

Mục Lục

Đề số 1. Chuyên Bắc Ninh. Năm học: 2014-2015.....	3
Đề số 2. Chuyên Bến Tre. Năm học: 2014-2015.....	8
Đề số 3. Chuyên Toán Sư Phạm Hà Nội. Năm học: 2014-2015.....	14
Đề số 4. Chuyên SP Hà Nội. Năm học: 2014-2015.....	19
Đề số 5. Chuyên Hà Tĩnh. Năm học: 2014-2015.....	23
Đề số 6. Chuyên Khánh Hòa. Năm học: 2014-2015.....	27
Đề số 7. Chuyên Nam Định. Năm học: 2014-2015.....	30
Đề số 8. Chuyên Lê Quý Đôn Bình Định. Năm học: 2014-2015.....	34
Đề số 9. Chuyên Ninh Bình. Năm học: 2014-2015.....	38
Đề số 10. Chuyên Năng Khiếu HCM. Năm học: 2014-2015.....	44
Đề số 11. Chuyên Ngoại Ngữ DHQG Hà Nội. Năm học: 2014-2015.....	50
Đề số 12. Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương. Năm học: 2014-2015.....	55
Đề số 13. Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An. Năm học: 2014-2015.....	59
Đề số 14. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2014-2015.....	64
Đề số 15. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2014-2015.....	70
Đề số 16. Chuyên HCM. Năm học: 2014-2015.....	75
Đề số 17. Chuyên Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2014-2015.....	81
Đề số 18. Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2014-2015.....	86
Đề Số 19. Chuyên Năng Khiếu - HCM. Năm học: 2014-2015.....	91
Đề số 20. Chuyên Hà Nội Amsterdam. Năm học: 2014-2015.....	97
Đề số 21. Chuyên Bắc Giang. Năm học: 2015-2016.....	105
Đề số 22. Chuyên Bạc Liêu. Năm học: 2015-2016.....	112
Đề số 23. Chuyên Bạc Liêu. Năm học: 2015-2016.....	116
Đề số 24. Chuyên Đại học Vinh. Năm học: 2015-2016.....	120
Đề số 25. Chuyên Hà Giang. Năm học: 2015-2016.....	126
Đề số 26. Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình. Năm học: 2015-2016.....	130
Đề số 27. Chuyên Hùng Vương – Phú Thọ. Năm học: 2015-2016.....	135
Đề số 28. Chuyên Khánh Hòa. Năm học: 2015-2016.....	141
Đề số 29. Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2015-2016.....	145
Đề số 30. Chuyên Nam Định . Năm học: 2015-2016.....	151
Đề số 31. Chuyên Nam Định. Năm học: 2015-2016.....	159
Đề số 32. Chuyên HCM. Năm học: 2015-2016.....	164
Đề số 33. Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên. Năm học: 2015-2016.....	168
Đề số 34. Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình. Năm học: 2015-2016.....	172
Đề số 35. Chuyên Nguyễn Du - Đaklak. Năm học: 2015-2016.....	178

Đề số 36. Chuyên Hải Dương. Năm học: 2015-2016.....	184
Đề số 37. Chuyên Quảng Bình. Năm học: 2015-2016.....	191
Đề số 38. Chuyên Quảng Nam. Năm học: 2015-2016.....	197
Đề số 39. Chuyên Quảng Nam. Năm học: 2015-2016.....	204
Đề số 40. Chuyên Quang Trung – Bình Phước. Năm học: 2015-2016.....	209
Đề số 41. Chuyên Quốc Học Huế - Thừa Thiên Huế. Năm học: 2015-2016.....	215
Đề số 42. Chuyên SPHN. Năm học: 2015-2016.....	221
Đề số 43. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2015-2016.....	226
Đề số 44. Chuyên Vũng Tàu. Năm học: 2016-2017.....	230
Đề số 45. Chuyên Sơn La. Năm học: 2016-2017.....	235
Đề số 46. Chuyên SPHN. Năm học: 2016-2017.....	240

Đề số 1. Chuyên Bắc Ninh. Năm học 2014-2015**Câu I. (1, 5 điểm)**

Cho phương trình $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (1) , với ẩn x , tham số m .

