

PHẦN ĐẠI SỐ

$$A = \left(-\frac{1}{2}x^2y^3z^2 \right)^2 \cdot \frac{4}{3}xy^3z$$

Bài 1. Cho đơn thức

a) Thu gọn đơn thức A

b) Chỉ ra phần hệ số và bậc của đơn thức

c) Tính giá trị đơn thức sau khi thu gọn tại $x = 2; y = \frac{-1}{2}; z = -1$ **Bài 2.** Cho các đa thức sau:

$$A = -x^2y + 3 - (-5xy^2) + 8x$$

$$B = xy + 8 + 4x^2y + xy^2$$

a) Tính $A + B; A - B$ b) Tính $A + 2B$ **Bài 3.** Rút gọn các biểu thức sau, rồi tính giá trị biểu thức:a) $A = x^2 - 8xy + 16y^2$ tại $x = 4; y = -3$.b) $B = 9x^2 + 4y^2 + 12xy - 2023$ tại $3x + 2y = 50$.c) $C = (x - 3y)^2 - (x - 2y)(2y + x)$ tại $x = 2; y = -1$.d) $D = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$ tại $x = -2y$.**Bài 4.** Rút gọn các biểu thức sau rồi tính giá trị biểu thức:a) $A = (2 - x)(x + 2) - (x + 3)^2$ tại $x = 5$ b) $B = (2x + 5)^2 - 4(x - 3)(3 + x)$ tại $x = \frac{1}{10}$ c) $C = x^3 - 3x^2 + 3x + 2023$ tại $x = 101$ d) $D = x^3 - 6x^2 + 12x - 100$ tại $x = -98$ e) $E = (x + 1)^3 + 6(x + 1)^2 + 12x + 20$ tại $x = 5$ f) $F = (2x - 1)(4x^2 + 2x + 1) - 7(x^3 + 1)$ tại $x = \frac{-1}{2}$ g) $G = (-x - 2)^3 + (2x - 4)(x^2 + 2x + 4) - x^2(x - 6)$ tại $x = -2$ h) $H = (x - 1)^3 - (x + 2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x + 4)(x - 4)$ tại $x = \frac{1}{-2}$ **Bài 5.** Chứng minh giá trị của các đa thức sau không phụ thuộc vào giá trị biến:a) $A = (x + 3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) + 3y(x + 3y)(x - 3y) - x(3xy + x^2 - 5) - 5x + 1$ b) $B = (2x - y)(4x^2 + 2xy + y^2) - 2x(2x - y)(2x + y) + y(y^2 - 2xy) + 2023$ **Bài 6.** Phân tích đa thức thành nhân tửa) $2xy + 5x^2y - x^3y$ i) $3x + 3y - x^2 - 2xy - y^2$ b) $(x + y)^2 - 9x^2$ j) $x^4y^4 + 64$ c) $2(x - y) + xy - x^2$ k) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x - y$ d) $3x^2 + 2x - 1$ l) $x^8 + x + 1$

e) $-x^2 + 4x - 3$

f) $x^2 - 7x + 12$

g) $5x(x^2 - y^2) + 2y(x + y)$

h) $x^2 - \frac{3}{2}x - 1$

m) $x^3 + y^3 - 2(x^2 - y^2)$

n) $(x^2 + y)^2 - 2x^2 - 2y + 1$

o) $x^2 + 5x + 6$

p) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 6$

Bài 7. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $x^3y + x - y - 1$

b) $x^2(x - 2) + 4(2 - x)$

c) $x^3 - x^2 - 20x$

d) $(x^2 + 1)^2 - (x + 1)^2$

e) $6x^2 - 7x + 2$

f) $x^4 + 8x^2 + 12$

g) $(x^3 + x + 1)(x^3 + x) - 2$

h) $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1$

i) $-(x^2 + 2)^2 + 4x(x^2 + 2) - 3x^2$

j) $81x^4 + 4y^4$

Bài 8. Tìm x , biết:

a) $(x + 2)^2 - x(x + 3) = 2$

b) $(x + 2)(x - 2) - (x + 1)^2 = 7$

c) $6x^2 - (2x + 1)(3x - 2) = 1$

d) $(x + 2)(x + 3) - (x - 2)(x + 1) = 2$

e) $6(x - 1)(x + 1) - (2x - 1)(3x + 2) + 3 = 0$

f) $x(3x + 1) + (x - 1)^2 - (2x + 1)(2x - 1) = 0$

k) $(x + 2)^3 - (x + 1)(x^2 - x + 1) - 6(x - 1)^2 = 23$

m) $(x + 3)(x^2 - 3x + 9) - x(x - 2)(x + 2) + 11 = 0$

n) $x(x - 3) - x + 3 = 0$

o) $(x - 1)(x + 2) - 2x - 4 = 0$

p) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$

g) $(x + 1)^3 + (2 - x)^3 - 9(x - 3)(x + 3) = 0$

i) $(x - 1)^3 - (x + 3)(x^2 - 3x + 9) + 3x^2 = 25$

q) $9(x - 1) - x^3 + x^2 = 0$

r) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$

t) $(9 - 2x^2)(2x + 1) = 0$

Bài 9. Tìm x , biết:

a) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

b) $25x^2 - 16(x + 2) = 0$

c) $(2x + 1)^2 = (x - 1)^2$

d) $9x^2 - 6x = -1$

e) $4x^2 - 9 = 0$

f) $x^3 - 9x^2 + 27x - 35 = 0$

g) $x^2 - 6x - 7 = 0$

h) $x^2 + 4x + 3 = 0$

i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

k) $x(x - 5) = 6$

m) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

n) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$

o) $(x - 1)x(x + 1)(x + 2) - 24 = 0$

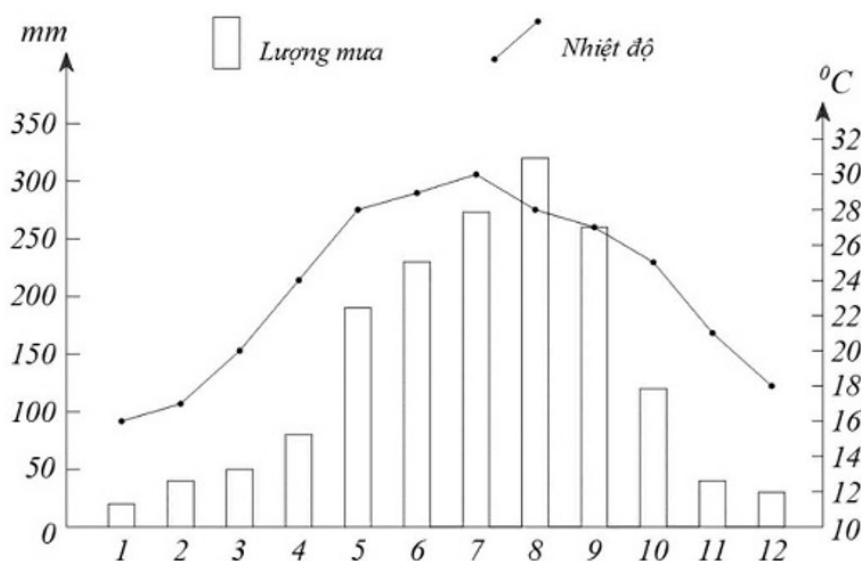
p) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

Bài 10. Cho biểu đồ về lượng mưa và nhiệt độ năm 2022 của Hà Nội

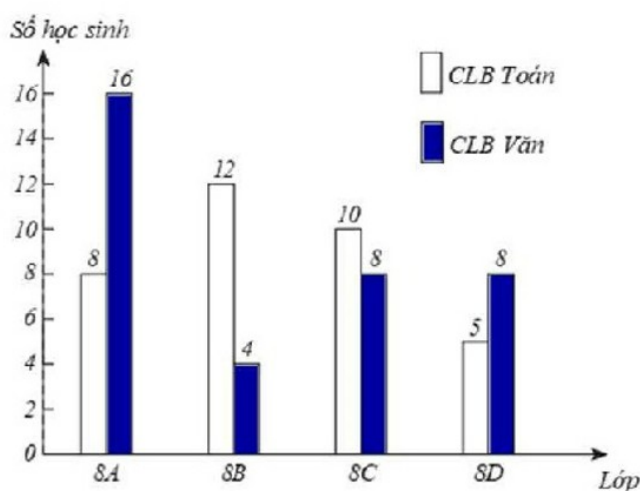
a, Tháng nào có nhiệt độ cao nhất, thấp nhất? Vì sao lại có sự khác biệt này ?

b, Tháng nào có lượng mưa nhiều nhất, ít nhất?

c, Em thích tháng nào nhất trong năm và tháng đó có nhiệt độ và lượng mưa như thế nào?



Bài 11. Biểu đồ Hình 2 thể hiện số lượng học sinh khối lớp 8 tham gia câu lạc bộ Toán và Văn của trường.



Hình 2

a) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

b) Cho biết về sự khác nhau về việc tham gia đăng kí hai câu lạc bộ Toán và Văn của hai lớp 8 A và 8 B.

c) Nếu lớp 8 A có số lượng tham gia câu lạc bộ môn Toán chiếm 20% tổng số học sinh cả lớp. Hãy tính xem lớp 8 A có bao nhiêu học sinh.

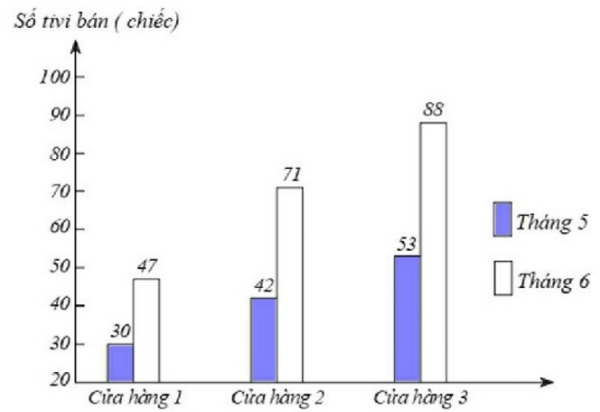
d) Hãy so sánh tỉ số học sinh tham gia CLB Toán và CLB Văn của 8 A và 8 B.

Bài 12. Biểu đồ ở Hình 6 thống kê số lượng tivi bán được của ba cửa hàng trong tháng 5 và tháng 6 của năm 2018.

- a) So sánh số lượng ti vi bán được của mỗi cửa hàng trong tháng 5 và tháng 6 .
- b) Cửa hàng 3 bán được nhiều ti vi nhất trong cả tháng 5 và tháng 6 . Em có thể đưa ra một lí do phù hợp nhất để giải thích cho kết quả này được không?

Em đồng ý với những nhận xét nào sau đây:

- Cửa hàng 3 bán ti vi với giá rẻ nhất.
- Cửa hàng 3 chăm sóc khách hàng tốt nhất.



