người ta xác định được một vị trí sao cho tổng khoảng cách từ vị trí đó đến hai chiếc flycam ngắn nhất.



Hỏi khoảng cách từ điểm xuất phát đến vị trí đó bằng bao nhiêu mét?

Lời giải

Đáp án: 2,5.

Ta có $A(3; 2; 5), B(-6; -6; 5)$. Gọi M là một vị trí trên mặt đất $\Rightarrow M \in (Oxy) \Rightarrow M(x; y; 0)$.

Khi đó tổng khoảng cách từ điểm M đến hai điểm A và B là:

$$\begin{aligned} MA + MB &= \sqrt{(3-x)^2 + (2-y)^2 + 5^2} + \sqrt{(x+6)^2 + (y+6)^2 + 5^2} \\ &\geq \sqrt{(3-x+x+6)^2 + (2-y+y+6)^2 + (5+5)^2} = 7\sqrt{5} \end{aligned}$$

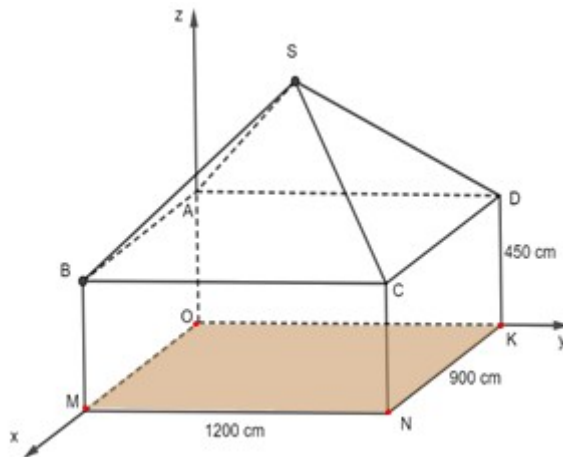
$$\min(MA + MB) = 7\sqrt{5} \text{ xảy ra khi } \frac{3-x}{6+x} = \frac{2-y}{6+y} = \frac{5}{5} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-x = 6+x \\ 2-y = 6+y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-3}{2} \\ y = -2 \end{cases}$$

Do đó vị trí để tổng khoảng cách từ nó đến hai chiếc flycam ngắn nhất là $M\left(\frac{-3}{2}; -2; 0\right)$

$$\text{Vậy } OM = \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 + (-2)^2} = 2,5(m)$$

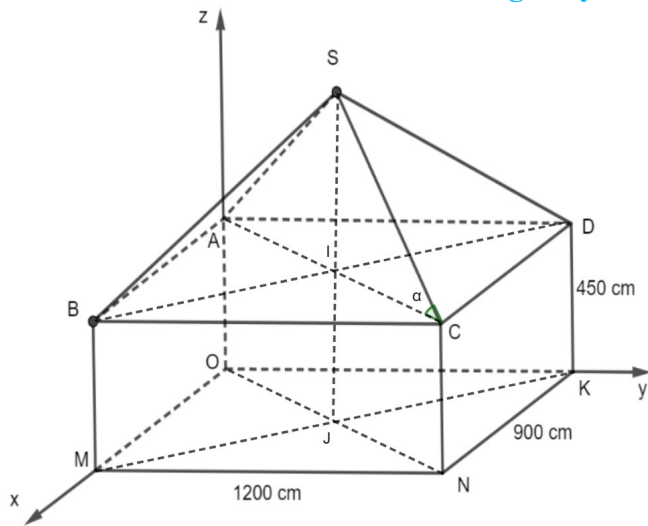
Câu 14. (Chuyên Vinh 2025) Một ngôi nhà gồm hai phần. Phần thân nhà dạng hình hộp chữ nhật $ABCD.OMNK$ có chiều dài $1200cm$, chiều rộng $900cm$, chiều cao $450cm$. Phần mái nhà dạng hình chóp

$S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau và tạo với mặt đáy góc α với $\tan \alpha = \frac{1}{5}$. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho M thuộc tia Ox , K thuộc tia Oy , A thuộc tia Oz (như hình vẽ). Biết $S(a; b; c)$ (đơn vị của a, b, c là centimet). Tính giá trị của biểu thức $P = a + b + c$.



Lời giải

Đáp án: 1650.



Gọi I, J lần lượt là tâm của hai đáy $ABCD, OMNK$

Vì $S.ABCD$ có các cạnh bên bằng nhau nên $SI \perp (ABCD) \Rightarrow SI \perp (Oxy)$

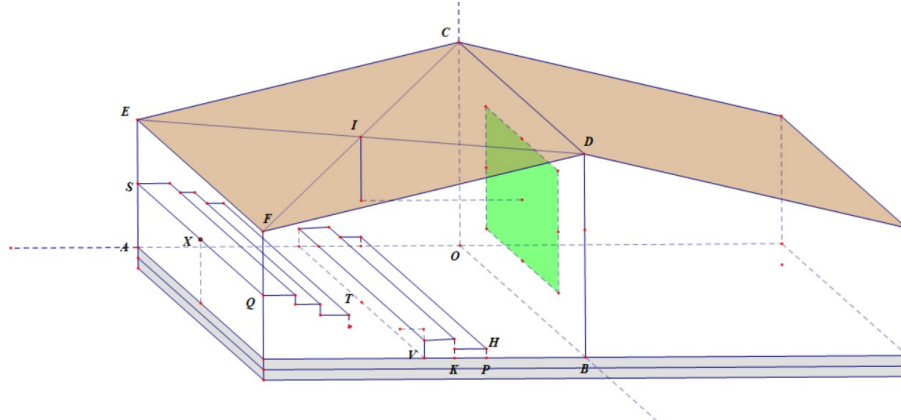
Theo giả thiết ta có $IJ \perp (Oxy) \Rightarrow S \in IJ$

Lại có $\alpha = \angle SCI$, $ON = AC = \sqrt{900^2 + 1200^2} = 1500 \Rightarrow CI = \frac{1}{2} AC = 750$

Từ đó suy ra: $SI = CI \cdot \tan \alpha = 750 \cdot \frac{1}{5} = 150 \Rightarrow SJ = SI + IJ = 150 + 450 = 600$

Vậy $S(450; 600; 600) \Rightarrow a + b + c = 1650$

Câu 15. Một toà nhà được thiết kế để làm 2 phòng dạy học có trang bị máy chiếu. Mái nhà là dạng mái vát $CDFE$ như hình vẽ. Chiều dài của mỗi phòng học là $OA = 30m$ và chiều rộng là $OB = 20m$, chiều cao các bức tường $BD = 10m$ và $EA = 6m$. Từ vị trí P cách B một khoảng 10 m, người ta xây các bậc thang cao dần về phía cuối của phòng học để đặt các dãy bàn ghế học sinh trên các bậc thang đó. Chiều rộng mỗi bậc thang là 2 m và chiều cao mỗi bậc thang là 20 cm.



Chủ toà nhà muốn lắp giá treo máy chiếu tại vị trí I là giao của DE và CF như hình vẽ, vuông góc với mặt sàn sao cho không vướng vào đầu học sinh khi học sinh đó đứng tại bậc thang ngay dưới máy chiếu (chiều cao học sinh đó là 1,8 m) và cũng không che khuất tầm nhìn của học sinh ngồi ở hàng ghế sau cùng, tại vị trí X trung điểm SQ , theo phương vuông góc bức tường $OBDC$ (chiều cao mắt học sinh so với bậc thang tại đó là 1,2m). Hỏi tổng độ dài

thanh treo máy chiếu và cả thân máy chiếu lớn nhất là bao nhiêu mét? Kết quả làm tròn đến hàng phần mười.

Lời giải

Đáp án: 4,8.

Xét hệ toạ độ $Oxyz$ với O là gốc toạ độ, các điểm $A \in Ox, B \in Oy, C \in Oz$ có toạ độ không âm.

Khi đó $A(30;0;0), B(0;20;0), D(0;20;10); E(30;0;6), I(15;10;8)$ là trung điểm DE nên hình chiếu của điểm I trên sàn là $T(15;10;0)$ suy ra toạ độ điểm $V(15;20;0)$, vậy V cách P một khoảng bằng 5 m. Tức là bậc thang tại vị trí U đang là bậc thang thứ 3, có chiều cao 60 cm so với mặt sàn. Vậy toạ độ điểm $U(15;10;0,6)$.

Từ đó toạ độ đỉnh đầu học sinh đứng là $K(15;10;2,4)$. Khoảng cách $IK = 8 - 2,4 = 5,6m$. (1)

Mặt khác toạ độ điểm $X(15;10;2)$ nên toạ độ mắt học sinh ngồi tại X là điểm $Z(15;10;3,2)$ suy ra hiệu khoảng cách từ điểm I đến sàn và từ điểm Z đến sàn nhà là $8 - 3,2 = 4,8m$ (2)

Điều (1) và (2) cho thấy tổng độ dài của thanh treo và thân máy chiếu không quá **4,8 mét** để thoả mãn đồng thời cả 2 điều kiện.

Câu 16. Trong không gian chọn hệ trục toạ độ cho trước, đơn vị đo là kilômét, một rada phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(1100;650;14)$ đến điểm N trong 20 phút. Nếu đến N máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì toạ độ của máy bay trong 10 phút tiếp theo là $Q(1500;860;16)$. Biết một khẩu pháo ở toạ độ vị trí điểm $E\left(\frac{1700}{3};370;\frac{34}{3}\right)$ được bắn ra với vận tốc không đổi gấp 5 lần vận tốc máy bay nhằm bắn trúng máy bay tại vị trí N . Sau bao nhiêu phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển pháo phải bắn.



Lời giải

Đáp án: 8.

Do vận tốc của máy bay không đổi nên thời gian và quãng đường là hai đại lượng tỉ lệ thuận.

Thời gian máy bay di chuyển từ M đến Q là 30 phút nên $\frac{MN}{MQ} = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$, do đó $\overline{MN} = \frac{2}{3} \overline{MQ}$.

Ta có $\overline{MN} = (x_N - 1100; y_N - 650; z_N - 14)$; $\overline{MQ} = (400; 210; 2)$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} x_N = \frac{2}{3} \cdot 400 + 1100 = \frac{4100}{3} \\ y_N = \frac{2}{3} \cdot 210 + 650 = 790 \\ z_N = \frac{2}{3} \cdot 2 + 14 = \frac{46}{3} \end{cases} \quad \text{tức là } N\left(\frac{4100}{3}; 790; \frac{46}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{MN} = \left(\frac{800}{3}; 140; \frac{4}{3}\right)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{ME} = \left(\frac{-1600}{3}; -280; \frac{-8}{3}\right)$$

$$\frac{\frac{800}{3}}{\frac{-1600}{3}} = \frac{140}{-280} = \frac{\frac{4}{3}}{\frac{-8}{3}} = -\frac{1}{2}$$

Khi đó nên ba điểm M, E, N thẳng hàng; M nằm giữa E và N ; $ME = 2MN$.



