40 BÀI TOÁN THỰC TẾ TOÁN 12 ÔN TẬP GIỮA HỌC KỲ I

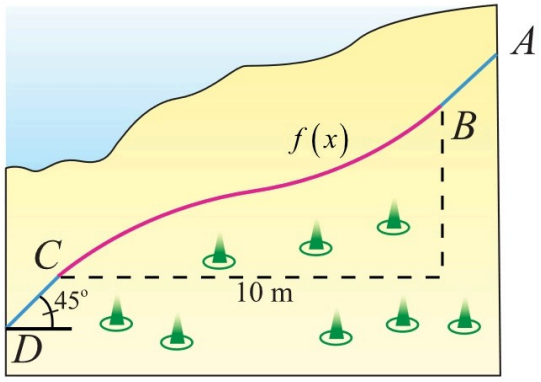
NĂM HỌC: 2026 – 2027

Câu 1. Một con đường trượt tuyết nối điểm A đến điểm D, đi qua điểm B,C được xây dựng theo mô hình đảm bảo an toàn và đòi hỏi phải có những điều kiện sau:

- Từ A đến B là một đoạn thẳng có độ dốc bằng độ dốc của con đường đi từ C đến D, góc tạo bởi CD và phương ngang bằng 45 độ.

- Từ B đến C là một đồ thị hàm bậc ba $y=f(x)$ thoả mãn con đường AB,CD là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$.

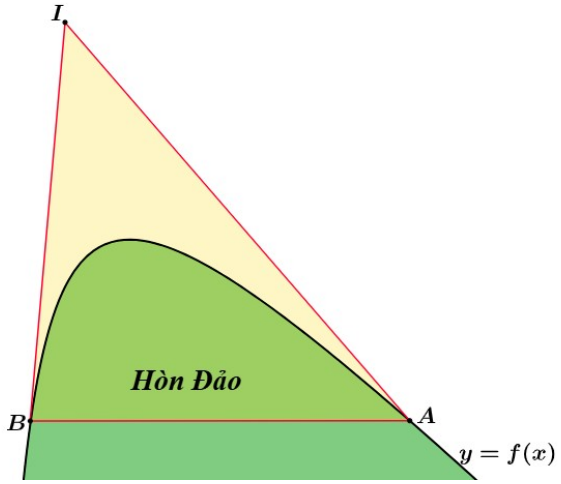
Khoảng cách giữa hai điểm $\mathrm{B,C}$ theo phương ngang và phương thẳng đứng lần lượt là 10 mét và 4 mét (tham khảo như hình vẽ).



Độ dốc nhỏ nhất của con đường trượt tuyết bằng bao nhiêu? (biết rằng độ dốc tại một điểm có hoành độ x_0 bằng $|f'(x_0)|$)

Câu 2. Trong hệ trục Oxy đường biên của một ***Hòn đảo*** được mô hình hóa bởi hàm số:

$f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 12}{x}(x > 0)$ *(đơn vị mỗi trục là* $100m$*)*. Ban quản lý Hòn Đảo muốn quây một vùng tam giác an toàn để người dân có thể vui chơi và tắm biển ở khu vực đó. Đặt cố định một điểm ngoài biển tại tọa độ $I(2;8)$ sau đó căng 2 tấm lưới bảo vệ IA, IB với hai điểm $A, B\ (x_A > x_B > 0)$ nằm trên đường biên và luôn thỏa mãn $AB // Ox$.



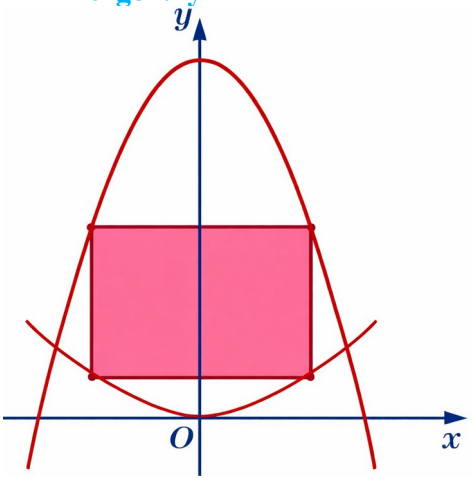
a) Đỉnh cao nhất của đường biên Hòn đảo *(điểm cực đại của hàm số)* nằm cách trục hoành một khoảng 307 mét.*(làm tròn đến hàng đơn vị)*

b) Tâm đối xứng của đồ thị hàm số $f(x) = \dfrac{-x^2 + 10x - 12}{x}$ là $M(0;10)$

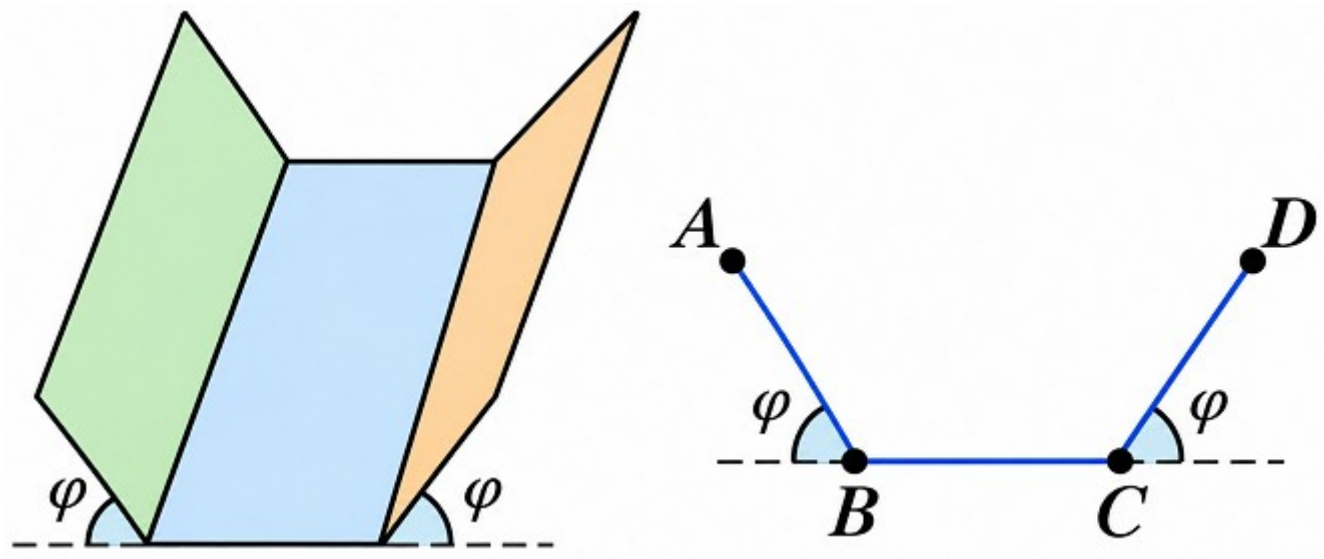
c) Quãng đường ngắn nhất từ hòn đảo đến điểm I là $510(m)$.*(làm tròn đến hàng đơn vị)*

d) Nếu điều chỉnh dây phao sao cho khoảng cách từ trạm I đến dây phao AB bằng đúng chiều dài dây phao AB thì diện tích vùng an toàn $VIAB$ là $605.000\ (m^2)$.

Câu 3. Cho một hình chữ nhật có hai điểm nằm trên đồ thị hàm số $y = \dfrac{1}{4}x^2$ và hai điểm còn lại nằm trên đồ thị hàm số $y = 5 - x^2$ trên khoảng $(-2;2)$ như hình vẽ bên. Hình chữ nhật đó có diện tích lớn nhất là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Câu 4. Ông Dũng định làm một máng thoát nước mưa từ một miếng tôn hình chữ nhật có chiều dài 2 m và chiều rộng 90 cm. Ông Dũng chia chiều rộng của miếng tôn thành 3 phần bằng nhau, mỗi phần dài 30 cm, rồi gập hai bên lên một góc $\varphi\ (0^\circ<\varphi<90^\circ)$ như hình vẽ dưới đây.



Mặt cắt ngang của máng là hình thang cân $ABCD$ có đáy lớn AD, đáy nhỏ BC và $AB=BC=CD=30$ (cm) (minh hoạ hình bên trên). Tìm số đo góc φ (đơn vị: độ) để diện tích mặt cắt ngang của máng nước lớn nhất.

Câu 5. Một cốc cà phê vừa pha có nhiệt độ 85°C được đặt trong một căn phòng có nhiệt độ không đổi 25°C. Theo định luật làm nguội Newton, nhiệt độ của cốc cà phê sau t phút kể từ khi pha là $T(t)=25+60e^{-kt}$ (đơn vị: °C), trong đó k là một hằng số dương. Sau 10 phút, nhiệt độ cà phê đo được là 65°C. Hỏi sau bao nhiêu phút kể từ khi pha thì nhiệt độ cà phê giảm xuống còn 45°C (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?

Câu 6. Một vệ tinh rời quỹ đạo Trái Đất theo đường cong $y=\dfrac{3x^2-x+5}{x-1}\ (x>1)$ (đơn vị km). Có 2 chùm tia laser tham chiếu được phóng dọc theo hai đường tiệm cận của quỹ đạo này. Các kỹ sư nhận

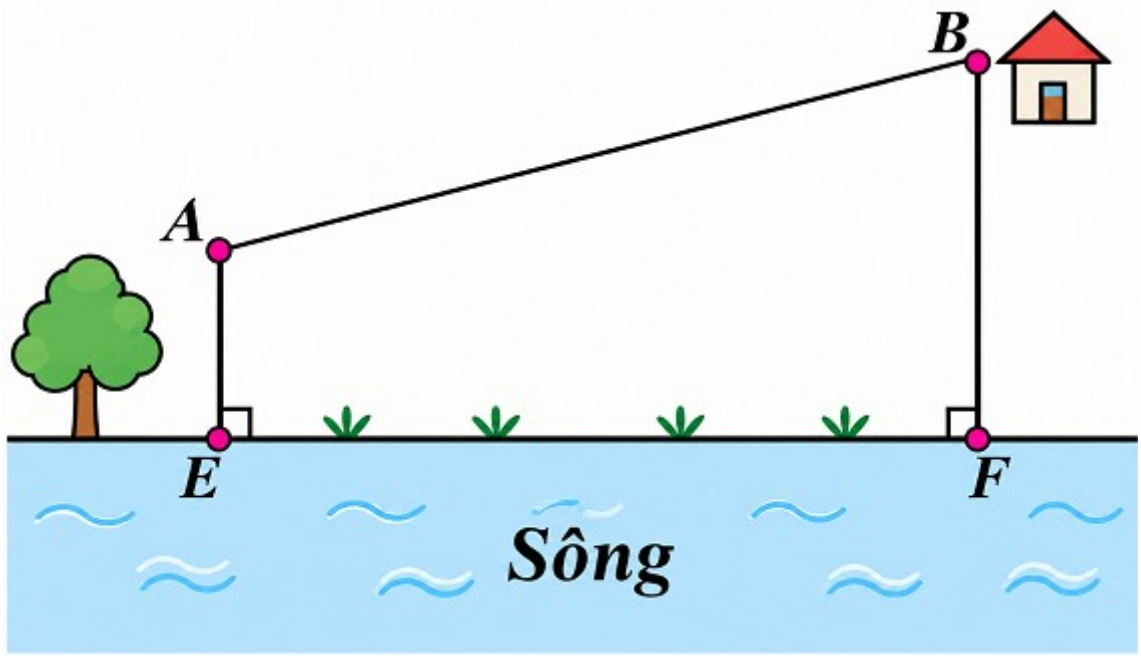
thấy, cho dù vệ tinh M bay đến đâu trên quỹ đạo, tích khoảng cách từ M đến hai chùm tia laser luôn là một hằng số an toàn C. Tính giá trị của $\frac{10}{7}C^2$?

Câu 7. Một nhóm phát triển phần mềm độc lập cung cấp một ứng dụng Trí tuệ nhân tạo hỗ trợ quản lý công việc và học tập cá nhân. Mỗi người dùng đăng ký bản quyền sử dụng sẽ phải trả mức phí cố định là 2 triệu đồng/năm. Tổng chi phí duy trì hệ thống lưu trữ đám mây và cập nhật phần mềm trong một năm phụ thuộc vào số lượng người dùng $x\left(x\in N^*\right)$ đang sử dụng và được mô hình hóa bởi hàm số $C\left(x\right)=10ln\left(x\right)+50$ (triệu đồng). Để nhóm phát triển đạt mức lợi nhuận tối thiểu là 200 triệu đồng trong một năm, họ cần thu hút được ít nhất bao nhiêu người dùng đăng ký phần mềm đó?