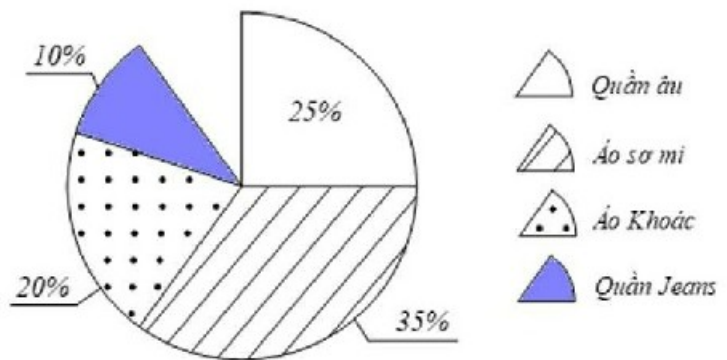
Hình 3

- Cửa hàng 3 có nhiều loại ti vi cho người mua hàng lựa chọn.
 - Cửa hàng 3 ở vị trí thuận lợi cho việc đi lại mua bán của người mua hàng?
- c) Số lượng ti vi mà cả ba cửa hàng bán được trong tháng 6 nhiều hơn số lượng ti vi mà cả ba cửa hàng bán được trong tháng 5 là bao nhiêu chiếc? Em có biết giải bóng đá World Cup 2018 diễn ra vào tháng nào không? Sự kiện đó có liên quan đến việc mua bán ti vi trong tháng 6 hay không?
- d) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

Bài 13.

Một cửa hàng bán quần áo đưa ra chương trình khuyến mãi giảm giá như biểu đồ ở Hình 7 .

- a) Trong các mặt hàng trên, sản phẩm nào được giảm giá nhiều nhất, ít nhất với mức giảm bao nhiêu phần trăm?



- b) Hãy giải thích vì sao trong biểu đồ trên tổng các thành phần lại không phải 100% . Với các số liệu ở biểu đồ ta có thể biểu diễn bằng biểu đồ nào?

- c) Cô Hai đã mua 2 chiếc áo sơ mi với giá mỗi chiếc sau khi giảm giá là 325000 đồng và 4 chiếc quần âu. Khi đó tổng số tiền hóa đơn cô Hai thanh toán tại quầy là 1850000 đồng. Em hãy tính xem mỗi chiếc áo sơ mi và mỗi chiếc quần âu cô Hai mua trị giá bao nhiêu tiền nếu chưa được giảm giá?

Bài 14. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của CD . Gọi E là giao điểm của AC và BM , F là giao điểm của BD và AM . Đường thẳng EF cắt BC và AD lần lượt tại G và H .

$$\frac{EA}{EC} = \frac{2AB}{CD}$$

- Chứng minh rằng $\frac{EA}{EC} = \frac{2AB}{CD}$.
- Chứng minh rằng $EF \parallel CD$.
- Chứng minh rằng $GE = EF = FH$.

Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm của AB . Gọi G là giao điểm của AC và DM . Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng AM . Các đường thẳng GE và CD cắt nhau tại F .

- Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABD .
- Chứng minh rằng $GC = 2GA$.
- Kẻ đường thẳng qua G cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại I và K . Chứng minh rằng $EI \parallel KF$.

Bài 16. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O , gọi E là trung điểm của AB . DE cắt AC tại F . BF cắt CD tại I .

- Chứng minh D là trung điểm IC .
- Chứng minh $ABDI$ là hình bình hành.
- Gọi H là trung điểm của AI . CH cắt BD, AD tại L, G . Chứng minh L là trung điểm của OD .
- GO cắt DF tại J . Chứng minh A, J, L thẳng hàng.

Bài 17. Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh BC lấy M ($MB < MC$). Từ A kẻ Ax vuông góc AM cắt đường thẳng CD tại N .

- Chứng minh: $AN = AM$.

$$\frac{DK}{DC} = \frac{DQ}{QB}$$

- BD cắt MN tại Q . AQ cắt DC tại K . Chứng minh: $\frac{DK}{DC} = \frac{DQ}{QB}$.
- Lấy điểm $P \in BD$ sao cho PM vuông góc BC . Chứng minh tứ giác $NDMP$ là hình bình hành.
- Đường thẳng MP cắt AC tại S . Từ M kẻ đường thẳng song song với AK cắt đường thẳng AC tại J . MN giao với AC tại E , MK giao với AC tại H . Chứng minh: $ES \cdot JH = EH \cdot JS$.

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), vẽ đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = AH$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E . Gọi M là trung điểm của BE , tia AM cắt BC tại G . Kẻ EI vuông góc AH .

- Chứng minh $HDEI$ là hình chữ nhật.
- Chứng minh $AE = AB$
- Chứng minh $GB \cdot AC = GC \cdot AE$

$$\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$$

- Chứng minh $\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

PHẦN NÂNG CAO

Bài 19. Cho $abc = 2$. Tính $B = \frac{a}{ab+a+2} + \frac{b}{bc+b+1} + \frac{2c}{ac+2c+2}$.

Bài 20. Cho a, b, c thỏa mãn: $a+b+c=0, ab+bc+ca=0$. Tính $A = (a-1)^{2023} + b^{2024} + (c+1)^{2025}$.

Bài 21. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $xyz = 1$ và $x+y+z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$. Tính $A = (x^{68} - 1)(x^{69} - 1)(x^{70} - 1)$.

Bài 22. Tìm GTNN của $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$.

Bài 23. Tìm GTNN của biểu thức: $B = xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$.

Bài 24. Tìm GTNN hoặc GTLN của: $M = \frac{27-12x}{x^2+9}$.

Bài 25. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{ax^2+1}{(x-y)(x-z)} + \frac{ay^2+1}{(y-x)(y-z)} + \frac{az^2+1}{(z-x)(z-y)}$.

Bài 26. Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh: $\frac{a+b}{bc+a^2} + \frac{b+c}{ac+b^2} + \frac{c+a}{ab+c^2} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$.

ĐỀ LUYỆN SỐ 1

Bài 1.

- Cho biểu thức: $A = (2x - 3)^2 - (2x - 5)^2$
 - Thu gọn biểu thức A .
 - Tính giá trị biểu thức A khi $x = 102$.
- Phân tích các đa thức sau thành nhân tử
 - $3(x - y) - y(y - x)$;
 - $x^2 - 10x + 25 - y^2$

Bài 2: Tìm x , biết:

- $4x^2 - 20x + 25 = 49$;
- $(x + 2)(x^2 - 2x + 4) - x(x - 1)^2 = 2x^2$;
- $x^2(x - 3) + 3 - x = 0$;
- $(x + 1)^3 - (x - 1)^3 - 6(x - 1)^2 = -19$.

Bài 3. Một công ty may mặc khảo sát chiều cao của một số học sinh khối 8 và thu được một phần bảng số liệu như sau:

Họ và tên	Lớp	Chiều cao (m)
Nguyễn Văn An	8 A	1,68
Nguyễn Văn Bình	8 B	1,6
Trần Văn Dũng	8D	1,58
Nguyễn Ngọc Diệp	8C	2,66

- Hãy phân loại dữ liệu "Lớp" và "Chiều cao".
- Bảng dữ liệu trên có hợp lí không? Giải thích.

Bài 4. Cho tam giác ABC ($AB < AC$), đường phân giác AD . Qua trung điểm M của BC , kẻ đường thẳng song song với AD , cắt AC, AB theo thứ tự ở E và K . Gọi O là giao điểm của AM và DK .

- Chứng minh $AO \cdot OK = DO \cdot OM$
- Cho $AB = 5 \text{ cm}, AC = 10 \text{ cm}, BC = 12 \text{ cm}$. Tính DB .

- Chứng minh $AE = AK$ và $\frac{AB}{CE} = \frac{BD}{CM}$.
- Chứng minh $BK = CE$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn $abc = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{1+a+ab} + \frac{1}{1+b+bc} + \frac{1}{1+c+ca} = 1.$$

ĐỀ LUYỆN SỐ 2

Bài 1.

- Cho biểu thức $A = (x + y)(x - y) + y^2$
 - Thu gọn biểu thức A .
 - Tính giá trị biểu thức A khi $x = 100$.

2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^2 - y^2 - 2x + 2y$;

b) $4x^2 - y^2 + 4x + 1$

Bài 2. Tìm x , biết:

a) $(x-4)^2 - (x-2)(x+2) = 6$;

c) $2x^2 + 3x - 5 = 0$;

b) $x(x-3) - 2x + 6 = 0$;

d) $(x-1)^3 - (x+3)(x^2 - 3x + 9) + 3(x^2 - 4) = 2$.

Bài 3. Để chuẩn bị cho giải Archimedes Cup, lớp 8C3 đã làm bảng hỏi về các môn thể thao yêu thích của các bạn trong lớp và thu được kết quả sau:

Môn thể thao	Số bạn
Bóng đá	15
Cầu lông	9
Cờ vua	6
Bóng bàn	2

a) Vẽ biểu đồ hình cột biểu diễn bảng thống kê.

b) Nhận xét về các môn học yêu thích. Số bạn yêu môn bóng đá chiếm bao nhiêu phần trăm số học sinh cả lớp.

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Kẻ AH vuông góc với BC tại H . Qua B kẻ đường thẳng vuông góc với AB , cắt đường thẳng AH tại D . Tia AB và tia CD cắt nhau tại E .

$$\frac{BE}{BA} = \frac{DE}{DC}$$

a) Chứng minh

b) Qua E kẻ đường thẳng song song với AC , đường thẳng này lần lượt cắt các đường thẳng AD, BC tại I, K . Chứng minh $EI = EK$.

c) Gọi N là giao điểm của EH và AC ; Gọi Q là giao điểm của DN và BC ; Gọi P là giao điểm của BN và AD . Chứng minh $NA = NC$ và $PQ \parallel BD$.

d) Gọi G là giao điểm của đường thẳng AQ và CD . Qua Q kẻ đường thẳng song song với CE , cắt đường thẳng AC tại T . Chứng minh $GH \parallel AC$ và $PT \perp AD$.

Bài 5. Cho a, b, c là các số thực khác 0 và thỏa mãn: $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \left(1 + \frac{b}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{a}\right)$$

ĐỀ LUYỆN SỐ 3

Bài 1.

1. Cho biểu thức $A = (x-2)^2 + (x-3)(x+3) + 4x$

a) Thu gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 2$.