Giả sử sau x phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển pháo phải bắn.

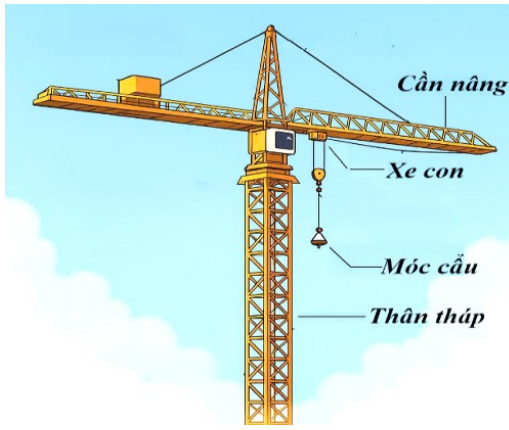
Khi đó vận tốc khẩu pháo là $\frac{EN}{20-x}$ kilômet/phút; vận tốc máy bay là $\frac{MN}{20}$ kilômet/phút.

$$\text{Theo đề bài } \frac{EN}{20-x} = 5 \cdot \frac{MN}{20} = \frac{MN}{4}$$

$$\text{Suy ra } \frac{3MN}{20-x} = \frac{MN}{4} \Leftrightarrow 20-x = 12 \Leftrightarrow x = 8.$$

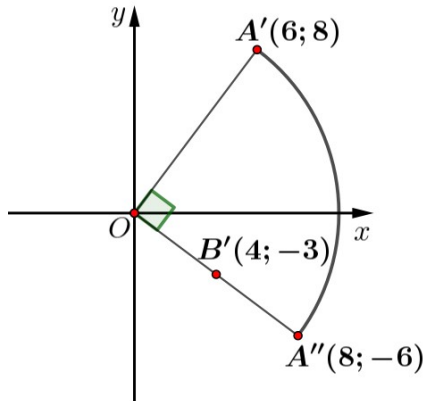
Vậy sau 8 phút khi máy bay bay từ M thì người điều khiển pháo phải bắn.

Câu 17. Người ta thường dùng cầu trục tháp (như hình vẽ) để vận chuyển vật liệu xây dựng; thân tháp vuông góc với mặt đất, cần nâng vuông góc thân tháp dùng để làm điểm tựa nâng vật liệu, trên cần nâng có bộ phận gọi là xe con, có thể chạy dọc cần nâng nhằm di chuyển vật liệu. Ban đầu vật liệu ở mặt đất, cầu trục dùng móc cần nâng vật liệu lên cao theo phương thẳng đứng và cao hơn $1m$ so với vị trí cần đặt, sau đó giữ nguyên độ cao và cầu trục quay cần nâng một góc $\alpha \in (0^\circ; 180^\circ)$ sao cho quỹ đạo tạo thành một cung tròn cho đến khi mặt phẳng (P) chứa cần nâng và điểm cần đặt vuông góc với mặt đất (vật liệu và điểm cần đặt cùng nằm trên một nửa mặt phẳng (P) so với thân tháp). Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển và hạ vật liệu xuống $1m$ theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt. Giả sử rằng trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, thân tháp là trục Oz và mặt đất là mặt phẳng Oxy (đơn vị tính bằng mét); vị trí ban đầu của vật liệu là điểm $A(6; 8; 0)$ và vị trí cần đặt vật liệu là điểm $B(4; -3; 15)$. Tính quãng đường vật liệu đã di chuyển (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 37,7.



Gọi A' , B' lần lượt là hình chiếu của điểm A và điểm B trên mặt phẳng (Oxy) .

Lúc đầu vật liệu ở vị trí $A'(6; 8)$ di chuyển thẳng đứng theo phương song song với phương của trục Oz quãng đường $16m$ (phải cao hơn độ cao $15m$ của vị trí điểm đến $1m$)

Tiếp theo cần trục quay cần nâng di chuyển từ vị trí điểm A' đến vị trí điểm A'' (di chuyển một góc có độ lớn 90°), khi đó vật liệu di chuyển một quãng đường

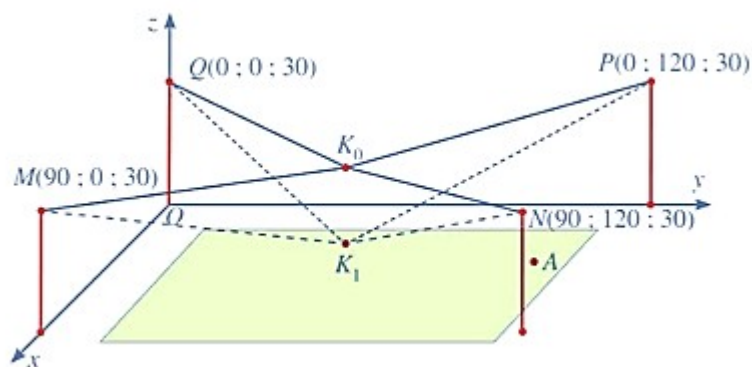
$$l = R\alpha = OA' \cdot \frac{\pi}{2} = 10 \cdot \frac{\pi}{2} = 5\pi$$

Tiếp đến điều chỉnh xe con nhằm di chuyển từ vị trí A'' đến vị trí B' (với B' là trung điểm của OA''), tức là vật liệu di chuyển quãng đường $A''B' = 5m$.

Cuối cùng móc cầu hạ vật liệu xuống $1m$ theo phương thẳng đứng đúng vị trí cần đặt là điểm $B(4; -3; 15)$.

Vậy tổng quãng đường di chuyển của vật liệu là: $16 + 5\pi + 5 + 1 \approx 37,7m$.

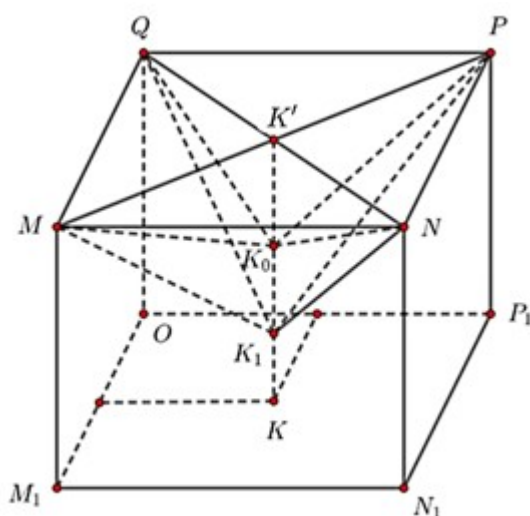
Câu 18. Người ta cần lắp một camera phía trên sân bóng để phát sóng truyền hình một trận bóng đá, camera có thể di động để luôn thu được hình ảnh rõ nét về diễn biến trên sân. Các kỹ sư dự định trồng bốn chiếc cột cao $30m$ và sử dụng hệ thống cáp gắn vào bốn đầu cột để giữ camera ở vị trí mong muốn. Mô hình thiết kế được xây dựng như sau: Trong hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị độ dài trên mỗi trục là $1m$), các đỉnh của bốn chiếc cột lần lượt là các điểm $M(90; 0; 30)$, $N(90; 120; 30)$, $P(0; 120; 30)$, $Q(0; 0; 30)$ (Hình vẽ). Giả sử K_0 là vị trí ban đầu của camera có cao độ bằng 25 và $K_0M = K_0N = K_0P = K_0Q$. Để theo dõi quả bóng đến vị trí A , camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng xuống điểm K_1 có cao độ bằng 19 . (Nguồn: <https://mwww.abiturloesung.de>; Abitur Bayern 2016 Geometrie V).



Tọa độ véctor $\overrightarrow{K_0 K_1} = (a; b; c)$ với a, b, c là các số thực. Tính $P = a + b + 3c$?

Lời giải

Đáp án: -18.



Gọi M_1, N_1, P_1, K lần lượt là hình chiếu của M, N, P, K_0 lên mặt phẳng (Oxy) .

Ta thấy $MNPQ, M_1 N_1 P_1 O$ là hình hộp chữ nhật.

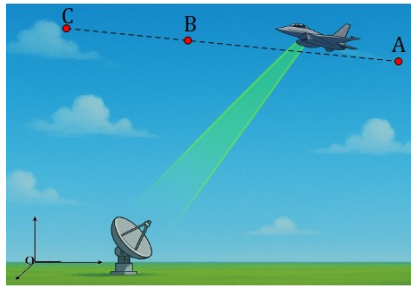
Gọi K' là giao hai đường chéo MP và NQ . Khi đó $KQ = KP = KN = KM$.

Ta có $K_0 M = K_0 N = K_0 P = K_0 Q$ và camera được hạ thấp theo phương thẳng đứng từ điểm K_0 xuống điểm K_1 nên các điểm K', K_0, K_1, K thẳng hàng.

Ta có $K_0(x; y; 25)$ và $K_1(x; y; 19)$.

Suy ra $\overrightarrow{K_0 K_1}(0; 0; -6)$ và $P = a + b + 3c = 0 + 0 + 3 \cdot (-6) = -18$. Vậy

Câu 19. Trong không gian với một hệ trục tọa độ cho trước (đơn vị đo lấy theo kilomet), ra đa phát hiện một chiếc máy bay di chuyển với tốc độ và hướng không đổi từ điểm $A(800;500;7)$ đến điểm $B(940;550;9)$ trong 10 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên tốc độ và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là điểm $C(x;y;z)$. Tính $x+y+z$



Lời giải

Đáp án: 1595 .

