

BÀI TOÁN THỰC TẾ

CHƯƠNG VI. HÀM SỐ, ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

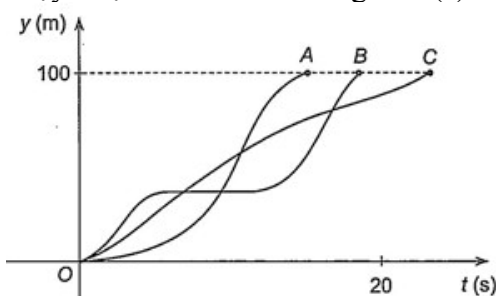
Bài 15. Hàm số

Câu 1. Giá thuê xe ô tô tự lái là 1,2 triệu đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 900 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của số ngày x mà khách thuê xe.

a. Viết công thức của hàm số $T = T(x)$.

b. Tính $T(2), T(3), T(5)$ và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

Câu 2. Trong một cuộc thi chạy 100 m, có ba học sinh dự thi. Biểu đồ trên Hình 6.9 mô tả quãng đường chạy được $y(m)$ theo thời gian $t(s)$ của mỗi học sinh.



Hình 6.9

a) Đường biểu diễn quãng đường chạy được của mỗi học sinh có là đồ thị hàm số hay không?

b) Học sinh nào về đích đầu tiên? Hãy cho biết ba học sinh đó có chạy hết quãng đường thi theo quy định hay không.

Câu 3. Để đổi nhiệt độ từ thang Celsius sang thang Fahrenheit, ta nhân nhiệt độ theo thang Celsius với $\frac{9}{5}$ sau đó cộng với 32.

a) Viết công thức tính nhiệt độ F ở thang Fahrenheit theo nhiệt độ C ở thang Celsius. Như vậy ta có F là một hàm số của C .

b) Hoàn thành bảng sau:

C (Celsius)	-10	0	10	20	30	40
F (Fahrenheit)						

c) Vẽ đồ thị của hàm số $F = F(C)$ trên đoạn $[-10; 40]$.

Câu 4. Giá phòng của một khách sạn là 750 nghìn đồng một ngày cho hai ngày đầu tiên và 500 nghìn đồng cho mỗi ngày tiếp theo. Tổng số tiền T phải trả là một hàm số của số ngày x mà khách ở tại khách sạn.

a) Viết công thức của hàm số $T = T(x)$.

b) Tính $T(2), T(5), T(7)$ và cho biết ý nghĩa của mỗi giá trị này.

Câu 5. Bảng sau đây cho biết giá nước sinh hoạt (chưa tính thuế VAT) của hộ dân cư theo mức sử dụng.

STT	Mức sử dụng nước sinh hoạt của hộ dân cư (m^3 / tháng/hộ)	Giá nước (VND / m^3)
1	$10m^3$ đầu tiên	5 973
2	Từ trên $10m^3$ đến $20m^3$	7 052
3	Từ trên $20m^3$ đến $30m^3$	8 669

4	Trên $30m^3$	15 929
---	--------------	--------

a) Hãy tính số tiền phải trả ứng với mỗi lượng nước sử dụng ở bảng sau:

Lượng nước sử dụng (m^3)	10	20	30	40
Số tiền (VND)				

b) Gọi x là lượng nước đã sử dụng (đơn vị m^3) và y là số tiền phải trả tương ứng (đơn vị VND). Hãy viết công thức mô tả sự phụ thuộc của y vào x .

Câu 6. Có hai địa điểm A, B cùng nằm trên một tuyến quốc lộ thẳng. Khoảng cách giữa A và B là $20km$. Một xe máy xuất phát từ A lúc 6 giờ và chạy với vận tốc $40km/h$ theo chiều từ A đến B . Một ô tô xuất phát từ B lúc 8 giờ và chạy với vận tốc $80km/h$ theo cùng chiều với xe máy. Coi chuyển động của xe máy và ô tô là thẳng đều. Chọn A làm mốc, chọn thời điểm 6 giờ làm mốc thời gian và chọn chiều từ A đến B làm chiều dương. Khi đó tọa độ của xe máy và ô tô sẽ là những hàm số của biến thời gian.

a) Viết phương trình chuyển động của xe máy và ô tô (tức là công thức của hàm tọa độ theo thời gian).

b) Vẽ đồ thị hàm tọa độ của xe máy và ô tô trên cùng một hệ trục tọa độ.

c) Căn cứ vào đồ thị vẽ được, hãy xác định vị trí và thời điểm ô tô đuổi kịp xe máy.

d) Kiểm tra lại kết quả tìm được ở câu c) bằng cách giải các phương trình chuyển động của xe máy và ô tô.