2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử

a) $x(x-3) - 2x + 6$

b) $4x^2 + 6y - y^2 - 9$

Bài 2. Tìm x , biết:

a) $x(x+1) - x^2 - 2x = 5$;

c) $-4x^3 + x^2 - 8x + 2 = 0$;

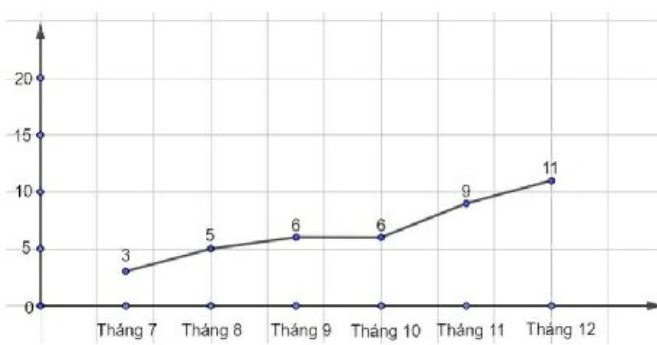
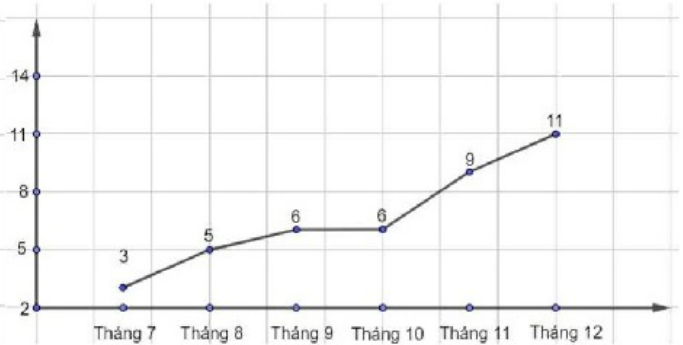
b) $36x^3 - 4x = 0$;

d) $(x^2 - 4x)^2 + 7(x^2 - 4x) + 12 = 0$

Bài 3. Cho hai biểu đồ doanh thu 6 tháng cuối năm của một công ty (đơn vị: tỉ đồng)

Doanh thu 6 tháng cuối năm

Doanh thu 6 tháng cuối năm.



a) Dữ liệu trong 2 biểu đồ có như nhau không? Lập bảng thống kê cho dữ liệu đó.

b) Có thể căn thứ vào độ dốc của 2 đường gấp khúc trên hai biểu đồ để đánh giá về tốc độ tăng doanh thu trong 6 tháng cuối năm của dữ liệu không? Tại sao?

Bài 4. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Gọi M là trung điểm của AC . Đường thẳng HM cắt đường thẳng AB tại E . Lấy điểm F sao cho M là trung điểm EF .

a) Chứng minh tứ giác $AECF$ là hình bình hành.

b) Qua F kẻ đường thẳng song song với AH cắt AC kéo dài tại K . Chứng minh $\frac{AH}{FK} = \frac{AC}{EF}$.

c) Qua H kẻ đường thẳng song song với AB cắt AF tại Q . Gọi P là giao điểm của HC và FK . Chứng minh $PQ \parallel AC$.

d) Gọi N là trung điểm của AF và D là giao điểm của PQ với FC . Chứng minh ba điểm K, D, N thẳng hàng.

Bài 5. Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $(x+y+z)(xy+yz+zx) = xyz$. Chứng minh rằng:

$$x^{2023} + y^{2023} + z^{2023} = (x+y+z)^{2023}$$

ĐỀ LUYỆN SỐ 4

Bài 1.

1. Cho biểu thức $A = (x-y)^2 + 2x(x+y)$

a) Thu gọn biểu thức A .

b) Tính giá trị biểu thức A khi $x = 1$ và $y = -3$.

2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $16x^2 - (x+1)^2$;

b) $x^2 - 6x - 7$.

Bài 2. Tìm x , biết:

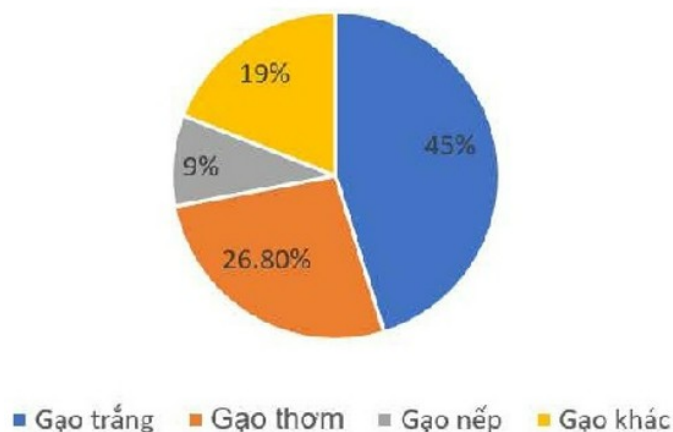
a) $x^3 = \frac{1}{4}x$

c) $x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = 0$;

b) $(x^2 + 9)^2 - 36x^2 = 0$;

d) $x^3 + 9x^2 - 10x = 0$

Bài 3. Cho biểu đồ xuất khẩu gạo của nước ta năm 2020.



a) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

b) Biết rằng tổng lượng gạo xuất khẩu là 6,15 triệu tấn. Hãy tính khối lượng gạo thơm nước ta xuất khẩu trong năm 2020.

Bài 4. Cho $\triangle ABC$ vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH . Kẻ $HD \perp AB$ ($D \in AB$).

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BH}{BC}$$

a) Chứng minh rằng

b) Gọi O là giao điểm của AH và CD . Qua O kẻ đường thẳng song song với DH cắt BC tại F . Gọi E là giao điểm của DH và AF . Chứng minh rằng: $HD = HE$;

c) Gọi I là giao điểm của AH và CE . Chứng minh rằng: $BI \parallel AC$;

d) Gọi K là giao điểm của AB và CI , G là giao điểm của AF và CO . Chứng minh rằng K, H, G thẳng hàng.

Bài 5. Cho các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn điều kiện $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng biểu thức sau là bình phương của một số hữu tỉ:

$$S = \frac{(a^2 + 3)(b^2 + 3)(c^2 + 3)}{16}$$

ĐỀ LUYỆN SỐ 5

Bài 1.

1. Cho biểu thức $M = (4x + 3)^2 - 11x(x + 6) - 5(x - 2)(x + 2)$

a) Thu gọn biểu thức M .

b) Tính giá trị biểu thức M khi $x = -2$.

2. Phân tích các đa thức sau thành nhân tử:

a) $x^4 + x^3y - x - y$

b) $(x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) - 3$

Bài 2. Tìm x , biết:

- a) $(x^2 + 4)^2 - 16x^2 = 0$;
 c) $9(5 - x) + x^2 - 10x = -25$;
 b) $x^3 - 2x^2 - 9x + 18 = 0$;
 d) $(x^2 + 1)^2 - 6(x^2 + 1) + 9 = 0$.

Bài 3. Cho biểu đồ thông kê số lượng máy điều hòa nhiệt độ và máy sưởi được bán trong 6 tháng đầu năm của một cửa hàng kinh doanh.

- a) Trong tháng 6, cửa hàng đó bán được loại máy nào nhiều hơn?
 b) Phân tích xu thế về số lượng máy mỗi loại mà cửa hàng đó bán được. Giải thích.

Bài 4. Cho hình thang $ABCD (AB // CD; AB < CD)$. Gọi O là giao điểm của AC và BD .

- a) Chứng minh $\frac{OA}{AC} = \frac{OB}{BD}$.
 b) Qua O kẻ đường thẳng song song với AD cắt DC ở E ; qua O kẻ đường thẳng song song với BC cắt CD ở F . Chứng minh $DE = CF$.
 c) Gọi I là giao điểm của các đường thẳng AD và OF , J là giao điểm của các đường thẳng BC và OE . Chứng minh IJ song song với AB .
 d) Gọi H là giao điểm của AD và BC , K là trung điểm của EF . Chứng minh H, O, K thẳng hàng.

Bài 5. Cho x, y thỏa mãn $5x^2 + 2y^2 + 6xy - 8x - 4y + 4 = 0$.

Tính giá trị biểu thức $P = x^{2023} + y^{2023}$.

ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Bài 1. Cho đơn thức $A = \left(-\frac{1}{2}x^2y^3z^2\right)^2 \cdot \frac{4}{3}xy^3z$

- a) Thu gọn đơn thức A
 b) Chỉ ra phần hệ số và bậc của đơn thức

c) Tính giá trị đơn thức sau khi thu gọn tại $x = 2; y = \frac{-1}{2}; z = -1$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \left(-\frac{1}{2}x^2y^3z^2\right)^2 \cdot \frac{4}{3}xy^3z \\ &= \frac{1}{4}x^4y^6z^4 \cdot \frac{4}{3}xy^3z \\ &= \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{3}\right) \cdot (x^4y^6z^4 \cdot xy^3z) \\ &= \frac{1}{3}x^5y^9z^5 \end{aligned}$$

b) Hệ số là: $\frac{1}{3}$

Bậc của đơn thức là: 19

c) Với $x = 2; y = \frac{-1}{2}; z = -1$ thay vào A , ta được:

$$A = \frac{1}{3} \cdot 2^5 \cdot \left(\frac{-1}{2}\right)^9 \cdot (-1)^5 = \frac{1}{3} \cdot 2^5 \cdot 2^{-9} = \frac{1}{3} \cdot 2^{-4} = \frac{1}{48}.$$

Bài 2. Cho các đa thức sau:

$$A = -x^2y + 3 - (-5xy^2) + 8x$$

$$B = xy + 8 + 4x^2y + xy^2$$

a) Tính $A + B$; $A - B$.

b) Tính $A + 2B$.

Lời giải

$$a) \quad A + B = [-x^2y + 3 - (-5xy^2) + 8x] + (xy + 8 + 4x^2y + xy^2)$$

Bài 3. Rút gọn các biểu thức sau, rồi tính giá trị biểu thức:

$$a) \quad A = x^2 - 8xy + 16y^2 \quad \text{tại } x = 4; y = -3.$$

$$b) \quad B = 9x^2 + 4y^2 + 12xy - 2023 \quad \text{tại } 3x + 2y = 50.$$

$$c) \quad C = (x - 3y)^2 - (x - 2y)(2y + x) \quad \text{tại } x = 2; y = -1.$$

$$d) \quad D = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 \quad \text{tại } x = -2y.$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } A = x^2 - 8xy + 16y^2 = (x - 4y)^2$$

Thay $x = 4; y = -3$ vào biểu thức A , ta có:

$$A = [4 - 4 \cdot (-3)]^2 = 16^2 = 256$$

Vậy $A = 256$ tại $x = 4; y = -3$.

$$b) \text{ Ta có: } B = 9x^2 + 4y^2 + 12xy - 2023 = (3x + 2y)^2 - 2023$$

Thay $3x + 2y = 50$ vào biểu thức B , ta có:

$$B = 50^2 - 2023 = 2500 - 2023 = 477$$

Vậy $A = 477$ khi $3x + 2y = 50$.

$$c) \text{ Ta có: } C = (x - 3y)^2 - (x - 2y)(2y + x)$$

$$= x^2 - 6xy + 9y^2 - (x^2 - 4y^2)$$

$$= -6xy + 13y^2$$

Thay $x = 2; y = -1$ vào biểu thức C , ta có:

$$C = -6 \cdot 2 \cdot (-1) + 13 \cdot (-1)^2 = 12 + 13 = 25$$

Vậy $C = 25$ tại $x = 2; y = -1$.

$$d) \text{ Ta có: } D = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3 = (x + 2y)^3$$

Thay $x = -2y$ vào biểu thức D , ta có:

$$D = (-2y + 2y)^3 = 0^3 = 0$$

Vậy $D = 0$ khi $x = -2y$.