1) Giải phương trình (1) khi $m = 1$

2) Xác định giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 sao cho $x_1^2 + x_2^2$ nhỏ nhất.

Câu II. (1,5 điểm)

Trong cùng một hệ toạ độ , gọi (P) là đồ thị của hàm số $y = x^2$ và (d) là đồ thị của hàm số $y = -x + 2$

1) Vẽ các đồ thị (P) và (d) . Từ đó , xác định toạ độ giao điểm của (P) và (d) bằng đồ thị .

2) Tìm a và b để đồ thị Δ của hàm số $y = ax + b$ song song với (d) và cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1

Câu III. (2,0 điểm)

1) Một người đi xe đạp từ địa điểm A đến địa điểm B , quãng đường AB dài 24km . Khi đi từ B trở về A người đó tăng vận tốc thêm 4km so với lúc đi , vì vậy thời gian về ít hơn thời gian đi 30 phút . Tính vận tốc của xe đạp khi đi từ A đến B .

2) Giải phương trình $\sqrt{x} + \sqrt{1-x} + \sqrt{x(1-x)} = 1$

Câu IV. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn và ba đường cao AA' , BB' ,CC' cắt nhau tại H .Vẽ hình bình hành BHCD . Đường thẳng qua D và song song với BC cắt đường thẳng AH tại M .

1) Chứng minh rằng năm điểm A, B ,C , D , M cùng thuộc một đường tròn.

2) Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .Chứng minh rằng $BM = CD$ và góc $BAM =$ góc OAC .

3) Gọi K là trung điểm của BC , đường thẳng AK cắt OH tại G . Chứng minh rằng G là trọng tâm của tam giác ABC.

Câu V. (2, 0 điểm)

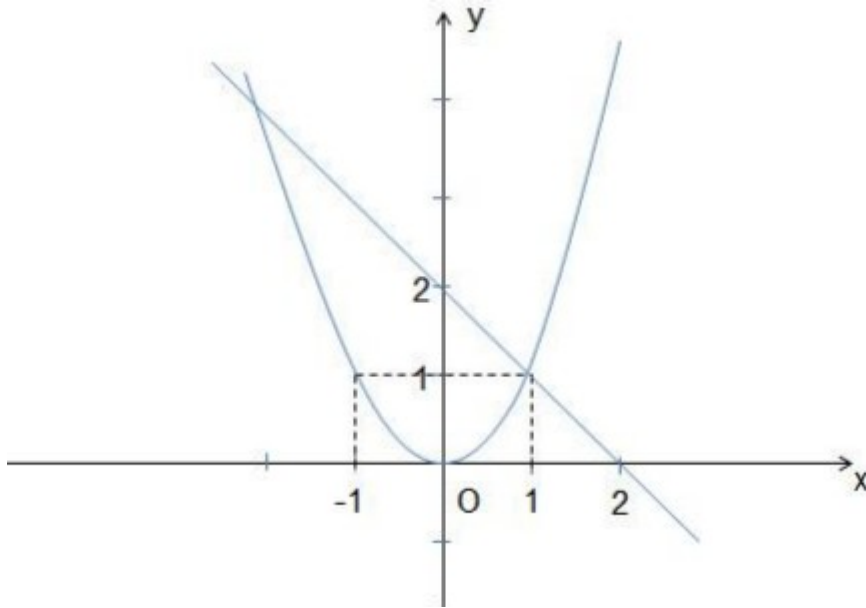
1) Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = a^2 + ab + b^2 - 3a - 3b + 2014$.