Câu 8. Một nhà máy A chuyên sản xuất một loại sản phẩm cho nhà máy B, nhà máy A chỉ bán sản phẩm cho nhà máy B và nhà máy B cam kết thu mua hết số sản phẩm mà nhà máy A sản xuất được. Nhà máy A có khả năng sản xuất được tối đa là 200 tấn sản phẩm trong 1 tháng. Nếu bán ra x tấn sản phẩm cho nhà máy B thì giá bán mỗi tấn sản phẩm là $45-0,0002x^2$ triệu đồng. Trong một tháng nhà máy A phải chi phí cho nhân công và chi cho khấu hao máy móc một lượng cố định là 150 triệu đồng, ngoài ra khi sản xuất mỗi tấn sản phẩm thì nhà máy phải chi phí thêm cho mua nguyên liệu là 34 triệu đồng. Biết rằng nhà máy A phải nộp 6% doanh thu cho cơ quan thuế. Tính lợi nhuận sau thuế (lợi nhuận sau khi đã trừ tiền thuế) lớn nhất thu được trong 1 tháng của nhà máy A (đơn vị tính là triệu đồng và kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 9. Một hộ gia đình nuôi tôm thẻ chân trắng trong một ao có diện tích 2 000 m². Theo kinh nghiệm, nếu thả nuôi với mật độ x con/m² $(0<x<300)$ thì tỉ lệ tôm sống đến khi thu hoạch là $1-\frac{x}{300}$ và khối lượng trung bình mỗi con khi thu hoạch là $24-0,08x$ (gam). Như vậy thả càng dày thì số tôm càng nhiều, nhưng tôm chết càng nhiều và càng nhỏ. Hỏi sản lượng tôm lớn nhất mà ao có thể đạt được là bao nhiêu ki-lô-gam (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

Câu 10. Cho hai vị trí A,B cách nhau 250 m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ.



Khoảng cách từ A và từ B đến bờ sông lần lượt là 55 m và 125 m. Một người đi từ A đến bờ sông để lấy nước mang về B. Đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi là bao nhiêu mét?

Câu 11. Bác Minh mua một chiếc ti vi tại một cửa hàng với giá 21,5 triệu đồng và đã trả trước 10 triệu đồng ngay khi nhận ti vi. Số tiền còn lại bác lựa chọn trả góp trong vòng 12 tháng với lãi suất 3,5%/tháng theo hình thức lãi kép trên dư nợ giảm dần, tiền lãi được tính dựa trên số dư nợ thực tế tại thời điểm tính lãi. Biết rằng, vào cuối mỗi tháng, bác Minh phải trả cho cửa hàng một số tiền không đổi là m triệu đồng để sau đúng 12 tháng thì hết nợ. Giá trị của m bằng bao nhiêu? (Không làm tròn các kết quả trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần trăm).

Câu 12. Một hạt chuyển động dọc theo trục Ox. Vị trí của hạt (đơn vị: mét) tại thời điểm t (giây) được xác định bởi hàm số: $x(t)=20t^2e^{-0,5t}$ (m), với $t\geq 0$. Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Vận tốc xuất phát của hạt tại thời điểm t = 0 là 20 m/s.

b) Trong suốt quá trình chuyển động, hạt chỉ đổi chiều chuyển động đúng một lần duy nhất.

c) Khoảng cách xa nhất mà hạt đạt được so với gốc tọa độ O là $320e^{-2}$ (m).

d) Tổng quãng đường hạt đi được không quá $320e^{-2}$ (m).

Câu 13. Một nhà máy sản xuất X hoạt động tại khu vực gần một dòng suối lớn. Trong quá trình sản xuất, nhà máy thải ra một lượng chất ô nhiễm đáng kể vào môi trường, gây ảnh hưởng nghiêm trọng đến chất lượng nước và sức khoẻ cộng đồng. Để cải thiện tình hình và tuân thủ các quy định về bảo vệ môi trường, nhà máy đã quyết định đầu tư vào một hệ thống xử lý nước thải hiện đại. Chi phí để loại bỏ $x\%$ chất ô nhiễm từ nguồn nước thải được mô hình hoá bởi hàm số $C(x)=\dfrac{2x+1}{1-0,01x}$ (triệu đồng), $0\leq x<100$. Các mệnh đề sau đây đúng hay sai?

a) Chi phí để loại bỏ 20% chất ô nhiễm là 51,52 triệu đồng.

b) Nhà máy không thể loại bỏ 100% chất ô nhiễm.

c) Để chi phí không quá 200 triệu đồng thì nhà máy chỉ có thể xử lý tối đa 49,75% chất ô nhiễm.

d) Nếu nhà máy giảm từ 20% chất ô nhiễm trở lên thì doanh thu sẽ tăng lên (nhờ vào việc nâng cao uy tín và hình ảnh thương hiệu) được biểu diễn bởi hàm số $R(x)=12x-240$ (triệu đồng). Khi đó lợi nhuận cho việc loại bỏ chất ô nhiễm có thể đạt hơn 177 triệu đồng.

Câu 14. Một hồ bơi được khử trùng bằng clo. Mỗi buổi sáng, nhân viên đổ thêm 1,5 kg clo vào hồ. Biết rằng sau mỗi ngày đêm (từ ngay sau lần đổ này đến ngay trước lần đổ tiếp theo), lượng clo trong hồ bị phân hủy mất 40%. Gọi u_n là lượng clo (kg) có trong hồ ngay sau lần đổ thứ n (trước lần đổ đầu tiên, trong hồ không có clo). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:

a) Ngay sau lần đổ thứ hai, lượng clo trong hồ là 2,4 kg.

b) Dãy số (u_n) là một cấp số nhân.

c) Lượng clo trong hồ ngay sau mỗi lần đổ luôn nhỏ hơn 3,75 kg.

d) Cần đổ clo ít nhất 8 lần thì lượng clo trong hồ ngay sau lần đổ mới đạt từ 3,7 kg trở lên.

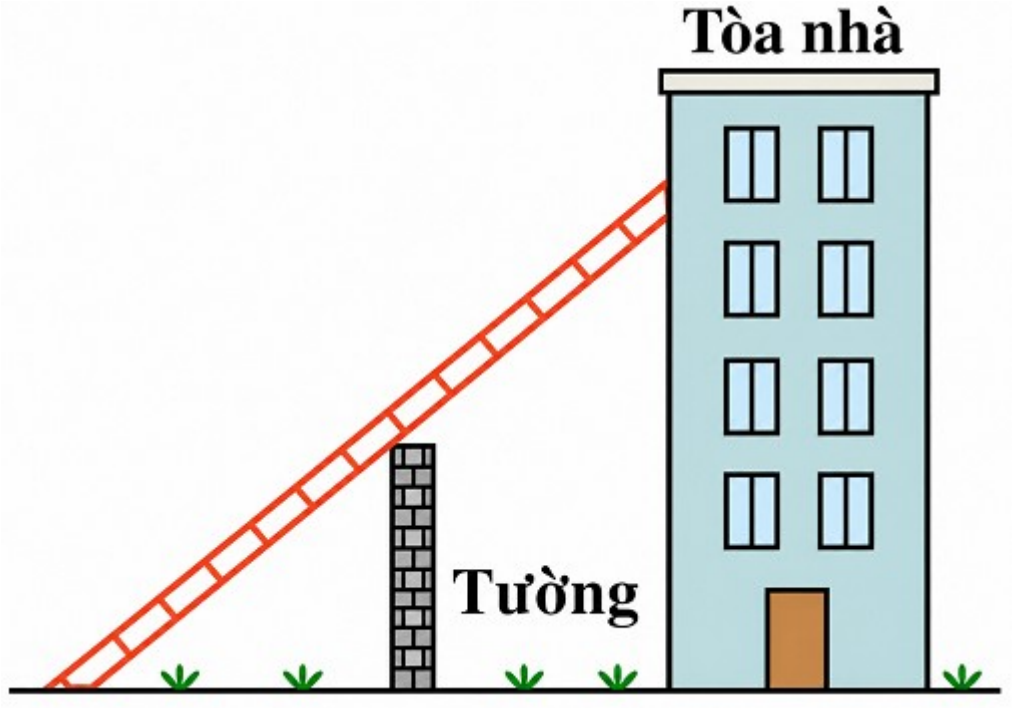
Câu 15. Một hợp tác xã chăn nuôi dự định trộn hai loại thức ăn gia súc X và Y để tạo thành thức ăn hỗn hợp cho gia súc. Giá một bao loại X là 260 nghìn đồng, giá một bao loại Y là 210 nghìn đồng. Mỗi bao loại X chứa 2 đơn vị chất dinh dưỡng A, 2 đơn vị chất dinh dưỡng B và 2 đơn vị chất dinh dưỡng C. Mỗi bao loại Y chứa 1 đơn vị chất dinh dưỡng A, 9 đơn vị chất dinh dưỡng B và 3 đơn vị chất dinh dưỡng C. Hỏi chi phí nhỏ nhất để mua hai loại thức ăn gia súc X và Y sao cho hỗn hợp thu được chứa tối thiểu 12 đơn vị chất dinh dưỡng A, 36 đơn vị chất dinh dưỡng B và 24 đơn vị chất dinh dưỡng C là bao nhiêu nghìn đồng?

Câu 16. Một bảo tàng khoa học muốn lắp đặt một cửa sổ trang trí lớn hình parabol trên bức tường phía tây của tòa nhà. Cửa sổ này có đỉnh cao nhất cách sàn nhà 15 mét. Một điểm trên khung cửa sổ cách trục đối xứng của cửa sổ 5 mét và có độ cao 10 mét so với sàn nhà. Bên trong khung cửa sổ, người thiết kế muốn đặt một tấm kính màu, hình chữ nhật với hai đỉnh trên cùng của tấm kính nằm trên đường cong của khung cửa sổ và hai đỉnh dưới của tấm kính nằm trên một thanh ngang cố định cách sàn nhà 3 mét (song song với sàn nhà). Diện tích lớn nhất của tấm kính màu là bao nhiêu mét vuông? (Kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

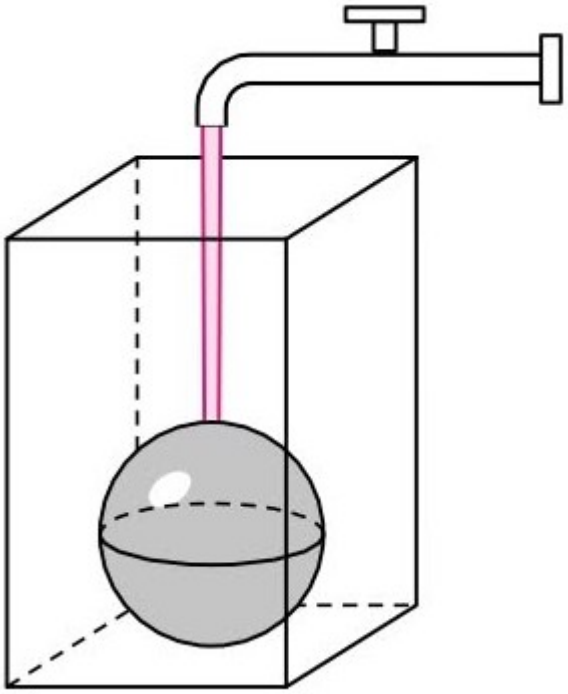
Câu 17. Anh An thành lập một công ty sản xuất in ấn Sách Giáo Khoa chương trình "Cánh diều". Nhằm tạo điều kiện cho các nhà sách tiêu thụ giá hợp lí, đơn giá mỗi bộ sách ban đầu được biểu diễn theo hàm số $p(x)=200-3x$ (nghìn đồng) với x là số lượng từng bộ sách bán ra và tổng chi phí sản xuất được biểu diễn theo hàm số $C(x)=75+(80+T)x-x^2$ (nghìn đồng) với mọi x thỏa mãn $0\le x\le 40$, trong đó T (nghìn đồng) là mức thuế giá trị gia tăng VAT phải đóng trên từng số lượng bộ sách sản xuất ra mà công ty anh An phải chi trả. Xem như công ty anh An sản xuất đều đặn trong điều kiện lí tưởng, khi lợi nhuận

của công ty đạt giá trị cao nhất thì tổng mức thuế phải chi trả cũng đồng thời cao nhất. Khi đó mức thuế của mỗi bộ sách mà công ty phải trả là bao nhiêu (Đơn vị: nghìn đồng)?

Câu 18. Một bức tường cao 3 m nằm song song với tòa nhà và cách tòa nhà 3 m. Người ta muốn chế tạo một chiếc thang bắc từ mặt đất bên ngoài bức tường, gác qua bức tường và chạm vào tòa nhà (xem hình vẽ). Chiều dài tối thiểu của thang là $a\sqrt{2}$ m. Hỏi a bằng bao nhiêu?