Bài 4. Rút gọn các biểu thức sau rồi tính giá trị biểu thức:

$$a) \quad A = (2 - x)(x + 2) - (x + 3)^2 \quad \text{tại } x = 5$$

b) $B = (2x+5)^2 - 4(x-3)(3+x)$ tại $x = \frac{1}{10}$

c) $C = x^3 - 3x^2 + 3x + 2023$ tại $x = 101$

d) $D = x^3 - 6x^2 + 12x - 100$ tại $x = -98$

e) $E = (x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 12x + 20$ tại $x = 5$

f) $F = (2x-1)(4x^2+2x+1) - 7(x^3+1)$ tại $x = \frac{-1}{2}$

g) $G = (-x-2)^3 + (2x-4)(x^2+2x+4) - x^2(x-6)$ tại $x = -2$

h) $H = (x-1)^3 - (x+2)(x^2-2x+4) + 3(x+4)(x-4)$ tại $x = \frac{1}{-2}$

Lời giải

a) $A = (2-x)(x+2) - (x+3)^2 = (2-x)(2+x) - (x+3)^2 = 4 - x^2 + x^2 + 6x + 9 = 6x + 13$

Với $x = \frac{-1}{2}$, ta được: $A = 6 \cdot \frac{-1}{2} + 13 = 10$

b) $B = (2x+5)^2 - 4(x-3)(3+x) = 4x^2 + 20x + 25 - 4(x^2 - 9) = 20x + 61$

Với $x = \frac{1}{10}$, ta được:

$$B = 20 \cdot \frac{1}{10} + 61 = 63$$

c) $C = x^3 - 3x^2 + 3x + 2023$

$$= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 2024$$

$$= (x-1)^3 + 2024$$

Với $x = 101$, ta được: $C = (101-1)^3 + 2024 = 1002024$

d) $D = x^3 - 6x^2 + 12x - 100$

$$= x^3 - 6x^2 + 12x - 8 - 92$$

$$= (x-2)^3 - 92$$

Với $x = -98$, ta được $D = (-98-2)^3 - 92 = -100^3 - 92 = -1000092$

e) $E = (x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 12x + 20 = (x+1)^3 + 6(x+1)^2 + 12(x+1) + 8 = [(x+1)+2]^3 = (x+3)^3$

Với $x = 5$, ta được: $E = (5+3)^3 = 512$

f) $F = (2x-1)(4x^2+2x+1) - 7(x^3+1) = (2x)^3 - 1^3 - 7x^3 + 7 = x^3 + 6$

Với $x = \frac{-1}{2}$, ta được: $F = \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 6 = \frac{47}{8}$

g) $G = (-x-2)^3 + (2x-4)(x^2+2x+4) - x^2(x-6)$

$$= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 2[(x-2)(x^2+2x+4)] - x^3 + 6x^2$$

$$= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 2(x^3 - 8) - x^3 + 6x^2$$

$$= -x^3 - 6x^2 - 12x - 8 + 2x^3 - 16 - x^3 + 6x^2$$

$$= -12x - 24$$

Với $x = -2$, ta được: $G = -12 \cdot (-2) - 24 = 0$

$$\begin{aligned} \text{h)} \quad H &= (x-1)^3 - (x+2)(x^2 - 2x + 4) + 3(x+4)(x-4) \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - (x^3 + 8) + 3(x^2 - 16) \\ &= x^3 - 3x^2 + 3x - 1 - x^3 - 8 + 3x^2 - 48 \\ &= 3x - 57 \end{aligned}$$

Với $x = \frac{1}{-2}$, ta được:

$$H = 3 \cdot \left(\frac{1}{-2} \right) - 57 = \frac{-117}{2}.$$

Bài 5. Chứng minh giá trị của các đa thức sau không phụ thuộc vào giá trị biến:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= (x+3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) + 3y(x+3y)(x-3y) - x(3xy + x^2 - 5) - 5x + 1 \\ \text{b)} \quad B &= (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2) - 2x(2x-y)(2x+y) + y(y^2 - 2xy) + 2023 \end{aligned}$$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad A &= (x+3y)(x^2 - 3xy + 9y^2) + 3y(x+3y)(x-3y) - x(3xy + x^2 - 5) - 5x + 1 \\ &= x^3 + (3y)^3 + 3y[x^2 - (3y)^2] - 3x^2y - x^3 + 5x - 5x + 1 \\ &= x^3 + (3y)^3 + 3x^2y - (3y)^3 - 3x^2y - x^3 + 5x - 5x + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của các đa thức A không phụ thuộc vào giá trị biến.

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad B &= (2x-y)(4x^2 + 2xy + y^2) - 2x(2x-y)(2x+y) + y(y^2 - 2xy) + 2023 \\ &= (2x)^3 - y^3 - 2x[(2x)^2 - y^2] + y^3 - 2xy^2 + 2023 \\ &= (2x)^3 - y^3 - (2x)^3 + 2xy^2 + y^3 - 2xy^2 + 2023 \\ &= 2023 \end{aligned}$$

Vậy giá trị của các đa thức B không phụ thuộc vào giá trị biến.

Bài 6. Phân tích đa thức thành nhân tử

a) $2xy + 5x^2y - x^3y$	i) $3x + 3y - x^2 - 2xy - y^2$
b) $(x+y)^2 - 9x^2$	j) $x^4y^4 + 64$
c) $2(x-y) + xy - x^2$	k) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x - y$
d) $3x^2 + 2x - 1$	l) $x^3 + x + 1$
e) $-x^2 + 4x - 3$	m) $x^3 + y^3 - 2(x^2 - y^2)$
f) $x^2 - 7x + 12$	n) $(x^2 + y)^2 - 2x^2 - 2y + 1$
g) $5x(x^2 - y^2) + 2y(x+y)$	o) $x^2 + 5x + 6$
h) $x^2 - \frac{3}{2}x - 1$	p) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 6$

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad 2xy + 5x^2y - x^3y &= xy(2 + 5x - x^2) \\ \text{b)} \quad (x+y)^2 - 9x^2 &= (x+y-3x)(x+y+3x) \\ \text{c)} \quad 2(x-y) + xy - x^2 &= 2(x-y) - x(x-y) = (x-y)(2-x) \end{aligned}$$

- d) $3x^2 + 2x - 1 = 3x^2 + 2x - x - 1 = 3x(x+1) - (x+1) = (x+1)(3x-1)$
- e) $-x^2 + 4x - 3 = -(x^2 - 4x + 3) = -(x^2 - 3x - x + 3) = -(x-3)(x-1)$
- f) $x^2 - 7x + 12 = x^2 - 3x - 4x + 12 = x(x-3) - 4(x-3) = (x-3)(x-4)$
- g) $5x(x^2 - y^2) + 2y(x+y) = 5x(x-y)(x+y) + 2y(x+y) = (x+y)(5x^2 - 5xy + 2y)$
- h) $x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = \frac{1}{2}(2x^2 - 3x - 2) = \frac{1}{2}(2x^2 + x - 4x - 2) = \frac{1}{2}(x-2)(2x+1)$
- i) $3x + 3y - x^2 - 2xy - y^2 = 3(x+y) - (x+y)^2 = (x+y)(3-x-y)$
- j) $x^4y^4 + 64 = (x^2y^2)^2 + 2 \cdot 8x^2y^2 + 8^2 - 16x^2y^2 = (x^2y^2 + 8)^2 - (4xy)^2 = (x^2y^2 + 8 - 4xy)(x^2y^2 + 8 + 4xy)$
- k) $x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 - x - y = (x+y)^3 - (x+y) = (x+y)(x+y-1)(x+y+1)$
- l) $x^8 + x + 1 = x^8 + x^7 - x^7 + x^6 - x^6 + x^5 - x^5 + x^4 - x^4 + x^3 - x^3 + x^2 - x^2 + x - 1$
 $= (x^8 + x^7 + x^6) - (x^7 + x^6 + x^5) + (x^5 + x^4 + x^3) - (x^4 + x^3 + x^2) + (x^2 + x - 1)$
 $= x^6(x^2 + x - 1) - x^5(x^2 + x - 1) + x^3(x^2 + x - 1) - x^2(x^2 + x - 1) + (x^2 + x - 1)$
 $= (x^2 + x - 1)(x^6 - x^5 + x^3 - x^2 + 1)$
- m) $x^3 + y^3 - 2(x^2 - y^2) = (x+y)(x^2 - xy + y^2) - 2(x-y)(x+y) = (x+y)(x^2 - xy + y^2 - 2x + 2y)$
- n) $(x^2 + y)^2 - 2x^2 - 2y + 1 = (x^2 + y)^2 - 2(x^2 + y) + 1 = (x^2 + y - 1)^2$
- o) $x^2 + 5x + 6 = x^2 + 2x + 3x + 6 = (x+2)(x+3)$
- p) $(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 6$

Đặt $x^2 + x + 1 = y$

$$\Rightarrow x^2 + x + 2 = x^2 + x + 1 + 1 = y + 1$$

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x + 2) - 6$$

$$= y(y+1) - 6$$

$$= y^2 + y - 6$$

$$= (y+3)(y-2)$$

$$= (x^2 + x + 1 + 3)(x^2 + x + 1 - 2)$$

$$= (x^2 + x + 4)((x^2 + x - 1))$$

Bài 7. Phân tích đa thức thành nhân tử

- a) $x^3y + x - y - 1$
- b) $x^2(x-2) + 4(2-x)$
- c) $x^3 - x^2 - 20x$
- d) $(x^2 + 1)^2 - (x+1)^2$
- e) $6x^2 - 7x + 2$
- f) $x^4 + 8x^2 + 12$
- g) $(x^3 + x + 1)(x^3 + x) - 2$
- h) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) + 1$
- i) $-(x^2 + 2)^2 + 4x(x^2 + 2) - 3x^2$
- j) $81x^4 + 4y^4$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad & x^3y + x - y - 1 \\
 &= (x^3y - y) + (x - 1) \\
 &= y(x^3 - 1) + (x - 1) \\
 &= (x - 1)[y(x^2 + x + 1) + 1] \\
 &= (x - 1)(x^2y + xy + y + 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad & x^2(x - 2) + 4(2 - x) \\
 &= x^2(x - 2) - 4(x - 2) \\
 &= (x - 2)(x^2 - 4) \\
 &= (x - 2)^2(x + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{c)} \quad & x^3 - x^2 - 20x \\
 &= x(x^2 - x - 20) \\
 &= x(x^2 - 5x + 4x - 20) \\
 &= x(x - 5)(x + 4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{d)} \quad & (x^2 + 1)^2 - (x + 1)^2 \\
 &= (x^2 + 1 - x - 1)(x^2 + 1 + x + 1) \\
 &= x(x - 1)(x^2 + x + 2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{e)} \quad & 6x^2 - 7x + 2 \\
 &= 6x^2 - 3x - 4x + 2 \\
 &= 3x(2x - 1) - 2(2x - 1) \\
 &= (3x - 2)(2x - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{f)} \quad & x^4 + 8x^2 + 12 \\
 &= x^4 + 2x^2 + 6x^2 + 12 \\
 &= x^2(x^2 + 2) + 6(x^2 + 2) \\
 &= (x^2 + 2)(x^2 + 6) \\
 &\quad - (x^2 + 2)^2 + 4x(x^2 + 2) - 3x^2 \\
 &= (x^2 + 2)^2 - 4x(x^2 + 2) + 3x^2
 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 2 = a$ và $x = b$ Khi đó ta được

$$\begin{aligned}
 & a^2 - 4ab + 3b^2 \\
 &= a^2 - ab - 3ab + 3b^2 \\
 &= a(a - b) - 3b(a - b) \\
 &= (a - b)(a - 3b)
 \end{aligned}$$