Do máy bay giữ nguyên tốc độ nên vận tốc của máy bay trên quãng đường AB và BC là như nhau. Ta có: $\frac{AB}{10} = \frac{BC}{5} \Leftrightarrow AB = 2BC$

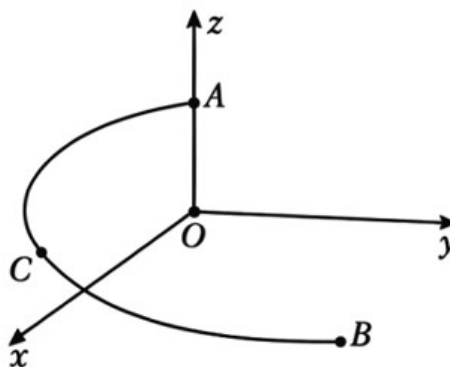
Và máy bay giữ nguyên hướng bay nên hai vectơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC}$ cùng hướng.

$$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} 140 = 2(x - 940) \\ 50 = 2(y - 550) \\ 2 = 2(z - 9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1010 \\ y = 575 \\ z = 10 \end{cases}$$

Do đó

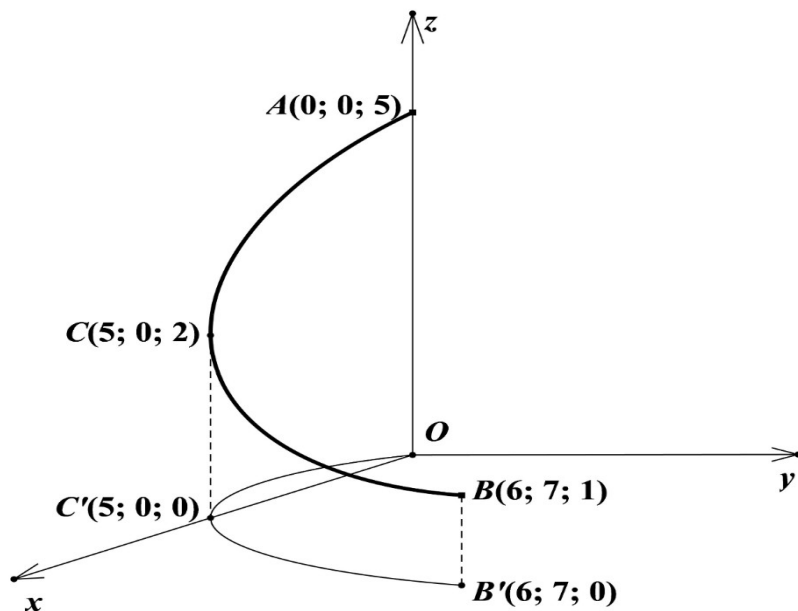
Vậy $x+y+z=1595$

Câu 20. Trượt nước là một trò chơi vận động được nhiều người yêu thích trong các công viên nước. Một cái máng trượt nước có thiết kế dạng cung tròn với hai đầu mút là A và B . Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với gốc O đặt tại hình chiếu của A trên mặt đất, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo mét (tham khảo hình vẽ dưới đây). Biết các điểm A, B và một điểm C nằm trên máng trượt lần lượt có tọa độ là $(0; 0; 5)$, $(6; 7; 1)$ và $(5; 0; 2)$. Độ dài máng trượt nước đó bằng bao nhiêu mét (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của mét)?



Lời giải

Đáp án: 14 .



Ta có: $A(0; 0; 5), B(6; 7; 1), C(5; 0; 2)$ $\vec{AB} = (6; 7; -4), \vec{AC} = (5; 0; -3), \vec{BC} = (-1; -7; 1)$

$$\vec{AC}, \vec{AB} \cdot \vec{u} = (21; 2; 35); AB = \sqrt{101}; AC = \sqrt{34}; BC = \sqrt{51}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |\vec{AC} \times \vec{AB}| = \frac{\sqrt{21^2 + 2^2 + 35^2}}{2} = \frac{\sqrt{1670}}{2}$$

Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng:

$$R = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4S_{\Delta ABC}} = \frac{\sqrt{101} \cdot \sqrt{34} \cdot \sqrt{51}}{4 \cdot \frac{\sqrt{1670}}{2}} = \frac{17\sqrt{253005}}{1670} \approx 5,12$$

$$\cos \mu = \frac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = -\frac{4\sqrt{6}}{51} \text{ . Suy ra } \mu \approx 1,7641 \text{ rad } \mu + \mu \approx \pi - 1,7641 \approx 1,3775$$

$$\text{Suy ra số đo cung ACB bằng } 2(\mu + \mu) \approx 2,755 = a$$

$$\text{Suy ra độ dài cung } \overset{1}{\Delta} \text{CB bằng } R \cdot a \approx 14,1056 \approx 14 \text{ (m)}$$

Câu 21. Trạm kiểm soát không lưu đang theo dõi hai máy bay. Giả sử trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, đơn vị đo lấy theo kilomet, tại cùng một thời điểm theo dõi ban đầu: máy bay thứ nhất ở tọa độ $A(0; 35; 10)$, bay theo hướng vector $\vec{v}_1 = (3; 4; 0)$ với tốc độ không đổi 900 (km/h) và máy bay thứ hai ở tọa độ $B(31; 10; 11)$, bay theo hướng vector $\vec{v}_2 = (5; 12; 0)$ với tốc độ không đổi 910 (km/h) . Biết rằng khoảng cách an toàn tối thiểu giữa hai máy bay là 5 hải lý (khoảng 9,3 km). Nếu hai máy bay tiếp tục duy trì hướng và tốc độ bay như trên thì sau ít nhất bao nhiêu phút (kể từ thời điểm theo dõi ban đầu), hai máy bay vi phạm khoảng cách an toàn (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)?



Lời giải

Đáp án: 8,42 .

Đổi $900 (km / h) = 15 km / phút$

$$910 km / h = \frac{91}{6} km / phút$$

Vector vận tốc máy bay thứ nhất $\vec{u}_1 = m\vec{v}_1$ với $m > 0$, $|\vec{u}_1| = m|\vec{v}_1| = 15 \Rightarrow m = 3 \Rightarrow \vec{u}_1 = (9, 12, 0)$

Vector vận tốc máy bay thứ hai $\vec{u}_2 = n\vec{v}_2$ với $n > 0$, $|\vec{u}_2| = n|\vec{v}_2| = \frac{91}{6} \Rightarrow n = \frac{7}{6} \Rightarrow \vec{u}_2 = \left(\frac{35}{6}, 14, 0\right)$

Sau t phút duy trì hướng bay, máy bay thứ nhất bay đến vị trí M thỏa mãn

$$\vec{AM} = t\vec{u}_1 = (9t; 12t; 0), t > 0 \Rightarrow M(9t; 12t + 35; 10)$$

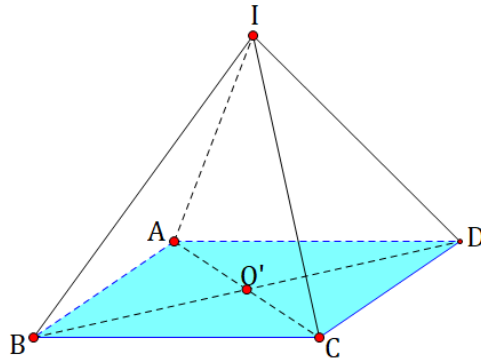
Máy bay thứ hai bay đến vị trí N thỏa mãn

$$\vec{BN} = t\vec{u}_2 = \left(\frac{35}{6}t; 14t; 0\right), t > 0 \Rightarrow N\left(\frac{35}{6}t + 31; 14t + 10; 11\right)$$

Khoảng cách hai máy bay là:

$$\begin{aligned} MN &= \sqrt{\left(\frac{35}{6}t + 31 - 9t\right)^2 + (14t + 10 - 12t - 35)^2 + (11 - 10)^2} \\ &\Leftrightarrow MN = \sqrt{\left(\frac{19}{6}t - 31\right)^2 + (2t - 25)^2 + 1^2} \leq 9,3 \Rightarrow 8,42 \leq t \leq 10,56 \\ &\Rightarrow t \approx 8,42 \end{aligned}$$

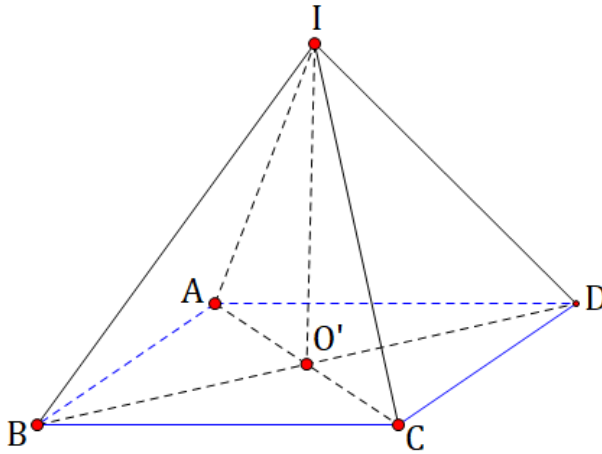
Câu 22. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tấm bảng đồng chất có dạng hình vuông $ABCD$ tâm O' được treo nghiêng bởi 4 sợi dây IA, IB, IC, ID gắn cố định tại điểm $I(0; 0; 9)$ như hình vẽ. Biết điểm $O'(0; 0; 5)$, $A(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 5)$, điểm $D(a; b; c)$ với $a > 0, c > 5$ và góc $\widehat{O'ID}$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ lần lượt là lực căng của dây IB, IC, ID, IA , biết $|\vec{F}_1| = 50N$ và $|\vec{F}_2| = 40N$.



Tính khối lượng $m(\text{kg})$ của tấm bảng (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị) (cho gia tốc trọng trường $g = 9,8 \text{ m/s}^2$) và trọng lượng của tấm bảng được tính bằng công thức $P = mg$).

Lời giải

Đáp án: 15 .



Ta có $O'A = 2, AC = 4, AB = 2\sqrt{2}, O'D = 2, O'I = 4, IA = 2\sqrt{5}$.

Vì O' là trung điểm $AC \Rightarrow C(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 5) \Rightarrow IC = 2\sqrt{5}$.

Vì điểm O' là tâm của hình vuông $ABCD \Rightarrow \overrightarrow{O'D} \perp \overrightarrow{O'A} \Rightarrow \overrightarrow{O'D} \cdot \overrightarrow{O'A} = 0 \Leftrightarrow a = b$.

Góc $\widehat{O'ID}$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow \cos \widehat{O'ID}$ nhỏ nhất

Áp dụng định lý cosin trong tam giác $O'ID$ ta có

$$\cos \widehat{O'ID} = \frac{ID^2 + O'I^2 - O'D^2}{2ID \cdot O'I} = \frac{12 + ID^2}{8ID} = \frac{ID}{8} + \frac{3}{2ID} \geq 2\sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (bđt Cauchy).}$$

$$\Rightarrow \widehat{O'ID} = 30^\circ \text{ và } ID = 2\sqrt{3}$$

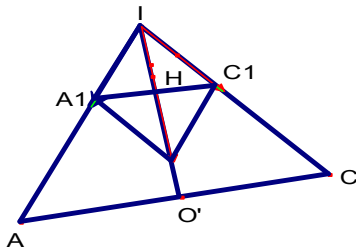
$$\text{Vì } \begin{cases} ID = 2\sqrt{3} \\ O'D = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 + (c-9)^2 = 12 \\ a^2 + b^2 + (c-5)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (c-9)^2 - (c-5)^2 = 8 \\ a^2 + b^2 + (c-5)^2 = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c = 6 \\ a = b = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \text{ (do } a > 0, c > 5 \text{)}.$$

Suy ra:

$$D\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}; 6\right) \Rightarrow B\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; 4\right) \Rightarrow ID = 2\sqrt{3}, IB = 2\sqrt{7}$$

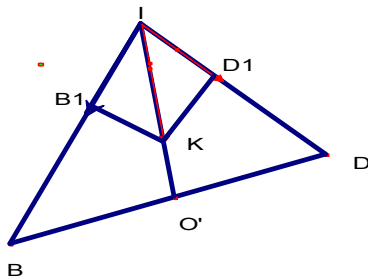
Vì $IA = IC = 2\sqrt{5} \Rightarrow$ tam giác IAC cân tại I nên $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_4| = 40N$.