Câu 19. Một cái bình có dạng hình hộp chữ nhật với đáy là hình vuông cạnh 50 (cm), cạnh bên bằng 80 (cm) và bên trong đặt một quả cầu sắt có bán kính bằng 20 (cm). Ban đầu bình không chứa nước. Ta tiến hành dùng một vòi nước cho chảy vào bình với lưu lượng không đổi bằng x (cm³/phút). Biết rằng sau khoảng thời gian 120 phút thì nước trong bình đầy. Chọn gốc thời gian là lúc bắt đầu cho nước chảy vào bình.



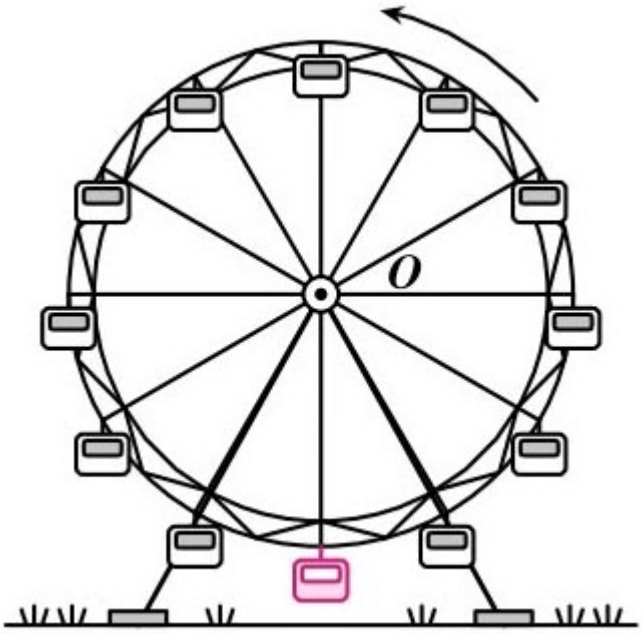
a) Thời gian để nước chảy vào bình đủ để ngập hết quả cầu là 48 phút.

b) Sau 24 phút đầu tiên thì mực nước trong bình có chiều cao là 20 (cm) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

c) $x=1387$ (cm³/phút) (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

d) Thể tích quả cầu sắt là 33150 cm³ (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 20. Một vòng quay khổng lồ (đu quay) ở khu vui chơi có tâm cách mặt đất 65 m, bán kính 50 m và quay đều ngược chiều kim đồng hồ, mỗi vòng hết 20 phút. Một cabin bắt đầu chuyển động từ vị trí thấp nhất của vòng quay tại thời điểm $t=0$ (tham khảo hình vẽ). Xét tính đúng sai của các mệnh đề sau:



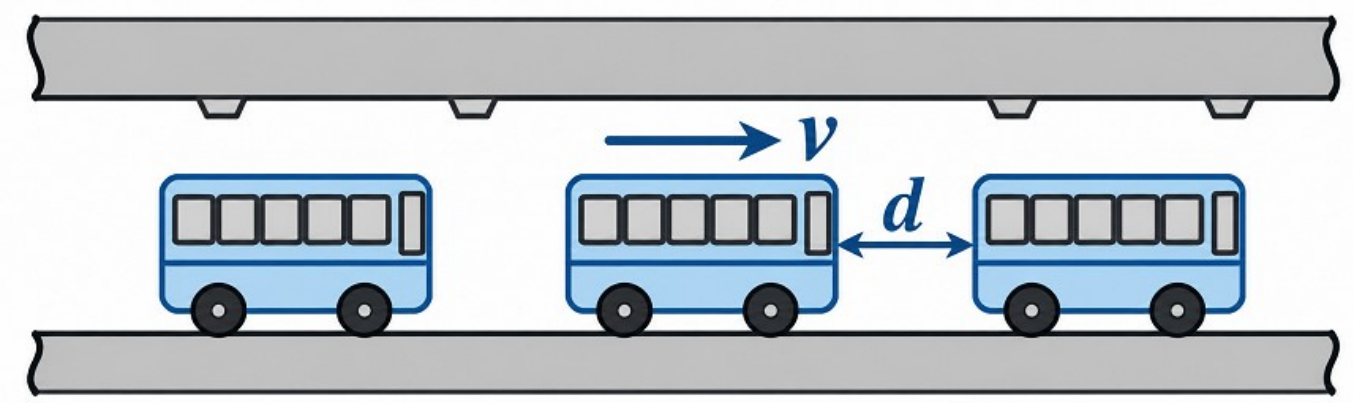
a) Độ cao của cabin so với mặt đất sau t phút là $h(t)=65-50\cos\left(\frac{\pi t}{10}\right)$ (m).

b) Sau 4 phút kể từ khi xuất phát, cabin ở độ cao lớn hơn 50 m.

c) Trong mỗi vòng quay, tổng thời gian cabin ở độ cao từ 90 m trở lên là 5 phút.

d) Tốc độ tăng độ cao lớn nhất của cabin lớn hơn 15 m/phút.

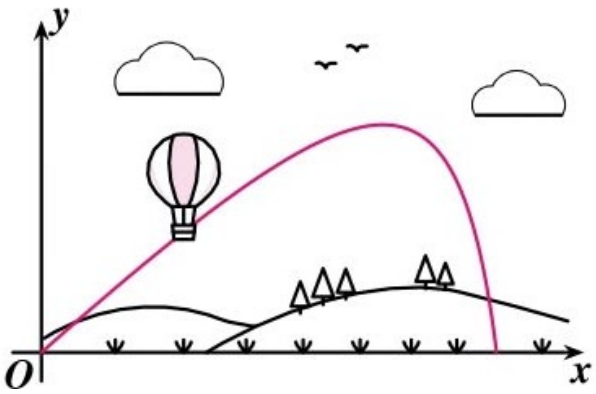
Câu 21. Để bảo đảm an toàn trong một đường hầm xuyên núi, các xe buýt phải chạy cùng tốc độ v (km/h) và giữ khoảng cách an toàn tối thiểu (tính từ đuôi xe trước đến đầu xe sau) là $d(v)=0,2v+0,005v^2$ (mét). Mỗi xe buýt dài 8 m (tham khảo hình vẽ).



Lưu lượng xe là số xe đi qua một vị trí cố định trong hầm trong một giờ. Khi các xe chạy đều với tốc độ v và giữ đúng khoảng cách an toàn tối thiểu thì lưu lượng xe bằng số xe trên mỗi ki-lô-mét đường nhân với v. Hỏi các xe nên chạy với tốc độ bao nhiêu km/h để lưu lượng xe qua hầm là lớn nhất?

Câu 22. Một chiếc ô tô điện cần đi quãng đường 300 km trên đường cao tốc. Khi xe chạy với tốc độ không đổi v (km/h) $(60\le v\le 120)$, lượng điện năng tiêu thụ trên mỗi ki-lô-mét là $e(v)=0,1+0,000025v^2$ (kWh). Giả sử toàn bộ điện năng tiêu thụ trên quãng đường đều phải được nạp lại tại các trạm sạc dọc đường với công suất sạc 50 kW (mỗi giờ nạp được 50 kWh) và bỏ qua thời gian dừng đỗ khác. Hỏi xe nên chạy với tốc độ bao nhiêu km/h để tổng thời gian di chuyển và sạc pin là ít nhất?

Câu 23. Khi đặt trong mặt phẳng tọa độ Oxy với trục Ox nằm ngang trên mặt đất, trục Oy hướng thẳng lên trên (tham khảo hình vẽ), đơn vị trong hệ trục là 1 kilômét thì đường đi của một khinh khí cầu bắt đầu xuất phát từ điểm O được mô phỏng là một phần đồ thị của hàm số bậc hai trên bậc nhất: $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+c}{x+d}$. Biết đồ thị hàm số $f(x)$ cắt trục hoành tại điểm thứ hai có tọa độ $(8;0)$ và đạt cực đại tại điểm có tọa độ $(6;4)$. Sau khi đi qua điểm cực đại và đang trong quá trình hạ cánh, tại thời điểm khinh khí cầu cách mặt đất 2 500 mét thì hình chiếu của nó trên trục Ox cách gốc tọa độ bao nhiêu kilômét?



Câu 24. Một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $60\,cm \times 40\,cm$. Người ta cắt ở bốn góc bốn hình vuông cạnh x cm rồi gấp lên thành một hộp không nắp. Chi phí làm đáy hộp là 300 đồng/cm² và thành hộp là 200 đồng/cm². Hỏi phải chọn x bao nhiêu để thể tích hộp lớn nhất mà chi phí ≤ 200 000 đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng phần mười).

Câu 25. Một nhà máy chế biến cà phê bán trong nước và xuất khẩu ra nước ngoài cho biết, nếu giá vốn sản xuất mỗi kg cà phê là x USD thì sản lượng nhà máy sản xuất được là $R(x)=x-150$ (kg) và lượng tiêu thụ trong nước là $Q(x)=2700-x$ (kg). Phần cà phê còn dư được xuất khẩu với giá cố định là 1900 USD mỗi kg. Biết rằng với mỗi kg cà phê xuất khẩu thì nhà máy phải chịu mức thuế là m USD. Lợi nhuận từ xuất khẩu và thuế thu được từ nhà nước luôn giữ tỷ lệ bằng 4 : 1. Hãy tìm giá trị của m để lợi nhuận từ xuất khẩu đạt giá trị lớn nhất.

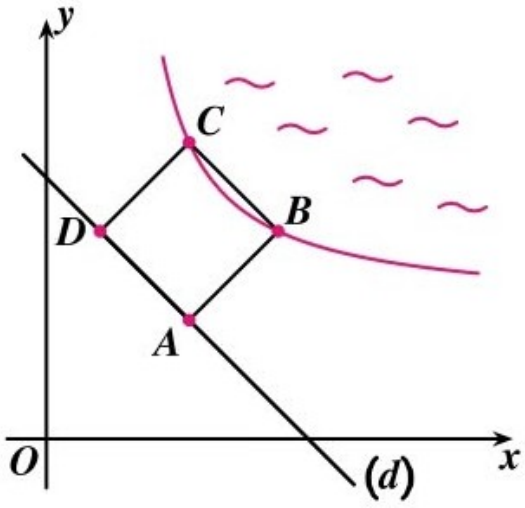
Câu 26. Một công ty khai thác tuyến tàu cao tốc chở khách du lịch từ đất liền ra đảo với khoảng cách 80 km. Giả sử tàu di chuyển với vận tốc v không đổi trên suốt tuyến đường. Chi phí vận hành cho mỗi giờ hoạt động của tàu bao gồm:

- Chi phí nhiên liệu: $125v^3$ (đồng), với v (km/h) là vận tốc của tàu $(v>0)$.
- Chi phí cố định (lương thủy thủ đoàn, khấu hao, bến bãi, …): 12 000 000 đồng.

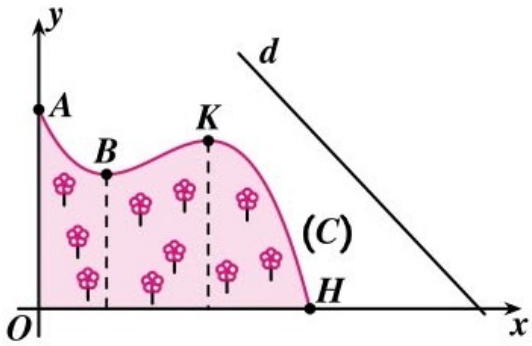
Để đảm bảo lịch trình và trải nghiệm của hành khách, thời gian di chuyển mỗi chuyến không được vượt quá 2 giờ. Đồng thời, vì lý do an toàn hàng hải, tàu không được chạy quá 60 km/h. Tàu có sức chứa tối đa 200 hành khách và giả sử rằng số lượng khách trên mỗi chuyến đi luôn đạt mức tối đa. Ban giám đốc thiết lập mục tiêu lợi nhuận thu được từ mỗi chuyến đi bằng 25% tổng chi phí vận hành của chuyến đó. Để đạt được mức lợi nhuận này trong điều kiện tàu được vận hành với tổng chi phí thấp nhất, giá vé mỗi hành khách phải trả là bao nhiêu nghìn đồng?