Thay ngược trở lại ta được:

$$\text{g)} \quad (x^3 + x + 1)(x^3 + x) - 2$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Đặt } (x^3 + x) = t \text{ khi đó ta có:} \\
 & t(t + 1) - 2 = t^2 + t - 2 = t^2 + 2t - t - 2 \\
 &= t(t + 2) - (t + 2) = (t - 1)(t + 2)
 \end{aligned}$$

Thay ngược trở lại ta được:

$$(x^3 + x - 1)(x^3 + x + 2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{h)} \quad & (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4) + 1 \\
 &= (x^2 + 5x + 4)(x^2 + 5x + 6) + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \text{Đặt } x^2 + 5x + 4 = t \text{ Khi đó ta được:} \\
 & t(t + 2) + 1 = t^2 + 2t + 1 = (t + 1)^2
 \end{aligned}$$

Thay ngược trở lại ta được:

$$(x^2 + 5x + 4)^2 = (x^2 + x + 4x + 4)^2 = (x + 4)^2(x + 1)^2$$

$$\begin{aligned}
 & - (x^2 + 2)^2 + 4x(x^2 + 2) - 3x^2 \\
 &= (x^2 + 2)^2 - 4x(x^2 + 2) + 3x^2
 \end{aligned}$$

Đặt $x^2 + 2 = a$ và $x = b$ Khi đó ta được

$$\begin{aligned}
 & a^2 - 4ab + 3b^2 \\
 &= a^2 - ab - 3ab + 3b^2 \\
 &= a(a - b) - 3b(a - b) \\
 &= (a - b)(a - 3b)
 \end{aligned}$$

Thay ngược trở lại ta được:

$$\begin{aligned}
 & (x^2 + 2 - x)(x^2 + 2 - 3x) \\
 &= (x^2 - x + 2)(x^2 - 3x + 2) \\
 &= (x^2 - x + 2)(x^2 - 2x - x + 2) \\
 &= (x^2 - x + 2)(x - 2)(x - 1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & 81x^4 + 4y^4 \\
 &= 81x^4 + 36x^2y^2 + 4y^2 - 36x^2y^2 \\
 &= (9x^2 + 2y^2)^2 - (6xy)^2 \\
 &= (9x^2 + 2y^2 - 6xy)(9x^2 + 2y^2 + 6xy)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(x^2 + \right. \\
 & = \left(x^2 - \right. \\
 & = \left(x^2 - x + \right. \\
 & = \left(x^2 - \right.
 \end{aligned}$$

Bài 8. Tìm x , biết:

- a) $(x+2)^2 - x(x+3) = 2$
- k) $(x+2)^3 - (x+1)(x^2 - x + 1) - 6(x-1)^2 = 23$
- b) $(x+2)(x-2) - (x+1)^2 = 7$
- c) $6x^2 - (2x+1)(3x-2) = 1$
- m) $(x+3)(x^2 - 3x + 9) - x(x-2)(x+2) + 11 = 0$
- d) $(x+2)(x+3) - (x-2)(x+1) = 2$
- n) $x(x-3) - x + 3 = 0$
- e) $6(x-1)(x+1) - (2x-1)(3x+2) + 3 = 0$
- o) $(x-1)(x+2) - 2x - 4 = 0$
- f) $x(3x+1) + (x-1)^2 - (2x+1)(2x-1) = 0$
- p) $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$
- g) $(x+1)^3 + (2-x)^3 - 9(x-3)(x+3) = 0$
- q) $9(x-1) - x^3 + x^2 = 0$
- r) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$
- i) $(x-1)^3 - (x+3)(x^2 - 3x + 9) + 3x^2 = 25$
- t) $(9 - 2x^2)(2x+1) = 0$.

Lời giải

a) $(x+2)^2 - x(x+3) = 2$

$$\begin{aligned}
 x^2 - 2x + 4 - x^2 - 3x &= 2 \\
 -5x + 2 &= 0 \\
 x &= \frac{2}{5}
 \end{aligned}$$

Vậy $x = \frac{2}{5}$.

b)

$$(x+2)(x-2)-(x+1)^2=7$$

$$x^2-4-(x^2+2x+1)=7$$

$$-2x-5=7$$

$$-2x=12$$

$$x=-6$$

Vậy $x=-6$

c)

$$6x^2-(2x+1)(3x-2)=1$$

$$6x^2-(6x^2+3x-4x-2)=1$$

$$6x^2-6x^2+x+2=1$$

$$x=-1$$

Vậy $x=-1$

d)

$$(x+2)(x+3)-(x-2)(x+1)=2$$

$$x^2+5x+6-(x^2-x-2)=2$$

$$x^2+5x+6-x^2+x+2=2$$

$$6x+6=0$$

$$x=-1$$

Vậy $x=-1$

e)

$$6(x-1)(x+1)-(2x-1)(3x+2)+3=0$$

$$6(x^2-1)-(6x^2+x-2)+3=0$$

$$6x^2-6-6x^2-x+2-3=0$$

$$-x-7=0$$

Vậy $x=-7$

f)

$$x(3x+1)+(x-1)^2-(2x+1)(2x-1)=0$$

$$3x^2+x+x^2-2x+1-4x^2+1=0$$

$$(3x^2+x^2-4x^2)+(x-2x)+1+1=0$$

$$-x+2=0$$

$$x=2$$

Vậy $x=2$

g) $(x+1)^3+(2-x)^3-9(x-3)(x+3)=0$

$$(x+1+2-x)\left[(x+1)^2-(x+1)(2-x)+(2-x)^2\right]-9(x^2-9)=0$$

$$3\left[x^2+2x+1-(2x+2-x^2-x)+4-4x+x^2\right]-9(x^2-9)=0$$

$$3\left[x^2+2x+1+x^2-x-2+4-4x+x^2\right]-9x^2+81=0$$

$$3(3x^2-3x+3)-9x^2+81=0$$

$$9x^2-9x+9-9x^2+81=0$$

$$-9x+90=0$$

$$x=10$$

Vậy $x=10$

i)

$$(x-1)^3-(x+3)(x^2-3x+9)+3x^2=25$$

$$x^3-3x^2+3x-1-x^3-27+3x^2-25=0$$

$$3x-53=0$$

$$x=\frac{53}{3}$$

Vậy $x=\frac{53}{3}$

k)

$$(x+2)^3-(x+1)(x^2-x+1)-6(x-1)^2=23$$

$$x^3+6x^2+12x+8-(x^3+1)-6(x^2-2x+1)=23$$

$$x^3+6x^2+12x+8-x^3-1-6x^2+12x-6-23=0$$

$$24x-21=0$$

$$x=\frac{7}{8}$$

Vậy $x=\frac{7}{8}$

m) $(x+3)(x^2-3x+9)-x(x-2)(x+2)+11=0$

$$x^3+27-x(x^2-4)+11=0$$

$$x^3+27-x^3+4x+11=0$$

$$4x+38=0$$

$$x=\frac{-19}{2}$$

Vậy $x=\frac{-19}{2}$

n) $x(x-3)-x+3=0$

$$x^2-3x-x+3=0$$

$$-4x+3=0$$

$$x=\frac{3}{4}$$

Vậy $x = \frac{3}{4}$

o)

$$(x-1)(x+2) - 2x - 4 = 0$$

$$(x-1)(x+2) - 2(x+2) = 0$$

$$(x+2)(x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \\ x-3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \\ x=3 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-2; 3\}$

p)

$$x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = 0$$

$$x^2(x-3) - 4(x-3) = 0$$

$$(x-3)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x-3)(x-2)(x+2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-3=0 \\ x-2=0 \\ x+2=0 \end{cases} \begin{cases} x=3 \\ x=2 \\ x=-2 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{-2; 2; 3\}$

q) $9(x-1) - x^3 + x^2 = 0$

$$9(x-1) - x^3 + x^2 = 0$$

$$9(x-1) - x^2(x-1) = 0$$

$$(x-1)(9 - x^2) = 0$$

$$(x-1)(3-x)(3+x) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ 3-x=0 \\ 3+x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=3 \\ x=-3 \end{cases}$$

Vậy $x \in \{1; 3; -3\}$

r)

$$x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$$

$$x^2(x-2) + (x-2) = 0$$

$$(x-2)(x^2 + 1) = 0$$

$$x-2 = 0$$

$$x = 2$$

(vì $x^2 + 1 \geq 1$ với mọi x)

Vậy $x = 2$

t) $(9 - 2x^2)(2x + 1) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ 9-2x^2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{2} \\ x^2=\frac{9}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{-1}{2} \\ x=\frac{3}{\sqrt{2}} \\ x=\frac{-3}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy $x \in \left\{ \frac{-1}{2}; \frac{3}{\sqrt{2}}; \frac{-3}{\sqrt{2}} \right\}$

Bài 9. Tìm x , biết:

- a) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$
 b) $25x^2 - 16(x+2)^2 = 0$
 c) $(2x+1)^2 = (x-1)^2$
 d) $9x^2 - 6x = -1$
 e) $4x^2 - 9 = 0$
 f) $x^3 - 9x^2 + 27x - 35 = 0$
 g) $x^2 - 6x - 7 = 0$
 h) $x^2 + 4x + 3 = 0$
 i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$
 k) $x(x-5) = 6$
 m) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$
 n) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$
 o) $(x-1)x(x+1)(x+2) - 24 = 0$
 p) $x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$

Lời giải

a) $x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$
 $\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ x + \frac{1}{2} = \frac{-3}{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$
 c) $(2x+1)^2 = (x-1)^2$

b) $25x^2 - 16(x+2)^2 = 0$
 $\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$
 $\Rightarrow 25x^2 - 16(x^2 + 4x + 4) = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \\ x + \frac{1}{2} = \frac{-3}{2} \end{cases}$
 $\Rightarrow 25x^2 - 16x^2 - 64x - 64 = 0$
 $\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$
 $\Rightarrow 9x^2 + 8x - 72x - 64 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = x-1 \\ 2x+1 = -x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

e) $4x^2 - 9 = 0$

$$\Rightarrow 4x^2 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

g) $x^2 - 6x - 7 = 0$

$$\Rightarrow x^2 - 7x + x - 7 = 0$$

$$\Rightarrow x(x-7) + (x-7) = 0$$

$$\Rightarrow (x-7)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-7 = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -1 \end{cases}$$

i) $2x^2 - 5x + 3 = 0$

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(2x-3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ 2x-3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-3)^3 = 2^3$$

$$\Rightarrow x-3 = 2$$

$$\Rightarrow x = 5$$

k) $x(x-5) = 6$

$$\Rightarrow x^2 - 5x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x-6)(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-6 = 0 \\ x+1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ x = -1 \end{cases}$$

m) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

$$\Rightarrow x(9x+8) - 8(9x+8) = 0$$

$$\Rightarrow (9x+8)(x-8) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9x+8 = 0 \\ x-8 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-8}{9} \\ x = 8 \end{cases}$$

d) $9x^2 - 6x = -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x+1 = x-1 \\ 2x+1 = -x+1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 9x^2 - 6x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 3x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow 3x-1 = 0$$

$$\Rightarrow 3x = 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

f) $x^3 - 9x^2 + 27x - 35 = 0$

$$\Rightarrow 4x^2 = 9$$

$$\Rightarrow (x^3 - 9x^2 + 27x - 27) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x = 3 \\ 2x = -3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x-3)^3 - 2^3 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{-3}{2} \end{cases}$$

h) $x^2 + 4x + 3 = 0$

$$\Rightarrow x^2 + x + 3x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (x+1)(x+3) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ x+3 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -3 \end{cases}$$

n) $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0 \quad (x \neq 0)$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{x}\right) - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2 = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 &= 0 \\ \Rightarrow x^2(x^2 - 4) - (x^2 - 4) &= 0 \\ \Rightarrow (x^2 - 4)(x^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 0 \\ x^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \pm 2 \\ x = \pm 1 \end{cases}$$

$$\text{o) } (x-1)x(x+1)(x+2) - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2 + x - 2)(x^2 + x) - 24 =$$