Dựng $\vec{IA}_1 = \vec{F}_2, \vec{IC}_1 = \vec{F}_4$ và H là trung điểm A_1C_1 .

Tam giác IAO' vuông tại $O' \Rightarrow \cos \angle AIO' = \frac{IO'}{IA} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\Rightarrow |\vec{F}_2 + \vec{F}_4| = |\vec{IA}_1 + \vec{IC}_1| = 2|\vec{IH}| = 2IH = 2|\vec{F}_2| \cdot \cos \angle AIO' = 32\sqrt{5}$$



Dựng $\vec{IB}_1 = \vec{F}_1, \vec{ID}_1 = \vec{F}_3$ và K là điểm thứ 4 của hình bình hành IB_1KD_1 .

$$\Rightarrow |\vec{F}_2 + \vec{F}_4| = |\vec{IB}_1 + \vec{ID}_1| = |\vec{IK}| = IK$$

Áp dụng định lý cosin trong tam giác IBD ta có:

$$\cos \angle B_1IK = \cos \angle BIO' = \frac{IB^2 + O'I^2 - O'B^2}{2IB \cdot O'I} = \frac{5\sqrt{7}}{14} \Rightarrow \angle B_1IK \approx 19^\circ$$

Mặt khác $\angle KB_1I = \angle DIO' = 30^\circ \Rightarrow \angle IB_1K = 131^\circ$

Áp dụng định lý sin trong tam giác IB_1K ta có:

$$\frac{IK}{\sin 131^\circ} = \frac{IB_1}{\sin 30^\circ} \Rightarrow IK = \frac{IB_1 \cdot \sin 131^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{50 \cdot \sin 131^\circ}{\sin 30^\circ} = 75.47$$

Khi vật cân bằng $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -\vec{P} \Leftrightarrow |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4| = mg$

$$\Leftrightarrow |2\vec{IH} + \vec{IK}| = mg \Leftrightarrow 2|\vec{IH}| + |\vec{IK}| = mg \Leftrightarrow 32\sqrt{5} + 75,47 = mg \Rightarrow m = 15kg$$

Câu 23. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$. Một đội gồm ba drone giao hàng A ; B ; C đang có tọa độ là $A(1;1;1)$; $B(5;7;9)$; $C(9;11;4)$. Gọi d_1 ; d_2 ; d_3 lần lượt là khoảng cách giữa mỗi cặp drone giao hàng trên. Tính $d_1 + d_2 + d_3$ (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp số: 31,5

Giả sử: $d_1 = AB$; $d_2 = BC$; $d_3 = AC$ khi đó ta có:

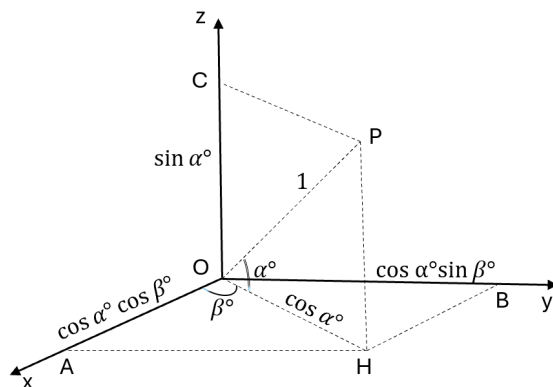
$$d_1 = \sqrt{(5-1)^2 + (7-1)^2 + (9-1)^2} = 2\sqrt{29}$$

$$d_2 = \sqrt{(9-5)^2 + (11-7)^2 + (4-9)^2} = \sqrt{57}$$

$$d_3 = \sqrt{(9-1)^2 + (11-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{173}$$

$$\text{Suy ra: } d_1 + d_2 + d_3 = 2\sqrt{29} + \sqrt{57} + \sqrt{173} \approx 31,5$$

Câu 24. Xét Trái Đất trong không gian $Oxyz$, với O là tâm Trái Đất, tia Ox chứa giao điểm của kinh tuyến gốc và xích đạo, tia Oz chứa điểm cực bắc N , tia Oy giao xích đạo tại điểm thuộc bán cầu Đông, một đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trong thực tế. Biết rằng nếu điểm M có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha^\circ N$; $\beta^\circ E$ ($0 < \alpha < 90$, $0 < \beta < 180$) thì điểm M có tọa độ là $M(\cos \alpha^\circ \cos \beta^\circ; \cos \alpha^\circ \sin \beta^\circ; \sin \alpha^\circ)$.



Tính khoảng cách giữa hai vị trí trên bề mặt Trái Đất là cầu Hiền Lương (cũ) (Quảng Trị) có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $17,0045^\circ N$; $107,0517^\circ E$ và Dinh Độc Lập (TP Hồ Chí Minh) có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $10,777^\circ N$; $106,695^\circ E$ (đơn vị: km, làm tròn kết quả đến hàng chục)

Lời giải

Đáp án: 690.

Vì điểm M có vĩ độ, kinh độ tương ứng là $\alpha^{\circ} N; \beta^{\circ} E$ ($0 < \alpha < 90, 0 < \beta < 180$) thì điểm có tọa độ là $M(\cos \alpha^{\circ} \cos \beta^{\circ}; \cos \alpha^{\circ} \sin \beta^{\circ}; \sin \alpha^{\circ})$ nên ta có tọa độ trong không gian $Oxyz$ của

- cầu Hiền Lương (cũ) (Quảng Trị) (gọi là điểm A) là $A(\cos 17,0045^{\circ} \cos 107,0517^{\circ}; \cos 17,0045^{\circ} \sin 107,0517^{\circ}; \sin 17,0045^{\circ})$,

suy ra $\overline{OA}(\cos 17,0045^{\circ} \cos 107,0517^{\circ}; \cos 17,0045^{\circ} \sin 107,0517^{\circ}; \sin 17,0045^{\circ})$

- Dinh Độc Lập (TP Hồ Chí Minh) (gọi là điểm B) là

$B(\cos 10,777^{\circ} \cos 106,695^{\circ}; \cos 10,777^{\circ} \sin 106,695^{\circ}; \sin 10,777^{\circ})$,

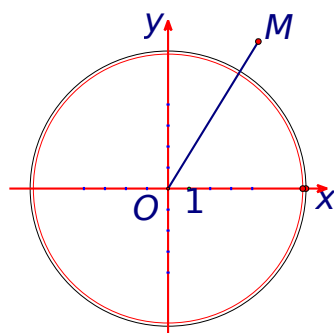
suy ra $\overline{OB}(\cos 10,777^{\circ} \cos 106,695^{\circ}; \cos 10,777^{\circ} \sin 106,695^{\circ}; \sin 10,777^{\circ})$

Vì A, B thuộc mặt đất nên $|\overline{OA}| = |\overline{OB}| = 1$, nên $\cos \angle AOB = \overline{OA} \cdot \overline{OB}$ hay $\angle AOB = \arccos(\overline{OA} \cdot \overline{OB})$.

Mặt khác đường tròn đi qua A, B có bán kính 1 và chu vi 2π nên cung nhỏ $\widehat{AB}$ của đường tròn có độ dài xấp xỉ bằng $\frac{\arccos(\overline{OA}, \overline{OB})}{360} \cdot 2\pi$

Do một đơn vị dài trong không gian $Oxyz$ tương ứng với 6371 km trong thực tế nên khoảng cách giữa hai điểm A, B là $\frac{\arccos(\overline{OA}, \overline{OB})}{360} \cdot 2\pi \cdot 6371 \approx 690$ (km)

Câu 25. Thiên thạch với kích thước chỉ 30 cm đến 40 cm đến từ vùng không gian giữa các hành tinh, khi xuyên vào khí quyển Trái Đất ở độ cao 150 km so với mực nước biển, tạo ra vùng không khí bốc cháy quanh nó rộng vài trăm mét gây nên hiện tượng sao băng. Xem Trái Đất là khối cầu có bán kính 6400 km. Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ trong không gian có gốc O tại tâm Trái Đất và đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 1000 km. Một thiên thạch (coi như một hạt) được phát hiện ở vị trí điểm $M(4, 29; 7; 0)$ và đang chuyển động thẳng với tốc độ không đổi 960 km/phút đến tâm Trái Đất. Xác định thời điểm (đơn vị phút) thiên thạch bị bốc cháy kể từ lúc phát hiện (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 1,73.

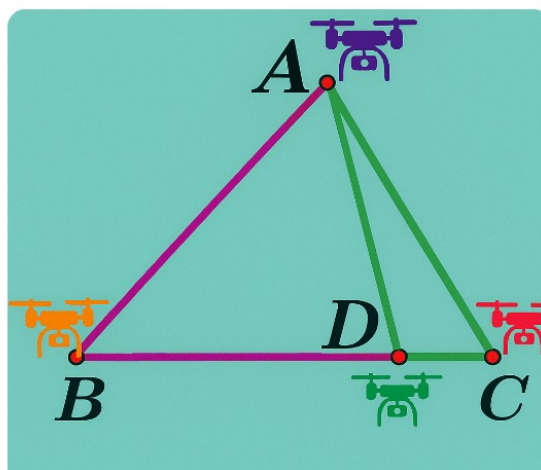
Khoảng cách từ thiên thạch từ lúc phát hiện đến tâm trái đất: $OM = \sqrt{4,29^2 + 7^2} = 8,21$ nghìn km.

Quãng đường thiên thạch đã đi từ lúc bị phát hiện đến khi bốc cháy là

$$d = OM - (R + 150) = 8210 - (6400 + 150) = 1660 \text{ km}$$

Thời gian cần tìm là: $t = \frac{1660}{960} = \frac{83}{48} \approx 1,73$ phút.

Câu 26. Trên phần mềm mô phỏng việc điều khiển drone giao hàng trong không gian $Oxyz$ (đơn vị mét). Một đội gồm 4 drone giao hàng A, B, C, D xếp đội hình bay có dạng tam giác $A; B; C$ và D nằm trên cạnh BC sao cho $DB = 4DC$ (Hình vẽ bên dưới).



$$A(80; 20; 80), B(70; 20; 20) \quad C(420; 120; 120)$$

Tại thời điểm các drone có tọa độ là , . Khoảng cách giữa drone A và drone D bằng bao nhiêu mét (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

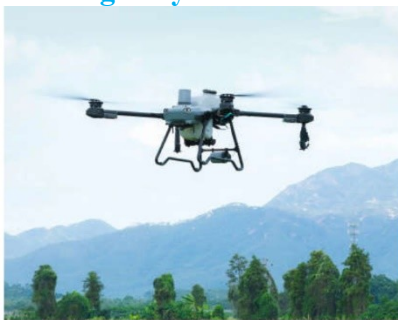
Đáp án: 282.