Câu 27. Trong một công viên có một hồ nước và một đường đi lát gạch hoa. Thiết lập hệ trục Oxy như hình vẽ dưới, kiến trúc sư thấy rằng bờ hồ có thể coi như một nhánh của đồ thị hàm số $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ và đường đi khi đó ứng với đường thẳng $(d): y=-x+4$. Để đảm bảo ánh sáng, kiến trúc sư muốn đặt 2 cột

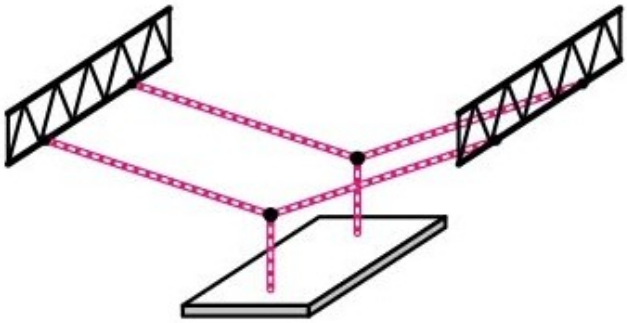
đèn trên bờ hồ và 2 cột đèn trên đường đi sao cho 4 cột đèn này tạo thành một hình vuông. Tính khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ (làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 28. Một khu vực trồng hoa được xây dựng trong khu du lịch sinh thái. Trong mô hình minh họa (như hình vẽ sau), nó được giới hạn bởi các trục tọa độ và đồ thị (C) của một hàm số bậc ba. Biết rằng đồ thị (C) đi qua các điểm $A(0;8), B(2;5,4), K(5;6,75), H(8;0)$. Trong khu du lịch sinh thái có một con đường chạy dọc theo đường thẳng $d: y=-\frac{13}{9}x+\frac{169}{9}$. Tìm hoành độ của điểm M thuộc (C) sao cho khoảng cách từ M đến d là nhỏ nhất (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



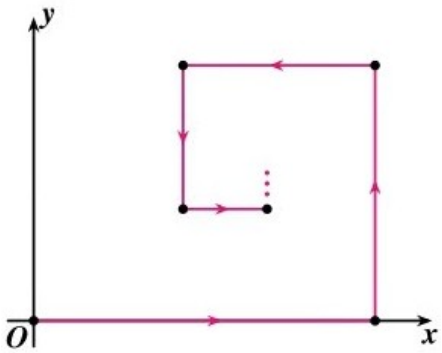
Câu 29. Trong một cửa hàng, nhà quản lý dự định treo một đồ trang trí trên cao. Vật trang trí được đặt trên giá đỡ nằm dưới thanh treo 1 m. Biết khoảng cách giữa hai thanh treo là 3 m. Biết tổng độ dài nhỏ nhất của các đoạn dây xích là $a+b\sqrt{c}$ (trong đó a,b,c là các số tự nhiên). Tính $a+b+c$.



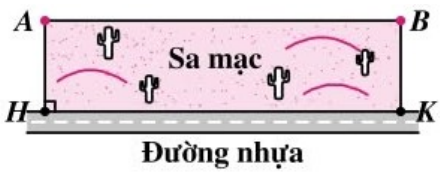
Câu 30. Một Pikachu khám phá "mê cung kỳ lạ" trong mặt phẳng Oxy, xuất phát từ O và bước đi vô hạn bước theo quy luật sau:

- Bước đầu tiên: Dài 8 đơn vị theo tia Ox.
- Các bước sau: Luôn rẽ trái 90° so với bước liền trước và dài bằng $\frac{3}{4}$ bước liền trước (tham khảo hình bên).

Biết rằng, với hành trình như trên thì Pikachu sẽ tiến đến điểm M. Độ dài đoạn thẳng OM bằng bao nhiêu đơn vị?

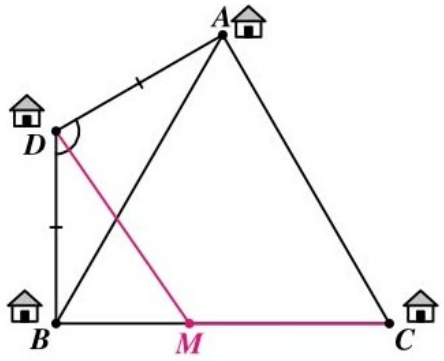


Câu 31. Một người đang ở tại điểm A trên sa mạc. Ông ta muốn đến điểm B và cách A một đoạn là 70 km. Trong sa mạc thì xe ông ta chỉ có thể di chuyển với vận tốc 30 km/h. Ông ấy phải đến được điểm B trong 2 giờ. Biết rằng có một con đường nhựa HK song song với AB và cách AB một đoạn 10 km. Trên đường nhựa này thì xe ông ấy có thể di chuyển với vận tốc 50 km/h. Để đến B sớm nhất (đảm bảo trong khung giờ cho phép) thì ông phải đi theo con đường nào?

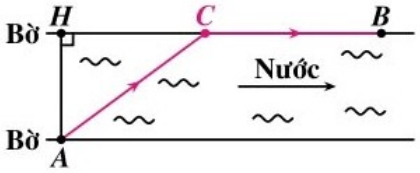


Câu 32. Có ba ngôi nhà A,B,C mà khoảng cách giữa từng cặp ngôi nhà đều bằng 4 km. Một ngôi nhà thứ tư D ở bên ngoài vùng tam giác ABC, mà góc nhìn của D đối với hai ngôi nhà A,B là 120° và

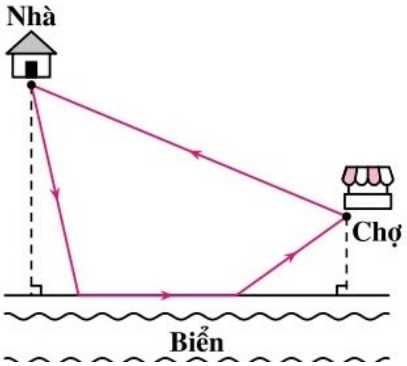
khoảng cách từ D đến A và B bằng nhau (như hình vẽ). Người ta muốn chọn điểm M nằm giữa B và C, để làm con đường đi từ C đến M rồi từ M đến D. Biết giá tiền làm đường trên đoạn BC là 200 triệu đồng/km và trên đoạn MD là 400 triệu đồng/km. Hỏi tổng chi phí nhỏ nhất để làm đường là bao nhiêu triệu đồng?



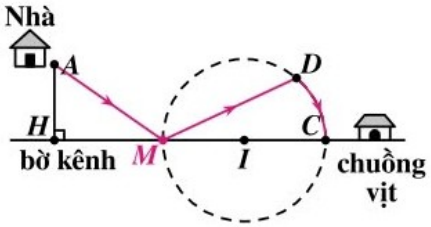
Câu 33. Trong một buổi tập luyện của lính đặc công, một chiến sĩ cần phối hợp bơi và chạy bộ để từ điểm A ở bờ sông bên này đến điểm B về phía hạ lưu của bờ sông bên kia (tham khảo hình vẽ bên dưới). Bờ sông thẳng, hai bờ song song và cách nhau một khoảng $AH=300$ m và $HB=900$ m. Dòng nước chảy từ H về phía B với vận tốc không đổi là 1 m/s. Chiến sĩ dự định bơi thẳng từ điểm A đến một điểm thuộc đoạn HB, sau đó tiếp tục chạy bộ từ điểm đó về điểm B. Biết vận tốc bơi của chiến sĩ đối với dòng nước là 1 m/s và vận tốc chạy trên bờ của chiến sĩ là 3 m/s. Hỏi chiến sĩ cần ít nhất bao nhiêu giây để hoàn thành kế hoạch trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?



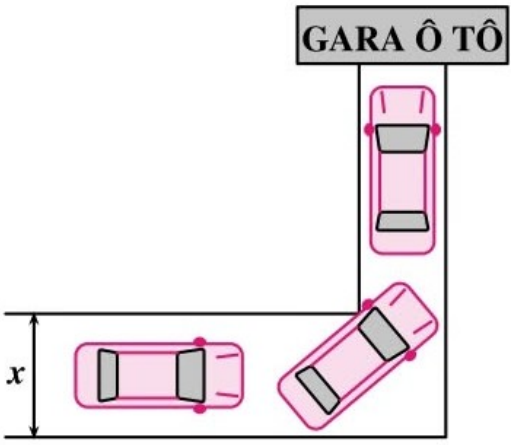
Câu 34. Nhà thầy Hùng và chợ hải sản cách nhau 1,3 km, khoảng cách từ nhà thầy Hùng đến bờ biển bằng 800 m còn khoảng cách từ chợ hải sản đến bờ biển bằng 300 m (bờ biển xem như 1 đường thẳng). Mỗi buổi sáng thầy Hùng chạy thể dục từ nhà ra bờ biển, sau đó chạy dọc bờ biển 600 m, rồi thầy chạy qua chợ hải sản để lấy thức ăn trong ngày, cuối cùng thầy chạy thẳng về nhà (tham khảo hình vẽ). Tổng quãng đường ngắn nhất mà thầy Hùng chạy trong mỗi buổi sáng là bao nhiêu mét (không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng đơn vị)?



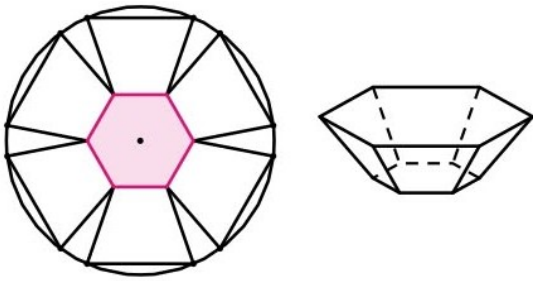
Câu 35. Nhà ông An ở gần bờ kênh, ông dự định thiết kế một ao nuôi vịt như sau: ông bắc một chiếc cầu thứ nhất từ nhà tại điểm A đến điểm M trên bờ kênh. Tại điểm M ông rào một ao hình tròn có đường kính bằng MC và bắc thêm một cây cầu thứ hai từ M đến một điểm D trên bờ ao. Hằng ngày ông đi từ nhà ra kênh trên cái cầu thứ nhất rồi từ đó đi qua cái cầu thứ 2 rồi đi theo cung tròn của cái ao đến chuồng vịt tại C để cho vịt ăn. Hỏi độ dài của cây cầu thứ nhất là bao nhiêu km biết ông đi quãng đường dài nhất với góc $AMD=120^\circ$ và nhà ông cách bờ kênh 200 m, $HC=1$ km (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Câu 36. Hình vẽ bên dưới mô tả đoạn đường đi vào GARA Ô TÔ nhà thầy Dũng. Đoạn đường đầu tiên có chiều rộng bằng x (m), đoạn đường thẳng vào cổng GARA có chiều rộng 2,6 (m). Biết kích thước xe ô tô là $5m\times1,9m$. Để tính toán và thiết kế đường đi cho ô tô người ta coi ô tô như một khối hộp chữ nhật có kích thước chiều dài 5 (m), chiều rộng 1,9 (m). Hỏi chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên để ô tô có thể đi vào GARA được?



Câu 37. Một hình chóp cụt lục giác đều có thể tích là $\frac{7\sqrt{6}}{2}$, cạnh đáy lớn có độ dài gấp hai lần cạnh đáy nhỏ. Khi trải phẳng hình chóp cụt lục giác đều trên một mặt phẳng thì đáy lớn nội tiếp trên 1 đường tròn (như hình vẽ). Tính độ dài cạnh đáy nhỏ của hình chóp cụt lục giác đều biết đường tròn ngoại tiếp đáy lớn có bán kính đạt giá trị nhỏ nhất (kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



BẢNG ĐÁP ÁN TÓM TẮT

BẢNG ĐÁP ÁN

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
1	0,1	**20**	Đúng, Sai, Sai, Đúng
2	**a)** Đúng; **b)** Đúng; **c)** Sai; **d)** Đúng	**21**	40 km/h
3	7,7	**22**	100 km/h
4	60°	**23**	7,5 km
5	27,1 phút	**24**	18,9 cm
6	7	**25**	47,5 USD/kg
7	151 người dùng	**26**	250 nghìn đồng/người
8	521 triệu đồng	**27**	1,92
9	2133 kg	**28**	6,16
10	300 m	**29**	8
11	1,19 triệu đồng/tháng	**30**	6,4
12	Sai, Đúng, Đúng, Sai	**31**	Vào đường nhựa cách H 7,5 km; đi 55 km trên đường nhựa; rời đường cách K 7,5 km
13	Sai, Đúng, Đúng, Đúng	**32**	1600 triệu đồng

Câu	Đáp án	Câu	Đáp án
14	Đúng, Sai, Đúng, Sai	**33**	473 giây
15	2040 nghìn đồng	**34**	3153 m
16	71,6 m²	**35**	0,37 km
17	60 nghìn đồng	**36**	3,7 m
18	6	**37**	1,07
19	Sai, Đúng, Đúng, Sai		

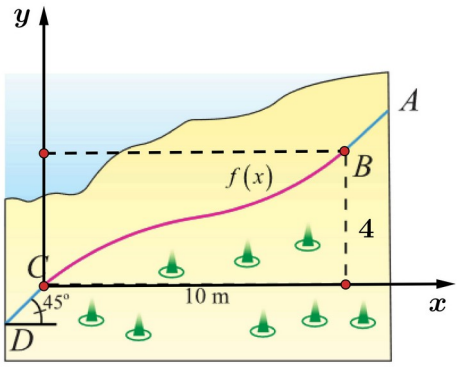
GIẢI CHI TIẾT THAM KHẢO

Lời giải

Câu 1. Trả lời: 0,1

Để xác định được độ dốc nhỏ nhất của con đường trượt tuyết, ta phải viết được phương trình hàm bậc ba $y = f(x)$.