2) Có 6 thành phố trong đó cứ 3 thành phố bất kỳ thì có ít nhất 2 thành phố liên lạc được với nhau . Chứng minh rằng trong 6 thành phố nói trên tồn tại 3 thành phố liên lạc được với nhau.

.....Hết.....

Hướng dẫn sơ lược đề thi môn toán dành cho tất cả thí sinh năm học 2014-2015
Thi vào THPT chuyên Tỉnh Bắc Ninh

Câu I. (1, 5 điểm)**Giải:**1) GPT khi $m=1$ + Thay $m=1$ vào (1) ta được $x^2 + 2x - 8 = 0 \Leftrightarrow (x + 4)(x - 2) = 0 \Leftrightarrow x = \{-4; 2\}$ **KL : Phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x = 4$ hoặc $x = 2$** 2) xét PT (1) : $x^2 + 2mx - 2m - 6 = 0$ (1) , với ẩn x , tham số m .+ Xét PT (1) có $\Delta' = m^2 + 2m + 6 = (m + 1)^2 + 5 > 0$ (luôn đúng) với mọi $m \Rightarrow$ PT (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1 ; x_2$ với mọi m + Mặt khác áp dụng hệ thức viết vào PT (1) ta có :
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -(2m + 6) \end{cases} (I)$$
+ Lại theo đề và (I) có : $A = x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = (-2m)^2 + 2(2m + 6) = 4m^2 + 4m + 12$ $= (2m + 1)^2 + 11 \geq 11$ với mọi $m \Rightarrow$ Giá trị nhỏ nhất của A là 11 khi $m = -\frac{1}{2}$ **KL :** $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.**Câu II. (1,5 điểm)****Giải :** 1) Lập bảng giá trị và vẽ đồ thị hàm số:



Dựa vào đồ thị ta có giao điểm của d và (P) là 2 điểm M (1 ; 1); N (-2 ; 4)

2) Do đồ thị Δ của hàm số $y = ax + b$ song song với (d) $y = -x + 2$

Nên ta có: $a = -1$.

Δ cắt (P) tại điểm có hoành độ bằng -1 nên ta thay $x = -1$ vào pt (P) ta được: $y = 1$

Thay $x = -1$; $y = 1$ vào pt Δ ta được $a = -1$; $b = 0$

$\Rightarrow$ Phương trình của Δ là $y = -x$

Câu III .(2,0 điểm)

Giải:

1) Đổi 30 phút = $\frac{1}{2}$ giờ

Gọi x (km / h) là vận tốc người đi xe đạp từ A $\rightarrow$ B ($x > 0$) .

Vận tốc người đó đi từ B $\rightarrow$ A là: $x + 4$ (km/h)

Thời gian người đó đi từ A $\rightarrow$ B là: $\frac{24}{x}$

Thời gian người đó đi từ B về A là: $\frac{24}{x+4}$

Theo bài ra ta có:

$$\frac{24}{x} - \frac{24}{x+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{48(x+4)}{2x(x+4)} - \frac{48x}{2x(x+4)} = \frac{x(x+4)}{2x(x+4)} \Leftrightarrow x^2 + 4x - 192 = 0$$

$\Rightarrow x = 12$ (t/m) . KL : Vậy vận tốc của người đi xe đạp từ A đến B là 12 km/h.

$$2) \text{ ĐKXD } 0 \leq x \leq 1 \text{ Đặt } 0 < a = \frac{\sqrt{x} + \sqrt{1-x}}{2} \Rightarrow \frac{a^2 - 1}{2} = \sqrt{x(1-x)}$$

$$+ \text{ PT mới là : } a + \frac{a^2 - 1}{2} = 1 \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow (a-1)(a+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = \{-3; 1\} \Rightarrow a = 1 > 0$$