Bài 16. Hàm số bậc hai

Câu 7. Hai bạn An và Bình trao đổi với nhau:

An nói: Tôi đọc ở một tài liệu thấy nói rằng cổng Trường Đại học Bách khoa Hà Nội có dạng một parabol, khoảng cách giữa hai chân cổng là $8m$ và chiều cao của cổng tính từ một điểm trên mặt đất cách chân cổng là $0,5m$ là $2,93m$. Từ đó tôi tính ra được chiều cao của cổng parabol đó là $12m$.



Hình 6.14. Cổng parabol của trường Đại học Bách khoa Hà Nội

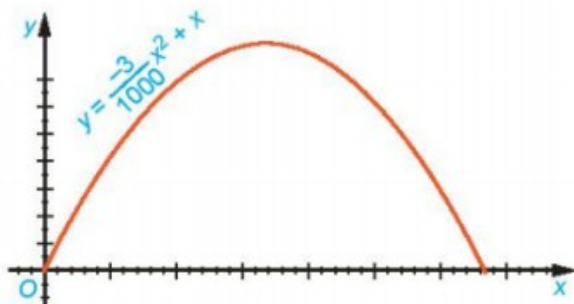
Sau một hồi suy nghĩ, Bình nói: Nếu dữ kiện như bạn nói, thì chiều cao của cổng parabol mà bạn tính ra ở trên là không chính xác.

Dựa vào thông tin mà An đọc được, em hãy tính chiều cao của cổng Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội để xem kết quả bạn An tính được có chính xác không nhé.

- Câu 8.** Bác Hùng dùng $40m$ lưới thép gai rào thành một mảnh vườn hình chữ nhật để trồng rau.
- Tính diện tích mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng x (mét) của nó.
 - Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất mà bác Hùng có thể rào được.

Câu 9: Quỹ đạo của một vật được ném lên từ gốc O (được chọn là điểm ném) trong mặt phẳng tọa độ Oxy

là một parabol có phương trình $y = \frac{-3}{1000}x^2 + x$, trong đó x (mét) là khoảng cách theo phương ngang trên mặt đất từ vị trí của vật đến gốc O , y (mét) là độ cao của vật so với mặt đất



- Tìm độ cao cực đại của vật trong quá trình bay.
 - Tính khoảng cách từ điểm chạm đất sau khi bay của vật đến gốc O . Khoảng cách này gọi là tầm xa của quỹ đạo.
- Câu 9.** Bác Hùng dùng $200m$ hàng rào dây thép gai để rào miếng đất đủ rộng thành một mảnh vườn hình chữ nhật.
- Tìm công thức tính diện tích $S(x)$ của mảnh vườn hình chữ nhật rào được theo chiều rộng $x(m)$ của mảnh vườn đó.
 - Tìm kích thước của mảnh vườn hình chữ nhật có diện tích lớn nhất có thể rào được.
- Câu 10.** Một quả bóng được ném lên trên theo phương thẳng đứng từ mặt đất với vận tốc ban đầu $14,7m/s$. Khi bỏ qua sức cản của không khí, độ cao của quả bóng so với mặt đất (tính bằng mét) có thể mô tả bởi phương trình $h(t) = -4,9t^2 + 14,7t$.
- Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng đạt độ cao lớn nhất?
 - Tìm độ cao lớn nhất của quả bóng.
 - Sau khi ném bao nhiêu giây thì quả bóng rơi chạm đất?
- Câu 11.** Một hòn đá được ném lên trên theo phương thẳng đứng. Khi bỏ qua sức cản không khí, chuyển động của hòn đá tuân theo phương trình sau: $y = -4,9t^2 + mt + n$, với m, n là các hằng số. Ở đây $t = 0$ là thời điểm hòn đá được ném lên, $y(t)$ là độ cao của hòn đá tại thời điểm t (giây) sau khi ném và $y = 0$ ứng với bóng chạm đất.
- Tìm phương trình chuyển động của hòn đá, biết rằng điểm ném cách mặt đất $1,5m$ và thời gian để hòn đá đạt độ cao lớn nhất là $1,2$ giây sau khi ném.
 - Tìm độ cao của hòn đá sau 2 giây kể từ khi bắt đầu ném.
 - Sau bao lâu kể từ khi ném, hòn đá rơi xuống mặt đất (Kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai)?