Gắn hệ trục tọa độ Oxy, với $O \equiv C$ (tham khảo hình vẽ).



Suy ra $C(0;0)$, $B(10;4)$(Vì khoảng cách giữa hai điểm B, C theo phương ngang và phương thẳng đứng lần lượt là 10 mét và 4 mét).

Giả sử $y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$.

Vì đồ thị hàm số đi qua điểm $C(0;0)$ nên $d = 0 \Rightarrow y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.

Lại có đồ thị hàm số đi qua điểm $B(10;4)$ nên ta có $f(10) = 4 \Leftrightarrow a \cdot 10^3 + b \cdot 10^2 + c \cdot 10 = 4$ $\Leftrightarrow 1000a + 100b + 10c = 4$ (1).

Ta có "góc tạo bởi CD và phương ngang bằng 45 độ" nên hệ số góc tại điểm C bằng $\tan 45^\circ = 1$

.

Mà "Từ A đến B là một đoạn thẳng có độ dốc bằng độ dốc của con đường đi từ C đến D " nên hệ số góc tại điểm B bằng với hệ số góc tại điểm C bằng 1

Vì AB, CD là tiếp tuyến của đồ thị hàm số $f(x)$ nên

$$\begin{cases} f'(0)=1 \\ f'(10)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a\cdot 0^2+2b\cdot 0+c=1 \\ 3a\cdot 10^2+2b\cdot 10+c=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ 300a+20b+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ 300a+20b=0 \end{cases} \#(2)$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} 1000a+100b+10.1=4 \\ 300a+20b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1000a+100b=-6 \\ 300a+20b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{3}{250} \\ b=-\dfrac{9}{50} \end{cases} \Rightarrow y=f(x)=\frac{3}{250}x^3-\frac{9}{50}x^2+x$$

.

Suy ra $f'(x)=3\cdot\frac{3}{250}x^2-2\cdot\frac{9}{50}x+1=\frac{9}{250}x^2-\frac{9}{25}x+1$.

Khi đó độ dốc tại một điểm có hoành độ x_0 bằng $\left|f'(x_0)\right|=\left|\frac{9}{250}x^2-\frac{9}{25}x+1\right|$.

Yêu cầu bài toán

Tìm $\left|f'(x)\right|$ min với $(0\le x\le 10)$.

$\left|f'(x)\right|\min = f'(x)\min$ trên đoạn [0; 10] (vì $f'(x)>0, \forall x\in[0;10]$)

Vì $a=\frac{9}{250}>0$ nên $f'(x)_{\min}=f'\left(-\frac{b}{2a}\right)=f'\left(-\frac{-\frac{9}{25}}{2\cdot\frac{9}{250}}\right)=f'(5)=0,1$.

Vậy độ dốc nhỏ nhất của con đường trượt tuyết bằng 0,1.

Câu 2.

a) Đúng. Ta có $f(x)=-x+10-\frac{12}{x}$.

$\Rightarrow f'(x)=-1+\frac{12}{x^2}$. Cho $f'(x)=0\Rightarrow x^2=12\Rightarrow x=2\sqrt{3}(x>0)$.

Giá trị cực đại: $y_{\max}=f\left(2\sqrt{3}\right)=-2\sqrt{3}+10-\frac{12}{2\sqrt{3}}=10-4\sqrt{3}\approx 3,071$.

Vì đơn vị trục là 100m nên chiều cao thực tế là: $3,071\times 100=307,1$ mét. **Mệnh đề Đúng.**

b) Đúng. Ta có tiệm cận đứng $x = 0$ và tiệm cận xiên $y = 10$, Khi đó tâm đối xứng là $M(0;10)$

Mệnh đề Đúng.

c) Sai. Quảng đường ngắn nhất Ta cần tìm $min(IM)$ với $I(2;8)$ và $M\left(x; -x + 10 - \frac{12}{x}\right)$.

$$D(x) = \sqrt{(x-2)^2 + \left(8 - \left(-x + 10 - \frac{12}{x}\right)\right)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + \left(x - 2 + \frac{12}{x}\right)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx} \Rightarrow x = 3,12721...$$

Tại $\Rightarrow IM_{Min} \approx 5,090857$. Quy đổi ra mét: $5,090857 \cdot 100 \approx 509,09(m)$. **Mệnh đề Sai.**

d) Đúng. Gọi phương trình dây phao là $y = m$. Khi đó chiều cao: $h = 8 - m > 0 \Rightarrow m < 8$.

Độ dài: $AB = \sqrt{(m-10)^2 - 48}$.

Điều kiện $h = AB \Rightarrow (8-m)^2 = (m-10)^2 - 48$.

Khi đó: $AB = h \Leftrightarrow 64 - 16m + m^2 = m^2 - 20m + 100 - 48 \Rightarrow 4m = -12 \Rightarrow m = -3(tm)$

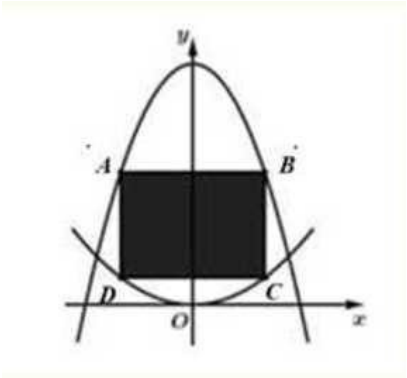
.

Khi $m = -3$, ta có chiều cao $h = 8 - (-3) = 11$ và đáy $AB = 11$.

Diện tích trên hệ trục tọa độ: $S = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 11 = 60,5$ (đơn vị diện tích).

Diện tích thực tế: $S_{thực} = 60,5 \cdot 10.000 = 605.000(m^2)$.

Câu 3. Trả lời: 7,7.



Gọi $A(a, 5-a^2); B(b, 5-b^2); C\left(b; \frac{b^2}{4}\right); D\left(a, \frac{a^2}{4}\right)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\left(b-a,a^2-b^2\right)\cdot\overrightarrow{BC}=\left(0,\frac{5b^2}{4}-5\right)$

vì $ABCD$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=0\Rightarrow\left(a^2-b^2\right)\cdot\left(\frac{5b^2}{4}-5\right)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}a=-b\\b=\pm2\left(L\right)\end{array}\right.$

+) $b=-a\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=\left(2b,0\right)\\\overrightarrow{BC}=\left(0,\frac{5b^2}{4}-5\right)\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}AB^2=4b^2\\BC^2=\frac{25}{16}\cdot\left(b^2-4\right)^2\end{array}\right.$

$S_{ABCD}=AB.BC\Rightarrow S^2{}_{ABCD}=AB^2\cdot BC^2=\frac{25}{4}\cdot b^2\cdot\left(b^2-4\right)^2=\frac{25}{4}x.(x-4)^2\left(x=b^2\right)$

Xét hàm số $f\left(x\right)=\frac{25}{4}x.(x-4)^2;(0<x<4)$

$\Rightarrow f'\left(x\right)=\frac{25}{4}.\left(3x^2-16x+16\right)=0\Rightarrow x=\frac{4}{3}$

BBT:

x	$-\infty$		$\frac{4}{3}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	59.2592592592593	↘	0	↗	$+\infty$

Dựa theo bảng biến thiên ta thấy $S^2{}_{\max}=\frac{1600}{27}$ tại $x=\frac{4}{3}$.

$\Rightarrow S_{\max}=\frac{40\sqrt{3}}{9}\approx7,7$.

Câu 4.

Lời giải. Mặt cắt ngang là hình thang cân có đáy nhỏ dài 30 cm, hai cạnh bên đều dài 30 cm và tạo với phương ngang góc φ.

Chiều cao hình thang là $h=30\sin\varphi.$

Mỗi cạnh bên có hình chiếu lên phương ngang bằng $30\cos\varphi$, nên đáy lớn là

$AD=30+2\cdot30\cos\varphi=30+60\cos\varphi.$

Diện tích mặt cắt ngang: $S=\frac{\left(AD+BC\right)h}{2}=900\sin\varphi\left(1+\cos\varphi\right).$

Xét hàm $f(\varphi)=\sin\varphi(1+\cos\varphi), 0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$

Ta có $f'(\varphi)=\cos\varphi+\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1.$

Điều kiện $f'(\varphi)=0$ cho $2\cos^2\varphi+\cos\varphi-1=0.$

Suy ra $\cos\varphi=\frac{1}{2}.$

Trong khoảng đã cho, $\varphi=60^\circ.$

Kết luận: Góc cần tìm là **60°**.

Câu 5.

Lời giải. Theo đề bài,

$T(t)=25+60e^{-kt}.$

Sau 10 phút, nhiệt độ là 65°C nên $65=25+60e^{-10k}.$

Suy ra $e^{-10k}=\frac{2}{3}.$ Do đó $k=\frac{1}{10}\ln\frac{3}{2}.$

Khi nhiệt độ còn 45°C, $45=25+60e^{-kt}.$

Suy ra $e^{-kt}=\frac{1}{3}.$

Vì vậy $t=\frac{\ln 3}{k}=\frac{10\ln 3}{\ln(3/2)}\approx 27.095.$

Làm tròn đến hàng phần mười được **27,1 phút**.

Kết luận: 27,1 phút.

Câu 6.

Lời giải. Chia đa thức: $\frac{3x^2-x+5}{x-1}=3x+2+\frac{7}{x-1}.$

Hai đường tiệm cận của quỹ đạo là $x=1$ và $y=3x+2.$

Lấy điểm $M(x,y)$ trên quỹ đạo, với $x>1$.

Khoảng cách từ M đến tiệm cận đứng là $d_1=x-1.$

Tiệm cận xiên có phương trình $3x-y+2=0.$

Do $y=3x+2+\frac{7}{x-1},$

nên khoảng cách từ M đến tiệm cận xiên là $d_2=\frac{|3x-y+2|}{\sqrt{10}}=\frac{7}{\sqrt{10}(x-1)}.$

Vậy tích hai khoảng cách là $C = d_1 d_2 = \frac{7}{\sqrt{10}}.$

Suy ra $\frac{10}{7}C^2 = \frac{10}{7}\cdot\frac{49}{10} = 7.$

Kết luận: 7.

Câu 7.

Lời giải. Với x người dùng, doanh thu trong một năm là $R(x) = 2x.$

Chi phí là $C(x) = 10\ln x + 50.$

Lợi nhuận: $P(x) = 2x - 10\ln x - 50.$

Yêu cầu lợi nhuận tối thiểu 200 triệu đồng: $2x - 10\ln x - 50 \geq 200.$

Hay $2x - 10\ln x \geq 250.$

Vì x là số người dùng nên x là số nguyên dương. Kiểm tra hai giá trị gần nghiệm:

$P(150) = 300 - 10\ln 150 - 50 \approx 199.894 < 200,$

$P(151) = 302 - 10\ln 151 - 50 \approx 201.827 > 200.$

Do đó số người dùng ít nhất là **151**.

Kết luận: 151 người dùng.

Câu 8.

Lời giải. Nếu bán x tấn sản phẩm thì giá bán mỗi tấn là $45 - 0.0002x^2.$

Doanh thu: $R(x) = x\left(45 - 0.0002x^2\right).$

Nhà máy phải nộp 6% doanh thu, nên phần doanh thu còn lại sau thuế là $0.94R(x).$

Tổng chi phí sản xuất: $C(x) = 150 + 34x.$

Lợi nhuận sau thuế: $P(x) = 0.94x\left(45 - 0.0002x^2\right) - 150 - 34x.$

Rút gọn: $P(x) = 8.3x - 0.000188x^3 - 150,$ với $0 \leq x \leq 200.$

Đạo hàm: $P'(x) = 8.3 - 0.000564x^2.$

Cho $P'(x) = 0$: $x = \sqrt{\frac{8.3}{0.000564}} \approx 121.311.$

Tại đây $P''(x) < 0$, nên lợi nhuận đạt cực đại.

Giá trị lớn nhất: $P(121.311) \approx 521.253.$

Làm tròn đến hàng đơn vị được **521 triệu đồng**.

Kết luận: 521 triệu đồng.

Câu 9.

Lời giải. Số tôm thả ban đầu là $2000x$.

Tỉ lệ sống đến khi thu hoạch là $1-\frac{x}{300}$.

Khối lượng trung bình mỗi con là $24-0.08x=24\left(1-\frac{x}{300}\right)$.

Sản lượng thu hoạch, tính theo ki-lô-gam, là $P(x)=\frac{2000x\left(1-\frac{x}{300}\right)(24-0.08x)}{1000}$.

Suy ra $P(x)=48x\left(1-\frac{x}{300}\right)^2$.