Ta có : $\overrightarrow{CB} = (-350; -100; -100)$.

$$\text{Gọi } D(x_D; y_D; z_D), \text{ có } \overrightarrow{CD} = \frac{1}{5} \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - 420 = -70 \\ y_D - 120 = -20 \\ z_D - 120 = -20 \end{cases} \Rightarrow D(350; 100; 100)$$

Do đó khoảng cách giữa drone A và drone D bằng $AD = \sqrt{270^2 + 80^2 + 20^2} = 10\sqrt{797} \approx 282,31188$.

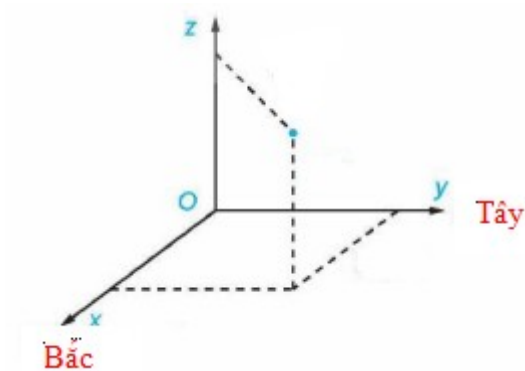
Câu 27. Một chiếc máy bay không người lái bay lên tại một điểm. Sau một thời gian bay, chiếc máy bay cách điểm xuất phát về phía Bắc 55km và về phía Tây 20km , đồng thời cách mặt đất $1,5\text{km}$. Khi đó, khoảng cách của chiếc máy bay với vị trí tại điểm xuất phát bằng bao nhiêu kilômét? (kết quả làm tròn một chữ số thập phân)



Lời giải

Đáp án: 58,5

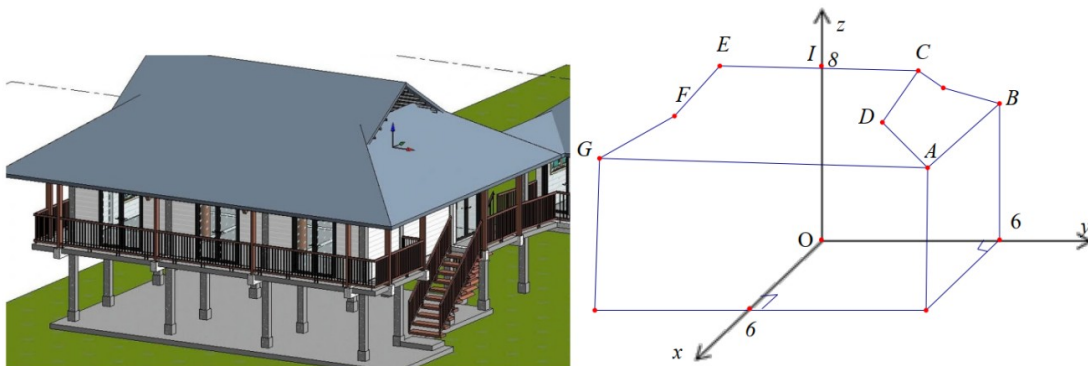
Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$, với gốc đặt tại điểm xuất phát của chiếc máy bay, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất, trục Ox hướng về phía Bắc, trục Oy hướng về phía Tây, trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo kilômét (xem hình vẽ).



Khi đó, chiếc máy bay có tọa độ $A(55; 20; 1,5)$. Khoảng cách giữa chiếc máy bay và vị trí xuất phát là

$$OA = \sqrt{55^2 + 20^2 + 1,5^2} = 58,5$$

Câu 28. Con bão Yagi gây thiệt hại nghiêm trọng về người và tài sản cho nước ta, trong đó nặng nề nhất là tại thôn Làng Nủ, xã Phúc Khánh, huyện Bảo Yên, tỉnh Lào Cai, lũ quét và sạt lở đất đã vùi lấp 40 ngôi nhà. Cả nước đã chung tay ủng hộ và xây dựng lại nhà sàn cho người dân Làng Nủ theo thiết kế như hình vẽ dưới đây.

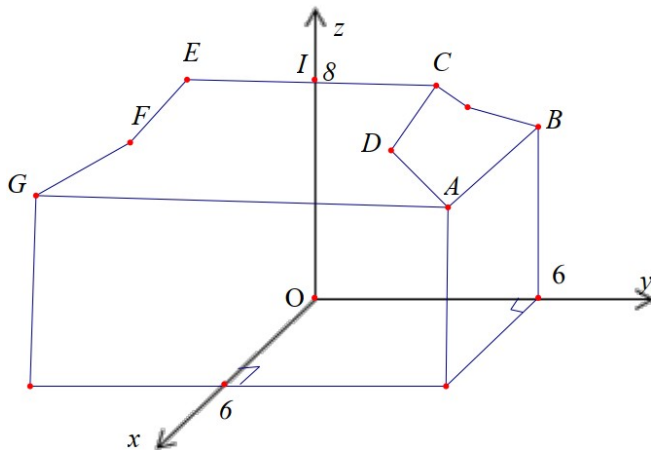


Giả sử áp dụng hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ (đơn vị trên các trục là mét). Xét một bên của mái nhà gồm có một hình chữ nhật $CDFE$ và một hình thang $ADFG$ với các điểm $G(6; -6; 6)$; $C(3; 4; 8)$; $F(4; -4; 7)$ và điểm I là trung điểm CE .

Biết góc giữa hai vector $\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB}$ bằng a° . Tìm a (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 45



Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$, ta có:

Vì A, G đối xứng qua (Oxz) nên tọa độ điểm A là $A(6; 6; 6)$.

Vì $AB \parallel (Oxy)$ và $B \in (Oyz)$ nên tọa độ điểm B là $B(0; 6; 6)$.

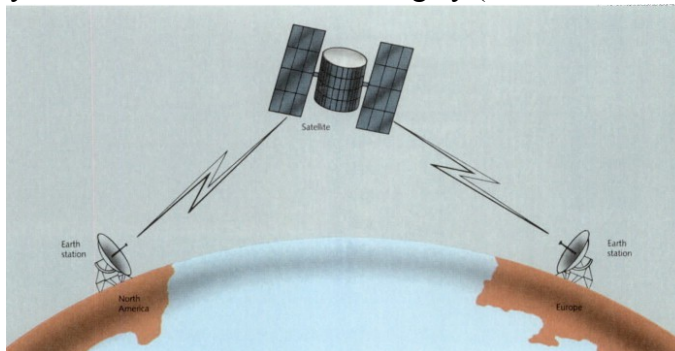
Vì D, F đối xứng qua (Oxz) nên tọa độ điểm D là $D(4; 4; 7)$.

Khi đó: $\overrightarrow{AB} = (-6; 0; 0)$; $\overrightarrow{DC} = (-1; 0; 1)$.

$$\cos(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{DC}| \cdot |\overrightarrow{AB}|} = \frac{(-6)(-1) + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{(-6)^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{6}{6\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos a.$$

$$\Rightarrow a = 45^\circ.$$

Câu 29. Có hai trạm thu phát sóng tín hiệu mặt đất đặt ở hai điểm O, A và vệ tinh thu phát tín hiệu tại vị trí M , biết vệ tinh di chuyển luôn cách mặt đất 35000km. Tín hiệu tại O phát lên vệ tinh M rồi truyền đến trạm thu tại A . Xét hệ trục $Oxyz$ được chọn thỏa $O(0; 0; 0)$, $A(30; 40; 0)$, $M(x; y; 35)$ (đơn vị tọa độ là ngàn km). Biết vận tốc trung bình truyền tín hiệu giữa vệ tinh với trạm thu phát khoảng 270000km/s. Một tín hiệu phát từ O đến M , rồi truyền về A mất ít nhất bao nhiêu giây (làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Trả lời: 0,32

Ta có, độ dài quãng đường truyền tín hiệu

$$T = OM + MA = \sqrt{x^2 + y^2 + 35^2} + \sqrt{(30-x)^2 + (40-y)^2 + 35^2}$$

$$\geq \sqrt{(x+30-x)^2 + (y+40-y)^2 + (35+35)^2} = 10\sqrt{74} \quad (\text{ngàn km})$$

Thời gian ít nhất để A nhận được tín hiệu từ O là: $\frac{10\sqrt{74}}{270} \approx 0,32$ (s).

Câu 30. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm. Sau một thời gian chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 300 m về phía Nam và 100 m về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 100 m. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 200 m về phía Bắc và 100 m về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 50 m. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất quan sát thấy hai chiếc khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát trên mặt đất, vị trí người đứng có tổng khoảng cách đến hai chiếc khinh khí cầu là nhỏ nhất. Tính khoảng cách từ vị trí người quan sát đến địa điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Chọn hệ trục Oxyz với gốc O đặt tại điểm xuất phát của hai khinh khí cầu, mặt phẳng (Oxy) trùng với mặt đất với trục Ox hướng về phía Nam, trục Oy hướng về phía Đông và trục Oz hướng thẳng đứng lên trời, đơn vị đo lấy theo mét.

Gọi A, B, M lần lượt là vị trí của khinh khí cầu thứ nhất, khinh khí cầu thứ hai và người quan sát.

Khi đó $A(300; 100; 100), B(-200; -100; 50), M(a; b; 0)$

Gọi B' là điểm đối xứng của B qua mặt phẳng (Oxy).

Suy ra $B'(-200; -100; -50)$

Ta có $MA + MB = MA + MB' \geq AB'$

Do đó $MA + MB$ nhỏ nhất khi bằng AB' hay M là giao điểm của AB' với mặt phẳng (O_{xy}).

Suy ra A, B', M thẳng hàng hay $\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB'}$ cùng phương

$$\begin{cases} \overrightarrow{AM} = (a - 300; b - 100; -100) \\ \overrightarrow{AB'} = (-500; -200; -150) \end{cases}$$

Có

$$\Rightarrow \frac{a - 300}{-500} = \frac{b - 100}{-200} = \frac{-100}{-150} = \frac{2}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = -\frac{100}{3} \\ b = -\frac{100}{3} \end{cases}$$

Suy ra $M\left(-\frac{100}{3}; -\frac{100}{3}; 0\right)$

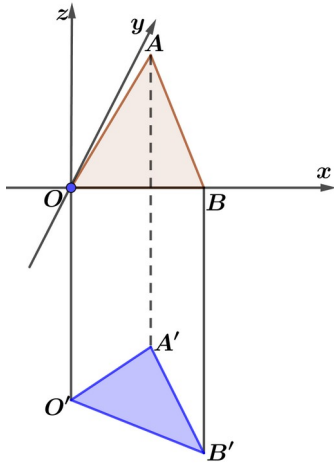
Vậy khoảng cách từ vị trí người quan sát đến địa điểm xuất phát của hai chiếc khinh khí cầu là:

$$OM = \frac{100\sqrt{2}}{3} \approx 47$$

Câu 31. Từ mặt nước trong một bể nước, tại ba vị trí đôi một cách nhau 2 m , người ta lần lượt thả dây dọi để quả dọi chạm đáy bể. Phần dây dọi (thẳng) nằm trong nước tại ba vị trí đó lần lượt có độ dài là 4 m , $4,4\text{ m}$, $4,8\text{ m}$. Biết đáy bể là phẳng. Hỏi đáy bể so với mặt phẳng nằm ngang một góc bao nhiêu độ? (kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

Lời giải

Đáp án: $21,8$.



Chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ, ta có các tọa độ điểm tương ứng như sau:

$$O(0;0;0), B(2;0;0), A(1;\sqrt{3};0), O'(0;0;-4), B'(2;0;-4), A'(1;\sqrt{3};-4)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{O'A'} = (1; \sqrt{3}; -4), \overrightarrow{O'B'} = (2; 0; -4) \Rightarrow \vec{n}_{O'A'B'} = [\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}] = (-0,8\sqrt{3}; 0; -2\sqrt{3})$$

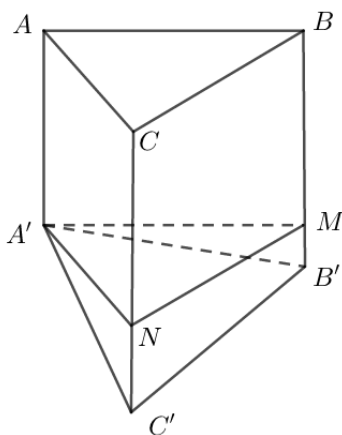
$$\vec{n}_{Oxy} = (0; 0; 1)$$

Suy ra góc cần tìm là $\alpha = ((Oxy), (O'A'B'))$, với:

$$\cos \alpha = \frac{|-0,8\sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 0 + (-2\sqrt{3}) \cdot 1|}{\sqrt{(-0,8\sqrt{3})^2 + 0^2 + (-2\sqrt{3})^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{5\sqrt{29}}{29} \Rightarrow \alpha \approx 21,8^\circ$$

Vậy đáy bể so với mặt phẳng nằm ngang một góc bằng $21,8^\circ$.

Cách khác:



Gọi ba vị trí trên mặt nước là A, B, C . Đáy bể $(A'B'C')$ thỏa mãn $AA' = 4; BB' = 4,4; CC' = 4,8$.

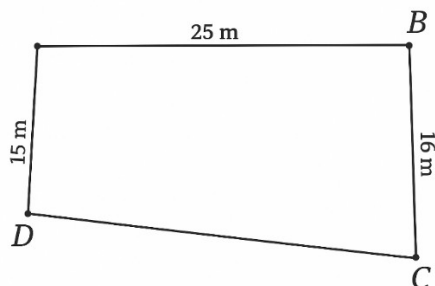
Gọi M, N lần lượt trên $BB'; CC'$ sao cho $AA' = BM = CN$.

Khi đó: $A'B' = \frac{2\sqrt{26}}{5}; B'C' = \sqrt{MN^2 + (NC' - MB')^2} = \frac{2\sqrt{26}}{5}; A'C' = \frac{2\sqrt{29}}{5}$.

Theo công thức Herong có $S_{A'B'C'} = \frac{\sqrt{87}}{5}$.

Theo công thức diện tích hình chiếu ta có $\cos((ABC), (A'B'C')) = \frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}} = \frac{5}{\sqrt{29}} \Rightarrow ((ABC), (A'B'C')) \approx 21,8$ độ.

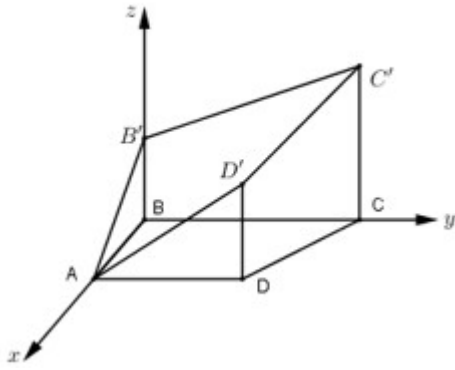
Câu 32. Một phần sân trường được định vị bởi các điểm A, B, C, D như hình vẽ.



Bước đầu chúng ta lấy thẳng bằng để có cùng độ cao, biết $ABCD$ là hình thang vuông ở A và B với độ dài $AB = 25m, AD = 15m, BC = 18m$. Do yêu cầu kỹ thuật khi lát phẳng phần sân trường phải thoát nước về góc sân ở C nên người ta lấy độ cao ở các điểm B, C, D xuống thấp hơn so với độ cao ở A là $10cm, a\text{ cm}, 6cm$ tương ứng sao cho 4 điểm A', B', C', D' đồng phẳng. Tìm a

Lời giải

Đáp số: 17,2



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có:

$$B(0;0;0), A(25;0;0), C(0;18;0), D(25;15;0)$$

Gọi B', C', D' lần lượt là các điểm B, C, D sau khi hạ xuống ta có:

$$B'(0;0;10), C'(0;18;a), D'(25;15;6)$$

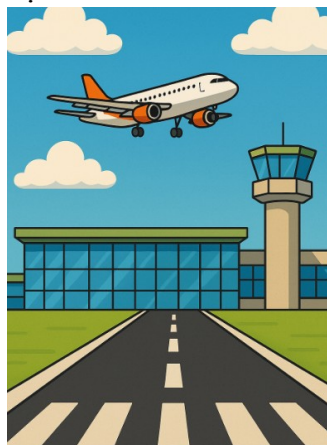
Ta có

$$\overrightarrow{AB'} = (-25;0;10); \overrightarrow{AC'} = (-25;18;a); \overrightarrow{AD'} = (0;15;6)$$

$$[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] = (-150;150;-375) \Rightarrow [\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] \cdot \overrightarrow{AC'} = 3750 + 2700 - 375a = 6450 - 375a$$

Do A, B', C', D' đồng phẳng nên $[\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AD'}] \cdot \overrightarrow{AC'} = 0 \Leftrightarrow 6450 - 375a = 0 \Leftrightarrow a = 17,2$.

Câu 33. Để xác định vị trí của máy bay khi đang bay, người ta gắn một hệ trục tọa độ O_{xyz} với gốc tọa độ đặt tại một sân bay để xác định tọa độ của sân bay. Biết rằng cao độ của tọa độ máy bay chính là độ cao của máy bay đối với mặt đất. Đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là 10^3 m. Một máy bay đang bay với quỹ đạo là một đường thẳng trong không gian với vận tốc bay không đổi. Tại một thời điểm nào đó, máy bay đang ở vị trí có tọa độ $(200;70;118)$. Sau 50 giây, độ cao của máy bay so với mặt đất giảm 400 m. Hỏi sau 25 giây nữa, khoảng cách từ sân bay tới máy bay là bao nhiêu km, biết rằng trong suốt quá trình bay này, máy bay có đi qua điểm có tọa độ $(80;105;113)$?



Lời giải

Đáp án: 16,8

Gọi tọa độ ban đầu của máy bay tại thời điểm $t=0$ là $A(200;70;118)$.

Sau 50 giây, độ cao giảm 400 m nên tọa độ z giảm 4 đơn vị, tức là $z = 114$.

$$B(x; y; 114)$$

Gọi tọa độ sau 50 giây là

Vận tốc bay (giả sử bay thẳng đều):

$$\vec{v} = \frac{\overrightarrow{AB}}{50} = \left(\frac{x-200}{50}; \frac{y-70}{50}; \frac{114-118}{50} \right) = \left(\frac{x-200}{50}; \frac{y-70}{50}; -\frac{4}{50} \right)$$

Sau 25 giây nữa (tổng 75 giây), ta có:

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + 75 \cdot \vec{v} = \left(200 + \frac{3(x-200)}{2}; 70 + \frac{3(y-70)}{2}; 112 \right)$$

$$P(80; 105; 113)$$

Xét điểm . Kiểm tra xem điểm P có nằm trên đường thẳng bay hay không:

Giả sử tồn tại t sao cho: $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + t\vec{v}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 80 = 200 + t \cdot \frac{x-200}{50} \\ 105 = 70 + t \cdot \frac{y-70}{50} \\ 113 = 118 - \frac{4t}{50} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 104 \\ y = 98 \\ t = 62,5 \end{cases} \Rightarrow \text{Tọa độ } B(104; 98; 114)$$

$$\vec{v} = (-1,92; 0,56; -0,08), C(56; 112; 112)$$

Suy ra:

Tính khoảng cách từ sân bay (gốc tọa độ) đến điểm C :

$$d = OC = \sqrt{56^2 + 112^2 + 112^2} = \sqrt{28224} = 168 \text{ đơn vị trục } 100 \text{ mét/ đơn vị.}$$

$$168 \cdot 100 \cdot \frac{1}{1000} = 16,8$$

Vậy khoảng cách từ sân bay đến máy bay sau 75 giây là km.

Câu 34. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo lấy kilômét, ra đã phát hiện một máy bay di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo bằng $(a; b; c)$ với $a \in \square$. Tính a .



Lời giải

Đáp án: 875.



Gọi $K(a; b; c)$ là tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo. Vì vận tốc và hướng bay không thay đổi, bay từ M đến N trong 20 phút, N đến K trong 5 phút nên ta có:

$$\overrightarrow{MN} = \frac{4}{5} \overrightarrow{MK} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = 4 \overrightarrow{NK} \Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 4(a - 800) \\ 100 = 4(b - 300) \\ 2 = 4(c - 10) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 875 \\ b = 325 \\ c = \frac{21}{2} \end{cases} \Rightarrow a = 875.$$

Câu 35. Trong không gian $Oxyz$, đài kiểm soát không lưu sân bay đặt ở gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$, đơn vị trên mỗi trục tính theo ki-lô-mét. Một máy bay chuyển động theo đường thẳng, bay qua hai vị trí $M(-400; -200; 350)$ và $N(-100; -100; 550)$. Khi máy bay ở gần đài kiểm soát không lưu nhất thì khoảng cách giữa vị trí của máy bay và đài kiểm soát không lưu là bao nhiêu km? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Đáp án: 536

Ta có: $OM = ON = 50\sqrt{129}$, do đó, tam giác OMN cân tại O .

Vì máy bay bay trên đoạn thẳng MN nên vị trí máy bay ở gần đài kiểm soát không lưu nhất là ở trung điểm của MN .

Gọi E là trung điểm của $MN \Rightarrow E(-250; -150; 450)$.