$$\sqrt{x} + \sqrt{1-x} = 1$$

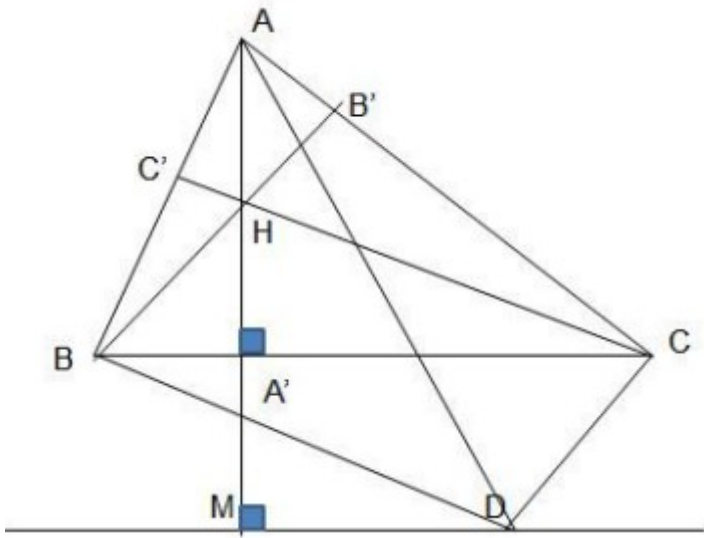
$$+ \text{ Nếu } a = 1 \Rightarrow \Leftrightarrow x + 1 - x + 2\sqrt{x(1-x)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x(1-x)} = 0$$

$$\Rightarrow x = \{0; 1\} \text{ (t/m)}$$

KL : Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt là $x = 0$; $x = 1$

Câu IV . (3,0 điểm)

Giải



1) Chứng minh các tứ giác ABMD , AMDC nội tiếp

Do BHCD là hình bình hành nên:

Ta có: $BD \parallel CC' \Rightarrow BD \perp AB \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$

Có: $AA' \perp BC$ nên: $MD \perp AA' \Rightarrow \angle AMD = 90^\circ$

$$\Rightarrow \angle ABD + \angle AMD = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ tứ giác ABMD nội tiếp đường tròn đường kính AD.

Chứng minh tương tự ta có tứ giác AMDC nội tiếp đường tròn đường kính AD.

$\Rightarrow A, B, C, D, M$ nằm trên cùng một đường tròn

2) Xét (O) có dây $MD \parallel BC \Rightarrow$ số cung $MB =$ số cung $CD \Rightarrow$ dây $MB =$ dây CD hay $BM = CD$

+ Theo phần 1) và $BC \parallel MD \Rightarrow$ góc $BAM =$ góc OAC

3) Chứng minh OK là đường trung bình của tam giác $AHD \Rightarrow OK \parallel AH$ và $OK = \frac{1}{2} AH$ hay $\frac{OK}{AH} = \frac{1}{2}$ (*)

+ Chứng minh tam giác OGK đồng dạng với tam giác $HGA \Rightarrow \frac{OK}{AH} = \frac{1}{2} = \frac{GK}{AG} \Rightarrow AG = 2GK$, từ đó suy ra G là trọng tâm của tam giác ABC

Câu V. (2, 0 điểm)

Giải:

1) Giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi $a = b = 1$

$$4P = a^2 - 2ab + b^2 + 3(a^2 + b^2 + 4 + 2ab - 4a - 4b) + 4 \cdot 2014 - 12$$

$$= (a-b)^2 + 3(a+b-2)^2 + 8044 \geq 8044$$

$$\Rightarrow P \geq 2011$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a + b - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là 2011 khi và chỉ khi $a = b = 1$.

2) Gọi 6 thành phố đã cho là A, B, C, D, E, F

+ Xét thành phố A . theo nguyên lý Dirichlet, trong 5 thành phố còn lại thì có ít nhất 3 thành phố liên lạc được với A hoặc có ít nhất 3 thành phố không liên lạc được với A (vì nếu số thành phố liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 và số thành phố không liên lạc được với A cũng không vượt quá 2 thì ngoài A , số thành phố còn lại cũng không vượt quá 4). Do đó chỉ xảy ra các khả năng sau:

• Khả năng 1:

Số thành phố liên lạc được với A không ít hơn 3, giả sử B, C, D liên lạc được với A . Theo đề bài trong 3 thành phố B, C, D có 2 thành phố liên lạc được với nhau. Khi đó 2 thành phố này cùng với A tạo thành 3 thành phố đôi một liên lạc được với nhau.