Đạo hàm: $P'(x)=48\left(1-\frac{x}{300}\right)\left(1-\frac{x}{100}\right)$.

Trong khoảng $0<x<300$, điểm cực đại là $x=100$.

Khi đó $P(100)=48\cdot 100\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{6400}{3}\approx 2133.333$.

Làm tròn đến hàng đơn vị được **2133 kg**.

Kết luận: 2133 kg.

Câu 10.

Lời giải. Gọi E,F lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B lên bờ sông.

Ta có $AE=55, BF=125, AB=250$.

Hiệu khoảng cách đến bờ sông là $BF-AE=70$.

Suy ra $EF=\sqrt{250^2-70^2}=240$.

Lấy B' đối xứng với B qua bờ sông. Khi đó đường đi ngắn nhất từ A đến bờ sông rồi đến B bằng đoạn thẳng AB'.

Khoảng cách vuông góc từ A đến B' là $55+125=180$.

Vậy $AB'=\sqrt{240^2+180^2}=300$.

Kết luận: Đoạn đường ngắn nhất là **300 m**.

Câu 11.

Lời giải. Số tiền còn nợ ban đầu là $21.5-10=11.5$.

Lãi suất mỗi tháng: $r=0.035$.

Gọi số tiền trả đều cuối mỗi tháng là m. Sau 12 tháng, dư nợ bằng 0 nên

$$11.5(1+r)^{12}-m\frac{(1+r)^{12}-1}{r}=0.$$

Suy ra $$m=\frac{11.5r(1+r)^{12}}{(1+r)^{12}-1}.$$

Thay $r=0.035$: $m\approx 1.190065.$

Làm tròn đến hàng phần trăm được **1,19 triệu đồng**.

Kết luận: Mỗi tháng bác Minh trả **1,19 triệu đồng**.

Câu 12.

Lời giải. Ta có $x(t)=20t^2e^{-0.5t}$.

Vận tốc: $v(t)=x'(t)=10te^{-0.5t}(4-t).$

a)Tại $t=0$: $v(0)=0.$

Không phải 20 m/s.

Kết luận a: Sai.

b)Với $0<t<4$ thì $v(t)>0$; với $t>4$ thì $v(t)<0$.

Vì vậy hạt đổi chiều đúng một lần tại $t=4$.

Kết luận b: Đúng.

c)Hạt đi xa gốc tọa độ nhất tại $t=4$: $x(4)=20\cdot 4^2e^{-2}=320e^{-2}.$

Kết luận c: Đúng.

d)Từ $t=0$ đến $t=4$, hạt đi từ 0 đến $320e^{-2}$. Sau đó hạt quay lại và khi $t\to+\infty$ thì $x(t)\to 0$.

Tổng quãng đường là $S=2\cdot 320e^{-2}=640e^{-2}.$

Do đó tổng quãng đường lớn hơn $320e^{-2}$.

Kết luận d: Sai.

Đáp án Câu 9: Sai, Đúng, Đúng, Sai.

Câu 13.

Lời giải. Chi phí xử lí x phần trăm chất ô nhiễm là $C(x)=\frac{2x+1}{1-0.01x},0\le x<100.$

a) Với $x=20$: $C(20)=\frac{41}{0.8}=51.25.$

Không phải 51,52 triệu đồng.

Kết luận a: Sai.

b)

Hàm số chỉ xác định khi $x<100.$

Tại $x=100$, mẫu số bằng 0 nên không thể xử lí đúng 100% theo mô hình đã cho.

Kết luận b: Đúng.

c)Điều kiện chi phí không quá 200 triệu đồng: $\frac{2x+1}{1-0.01x} \le 200.$

Vì $1-0.01x>0$, suy ra $2x+1 \le 200-2x.$

Do đó $x \le 49.75.$

Vậy mức xử lí tối đa là 49,75%.

Kết luận c: Đúng.

d)Khi $x \ge 20$, doanh thu tăng thêm là $R(x)=12x-240.$

Lợi nhuận thu được từ việc xử lí ô nhiễm: $P(x)=12x-240-\frac{2x+1}{1-0.01x}.$

Đạo hàm: $P'(x)=12-\frac{2.01}{(1-0.01x)^2}.$

Cho $P'(x)=0$: $1-0.01x=\sqrt{\frac{2.01}{12}}.$

Suy ra $x \approx 59.073.$

Tại đó $P(x) \approx 177.758.$

Giá trị này lớn hơn 177 triệu đồng.

Kết luận d: Đúng.

Đáp án Câu 10.: Sai, Đúng, Đúng, Đúng.

Câu 14.

Lời giải. Gọi u_n là lượng clo ngay sau lần đổ thứ n.

Mỗi ngày còn lại 60% lượng clo cũ, rồi thêm 1,5 kg nên $u_n=0.6u_{n-1}+1.5,$ với $u_0=0.$

a) $u_1=1.5,\ u_2=0.6\cdot 1.5+1.5=2.4.$

Kết luận a: Đúng.

b) Do $u_n=0.6u_{n-1}+1.5,$ nên dãy không phải cấp số nhân.

Kết luận b: Sai.

c)Giải công thức truy hồi: $u_n=3.75\left(1-0.6^n\right).$

Vì $0<0.6^n<1$ nên $u_n<3.75.$

Kết luận c: Đúng.

D)Cần $u_n \geq 3.7.$ **Suy ra** $3.75\left(1-0.6^n\right) \geq 3.7.$

Hay $0.6^n \leq \frac{1}{75}.$ Do đó $n \geq \frac{\ln(1/75)}{\ln 0.6} \approx 8.45.$

Số nguyên nhỏ nhất là $n = 9.$

Không phải 8 lần.

Kết luận d: Sai.

Đáp án Câu 11.: Đúng, Sai, Đúng, Sai.

Câu 15.

Lời giải. Gọi x, y lần lượt là số bao thức ăn loại X, Y .

Các điều kiện dinh dưỡng là $2x + y \geq 12,\ 2x + 9y \geq 36,\ 2x + 3y \geq 24,$

và $x \geq 0, y \geq 0.$

Chi phí cần tối thiểu hóa: $F = 260x + 210y.$

Các đỉnh cần xét của miền nghiệm là $(0,12),(3,6),(9,2),(18,0).$

Tính chi phí:

$F(0,12) = 2520,$

$F(3,6) = 2040,$

$F(9,2) = 2760,$

$F(18,0) = 4680.$

Nhỏ nhất là $F_{\min} = 2040.$

Điểm đạt được là $x = 3$, $y = 6$, đều là số nguyên nên phù hợp với số bao thức ăn.

Kết luận: 2040 nghìn đồng.

Câu 16.

Lời giải. Chọn hệ trục sao cho trục đối xứng của parabol là trục tung, sàn nhà là trục hoành. Đỉnh cửa sổ là $(0,15).$

Phương trình parabol có dạng $y = 15 + ax^2.$

Parabol đi qua điểm $(5,10)$ nên $10 = 15 + 25a.$

Suy ra $a = -\frac{1}{5}.$

Vậy $y = 15 - \frac{x^2}{5}.$

Gọi hai đỉnh trên của hình chữ nhật là $(\pm x, y)$. Hai đỉnh dưới nằm trên đường thẳng cao 3 m, nên chiều cao hình chữ nhật là $y-3=12-\frac{x^2}{5}$.

Chiều rộng là $2x$.

Diện tích: $S(x)=2x\left(12-\frac{x^2}{5}\right)=24x-\frac{2}{5}x^3$.

Đạo hàm: $S'(x)=24-\frac{6}{5}x^2$.

Cho $S'(x)=0$: $x^2=20$.

Suy ra $x=2\sqrt{5}$.

Diện tích lớn nhất: $S_{\max}=32\sqrt{5}\approx 71.554$.

Làm tròn đến hàng phần mười được **71,6 m²**.

Kết luận: 71,6 m².

Câu 17.

Lời giải. Giá bán mỗi bộ sách là $p(x)=200-3x$.

Doanh thu: $R(x)=xp(x)=200x-3x^2$.

Chi phí: $C(x)=75+(80+T)x-x^2$.

Lợi nhuận: $P(x)=R(x)-C(x)$.

Suy ra $P(x)=(120-T)x-2x^2-75$.

Với một mức thuế T cố định, lợi nhuận lớn nhất tại $x_T=\frac{120-T}{4}$,

khi $0\le T\le 120$. Giá trị này luôn không vượt quá 30 nên thỏa điều kiện $x\le 40$.

Tổng số thuế thu được khi doanh nghiệp chọn mức sản lượng tối ưu là

$$G(T)=Tx_T=\frac{T(120-T)}{4}.$$

Đây là một parabol quay xuống. Ta có $G'(T)=30-\frac{T}{2}$.

Cho $G'(T)=0$: $T=60$.

Nếu $T>120$ thì doanh nghiệp tối ưu tại $x=0$, khi đó tổng thuế bằng 0 nên không thể lớn hơn trường hợp trên.

Kết luận: Mức thuế mỗi bộ sách là **60 nghìn đồng**.

Câu 18.

Lời giải. Gọi θ là góc tạo bởi thang và mặt đất.

Từ chân thang đến đỉnh bức tường cao 3 m, đoạn thang tương ứng có độ dài $\frac{3}{\sin\theta}$.

Từ bức tường đến tòa nhà cách 3 m theo phương ngang, đoạn thang tương ứng có độ dài $\frac{3}{\cos\theta}$.

Do đó chiều dài thang là $L = 3\left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\cos\theta}\right)$.

Hàm này đạt giá trị nhỏ nhất khi $\sin\theta = \cos\theta,$ tức là $\theta = 45^\circ$.

Khi đó $L_{\min} = 3\left(\sqrt{2} + \sqrt{2}\right) = 6\sqrt{2}.$

Theo đề bài $L_{\min} = a\sqrt{2}.$

Suy ra $a = 6.$

Kết luận: 6.

Câu 19.

Lời giải. Thể tích bình là $V_B = 50^2 \cdot 80 = 200000.$

Thể tích quả cầu bán kính 20 cm là $V_C = \frac{4}{3}\pi \cdot 20^3 = \frac{32000\pi}{3} \approx 33510.322.$

Khi bình đầy, thể tích nước là $V_N = 200000 - \frac{32000\pi}{3}.$

Do bình đầy sau 120 phút nên lưu lượng là $q = \frac{200000 - \frac{32000\pi}{3}}{120} \approx 1387.414.$

a)Để ngập hoàn toàn quả cầu, mực nước phải đạt 40 cm. Khi đó thể tích nước là

$V_{40} = 50^2 \cdot 40 - \frac{32000\pi}{3}.$

Thời gian cần thiết: $t = \frac{V_{40}}{q} \approx 47.923.$

Giá trị này không đúng bằng 48 phút. Vì ý a không yêu cầu làm tròn nên mệnh đề được đánh giá là sai.

Kết luận a: Sai.

b)Sau 24 phút, thể tích nước là $V_{24} = 24q \approx 33297.936.$

Gọi h là chiều cao mực nước. Với $0 < h < 40$, phần quả cầu nằm dưới mực nước là một chỏm cầu cao h, có thể tích $V_h = \pi h^2\left(20 - \frac{h}{3}\right).$

Do đó $2500h-\pi h^2\left(20-\frac{h}{3}\right)=33297.936.$

Giải bằng máy tính được $h\approx 20.043.$

Làm tròn đến hàng đơn vị được 20 cm.

Kết luận b: Đúng.

c)Từ kết quả đầu bài, $q\approx 1387.414.$

Làm tròn đến hàng đơn vị được 1387.

Kết luận c: Đúng.

d)

Thể tích quả cầu là $V_C\approx 33510.322.$

Làm tròn đến hàng đơn vị là 33510, không phải 33150.

Kết luận d: Sai.

Đáp án Câu 16.: Sai, Đúng, Đúng, Sai.

Câu 20.

Lời giải. Vòng quay có bán kính 50 m, tâm cao 65 m và chu kì 20 phút.

Vận tốc góc là $\omega=\frac{2\pi}{20}=\frac{\pi}{10}.$

Cabin bắt đầu ở vị trí thấp nhất.

a)

Độ cao theo thời gian là $h(t)=65-50\cos\frac{\pi t}{10}.$

Công thức đúng.

Kết luận a: Đúng.

b)

Sau 4 phút: $h(4)=65-50\cos\frac{2\pi}{5}\approx 49.55.$ Nhỏ hơn 50 m.

Kết luận b: Sai.

c)Điều kiện cabin cao từ 90 m trở lên: $65-50\cos\theta\geq 90.$

Suy ra $\cos\theta\leq-\frac{1}{2}.$

Trong một vòng quay, góc thỏa mãn chạy từ $2\pi/3$ đến $4\pi/3$, có độ dài $2\pi/3$, tức bằng một phần ba chu kì.