- Câu 12.** Một rạp chiếu phim có sức chứa 1000 người. Với giá vé là 40000 đồng, trung bình sẽ có khoảng 300 người đến rạp xem phim mỗi ngày. Để tăng số lượng vé bán ra, rạp chiếu phim đã khảo sát thị trường và thấy rằng nếu giá vé cứ giảm 10000 đồng thì sẽ có thêm 100 người đến rạp mỗi ngày.
- a) Tìm công thức của hàm số $R(x)$ mô tả doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp chiếu phim khi giá vé là x nghìn đồng.
 - b) Tìm mức giá vé để doanh thu từ tiền bán vé mỗi ngày của rạp là lớn nhất.

Bài 17. Dấu của tam thức bậc hai

- Câu 13.** Một vật được ném theo phương thẳng đứng xuống dưới từ độ cao $320m$ với vận tốc ban đầu $v_0 = 20m/s$. Hỏi sau ít nhất bao nhiêu giây, vật đó cách mặt đất không quá $100m$? Giả thiết rằng sức cản của không khí là không đáng kể.

Lời giải

Chọn trục Oy thẳng đứng, chiều dương hướng xuống, gốc tọa độ O tại điểm ném và gốc thời gian

là lúc ném. Có $y = v_0 t - g \frac{t^2}{2} = 20t + 5t^2$, với g là gia tốc tự do, lấy $g = 10$

Nếu vật cách mặt đất $100m$ thì quãng đường vật đã đi được là $y = 320 - 100 = 220m$

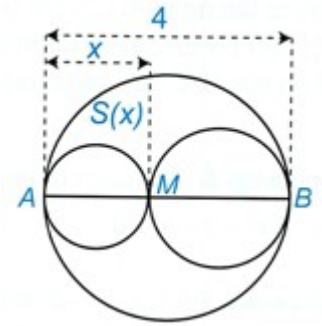
Để vật đó cách mặt đất không quá $100m$, thì quãng đường y đi được của vật phải lớn hơn 220.

Ta có bất phương trình: $20t + 5t^2 > 220$

$$\Leftrightarrow 5t^2 + 20t - 220 > 0 \Leftrightarrow t > -2 + 4\sqrt{3} \approx 4,93 \text{ hoặc } t < -2 - 4\sqrt{3} \approx -8,93 \text{ (loại)}$$

Vậy sau ít nhất 4,93 giây thì vật đó cách mặt đất không quá $100m$.

- Câu 14.** Xét đường tròn đường kính $AB = 4$ và một điểm M di chuyển trên đoạn AB , đặt $AM = x$. Xét hai đường tròn đường kính AM và MB . Kí hiệu $S(x)$ là diện tích phần hình phẳng nằm trong hình tròn lớn và nằm ngoài hai hình tròn nhỏ. Xác định các giá trị của x để diện tích $S(x)$ không vượt quá một nửa tổng diện tích hai hình tròn nhỏ.



Lời giải

- $AM = x, AB = 4 \Rightarrow MB = 4 - x$, nên bán kính đường tròn đường kính AM là $\frac{x}{2}$, bán kính đường tròn đường kính MB là $\frac{4-x}{2}$.

- Diện tích hình tròn đường kính AM là: $S_1 = \pi \frac{x^2}{4}$.

Diện tích hình tròn đường kính MB là: $S_2 = \pi \frac{(4-x)^2}{4}$.

Diện tích hình tròn đường kính AB là: $S = \pi \cdot 16$.