Đặt $x^2 + x = a$

Từ (1), ta có: $(a-2)a - 24 = 0$

$$\Rightarrow a^2 - 2a - 24 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 6a + 4a - 24 = 0$$

$$\Rightarrow (a-6)(a+4) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-6 = 0 \\ a+4 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 6 \\ a = -4 \end{cases}$$

+) Với $x^2 + x = 6$

$$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 3x - 2x - 6 = 0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -3 \\ x = 2 \end{cases}$$

+) Với $x^2 + x = -4$

$$\Rightarrow x^2 + x + 4 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} = 0 \quad (\text{loại})$$

$$\text{Vì } \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{15}{4} > 0 \quad \text{với mọi } x$$

$$\text{Vậy } x \in \{-3; 2\}.$$

$$\Rightarrow \left(x + \frac{1}{x} - 1\right) \left(x + \frac{1}{x} - 2\right) = 0$$

$$\text{TH1: } x + \frac{1}{x} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1 - x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = 0 \quad (\text{loại})$$

$$\text{Vì } \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \text{với mọi } x$$

$$\text{TH2: } x + \frac{1}{x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x-1 = 0$$

$$\Rightarrow x = 1$$

$$\text{p) } x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x^4 - 3x^3 + 3x^2 - x) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x^3 - 3x^2 + 3x - 1) - (x^3 - 3x^2 + 3x - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x(x-1)^3 - (x-1)^3 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^3(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)^4 = 0$$

$$\Rightarrow x-1 = 0$$

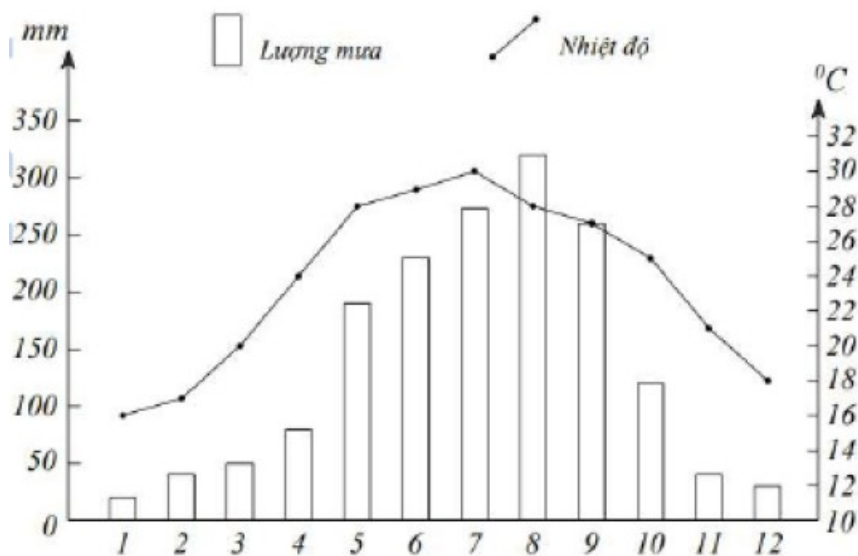
$$\Rightarrow x = 1$$

Bài 10. Cho biểu đồ về lượng mưa và nhiệt độ năm 2022 của Hà Nội

a, Tháng nào có nhiệt độ cao nhất, thấp nhất? Vì sao lại có sự khác biệt này?

b, Tháng nào có lượng mưa nhiều nhất, ít nhất?

c, Em thích tháng nào nhất trong năm và tháng đó có nhiệt độ và lượng mưa như thế nào?



Hình 3

Lời giải

a, Tháng nào có nhiệt độ cao nhất: Tháng 7

Tháng nào có nhiệt độ thấp nhất: Tháng 1

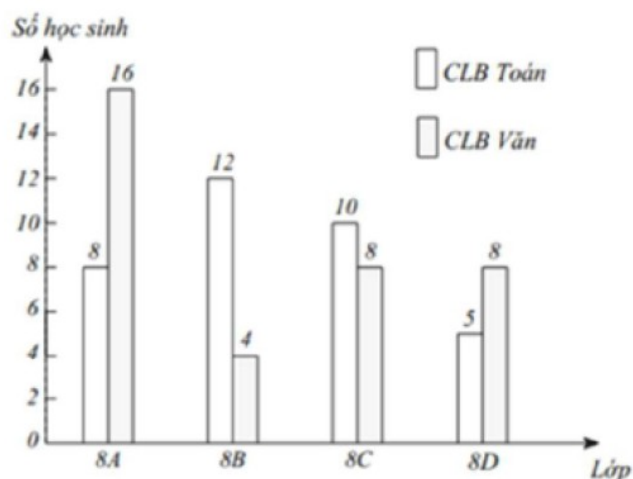
Vì Hà nội chia theo các mùa : Xuân , Hạ, Thu , Đông

b, Tháng nào có nhiệt độ cao nhất: Tháng 8

Tháng nào có nhiệt độ thấp nhất: Tháng 1

c, Thích tháng 10 : Lượng mưa 110mm, nhiệt độ 19 độ C

Bài 11. Biểu đồ Hình 5 thể hiện số lượng học sinh khối lớp 8 tham gia câu lạc bộ Toán và Văn của trường.



a) Lập bảng thống kê cho biểu đồ trên.

b) Cho biết về sự khác nhau về việc tham gia đăng kí hai câu lạc bộ Toán và Văn của hai lớp 8 A và 8 B.

c) Nếu lớp 8 A có số lượng tham gia câu lạc bộ môn Toán chiếm 20% tổng số học sinh cả lớp. Hãy tính xem lớp 8 A có bao nhiêu học sinh.

d) Hãy so sánh tỉ số học sinh tham gia CLB Toán và CLB Văn của 8 A và 8 B.

Lời giải

a) Ta có bảng thống kê cho biểu đồ trên như sau

	CLB Toán	CLB Văn
--	----------	---------

8 A	8	16
8 B	12	4
8C	10	8
8D	5	8
Tổng g	35	36

b) Đối với lớp $8A$ thì số học sinh tham gia CLB Văn cao gấp đôi số học sinh tham gia CLB Toán, còn với lớp $8B$ thì số học sinh tham gia CLB Toán lại cao gấp ba số học sinh tham gia CLB Văn.

c) Số học sinh lớp $8A$ là $8 : \frac{20}{100} = 40$.

d) Tỷ lệ số học sinh tham gia CLB Toán và CLB Văn của lớp $8A$ là $8 : 16 = \frac{1}{2}$

Tỷ lệ số học sinh tham gia CLB Toán và CLB Văn của lớp $8B$ là $12 : 4 = 3$

Vậy tỷ lệ số học sinh tham gia CLB Toán và CLB của lớp $8B$ lớn hơn lớp $8A$. Cụ thể, gấp 6 lần.

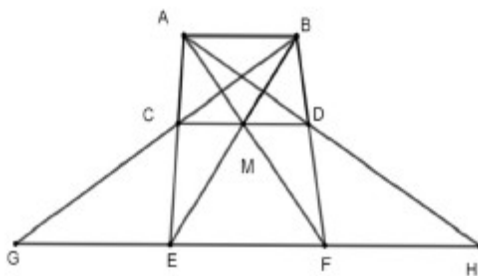
Bài 14. Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$), M là trung điểm của CD . Gọi E là giao điểm của AC và BM , F là giao điểm của BD và AM . Đường thẳng EF cắt BC và AD lần lượt tại G và H .

a) Chứng minh rằng $\frac{EA}{EC} = \frac{2AB}{CD}$.

b) Chứng minh rằng $EF \parallel CD$.

c) Chứng minh rằng $GE = EF = FH$.

Lời giải



a) Theo định lý Talet trong $\triangle EAB$ có:

$$\frac{EC}{EA} = \frac{CM}{AB} \quad (\text{Vì } AB \parallel CD)$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EC} = \frac{AB}{CM} = \frac{2AB}{2CM} = \frac{2AB}{CD} \quad (\text{đpcm})$$

b) Có $AB \parallel CD$ (gt) nên theo định lý Talet ta có:

$$\Rightarrow \frac{EC}{EA} = \frac{EM}{EB} = \frac{CM}{AB}$$

$$\text{Và } \frac{FM}{FA} = \frac{FD}{FB} = \frac{DM}{AB}$$

Mà $CM = DM$ nên $\frac{EM}{EB} = \frac{FM}{FA} \Rightarrow AB \parallel EF \Rightarrow CD \parallel EF$ (Vì $AB \parallel CD$) (đpcm)

c) Trong $\triangle BGE$ có $CM \parallel GE$ (Vì $EF \parallel CD$)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BE} = \frac{CM}{GE} \text{ (theo định lý Talét)}$$

Áp dụng định lý Talét trong tam giác BEF ta có:

$$\Rightarrow \frac{BM}{BE} = \frac{DM}{EF}$$

Trong $\triangle AFH$ có $DM \parallel FH$ (Vì $EF \parallel CD$)

$$\Rightarrow \frac{AM}{AF} = \frac{DM}{FH} \text{ (theo định lý Talét)}$$

Mà $AB \parallel FE$ (Vì $EF \parallel CD$)

$$\Rightarrow \frac{BM}{BE} = \frac{AM}{AF} \text{ (theo định lý Talét)}$$

$$\Rightarrow \frac{CM}{GE} = \frac{DM}{FH} = \frac{DM}{EF}$$

Mà $CM = DM$ (M là trung điểm của CD)

$$\Rightarrow GE = FH = EF \text{ (đpcm)}$$

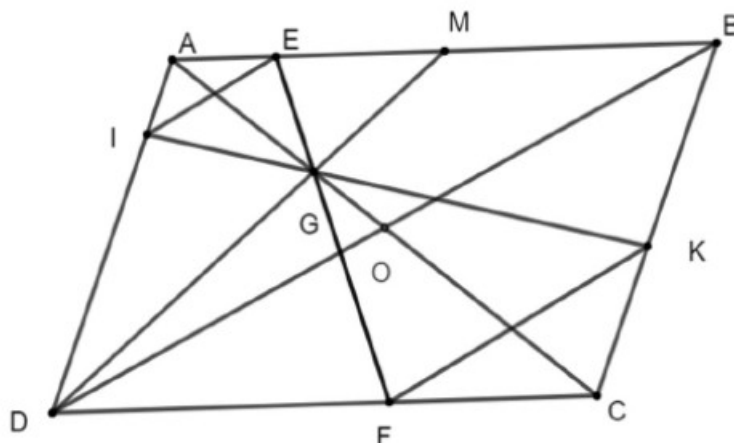
Bài 15. Cho hình bình hành $ABCD$, M là trung điểm của AB . Gọi G là giao điểm của AC và DM . Lấy điểm E thuộc đoạn thẳng AM . Các đường thẳng GE và CD cắt nhau tại F .

a) Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABD .

b) Chứng minh rằng $GC = 2GA$.

c) Kẻ đường thẳng qua G cắt các cạnh AD và BC lần lượt tại I và K . Chứng minh rằng $EI \parallel KF$.