Thời gian tương ứng là $\frac{1}{3}\cdot 20=\frac{20}{3}\approx 6.67.$

Không phải 5 phút.

Kết luận c: Sai.

D)Tốc độ thay đổi độ cao: $h'(t)=5\pi\sin\frac{\pi t}{10}.$

Giá trị lớn nhất là $5\pi\approx 15.708.$

Lớn hơn 15 m/phút.

Kết luận d: Đúng.

Đáp án Câu 17.: Đúng, Sai, Sai, Đúng.

Câu 21.

Lời giải. Khoảng cách từ đầu một xe đến đầu xe kế tiếp là $s(v)=8+d(v).$

Do đó $s(v)=8+0.2v+0.005v^2.$

Số xe trên mỗi ki-lô-mét đường là $\frac{1000}{s(v)}.$

Lưu lượng xe trong một giờ: $Q(v)=\frac{1000v}{8+0.2v+0.005v^2}.$

Đạo hàm có cùng dấu với $8+0.2v+0.005v^2-v(0.2+0.01v).$

Rút gọn: $8-0.005v^2.$

Cho bằng 0: $8-0.005v^2=0.$

Suy ra $v^2=1600.$

Vì $v>0$ nên $v=40.$

Kết luận: Các xe nên chạy **40 km/h**.

Câu 22.

Lời giải. Thời gian chạy xe là $t_1=\frac{300}{v}.$

Điện năng tiêu thụ trên cả quãng đường: $E=300\left(0.1+0.000025v^2\right).$

Công suất sạc là 50 kW nên thời gian sạc là $t_2=\frac{E}{50}=6\left(0.1+0.000025v^2\right).$

Suy ra tổng thời gian: $T(v)=\frac{300}{v}+0.6+0.00015v^2,$ với $60\le v\le 120.$

Đạo hàm: $T'(v)=-\frac{300}{v^2}+0.0003v.$

Cho $T(v)=0$: $0.0003v^3=300.$

Suy ra $v^3=1000000.$ Do đó $v=100.$

Giá trị này thuộc khoảng cho phép và cho tổng thời gian nhỏ nhất.

Kết luận: Xe nên chạy **100 km/h**.

Câu 23.

Vì khí cầu xuất phát từ $O(0;0)$ và đồ thị còn cắt trục hoành tại $(8;0)$ nên tử số có hai nghiệm 0 và 8. Ta viết $f(x)=\dfrac{kx(x-8)}{x+d}$.

Điểm cực đại là $(6;4)$, do đó $f(6)=4, f'(6)=0.$

Với $g(x)=\dfrac{x(x-8)}{x+d}$, ta có $g'(x)=\dfrac{(2x-8)(x+d)-x(x-8)}{(x+d)^2}.$

Thay $x=6$ vào điều kiện $f'(6)=0$: $4(6+d)-6(6-8)=0 \Rightarrow 24+4d+12=0 \Rightarrow d=-9.$

Tiếp theo $f(6)=\dfrac{k\cdot 6(6-8)}{6-9}=4k=4 \Rightarrow k=1.$

Vậy $f(x)=\dfrac{x(x-8)}{x-9}.$

Khi khí cầu cách mặt đất 2500 m, tức là $2,5$ km, ta có $\dfrac{x(x-8)}{x-9}=2,5.$

Suy ra $x^2-10,5x+22,5=0 \Rightarrow x=3; x=7,5.$

Khí cầu đã đi qua điểm cực đại có hoành độ 6 và đang hạ cánh nên phải chọn nghiệm lớn hơn 6.

Kết luận: hình chiếu của khí cầu trên trục Ox cách gốc tọa độ **7,5 km**.

Câu 24.

Sau khi cắt bốn hình vuông cạnh x, hộp có:

- chiều dài đáy: $60-2x$;
- chiều rộng đáy: $40-2x$;
- chiều cao: x.

Điều kiện hình học: $0<x<20.$

Diện tích đáy là $S_{\text{đáy}}=(60-2x)(40-2x).$

Tổng diện tích bốn thành hộp là $S_{\text{thành}}=2x(60-2x)+2x(40-2x).$

Chi phí làm hộp: $C(x)=300(60-2x)(40-2x)+200\left[2x(60-2x)+2x(40-2x)\right].$

Rút gọn: $C(x)=720000-20000x-400x^2.$

Yêu cầu chi phí không quá 200000 đồng: $720000-20000x-400x^2\le 200000.$

Suy ra $x^2+50x-1300\ge 0.$

Vì $0<x<20$ nên $x\ge -25+5\sqrt{77}\approx 18,8748.$

Thể tích hộp là $V(x)=x(60-2x)(40-2x).$

Ta có $V'(x)=12x^2-400x+2400.$

Nghiệm của $V'(x)=0$ trong khoảng $(0;20)$ là $x=\dfrac{50-10\sqrt{7}}{3}\approx 7,85.$

Do đó trên khoảng khả thi $18,8748\le x<20$, hàm $V(x)$ giảm. Vì vậy thể tích lớn nhất đạt được tại giá trị nhỏ nhất thỏa điều kiện chi phí: $x=-25+5\sqrt{77}\approx 18,8748.$

Kết luận: cần chọn $x\approx 18,9$ cm.

Câu 25.

Sản lượng cà phê đem xuất khẩu là $R(x)-Q(x)=(x-150)-(2700-x)=2x-2850.$

Lợi nhuận sau khi trừ giá vốn và thuế trên mỗi kg cà phê xuất khẩu là $1900-x-m.$

Do đó lợi nhuận xuất khẩu là $L=(2x-2850)(1900-x-m).$

Tiền thuế Nhà nước thu được là $T=m(2x-2850).$

Theo đề bài, $L:T=4:1.$

Vì $2x-2850>0$, ta được $1900-x-m=4m\Rightarrow m=\dfrac{1900-x}{5}.$

Suy ra $L(x)=\dfrac{4}{5}(2x-2850)(1900-x).$

Đây là hàm bậc hai có hệ số của x^2 âm nên đạt giá trị lớn nhất tại đỉnh. Ta có $L'(x)=\dfrac{4}{5}(6650-4x).$

Cho $L'(x)=0$: $x=1662,5.$

Khi đó $m=\dfrac{1900-1662,5}{5}=47,5.$

Kết luận: mức thuế tối ưu là **47,5 USD/kg**.

Câu 26.

Quãng đường mỗi chuyến là 80 km. Nếu tàu chạy với vận tốc v thì thời gian chạy là $t=\dfrac{80}{v}.$

Do thời gian không quá 2 giờ và vận tốc không quá 60 km/h nên $40\le v\le 60.$

Chi phí vận hành trong một giờ là $125v^3+12000000.$

Vậy tổng chi phí cho một chuyến là $C(v)=\left(125v^3+12000000\right)\frac{80}{v}.$

Rút gọn: $C(v)=10000v^2+\frac{960000000}{v}.$

Đạo hàm: $C'(v)=20000v-\frac{960000000}{v^2}.$

Phương trình $C'(v)=0$ cho $v^3=48000\Rightarrow v\approx 36,34.$

Giá trị này không thuộc đoạn $[40;60]$. Trên đoạn $[40;60]$, $C(v)$ tăng nên chi phí nhỏ nhất khi $v=40.$

Khi đó tàu đi đúng 2 giờ. Chi phí mỗi giờ: $125\cdot 40^3+12000000=20000000.$

Tổng chi phí một chuyến: $C=40000000$ đồng.

Lợi nhuận mục tiêu bằng 25% chi phí nên doanh thu phải bằng $1,25C=50000000$ đồng.

Tàu chở 200 hành khách, do đó giá vé mỗi người là $\frac{50000000}{200}=250000$ đồng.

Kết luận: giá vé là **250 nghìn đồng/người**.

Câu 27.

Hai cột đèn trên bờ hồ nằm trên một đường thẳng song song với $y=-x+4.$

Gọi đường thẳng qua hai cột đèn trên bờ hồ là $d_1: y=-x+m, m>4.$

Giao điểm của d_1 với bờ hồ thỏa $\frac{2x+1}{x-1}=-x+m.$

Suy ra $x^2+(1-m)x+m+1=0.$

Gọi hai nghiệm là x_B, x_C. Ta có $x_B+x_C=m-1, x_Bx_C=m+1.$

Vì BC nằm trên đường có hệ số góc -1 nên $BC^2=2\left(x_B-x_C\right)^2.$

Mà $\left(x_B-x_C\right)^2=\left(x_B+x_C\right)^2-4x_Bx_C$, nên $BC^2=2m^2-12m-6.$

Khoảng cách giữa hai đường thẳng song song d và d_1 chính là cạnh còn lại của hình vuông:

$AB=\frac{m-4}{\sqrt{2}}.$

Điều kiện hình vuông là $AB=BC$, do đó $\frac{(m-4)^2}{2}=2m^2-12m-6.$

Suy ra $3m^2-16m-28=0.$

Vì $m>4$ nên $m=\frac{8+2\sqrt{37}}{3}.$

Do đó $BC = \frac{m-4}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\left(\sqrt{37}-2\right)}{3} \approx 1,9246.$

Kết luận: khoảng cách giữa hai cột đèn trên bờ hồ là **1,92** đơn vị.

Câu 28.

Gọi hàm bậc ba của đường biên khu trồng hoa là $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$

Đồ thị đi qua bốn điểm đã cho nên $f(0) = 8, f(2) = 5,4, f(5) = 6,75, f(8) = 0.$

Giải hệ, ta được $a = -\frac{1}{10}, b = \frac{21}{20}, c = -3, d = 8.$

Vậy $f(x) = -\frac{1}{10}x^3 + \frac{21}{20}x^2 - 3x + 8.$

Đường thẳng d có hệ số góc $k_d = -\frac{13}{9}.$

Tại điểm trên đồ thị có khoảng cách đến d nhỏ nhất, tiếp tuyến của đồ thị song song với d. Vì vậy $f'(x) = -\frac{13}{9}.$

Mà $f'(x) = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{21}{10}x - 3.$

Do đó $-\frac{3}{10}x^2 + \frac{21}{10}x - 3 = -\frac{13}{9}.$

Suy ra $27x^2 - 189x + 140 = 0.$

Hai nghiệm là $x = \frac{63 \pm \sqrt{2289}}{18}.$

Xấp xỉ $x_1 \approx 0,84, x_2 \approx 6,16.$

Theo vị trí đường thẳng trong hình, điểm gần nhất nằm trên nhánh bên phải của đồ thị; đồng thời so sánh khoảng cách tại hai điểm cho thấy nghiệm $x \approx 6,16$ cho khoảng cách nhỏ hơn.

Kết luận: hoành độ cần tìm là **6,16**.

Câu 29.

Xét một mặt cắt vuông góc với hai thanh treo. Do hệ thống đối xứng, chỉ cần xét một nửa rồi nhân đôi.

Gọi x là khoảng cách thẳng đứng từ hai thanh treo đến điểm nối dây phía dưới, với $0 \le x \le 1.$

Khoảng cách giữa hai thanh treo là 3 m nên từ trung điểm đến mỗi thanh là $\frac{3}{2}.$

Mỗi dây xiên có độ dài $\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + x^2} = \sqrt{\frac{9}{4} + x^2}.$

Đoạn dây thẳng đứng còn lại dài $1-x.$

Toàn bộ hệ thống có hai phần giống nhau, vì vậy tổng chiều dài dây là $L(x)=4\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}+2-2x.$

Đạo hàm: $L'(x)=\frac{4x}{\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}}-2.$

Cho $L'(x)=0$: $\frac{4x}{\sqrt{\frac{9}{4}+x^2}}=2.$

Suy ra $4x^2=\frac{9}{4}+x^2 \Rightarrow x=\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Khi đó $L_{\min}=2+3\sqrt{3}.$

Đề cho dạng $a+b\sqrt{c}.$

Ta có $a=2, b=3, c=3.$

Kết luận: $a+b+c=8.$

Câu 30.

Các bước đi lần lượt có độ dài $8, 8\cdot\frac{3}{4}, 8\left(\frac{3}{4}\right)^2, \ldots$

và hướng đi lần lượt là sang phải, lên trên, sang trái, xuống dưới rồi lặp lại.

Tọa độ theo phương Ox của điểm giới hạn M là $x_M=8-8\left(\frac{3}{4}\right)^2+8\left(\frac{3}{4}\right)^4-\cdots.$

Đây là cấp số nhân có công bội $-\frac{9}{16}.$

Vì vậy $x_M=\frac{8}{1+\frac{9}{16}}=\frac{128}{25}.$

Tương tự, tọa độ theo phương Oy là $y_M=8\cdot\frac{3}{4}-8\left(\frac{3}{4}\right)^3+8\left(\frac{3}{4}\right)^5-\cdots=\frac{6}{1+\frac{9}{16}}=\frac{96}{25}.$

Do đó $OM=\sqrt{x_M^2+y_M^2}=\frac{\sqrt{128^2+96^2}}{25}=\frac{160}{25}=6,4.$

Kết luận: $OM=6,4$ đơn vị.