- Diện tích $S(x) = \pi \cdot 16 - \pi \frac{x^2}{4} - \pi \frac{(4-x)^2}{4} = \pi \frac{-2x^2 + 8x + 48}{4}$

- Theo đề bài $S(x) \leq \frac{1}{2}(S_1 + S_2)$

$$\Leftrightarrow \pi \frac{-2x^2 + 8x + 48}{4} \leq \frac{1}{2} \left(\pi \frac{x^2}{4} + \pi \frac{(4-x)^2}{4} \right)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 8x + 48 \leq \frac{1}{2}(x^2 + (4-x)^2)$$

$$\Leftrightarrow -2x^2 + 8x + 48 \leq x^2 - x + 8$$

$$\Leftrightarrow -2,45 \leq x \leq 5,45$$

Mà $x > 0$ nên ta có: $0 < x \leq 5,45$

Câu 15. Một công ty đồ gia dụng sản xuất bình đựng nước thấy rằng khi đơn giá của bình đựng nước là x nghìn đồng thì doanh thu R (tính theo đơn vị nghìn đồng) sẽ là $R(x) = -560x^2 + 50000x$.

a) Theo mô hình doanh thu này, thì đơn giá nào là quá cao dẫn đến doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 (tức là sẽ không có người mua)?

b) Với khoảng đơn giá nào của bình đựng nước thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng?

Lời giải

a) Doanh thu từ việc bán bình đựng nước bằng 0 tức là $R(x) = -560x^2 + 50000x = 0$ hay $x = 0$ hoặc $x \approx 89$.

Vậy theo mô hình đã cho, với đơn giá 89 nghìn đồng thì công ty sẽ không có doanh thu (đơn giá cao quá dẫn đến không có ai mua hàng).

b) Doanh thu vượt mức 1 tỉ đồng tức là $R(x) = -560x^2 + 50000x > 1000000$, hay $56x^2 - 5000x + 100000 < 0$. Giải bất phương trình ta được $30,25 < x < 59,04$. Vậy đơn giá của bình đựng nước từ khoảng 31 nghìn đồng đến 59 nghìn đồng thì doanh thu từ việc bán bình đựng nước vượt mức 1 tỉ đồng.

Câu 16. Một viên đạn pháo được bắn ra khỏi nòng pháo với vận tốc ban đầu $500m/s$, hợp với phương ngang một góc bằng 45° . Biết rằng khi bỏ qua sức cản của không khí, quỹ đạo chuyển động của

một vật ném xiên sẽ tuân theo phương trình: $y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha$ trong đó x là khoảng cách (tính bằng mét) vật bay được theo phương ngang, vận tốc ban đầu v_0 của vật hợp với phương ngang một góc α và $g = 9,8m/s^2$ là gia tốc trọng trường.

a) Viết phương trình chuyển động của viên đạn.

b) Để viên đạn bay qua một ngọn núi cao 4000 mét thì khẩu pháo phải đặt cách chân núi một khoảng cách bao xa?

Lời giải

a) Phương trình chuyển động của viên đạn là $y = \left(\frac{-9,8}{2 \cdot 500^2 \cdot \cos^2 45^\circ} \right) x^2 + (\tan 45^\circ) x$ hay

$$y = \frac{-9,8}{250000} x^2 + x$$

b) Để viên đạn bay qua một ngọn núi cao 4000 mét thì

$$y = \frac{-9,8}{250000} x^2 + x > 4000$$

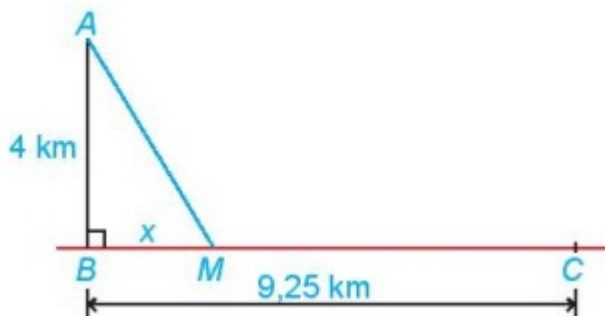
. Thu gọn ta được bất phương trình bậc hai

$$9,8x^2 - 250000x + 1000000000 < 0$$

. Giải bất phương trình này ta được $4967,17 < x < 20543,03$. Vậy khẩu pháo phải đặt cách chân núi trong khoảng từ 4967 m đến 20543 m (tất nhiên là phải tính đến tầm bắn của khẩu pháo nữa) thì viên đạn sẽ bay qua đỉnh núi.