• Khả năng 2:

Số thành phố không liên lạc được với A , không ít hơn 3, giả sử 3 thành phố không liên lạc được với A là D, E, F . Khi đó trong bộ 3 thành phố (A, D, E) thì D và E liên lạc được với nhau (vì D, E không liên lạc được với A)

Tương tự trong bộ 3 (A,E,F) và (A,F,D) thì E,F liên lạc được với nhau, F và D liên lạc được với nhau và như vậy D,E,F là 3 thành phố đôi một liên lạc được với nhau.

Vậy ta có ĐPCM

Đề số 2. Chuyên Bến Tre. Năm học: 2014-2015

Câu 1: (2,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức sau:
$$A = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}}$$

b) Cho biểu thức:
$$B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x})$$
 với $x > 0, x \neq 1$

i) Rút gọn biểu thức B

ii) Tìm các giá trị nguyên của x để B nhận giá trị nguyên

Câu 2: (2,5 điểm)

Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 3x + (m+1)y = -1 \end{cases}$$
 với m là tham số.

a) Giải hệ với $m = 3$.

b) Giải và biện luận hệ theo m .

c) Tìm m nguyên để hệ có nghiệm là số nguyên.

Câu 3: (2 điểm)

Cho phương trình bậc hai: $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (1), với m là tham số.

i) Giải phương trình (1) khi $m = 4$

ii) Tìm các giá trị của m để phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2014}$$

Câu 4: (3 điểm)

Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn đường kính AD. Gọi M là một điểm di động trên cung nhỏ AB (M không trùng với các điểm A và B).

a) Chứng minh MD là đường phân giác của góc BMC

b) Cho $AD = 2R$. Tính diện tích của tứ giác ABDC theo R

c) Gọi O là tâm đường tròn đường kính AD. Hãy tính diện tích hình viên phân giới hạn bởi cung AMB và dây AB theo R. d) Gọi K là giao điểm của AB và MD, H là giao điểm của AD và MC. Chứng minh ba đường thẳng AM, BD, HK đồng quy.

ĐÁP ÁN

Câu 1: a) Ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{\frac{3\sqrt{3}-4}{2\sqrt{3}+1}} - \sqrt{\frac{\sqrt{3}+4}{5-2\sqrt{3}}} \\ &= \sqrt{\frac{(3\sqrt{3}-4)(2\sqrt{3}-1)}{(2\sqrt{3})^2-1}} - \sqrt{\frac{(\sqrt{3}+4)(5+2\sqrt{3})}{5^2-(2\sqrt{3})^2}} \\ &= \sqrt{\frac{22-11\sqrt{3}}{11}} - \sqrt{\frac{26+13\sqrt{3}}{13}} \\ &= \sqrt{2-\sqrt{3}} - \sqrt{2+\sqrt{3}} \\ &= \sqrt{\frac{4-2\sqrt{3}}{2}} - \sqrt{\frac{4+2\sqrt{3}}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} - \sqrt{(\sqrt{3}+1)^2} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\sqrt{3}-1| - \sqrt{3}-1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-2) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$b) \quad B = \left(\frac{\sqrt{x}+2}{x+2\sqrt{x}+1} - \frac{\sqrt{x}-2}{x-1} \right) (x+\sqrt{x})$$

$$\begin{aligned} B &= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+1)^2} - \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] \cdot (x+\sqrt{x}) \\ &= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot (x+\sqrt{x}) \\ &= \frac{(x+\sqrt{x}-2) - (x-\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}+1)^2} \cdot (x+\sqrt{x}) \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)^2(\sqrt{x}-1)} \cdot \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = \frac{2x}{x-1} \end{aligned}$$

i) Với $x > 0, x \neq 1$ ta có:

$$ii) \text{ Ta có: } B = \frac{2x}{x-1} = \frac{2(x-1)+2}{x-1} = 2 + \frac{2}{x-1}$$