Lời giải



a) Gọi $O = AC \cap BD$

$\Rightarrow O$ là trung điểm của BD

$\Rightarrow AO$ là đường trung tuyến của $\square ABD$

Và DM là đường trung tuyến của $\square ABD$ (gt)

$\Rightarrow G$ là trọng tâm của tam giác ABD .

b) Vì G là trọng tâm của tam giác ABD nên:

$$\text{Có } GO = \frac{1}{2}GA; AO = \frac{3}{2}GA$$

Mà $GC = GO + OC$

$$= GO + AO = \frac{1}{2}GA + \frac{3}{2}GA = 2GA$$

Vậy $GC = 2GA$ (đpcm)

c) Có: $AE \parallel FC \Rightarrow \frac{GA}{GC} = \frac{GE}{GF}$ (theo định lí Talet)

$$AI \parallel KC \Rightarrow \frac{GA}{GC} = \frac{GI}{GK} \text{ (theo định lí Talet)}$$

$$\Rightarrow \frac{GE}{GF} = \frac{GI}{GK} \left(= \frac{GA}{GC} \right) \Rightarrow IE \parallel KF \text{ (đpcm)}$$

Bài 16. Cho hình vuông $ABCD$ có tâm O , gọi E là trung điểm của AB . DE cắt AC tại F . BF cắt CD tại I .

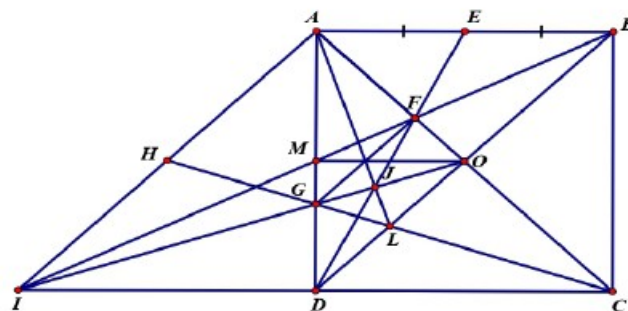
a) Chứng minh D là trung điểm IC .

b) Chứng minh $ABDI$ là hình bình hành.

c) Gọi H là trung điểm của AI . CH cắt BD, AD tại L, G . Chứng minh L là trung điểm của OD .

d) GO cắt DF tại J . Chứng minh A, J, L thẳng hàng.

Lời giải



a) Tứ giác $ABCD$ là hình vuông tâm O (GT) nên O là trung điểm của BD . Xét $\square ABD$ có:

O là trung điểm của BD (CMT).

E là trung điểm của AB (CMT)

AO, DE cắt nhau tại F

$\Rightarrow F$ là trọng tâm của $\square ABD$.

Giả sử $BF \cap AD = \{M\} \Rightarrow M$ là trung điểm của $AD \Rightarrow AM = MD$

Xét $\square ABM$ và $\square DIM$ có:

$$\angle BAM = \angle MDI = 90^\circ$$

$$AM = MD (\text{cmt})$$

$$\angle AMB = \angle DMI \text{ (2 góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \square ABM = \square DIM (\text{ G.C.G })$$

$$\Rightarrow AB = DI \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

Mà $AB = CD$ (tứ giác $ABCD$ là hình vuông)

$$\Rightarrow CD = DI$$

Vậy D là trung điểm IC .

b) Xét tứ giác $ABDI$ có:

$$\left. \begin{array}{l} AB = DI (\text{cmt}) \\ AB \parallel DI (AB \parallel CD) \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Tứ giác } ABDI \text{ là hình bình hành (DHNB)}$$

c) Ta có DO là đường trung bình của $\square ACI$

$$\Rightarrow DO \parallel AI (\text{TC}) \Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{CD}{CI} \text{ (Ta let)}$$

$$OL \parallel AH \Rightarrow \frac{CO}{CA} = \frac{OL}{AH} \text{ (HQ Talet)}$$

$$DL \parallel IH \Rightarrow \frac{CD}{CI} = \frac{DL}{HI} \text{ (HQ Talet)}$$

$$\Rightarrow \frac{OL}{AH} = \frac{DL}{HI}$$

$$\text{Mà } AH = HI (\text{gt})$$

$$\Rightarrow OL = DL$$

Vậy L là trung điểm của OD .

$$\text{d) } G \text{ là trọng tâm } \square AIC \Rightarrow \frac{AG}{AD} = \frac{2}{3}$$

$$F \text{ là trọng tâm } \square ABD \Rightarrow \frac{AF}{AO} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{AG}{AD} = \frac{AF}{AO} \Rightarrow GF \parallel DO \text{ (Ta let đảo)}$$

$$\Rightarrow GFOD \text{ là hình thang}$$

Mà L là trung điểm của OD .

$$GO \cap DF = \{J\}$$

$$GD \cap OE = \{A\}$$

Theo bổ đề hình thang đường thẳng nối giao điểm hai đường chéo và giao điểm hai cạnh bên thì đi qua trung điểm hai đáy do đó ta có A, J, L thẳng hàng.

Bài 17. Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh BC lấy $M (MB < MC)$. Từ A kẻ Ax vuông góc AM cắt đường thẳng CD tại N .

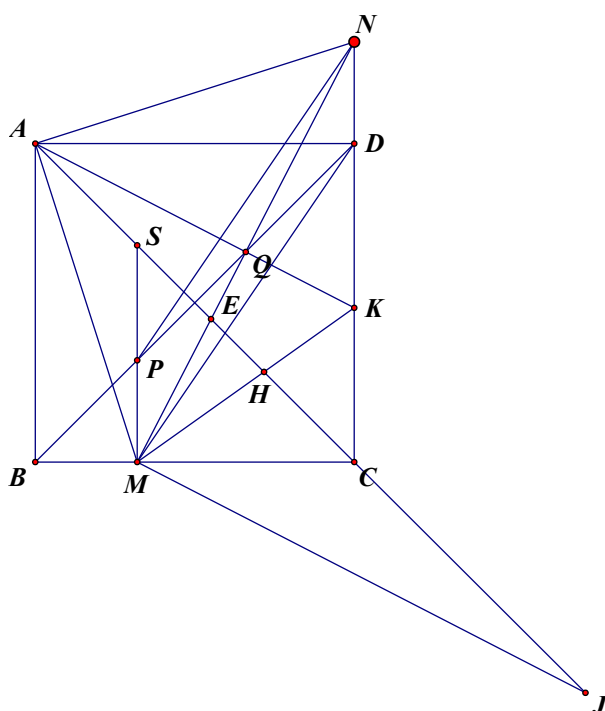
e) Chứng minh: $AN = AM$.

f) BD cắt MN tại Q . AQ cắt DC tại K . Chứng minh: $\frac{DK}{DC} = \frac{DQ}{QB}$.

g) Lấy điểm $P \in BD$ sao cho PM vuông góc BC . Chứng minh tứ giác $NDMP$ là hình bình hành.

h) Đường thẳng MP cắt AC tại S . Từ M kẻ đường thẳng song song với AK cắt đường thẳng AC tại J . MN giao với AC tại E , MK giao với AC tại H . Chứng minh: $ES \cdot JH = EH \cdot JS$.

Lời giải



a) Ta có tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = BC = CD = AD \\ \angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ \end{cases}$$

Xét $\triangle ADN$ và $\triangle ABM$ có:

$$\angle NAD = \angle BAM \text{ (cùng phụ } \angle DAM)$$

$$AB = AD \text{ (cmt)}$$

$$\angle ADN = \angle ABM = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ADN = \triangle ABM \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = AN \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

$$DK \parallel AB \Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{DQ}{BQ} \text{ (hệ quả Talet)}$$

Mà L là trung điểm của OD .

$$GO \cap DF = \{J\}$$

$$GD \cap OE = \{A\}$$

Theo bổ đề hình thang đường thẳng nối giao điểm hai đường chéo và giao điểm hai cạnh bên thì đi qua trung điểm hai đáy do đó ta có A, J, L thẳng hàng.

Bài 17. Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh BC lấy $M (MB < MC)$. Từ A kẻ Ax vuông góc AM cắt đường thẳng CD tại N .

e) Chứng minh: $AN = AM$.

f) BD cắt MN tại Q . AQ cắt DC tại K . Chứng minh: $\frac{DK}{DC} = \frac{DQ}{QB}$.

g) Lấy điểm $P \in BD$ sao cho PM vuông góc BC . Chứng minh tứ giác $NDMP$ là hình bình hành.

h) Đường thẳng MP cắt AC tại S . Từ M kẻ đường thẳng song song với AK cắt đường thẳng AC tại J . MN giao với AC tại E , MK giao với AC tại H . Chứng minh: $ES \cdot JH = EH \cdot JS$.

a) Ta có tứ giác $ABCD$ là hình vuông

$$\Rightarrow \begin{cases} AB = BC = CD = AD \\ \angle BAD = \angle ABC = \angle BCD = \angle ADC = 90^\circ \end{cases}$$

Xét $\triangle ADN$ và $\triangle ABM$ có:

$$\angle NAD = \angle BAM \text{ (cùng phụ } \angle DAM)$$

$$AB = AD \text{ (cmt)}$$

$$\angle ADN = \angle ABM = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ADN = \triangle ABM \text{ (g.c.g)} \Rightarrow AM = AN \text{ (Hai cạnh tương ứng)}$$

$$DK \parallel AB \Rightarrow \frac{DK}{AB} = \frac{DQ}{BQ} \text{ (hệ quả Talet)}$$

$$AB = CD \Rightarrow \frac{DK}{CD} = \frac{DQ}{BQ} \text{ (đpcm)}$$

c) Xét $\triangle BPM$ có:

$$PM \perp BM$$

$$\angle PBM = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle BPM \text{ vuông cân tại } M$$

$$\Rightarrow BM = MP$$

$$\text{Mà } BM = ND$$

$$\Rightarrow MP = ND$$

$$MP \parallel ND (\perp BC)$$

$$\Rightarrow NDMP \text{ là hình bình hành (DHNB)}$$

$$\text{d) Cmdr } AQ \text{ là trung trực } MN \text{ nên } KM = KN \text{ suy ra } \angle KMN = \angle KNM$$

$$\text{Nên } \angle KMN = \angle SMN \text{ do cùng bằng } \angle KMN$$

$$\text{Nên } ME \text{ là phân giác } \angle SMH$$

$$\text{Mà } MJ \perp ME \text{ (Do } MJ \parallel AQ, AQ \perp ME \text{ do } AQ \text{ là trung trực } MN)$$

Nên $\widehat{MJ}$ là phân giác ngoài của $\widehat{SMH}$

Suy ra $ES / EH = JS / JH$

Nên $ES.JH = EH.JS$

Bài 18. Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), vẽ đường cao AH . Trên tia HC lấy điểm D sao cho $HD = AH$. Đường thẳng vuông góc với BC tại D cắt AC tại E . Gọi M là trung điểm của BE , tia AM cắt BC tại G . Kẻ EI vuông góc AH .