Bài 18. Phương trình quy về phương trình bậc hai

Câu 17. Hằng ngày bạn Hùng đều đón bạn Minh đi học tại một vị trí trên lề đường thẳng đến trường. Minh đứng tại vị trí A cách lề đường một khoảng $50m$ để chờ Hùng. Khi nhìn thấy Hùng đạp xe đến địa điểm B , cách mình một đoạn $200m$ thì Minh bắt đầu đi bộ ra lề đường để bắt kịp xe. Vận tốc đi bộ Minh là $5 km/h$, vận tốc xe đạp của Hùng là $15 km/h$. Hãy xác định vị trí C trên lề đường để hai bạn gặp nhau mà không bạn nào phải chờ người kia (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Đặt $CH = x (x > 0)$

Ta có: $AC = \sqrt{x^2 + 50^2} = \sqrt{x^2 + 2500}$

$$BH = \sqrt{200^2 - 50^2} = 50\sqrt{15}$$

$$BC = BH - CH = 50\sqrt{15} - x$$

Vì hai bạn gặp nhau tại C , nên thời gian đi từ A đến C bằng thời gian đi từ B đến C , nên ta có phương trình:

$$\frac{50\sqrt{15} - x}{15} = \frac{\sqrt{x^2 + 2500}}{5}$$

$$\Leftrightarrow 50\sqrt{15} - x = 3 \cdot \sqrt{x^2 + 2500}$$

Bình phương hai vế được:

$$37500 - 100\sqrt{15} \cdot x + x^2 = 9 \cdot (x^2 + 2500)$$

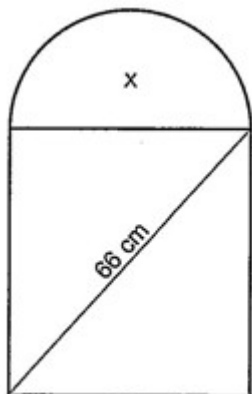
$$\Leftrightarrow 8x^2 + 100\sqrt{15} \cdot x - 15000 = 0$$

$$\Leftrightarrow x \approx 25,4 \text{ hoặc } x \approx -73,8$$

Thử lại phương trình và điều kiện $x > 0$ thì $x = 25,4$ thỏa mãn.

Vậy vị trí điểm C là cách H 1 khoảng 25,4 m.

- Câu 18.** Mặt cắt đứng của cột cây số trên quốc lộ có dạng nửa hình tròn ở phía trên và phía dưới có dạng hình chữ nhật (xem hình bên). Biết rằng đường kính của nửa hình tròn cũng là cạnh phía trên của hình chữ nhật và đường chéo của hình chữ nhật có độ dài 66 cm . Tìm kích thước của hình chữ nhật, biết rằng diện tích của phần nửa hình tròn bằng 0,3 lần diện tích của phần hình chữ nhật. Lấy $\pi = 3,14$ và làm tròn kết quả đến chữ số thập phân thứ hai.



Mặt cắt của cột cây số

Lời giải

Gọi đường kính của nửa hình tròn là $x(\text{cm})(x > 0)$. Độ dài cạnh bên của hình chữ nhật là

$\sqrt{66^2 - x^2}$. Diện tích nửa hình tròn là $\frac{3,14x^2}{8}$. Diện tích hình chữ nhật là $x\sqrt{66^2 - x^2}$. Theo giả

thiết ta có: $\frac{3,14x^2}{8} = 0,3x\sqrt{66^2 - x^2} \Leftrightarrow 157x = 120\sqrt{66^2 - x^2} \Leftrightarrow x^2 = \frac{62726400}{39049} \Leftrightarrow x \approx \pm 40,08$.

Vậy kích thước của hình chữ nhật khoảng $40,08 \text{ cm} \times 52,44 \text{ cm}$.