Do x nguyên nên:

$$B \text{ nguyên} \Leftrightarrow \frac{2}{x-1} \text{ nguyên} \Leftrightarrow x-1 \text{ là ước của } 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = \pm 1 \\ x-1 = \pm 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \{2; 0; 3; -1\}$$

Vậy các giá trị của x cần tìm là $x \in \{2; 0; 3; -1\}$

Câu 2:

$$a) \begin{cases} mx+2y=1 \\ 3x+(m+1)y=-1 \end{cases} \quad (1)$$

Với $m = 3$, hệ phương trình (I) trở thành:

$$\begin{cases} 3x+2y=1 \\ 3x+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2y=2 \\ 3x+4y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ 3x+4(-1)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=1 \end{cases}$$

Khi $m = 3$ hệ có nghiệm $(1; -1)$

b) Ta có:

$$\begin{cases} mx + 2y = 1 \\ 3x + (m+1)y = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-mx}{2} \\ 3x + (m+1) \cdot \frac{1-mx}{2} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-mx}{2} \\ 6x - (m^2 + m)x + m + 1 = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1-mx}{2} \\ (m^2 + m - 6)x = m + 3 \end{cases} \quad (II)$$

Khi $m = 2$: (*) $\Leftrightarrow 0x = 5$ (vô nghiệm) $\Rightarrow$ Hệ vô nghiệm

Khi $m = -3$: (*) $\Leftrightarrow 0x = 0$. Hệ phương trình có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1+3x}{2}$

Khi $m^2 + m - 6 \neq 0 \Leftrightarrow (m+3)(m-2) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq -3 \\ m \neq 2 \end{cases}$, ta có:

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m+3}{m^2+m-6} = \frac{1}{m-2} \\ y = \frac{1-\frac{m}{m-2}}{2} = \frac{1}{2-m} \end{cases}$$

Hệ (I) có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{m-2}; \frac{1}{2-m} \right)$

Kết luận: + $m = 2$: (I) vô nghiệm

+ $m = -3$: (I) có vô số nghiệm $x \in \mathbb{R}$, $y = \frac{1+3x}{2}$

+ $m \neq 2$ và $m \neq -3$: (I) có nghiệm duy nhất $\left(\frac{1}{m-2}; \frac{1}{2-m} \right)$

c) Theo câu b, (I) có nghiệm $\Leftrightarrow m \neq 2$.

Khi $m = -3$, (I) có nghiệm nguyên chẳng hạn $x = 1$, $y = 2$

Khi $m \neq 2$ và $m \neq -3$: (I) có nghiệm nguyên $\Leftrightarrow \frac{1}{m-2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow m-2$ là ước của 1

$\Leftrightarrow m-2 = 1$ hoặc $m-2 = -1$

$\Leftrightarrow m = 3$ hoặc $m = 1$

Vậy các giá trị m cần tìm là $m \in \{-3; 1; 3\}$

Câu 3:

a) $x^2 - mx + m - 1 = 0$ (1)

i) Với $m = 4$, phương trình (1) trở thành

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-3) \Leftrightarrow x=1 \text{ hoặc } x=3$$

Vậy tập nghiệm của (1) là $\{1;3\}$

ii) Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4(m-1) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 \geq 0$$

(luôn đúng $\forall m$)

Khi đó, theo định lý Vi-ét:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m - 1 \end{cases}$$