Khoảng cách giữa vị trí của máy bay và đài kiểm soát không lưu khi đó là

$$OE = \sqrt{(-250)^2 + (-150)^2 + 450^2} = 50\sqrt{115} \approx 536 \text{ (km)}$$

Câu 36. Trong một cuộc diễn tập phòng không, một bộ phóng tên lửa phòng không được đặt tại vị trí $O(0; 0; 0)$ (trong không gian $Oxyz$ với đơn vị trên các hệ trục tính theo ki-lô-mét) có tầm bắn tối đa là 30 km và tên lửa được phóng ra với vận tốc không đổi là 500 m/s. Một máy bay không người lái bay theo một đường thẳng có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3; -4; 0)$ với vận tốc không đổi là 900 km/h. Khi phát hiện máy bay không người lái tại vị trí $A(6; -20; 16)$ thì tên lửa rời bộ phóng, khai hỏa và đã bắn hạ được mục tiêu. Hỏi khoảng cách từ bộ phóng tên lửa đến vị trí máy bay không người lái bị bắn hạ bằng bao nhiêu ki-lô-mét? (Giả sử cả máy bay không người lái và tên lửa đều bay theo đường thẳng và không chịu tác động của trọng lực hay lực cản không khí).

Lời giải

Đáp án: 20.

Đổi 500m/s = 1800 km/h.

Cách 1:

$$\begin{cases} x = 6 + 3t \\ y = -20 - 4t \\ z = 16 \end{cases}$$

Phương trình chuyển động của máy bay là

Giả sử máy bay bị bắn hạ tại điểm $M(6 + 3t; -20 - 4t; 16)$ sau a giây di chuyển từ A

$$\text{Quãng đường } AM = \sqrt{(3t)^2 + (-4t)^2} = \sqrt{25t^2} = 5t = 900a$$

$$\text{Quãng đường tên lửa đi } OM = \sqrt{(6 + 3t)^2 + (-20 - 4t)^2 + 16^2} = \sqrt{25t^2 + 196t + 692} = 1800a$$

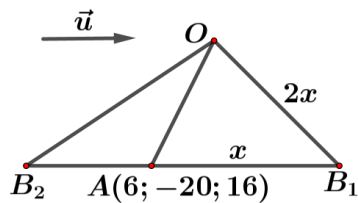
$$OM = 2AM \Leftrightarrow \sqrt{25t^2 + 196t + 692} = 2\sqrt{25t^2} \Leftrightarrow 75t^2 - 196t - 692 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{346}{75} \\ t = -2 \end{cases}$$

Do đó

$$\text{Với } t = \frac{346}{75} \Rightarrow OM = \frac{692}{15} \approx 46,1333 \quad (\text{loại})$$

$$\text{Với } t = -2 \Rightarrow OM = 20 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Cách 2:



$$\text{Có } \overrightarrow{AO} = (-6; 20; -16) \Rightarrow OA = 2\sqrt{173}$$

Giả sử máy bay bị bắn hạ ở vị trí B . Vì thời gian đi của tên lửa bằng thời gian đi của máy bay

$$\text{nên } t = \frac{OB}{1800} = \frac{AB}{900} \Leftrightarrow OB = 2AB = 2x \quad \text{Vì tên lửa có tầm bắn tối đa 30km nên } OB \leq 30 \Leftrightarrow 2x \leq 30 \quad \text{Do đó } 0 \leq x \leq 15 \text{ (km).}$$

$$\text{Có } \cos(\vec{u}; \overrightarrow{AO}) = \frac{-18 - 80}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 0^2} \cdot \sqrt{6^2 + (-20)^2 + 16^2}} = \frac{-98}{5 \cdot 2\sqrt{173}} = \frac{-49}{5\sqrt{173}}$$

$$\text{Ta có } \cos \angle OAB = \frac{OA^2 + AB^2 - OB^2}{2OA \cdot AB} = \frac{692 + x^2 - 4x^2}{2 \cdot 2\sqrt{173} \cdot x} = \frac{692 - 3x^2}{4\sqrt{173} \cdot x}$$

Trường hợp 1: Máy bay bay cùng hướng $\vec{u} = (3; -4; 0)$ và bị bắn hạ ở vị trí B_1 .

$$\text{Ta có } \cos \angle OAB = \frac{692 - 3x^2}{4\sqrt{173} \cdot x} = \frac{-49}{5\sqrt{173}} \Leftrightarrow 5(692 - 3x^2) = -4 \cdot (49)x \Leftrightarrow x = \frac{346}{15} \approx 23,0666 \quad (\text{loại})$$

Trường hợp 2: Máy bay bay ngược hướng $\vec{u} = (3; -4; 0)$ và bị bắn hạ ở vị trí B_2 .

$$\cos \widehat{OAB} = \frac{692 - 3x^2}{4\sqrt{173} \cdot x} = \frac{49}{5\sqrt{173}} \Leftrightarrow 5(692 - 3x^2) = 4 \cdot (49)x \Leftrightarrow x = 10$$

Ta có (thỏa mãn)

Vậy khoảng cách từ bộ phóng tên lửa đến vị trí máy bay không người lái bị bắn hạ bằng 20km.

Câu 37. Trong không gian chọn hệ trục tọa độ cho trước, đơn vị đo là kilômét, ra đã phát hiện một máy bay chiến đấu di chuyển với vận tốc và hướng không đổi từ điểm $M(500; 200; 8)$ đến điểm $N(800; 300; 10)$ trong 20 phút. Nếu máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay thì tọa độ của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $(a; b; c)$. Tính $a + b + 2c$?

Lời giải

Đáp án: 1221.

Vị trí của máy bay sau 5 phút tiếp theo là $P(a; b; c)$.

$$\overrightarrow{MN} = (300; 100; 2), \quad \overrightarrow{NP} = (a - 800; b - 300; c - 10)$$

Do máy bay tiếp tục giữ nguyên vận tốc và hướng bay và thời gian bay từ M đến N gấp bốn lần thời gian bay từ N đến P nên $\overrightarrow{MN} = 4\overrightarrow{NP}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 300 = 4(a - 800) \\ 100 = 4(b - 300) \\ 2 = 4(c - 10) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 875 \\ b = 325 \\ c = 10,5 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó } a + b + 2c = 875 + 325 + 2 \cdot 10,5 = 1221.$$

Câu 38. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ (đơn vị trên mỗi trục là mét), một thiết bị phát sóng wifi được đặt tại vị trí $I(3; 4; 2)$. Vùng phủ sóng của thiết bị là một hình cầu có bán kính $R = 10$ m. Một người sử dụng điện thoại đứng ở vị trí $K(x - 7; 7; 1)$. Sau đó, người đó di chuyển đến vị trí $H(x + 11; 7; 1)$. Tìm giá trị nguyên của x sao cho cả hai vị trí K và H đều có thể bắt được tín hiệu wifi từ thiết bị.

Lời giải

Đáp án: 1.

Tại vị trí K và H có thể bắt được sóng khi và chỉ hệ sau được thỏa mãn

$$\begin{aligned} \begin{cases} IK \leq 10 \\ IH \leq 10 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 10)^2 + (7 - 4)^2 + (1 - 2)^2 \leq 100 \\ (x + 8)^2 + (7 - 4)^2 + (1 - 2)^2 \leq 100 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} (x - 10)^2 \leq 90 \\ (x + 8)^2 \leq 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10 - \sqrt{90} \leq x \leq 10 + \sqrt{90} \\ -8 - \sqrt{90} \leq x \leq -8 + \sqrt{90} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow 10 - \sqrt{90} \leq x \leq -8 + \sqrt{90} \quad (*) \end{aligned}$$

Giá trị x nguyên thỏa mãn (*) chỉ có $x = 1$.

Vậy giá trị nguyên của x cần tìm là $x = 1$.

Câu 39. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, một cabin cáp treo xuất phát từ điểm $A(10; 3; 0)$ và chuyển động đều theo đường cáp có vector chỉ phương là $\vec{u}(2; -2; 1)$ với tốc độ $4,5$ m/s (đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét). Một camera giám sát an toàn đặt tại $I(50; -10; 50)$. Hỏi sau bao nhiêu giây kể từ khi cabin xuất phát thì cabin gần camera giám sát an toàn nhất? (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 12.

Ta biểu diễn tọa độ của cabin tại thời điểm t (s) như sau: $M(10 + 3t; 3 - 3t; 1,5t)$.

Do camera đặt tại điểm $I(50; -10; 50)$ nên khoảng cách từ cabin đến camera là

$$MI = \sqrt{(10 + 3t - 50)^2 + (3 - 3t + 10)^2 + (1,5t - 50)^2} = \sqrt{(3t - 40)^2 + (13 - 3t)^2 + (1,5t - 50)^2}$$

Xét hàm $f(t) = MI^2 = (3t - 40)^2 + (13 - 3t)^2 + (1,5t - 50)^2$

Ta có: $f(t) = 20,25t^2 - 468t + 4269$

$$\Rightarrow f'(t) = 40,5t - 468 = 0 \Rightarrow t = \frac{104}{9} \approx 12$$

Lập bảng biến thiên, ta suy ra $\min_{[0; +\infty)} f(t) = f\left(\frac{104}{9}\right)$.

Câu 40. Nhân dịp lễ 30/4/2025, tại Quảng trường trung tâm TP. Hồ Chí Minh diễn ra màn trình diễn máy bay trực thăng kéo cờ Tổ quốc và cờ Đảng. Hai máy bay cất cánh cùng lúc từ một địa điểm. Sau một thời gian chiếc thứ nhất cách điểm xuất phát 3 km về phía Nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 1 km. Chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 2 km về phía Bắc và 1 km về phía Tây, đồng thời cách mặt đất 500m. Cùng thời điểm đó, một chiến sĩ công an đứng trên mặt đất quan sát thấy hai chiếc máy bay nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát trên mặt đất, vị trí chiến sĩ công an đứng có tổng khoảng cách đến hai chiếc máy bay là nhỏ nhất. Khoảng cách từ vị trí chiến sĩ công an quan sát đến địa điểm xuất phát của hai chiếc máy bay là bao nhiêu km (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: 0,47

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với điểm xuất phát của hai máy bay là gốc $O(0,0,0)$, trục Ox : hướng đông, trục Oy : hướng Bắc, trục Oz hướng lên trên và mặt đất là mặt phẳng (Oxy) . Đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là 1 km.

Sau một thời gian máy bay thứ nhất cách điểm xuất phát 3 km về phía Nam và 1 km về phía Đông, đồng thời cách mặt đất 1 km nên máy bay thứ nhất có tọa độ là $A(1;-3;1)$.

Tương tự máy bay thứ hai có tọa độ là $B(-1;2;0,5)$.

Gọi C là điểm đối xứng với A qua (Oxy) . Ta có $C(1;-3;-1)$

Chiến sĩ công an đứng trên mặt đất, nên có tọa độ $P(x,y,0)$.