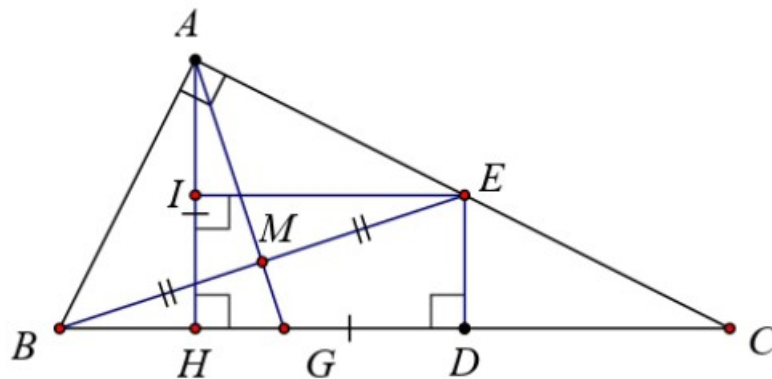
a) Chứng minh $HDEI$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $AE = AB$

c) Chứng minh $GB \cdot AC = GC \cdot AE$

d) Chứng minh $\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

Lời giải



a) Chứng minh $HDEI$ là hình chữ nhật.

Xét tứ giác $HDEI$ có

$$\widehat{H} = \widehat{D} = \widehat{I} = 90^\circ \text{ (GT)}$$

Suy ra tứ giác $HDEI$ là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $AE = AB$

$\square AEI$ vuông tại I có $\widehat{AEI} + \widehat{IAE} = 90^\circ$

$\widehat{BAH} + \widehat{IAE} = 90^\circ$ ($\square ABC$ vuông tại A)

Suy ra $\widehat{AEI} = \widehat{BAH}$

$\square AEI = \square BAH$ (g.c.g)

Hay $AE = AB$

c) Chứng minh $GB \cdot AC = GC \cdot AE$

$\square AEB$ có $AE = AB$ nên $\square AEB$ cân tại A

$\square AEB$ có AM là đường trung tuyến nên đồng thời AM là đường phân giác

$$\frac{BG}{GC} = \frac{AB}{AC}$$

Suy ra

Mà $AE = AB$

$$\text{nên } \frac{BG}{GC} = \frac{AE}{AC} \quad (1)$$

hay $GB \cdot AC = GC \cdot AE$ (đpcm)

d) Chứng minh $\frac{BG}{BC} = \frac{HD}{AH + HC}$

Ta có $\square ABC \sim \square HAC$ (g.g)

Suy ra $\frac{AB}{AC} = \frac{HA}{HC}$ hay $\frac{AE}{AC} = \frac{HA}{HC}$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{BG}{GC} = \frac{HA}{HC}$

Suy ra $\frac{GB}{GB + GC} = \frac{HA}{HA + HC}$ (Tính chất dãy tỉ số bằng nhau)

Mà $HA = HD$ (GT)

Nên $\frac{GB}{GB + GC} = \frac{HD}{HA + HC}$ (đpcm)

Bài 19. Cho $abc = 2$. Tính $B = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2c}{ac + 2c + 2}$.

Lời giải

$$B = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{b}{bc + b + 1} + \frac{2c}{ac + 2c + 2}$$

$$B = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{abc + ab + a} + \frac{2c}{ac + 2c + abc}$$

$$B = \frac{a}{ab + a + 2} + \frac{ab}{2 + ab + a} + \frac{2}{a + 2 + ab}$$

$$B = \frac{a + ab + 2}{ab + a + 2}$$

$$B = 1$$

Bài 20. Cho a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 0, ab + bc + ca = 0$. Tính $A = (a - 1)^{2023} + b^{2024} + (c + 1)^{2025}$.

Lời giải

Ta có $a + b + c = 0$

Suy ra $(a + b + c)^2 = 0$

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 0$$

Suy ra $a = b = c = 0$

$$A = (a - 1)^{2023} + b^{2024} + (c + 1)^{2025}$$

$$A = (0 - 1)^{2023} + 0^{2024} + (0 + 1)^{2025}$$

$$A = 0$$

Bài 21. Cho x, y, z là các số thực thỏa mãn: $xyz = 1$ và $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$.

Tính $A = (x^{68} - 1)(y^{69} - 1)(z^{70} - 1)$

Lời giải

Ta có $xyz = 1$

Suy ra $x = \frac{1}{yz}; y = \frac{1}{xz}; z = \frac{1}{xy}$

Lại có $x + y + z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

Suy ra $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$

$$\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} - \frac{1}{x} - \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = 0$$

$$\frac{x}{xyz} + \frac{y}{xyz} + \frac{z}{xyz} - \frac{yz}{xyz} + \frac{xz}{xyz} + \frac{xy}{xyz} = 0$$

$$\frac{1}{xyz}(x + y + z - yz - xz - xy) = 0$$

$$x + y + z - yz - xz - xy = 0$$

$$(x - xy) + (y - yz) + (z - xz) = 0$$

$$x(1 - y) + y(1 - z) + z(1 - x) = 0$$

Trường hợp 1: $x = y = z = 0$

$$A = (0^{68} - 1)(0^{69} - 1)(0^{70} - 1)$$

$$A = (0^{68} - 1)(0^{69} - 1)(0^{70} - 1)$$

$$A = -1$$

Trường hợp 2: $x = y = z = 1$

$$A = (1^{68} - 1)(1^{69} - 1)(1^{70} - 1)$$

$$A = 0$$

Vậy $A = -1$ và $A = 0$

Bài 22. Tìm GTNN của $B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$

Lời giải

$$B = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2xy + 2xz - 2x - 2y - 8z + 2000$$

$$= (x^2 + y^2 + z^2 + 1 + 2xz - 2xy - 2z - 2yz + 2y - 2x) + (y^2 + z^2 + 4 + 2yz - 4z - 4y) + (z^2 - 2z + 1) + 1994$$

$$= (x - y + z - 1)^2 + (y + z - 2)^2 + (z - 1)^2 + 1994$$

$$\text{Do } (x - y + z - 1)^2 \geq 0$$

$$(y + z - 2)^2 \geq 0$$

$$(z - 1)^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow B \geq 1994$$

$$\Rightarrow B \text{ đạt GTNN là } 1994 \text{ khi: } \begin{cases} x - y + z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Vậy B đạt GTNN là 1994 khi $x = y = z = 1$

Bài 23. Tìm GTNN của biểu thức: $B = xy(x - 2)(y + 6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045$

Lời giải

$$\begin{aligned}
B &= xy(x-2)(y+6) + 12x^2 - 24x + 3y^2 + 18y + 2045 \\
&= (x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x) + 3(y^2 + 6y) + 2045 \\
&= [(x^2 - 2x)(y^2 + 6y) + 3(y^2 + 6y)] + 12(x^2 - 2x + 3) + 2009 \\
&= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y) + 12(x^2 - 2x + 3) + 2009 \\
&= (x^2 - 2x + 3)(y^2 + 6y + 12) + 2009 \\
&= [(x-1)^2 + 2] \cdot [(y+3)^2 + 3] + 2009
\end{aligned}$$

Ta có:

$$(x-1)^2 \geq 0 \forall x \Leftrightarrow (x-1)^2 + 2 \geq 2$$

$$(y+3)^2 \geq 0 \forall y \Leftrightarrow (y+3)^2 + 3 \geq 3$$

$$\Rightarrow B = [(x-1)^2 + 2] \cdot [(y+3)^2 + 3] + 2009 \geq 2 \cdot 3 + 2009 = 2015$$

Vậy GTNN của biểu thức $B = 2015$ khi $x = 1$ và $y = -3$.

Bài 24. Tìm GTNN hoặc GTLN của: $M = \frac{27-12x}{x^2+9}$

Lời giải

a) GTNN $M = \frac{27-12x}{x^2+9}$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{27-12x}{x^2+9} \\
&= \frac{(x^2-12x+36) - (x^2+9)}{x^2+9} \\
&= \frac{(x-6)^2 - (x^2+9)}{x^2+9} \\
&= \frac{(x-6)^2}{x^2+9} - 1 \geq -1
\end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\frac{(x-6)^2}{x^2+9} = 0 \Leftrightarrow x = 6$

Vậy GTNN của M là -1 khi $x = 6$.

b) GTLN $M = \frac{27-12x}{x^2+9}$

$$\begin{aligned}
M &= \frac{27-12x}{x^2+9} \\
&= \frac{(4x^2+36) - (4x^2+12x+9)}{x^2+9} \\
&= \frac{4(x^2+9) - (2x+3)^2}{x^2+9} \\
&= 4 - \frac{(2x+3)^2}{x^2+9} \leq 4
\end{aligned}$$

Dấu " $=$ " xảy ra khi $\frac{(2x+3)^2}{x^2+9} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$

Vậy GTLN của M là 4 khi $x = \frac{-3}{2}$.

Bài 25. Tính giá trị của biểu thức $P = \frac{ax^2 + 1}{(x-y)(x-z)} + \frac{ay^2 + 1}{(y-x)(y-z)} + \frac{az^2 + 1}{(z-x)(z-y)}$.

Lời giải

Điều kiện x, y, z đôi một khác nhau.

Ta có

$$P = \frac{(ax^2 + 1)(y-z) - (ay^2 + 1)(x-z) + (az^2 + 1)(x-y)}{(x-y)(x-z)(y-z)}$$

Xét tử thức

$$T = (ax^2 + 1)(y-z) - (ay^2 + 1)(x-z) + (az^2 + 1)(x-y)$$

$$T = (ax^2 + 1)(y-z) - (ay^2 + 1)[(x-y) + (y-z)] + (az^2 + 1)(x-y)$$

$$T = (ax^2 + 1 - ay^2 - 1)(y-z) + (az^2 + 1 - ay^2 - 1)(x-y)$$

$$T = a(x-y)(y-z)(x+y) - a(y-z)(x-y)(y+z)$$

$$T = a(x-y)(y-z)(x+y-y-z) = a(x-y)(y-z)(x-z)$$

$$P = \frac{a(x-y)(x-z)(y-z)}{(x-y)(x-z)(y-z)} = a$$

Do đó