Câu 31.

Gọi P là điểm xe đi từ sa mạc xuống đường nhựa và Q là điểm xe rời đường nhựa để đi đến B.

Do bài toán đối xứng, tại phương án nhanh nhất ta có thể đặt $HP = KQ = u.$

Khi đó $AP = BQ = \sqrt{10^2 + u^2},$ và $PQ = 70 - 2u.$

Tổng thời gian đi là $T(u) = \dfrac{2\sqrt{100 + u^2}}{30} + \dfrac{70 - 2u}{50}.$

Đạo hàm: $T'(u) = \dfrac{u}{15\sqrt{100 + u^2}} - \dfrac{1}{25}.$

Cho $T'(u) = 0$: $\dfrac{u}{\sqrt{100 + u^2}} = \dfrac{3}{5}.$

Suy ra $25u^2 = 9\left(100 + u^2\right) \Rightarrow u = 7,5.$

Khi đó $AP = BQ = \sqrt{100 + 7,5^2} = 12,5$ km và $PQ = 70 - 15 = 55$ km.

Tổng thời gian: $T_{\min} = \dfrac{25}{30} + \dfrac{55}{50} = \dfrac{29}{15} \approx 1,93$

giờ, nhỏ hơn 2 giờ nên thỏa yêu cầu.

Kết luận: xe nên đi từ A đến điểm P trên đường nhựa cách H **7,5 km**, chạy trên đường nhựa **55 km** đến điểm Q cách K **7,5 km**, rồi đi từ Q đến B.

Câu 32.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho $B(0;0), C(4;0), A\left(2;2\sqrt{3}\right).$

Vì $DA = DB, \widehat{ADB} = 120^\circ,$ nên tam giác ADB cân tại D. Theo định lý cosin:

$AB^2 = DA^2 + DB^2 - 2\,DA \cdot DB\cos 120^\circ.$

Đặt $DA = DB = t$. Vì $AB = 4$, ta có $16 = 3t^2 \Rightarrow t = \dfrac{4}{\sqrt{3}}.$

Từ hình vẽ có thể chọn $D\left(0; \dfrac{4}{\sqrt{3}}\right).$

Gọi $M(x;0), 0 \le x \le 4.$

Khi đó $CM = 4 - x$ và $MD = \sqrt{x^2 + \dfrac{16}{3}}.$

Tổng chi phí, đơn vị triệu đồng, là $F(x) = 200(4 - x) + 400\sqrt{x^2 + \dfrac{16}{3}}.$

Đạo hàm: $F'(x) = -200 + \dfrac{400x}{\sqrt{x^2 + \dfrac{16}{3}}}.$

Cho $F'(x)=0$: $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+\dfrac{16}{3}}}=\dfrac{1}{2}.$

Suy ra $4x^2=x^2+\dfrac{16}{3}\Rightarrow x=\dfrac{4}{3}.$

Khi đó

$$CM=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3},\ MD=\sqrt{\frac{16}{9}+\frac{16}{3}}=\frac{8}{3}.$$

Vậy $F_{\min}=200\cdot\dfrac{8}{3}+400\cdot\dfrac{8}{3}=1600.$

Kết luận: tổng chi phí nhỏ nhất là **1600 triệu đồng**.

Câu 33.

Gọi C là điểm chiến sĩ lên bờ và đặt $HC=x, 0<x\le 900.$

Dòng nước chảy từ H về B với vận tốc 1 m/s. Vận tốc bơi của chiến sĩ đối với nước cũng là 1 m/s.

Gọi t là thời gian bơi từ A đến C. Khi đó vận tốc thực so với bờ có các thành phần $\left(\dfrac{x}{t};\dfrac{300}{t}\right).$

Trừ vận tốc dòng nước, vận tốc của chiến sĩ đối với nước là $\left(\dfrac{x}{t}-1;\dfrac{300}{t}\right).$

Độ lớn vận tốc này bằng 1, do đó $\left(\dfrac{x}{t}-1\right)^2+\left(\dfrac{300}{t}\right)^2=1.$

Rút gọn: $t=\dfrac{x^2+90000}{2x}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{45000}{x}.$

Sau khi lên bờ, quãng đường chạy đến B là $CB=900-x,$ nên thời gian chạy là $\dfrac{900-x}{3}.$

Tổng thời gian: $T(x)=\dfrac{x}{2}+\dfrac{45000}{x}+\dfrac{900-x}{3}.$

Rút gọn: $T(x)=300+\dfrac{x}{6}+\dfrac{45000}{x}.$

Đạo hàm: $T'(x)=\dfrac{1}{6}-\dfrac{45000}{x^2}.$

Cho $T'(x)=0$: $x^2=270000\Rightarrow x=300\sqrt{3}.$

Khi đó $T_{\min}=300+50\sqrt{3}+50\sqrt{3}=300+100\sqrt{3}\approx 473,205.$

Làm tròn đến hàng đơn vị.

Kết luận: thời gian ít nhất là **473 giây**.

Câu 34.

Gọi H và K lần lượt là hình chiếu vuông góc của nhà và chợ lên bờ biển.

Ta có $AH = 0,8, BK = 0,3, AB = 1,3$ với đơn vị km.

Khoảng cách giữa hai hình chiếu là $HK = \sqrt{AB^2 - (AH - BK)^2} = \sqrt{1,3^2 - 0,5^2} = 1,2.$

Gọi P là điểm thầy Hùng chạy từ nhà ra bờ biển và Q là điểm sau khi chạy dọc bờ biển 600 m. Khi đó $PQ = 0,6.$

Đặt trục trên bờ biển với $H = 0, K = 1,2.$

Nếu P có tọa độ t thì Q có tọa độ $t + 0,6$.

Khi đó $AP = \sqrt{t^2 + 0,8^2}$ và $QB = \sqrt{(0,6 - t)^2 + 0,3^2}.$

Dời điểm B sang trái $0,6$ km, ta được điểm B_1 cách bờ biển $0,3$ km và có hình chiếu cách H đúng $0,6$ km. Khi đó $QB = PB_1$.

Phản xạ B_1 qua bờ biển thành B_2. Theo tính chất đường gấp khúc, $AP + PB_1 \geq AB_2.$

Giá trị nhỏ nhất là $AB_2 = \sqrt{0,6^2 + (0,8 + 0,3)^2} = \sqrt{1,57}.$

Ngoài hai đoạn trên, thầy còn chạy cố định $0,6$ km dọc bờ và $1,3$ km từ chợ về nhà.

Vì vậy tổng quãng đường ngắn nhất là $S_{\min} = \sqrt{1,57} + 0,6 + 1,3 \approx 3,152996$ km.

Đổi ra mét và làm tròn:

$S_{\min} \approx 3153.$

Kết luận: quãng đường ngắn nhất là **3153 m**.

Câu 35.

Đổi 200 m thành $0,2$ km. Đặt $HM = x, 0 < x < 1.$

Khi đó $AM = \sqrt{x^2 + 0,2^2} = \sqrt{x^2 + 0,04}$ và $MC = 1 - x.$

Gọi $\alpha = \arctan \dfrac{0,2}{x}.$

Vì tia MA tạo với hướng MH góc α, còn $\widehat{AMD} = 120^\circ$, nên nếu đặt $\theta = \widehat{DMC},$ thì

$\theta = 60^\circ - \alpha = \dfrac{\pi}{3} - \arctan \dfrac{0,2}{x}.$

Vì MC là đường kính của ao nên theo định lý Thales $\widehat{MDC} = 90^\circ.$

Trong tam giác vuông MDC: $MD = MC\cos\theta = (1 - x)\cos\theta.$

Góc nội tiếp $\widehat{DMC}=\theta$ chắn cung DC, nên số đo cung nhỏ DC là 2θ. Bán kính ao là $r=\dfrac{1-x}{2}$.

Do đó độ dài cung DC là $l_{DC}=r\cdot 2\theta=(1-x)\theta.$

Tổng quãng đường hằng ngày là $S(x)=\sqrt{x^2+0,04}+(1-x)(\cos\theta+\theta)$, trong đó $\theta=\dfrac{\pi}{3}-\arctan\dfrac{0,2}{x}$.

Ta có $\theta'=\dfrac{0,2}{x^2+0,04}.$

Suy ra $S'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+0,04}}-(\cos\theta+\theta)+(1-x)(1-\sin\theta)\dfrac{0,2}{x^2+0,04}.$

Giải phương trình $S'(x)=0$ trên miền phù hợp bằng máy tính, ta được $x\approx 0,31608.$

Đạo hàm đổi dấu từ dương sang âm tại giá trị này nên đây là điểm cho quãng đường lớn nhất.

Khi đó chiều dài cây cầu thứ nhất là $AM=\sqrt{0,31608^2+0,04}\approx 0,37404.$

Làm tròn đến hàng phần trăm.

Kết luận: độ dài cây cầu thứ nhất là **0,37 km**.

Câu 36.

Gọi θ là góc giữa chiều dài ô tô và phương ngang khi xe đang ở vị trí khó quay nhất.

Khi xe vừa đủ quay qua góc vuông, một cạnh dài của xe đi qua góc trong của lối đi, đồng thời hai đỉnh ngoài của xe chạm hai mép ngoài của hai đoạn đường.

Với chiều dài xe 5 m và chiều rộng xe $1,9$ m, chiều rộng đoạn đường thẳng vào gara là $2,6$ m.

Đặt $t=\tan\theta>0.$

Từ hình học của vị trí tới hạn, chiều rộng đoạn đường đầu tiên theo t là $x(t)=\dfrac{1,9(1+t^2)+5t}{\sqrt{1+t^2}}-2,6t.$

Đạo hàm: $x'(t)=\dfrac{1,9t(1+t^2)+5}{(1+t^2)^{3/2}}-2,6.$

Cho $x'(t)=0$: $1,9t(1+t^2)+5=2,6(1+t^2)^{3/2}.$

Ta nhận được nghiệm tối ưu $t=\dfrac{4}{3}.$

Khi đó $\sqrt{1+t^2}=\dfrac{5}{3}.$

Thay vào $x(t)$: $x_{\min}=\dfrac{1,9\cdot\dfrac{25}{9}+5\cdot\dfrac{4}{3}}{\dfrac{5}{3}}-2,6\cdot\dfrac{4}{3}=3,7.$

Kết luận: chiều rộng nhỏ nhất của đoạn đường đầu tiên là **3,7 m**.

Câu 37.

Gọi cạnh đáy nhỏ là $x>0$. Khi đó cạnh đáy lớn là $2x$.

Diện tích lục giác đều cạnh a là $S=\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2.$

Do đó $S_1=\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2,\ S_2=\frac{3\sqrt{3}}{2}(2x)^2=6\sqrt{3}x^2.$

Thể tích chóp cụt là $V=\frac{h}{3}\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1S_2}\right).$

Ta có $\sqrt{S_1S_2}=3\sqrt{3}x^2.$

Vì $V=\frac{7\sqrt{6}}{2},$ nên $\frac{7\sqrt{6}}{2}=\frac{7\sqrt{3}}{2}hx^2.$

Suy ra $h=\frac{\sqrt{2}}{x^2}.$

Khoảng cách từ tâm của lục giác đều đến một cạnh là apothem. Với hai đáy, hiệu hai apothem là

$$\sqrt{3}x-\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Gọi l là chiều cao của một mặt bên hình thang. Khi đó $l=\sqrt{h^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{x^4}+\frac{3x^2}{4}}.$

Khi trải phẳng, tâm đường tròn ngoại tiếp trùng với tâm lục giác nhỏ. Khoảng cách từ tâm đến đường chứa cạnh ngoài của một hình thang là $\frac{\sqrt{3}}{2}x+l.$

Nửa cạnh ngoài bằng x. Vì vậy bán kính đường tròn thỏa $R^2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x+l\right)^2+x^2.$

Thay l vào và rút gọn, đặt $F(x)=R^2,$

ta được $F(x)=\frac{5}{2}x^2+\frac{2}{x^4}+\frac{\sqrt{3}}{2x}\sqrt{8+3x^6}.$

Vì $R>0$, R nhỏ nhất khi F nhỏ nhất.

Đạo hàm: $F'(x)=5x-\frac{8}{x^5}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{9x^4}{\sqrt{8+3x^6}}-\frac{\sqrt{8+3x^6}}{x^2}\right).$

Giải phương trình $F'(x)=0$ bằng máy tính, ta được nghiệm dương $x\approx 1,073344.$

Đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương nên đây là điểm cực tiểu của bán kính.

Làm tròn đến hàng phần trăm.

Kết luận: cạnh đáy nhỏ dài **1,07** đơn vị.