Có $PA + PB = PC + PB \geq BC$. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi P, B, C thẳng hàng

$$\begin{aligned} \overrightarrow{BP} &= (x+1; y-2; -0,5) \Rightarrow \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-5} = \frac{-0,5}{-1,5} \Rightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \\ \overrightarrow{BC} &= (2; -5; -1,5) \text{ và} \\ \Rightarrow P\left(\frac{-1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right) &\Rightarrow OP = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + 0} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0,4714045 \end{aligned}$$

Câu 41. Hai chiếc khinh khí cầu bay lên từ cùng một địa điểm trong không gian. Sau một khoảng thời gian, chiếc thứ nhất nằm cách điểm xuất phát 3km về phía Đông và 2 km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km, chiếc thứ hai nằm cách điểm xuất phát 1km về phía Bắc và 1 km về phía Tây đồng thời cách mặt đất 0,3km. Cùng thời điểm đó, một người đứng trên mặt đất và nhìn thấy hai khinh khí cầu nói trên. Biết rằng, so với các vị trí quan sát khác trên mặt đất, vị trí người đó đứng có khoảng cách đến hai khinh khí cầu nhỏ nhất. Hỏi tổng khoảng cách nhỏ nhất ấy bằng bao nhiêu kilômét? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Đáp án: 5,1

Xét hệ trục tọa độ $Oxyz$ với điểm xuất phát của hai khinh khí cầu là gốc $O(0,0,0)$, trục Ox : hướng đông, trục Oy : hướng Bắc, trục Oz hướng lên trên và mặt đất là mặt phẳng (Oxy) . Đơn vị trên mỗi hệ trục tọa độ là 1 km.

Sau một thời gian khinh khí cầu thứ nhất cách điểm xuất phát 3 km về phía Đông và 2km về phía Nam, đồng thời cách mặt đất 0,5 km nên khinh khí cầu thứ nhất có tọa độ là $A(3;-2;0,5)$

Tương tự khinh khí cầu thứ hai có tọa độ là $B(-1;1;0,3)$.

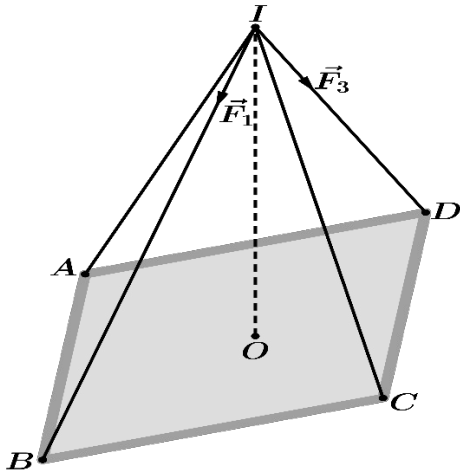
Gọi C là điểm đối xứng với A qua (Oxy) . Ta có $C(3;-2;-0,5)$

Người đứng trên mặt đất, nên có tọa độ $P(x,y,0)$.

Có $PA + PB = PC + PB \geq BC = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-0,8)^2} = \frac{\sqrt{641}}{5} \approx 5,06359556$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi P, B, C thẳng hàng.

Câu 42. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, một tấm bảng đồng chất có dạng hình vuông $ABCD$ tâm O được treo nghiêng bởi 4 sợi dây IA, IB, IC, ID gắn cố định tại điểm $I(0;0;9)$ như hình vẽ. Điểm $O(0;0;5)$; $A(-\sqrt{2};\sqrt{2};5)$ và góc $\widehat{OID}$ đạt giá trị lớn nhất. Gọi $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ lần lượt là lực căng của các sợi dây IB, IC, ID, IA . Biết rằng $|\vec{F}_1| = 50$ N và $|\vec{F}_2| = 40$ N



Tính khối lượng m (kg) của tấm bảng (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) (Cho gia tốc trọng trường $g = 9,8$ (m/s²) và trọng lượng của tấm bảng được tính bằng công thức $P = m.g$)

Lời giải

Đáp án: 15.

Do O là trung điểm của AC nên $C(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 5)$ và gọi $D(a; b; c)$

Khi đó $\vec{OD} = (a; b; c - 5)$; $\vec{AC} = (2\sqrt{2}; -2\sqrt{2}; 0)$ mà hai vectơ này vuông góc với nhau

Từ đó $2\sqrt{2}a = 2\sqrt{2}b \Leftrightarrow a = b \Rightarrow \vec{DC} = (a - \sqrt{2}; a + \sqrt{2}; c - 5)$; $\vec{DA} = (a + \sqrt{2}; a - \sqrt{2}; c - 5)$

$$\vec{ID} = (a; a; \sqrt{4 - 2a^2} - 4); \vec{IO} = (0; 0; -4) \Rightarrow \cos \widehat{OID} = \frac{16 - 4\sqrt{4 - 2a^2}}{16\sqrt{a^2 + a^2 + (4 - 4\sqrt{4 - 2a^2})^2}}$$

Ta có:

$$f(a) = \frac{16 - 4\sqrt{4 - 2a^2}}{16\sqrt{a^2 + a^2 + (4 - 4\sqrt{4 - 2a^2})^2}} \quad \text{tìm được } a = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Khảo sát hàm số

Vậy tọa độ các điểm: $A(-\sqrt{2}; \sqrt{2}; 5)$; $B\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; 1\right)$; $C(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 5)$; $D\left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}; 6\right)$

Ta có: $\vec{IA} = (-\sqrt{2}; \sqrt{2}; -4) \Rightarrow |\vec{IA}| = 2\sqrt{5}$; $\vec{IC} = (\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -4) \Rightarrow |\vec{IC}| = 2\sqrt{5}$

Vậy $|\vec{F}_4| = |\vec{F}_2| = k.2\sqrt{5} = 40 \Rightarrow k = 4\sqrt{5}$

Suy ra $\vec{F}_2 = (-4\sqrt{10}; 4\sqrt{10}; -16\sqrt{5})$; $\vec{F}_4 = (4\sqrt{10}; -4\sqrt{10}; -16\sqrt{5})$

$$\overrightarrow{IB} = \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}; -\frac{\sqrt{6}}{2}; -5 \right) \Rightarrow |\overrightarrow{IB}| = 2\sqrt{7} \quad \overrightarrow{ID} = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}; \frac{\sqrt{6}}{2}; -3 \right) \Rightarrow |\overrightarrow{ID}| = 2\sqrt{3}$$

Tương tự

$$\frac{|\overrightarrow{F_1}|}{|\overrightarrow{F_3}|} = \frac{2\sqrt{7}}{2\sqrt{3}} \Rightarrow |\overrightarrow{F_3}| = \frac{50\sqrt{21}}{7}$$

Sử dụng tỉ lệ giữa độ dài dây và độ lớn lực:

$$\overrightarrow{F_3} = \left(\frac{25\sqrt{42}}{14}; -\frac{25\sqrt{42}}{14}; -\frac{75\sqrt{7}}{7} \right); \quad \overrightarrow{F_1} = \left(-\frac{25\sqrt{42}}{14}; -\frac{25\sqrt{42}}{14}; -\frac{125\sqrt{7}}{7} \right)$$

Suy ra

$$\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2} + \overrightarrow{F_3} + \overrightarrow{F_4} = \overrightarrow{P} = \left(0; 0; -32\sqrt{5} - \frac{200\sqrt{7}}{7} \right) \Rightarrow |P| = \frac{200\sqrt{7}}{7} + 32\sqrt{5}$$

Để hệ cân bằng thì

$$m = \frac{P}{g} = \frac{\frac{200\sqrt{7}}{7} + 32\sqrt{5}}{9,8} = 15,015 \approx 15$$

Vậy khối lượng của thanh kim loại là:

(kg)

Câu 43. Trong hệ trục tọa độ O_{xyz} cho trước (đơn vị trên trục là mét), cho một trạm thu phát sóng 5G có bán kính vùng phủ sóng của trạm ở ngưỡng 600m được đặt ở vị trí $I(200; 450; 60)$. Tìm giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $M(m+100; m+370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên.

Lời giải

Đáp án: 512.

Để người dùng điện thoại ở vị trí $M(m+100; m+370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên thì $IM \leq 600$.

$$\hat{U} \sqrt{(m-100)^2 + (m-80)^2 + (-60)^2} \leq 600.$$

$$\hat{U} (m-100)^2 + (m-80)^2 + (-60)^2 \leq 360000.$$

$$\hat{U} 2m^2 - 360m + 20000 \leq 360000.$$

$$\hat{U} 2m^2 - 360m - 340000 \leq 0.$$

$$\hat{U} m^2 - 180m - 170000 \leq 0.$$

$$\hat{U} 90 - \sqrt{178100} \leq m \leq 90 + \sqrt{178100}.$$

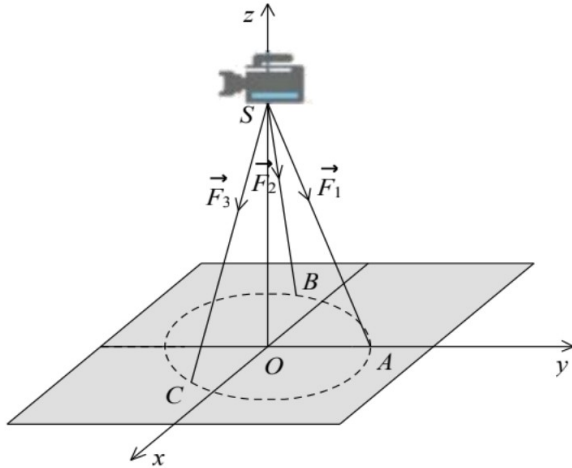
Vậy giá trị lớn nhất của m (làm tròn đến hàng đơn vị) để một người dùng điện thoại ở vị trí $M(m+100; m+370; 0)$ có thể sử dụng dịch vụ của trạm nói trên là 512m.

Câu 44. Trong không gian O_{xyz} , một chiếc máy quay phim được đặt trên một giá đỡ ba chân với điểm đặt $S(0; 0; 5)$ và các điểm tiếp xúc với mặt đất của ba chân lần lượt là

$$A(0; 1; 0), B\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right), C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; 0\right)$$

(hình vẽ bên). Biết lực tác dụng của máy quay phim lên các

giá đỡ SA, SB, SC lần lượt là $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ và trọng lượng của chiếc máy là 60 N , giá trị của $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| + |\vec{F}_3|$ bằng bao nhiêu Newton (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: 61,2.

$$\vec{SA} = (0; 1; -5), \quad \vec{SB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -5\right), \quad \vec{SC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}; -5\right)$$

$$\vec{AB} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right), \quad \vec{BC} = (\sqrt{3}; 0; 0), \quad \vec{AC} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{3}{2}; 0\right) \Rightarrow AB = BC = AC = 3$$

Ta có $SA = SB = SC = \sqrt{26}$ nên hình chiếu của S trên (ABC) là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ mà lại có $\triangle ABC$ đều nên $SO \perp (ABC)$

Giả sử $\vec{F}_1 = k\vec{SA}, \vec{F}_2 = k\vec{SB}, \vec{F}_3 = k\vec{SC} \quad (k > 0)$

$$\Rightarrow \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = k(\vec{SA} + \vec{SB} + \vec{SC}) = (0; 0; -15k)$$

Theo bài ta lại có $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = 60 \Rightarrow 15k = 60 \Rightarrow k = 4$

Vậy $|\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| + |\vec{F}_3| = 4(SA + SB + SC) = 12\sqrt{26} \approx 61,2$