Ta có:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{x_1 + x_2}{2014}$$

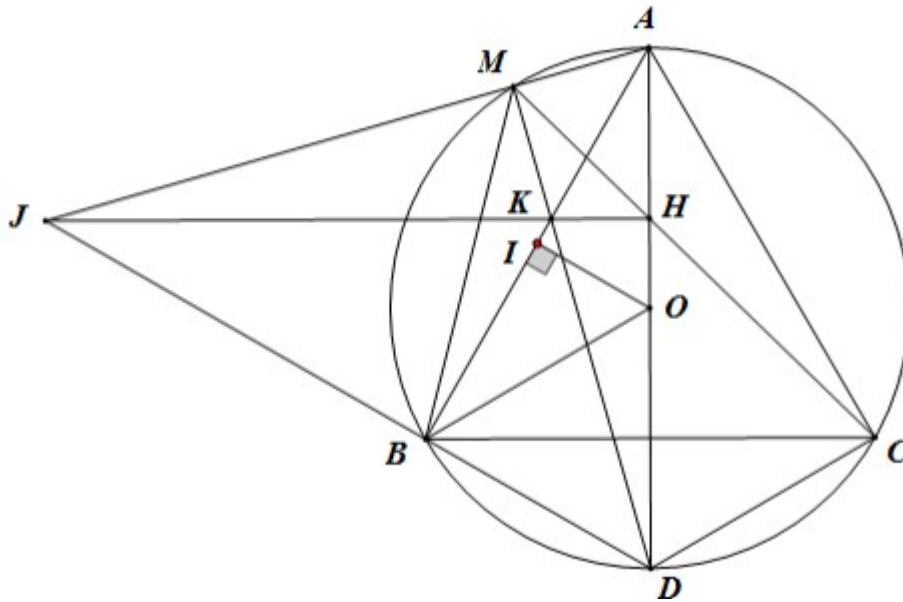
$$\Leftrightarrow \frac{2014(x_1 + x_2) - (x_1 + x_2)x_1 x_2}{2014x_1 x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x_1 + x_2)(2014 - x_1 x_2)}{2014x_1 x_2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = 2014 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m - 1 = 2014 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 2015 \end{cases}$$

Vậy $m \in \{0;2015\}$ là giá trị cần tìm.

Câu 4:



a) Vì B và C thuộc đường tròn đường kính AD nên $\angle ABD = \angle ACD = 90^\circ$

Xét hai tam giác vuông ABD và ACD có chung cạnh huyền AD, hai cạnh góc vuông AB và AC bằng nhau (do $\triangle ABC$ đều)

$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle ACD$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông)

$\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD$ (1)

Vì AMBD là tứ giác nội tiếp nên:

$\angle BMD = \angle BAD$ (2)

Vì AMDC là tứ giác nội tiếp nên:

$\angle CMD = \angle CAD$ (3)

Từ (1), (2) và (3) $\Rightarrow \angle BMD = \angle CMD$

$\Rightarrow MD$ là phân giác của góc BMC.

$$\angle BAD = \angle CAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 30^\circ$$

b) Ta có:

Xét $\triangle ABD$ vuông tại B có: $BA = AD \cdot \cos \angle BAD = 2R \cdot \cos 30^\circ = R\sqrt{3}$

Vì $\triangle ABC$ là tam giác đều nên $BC = BA = R\sqrt{3}$

Vì $AB = AC$, $DB = DC$ nên AD là trung trực của BC

$\Rightarrow AD \perp BC$.

Tứ giác ABDC có $AD \perp BC$ nên

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} AD \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot R\sqrt{3} = R^2 \sqrt{3}$$

c) Vẽ $OI \perp AB$ tại I. Xét tam giác vuông OIA ta có:

$$OI = OA \cdot \sin OAI = R \cdot \sin 30^\circ = \frac{R}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Diện tích tam giác AOB là } S_{OAB} = \frac{1}{2} AB \cdot OI = \frac{1}{2} R\sqrt{3} \cdot \frac{R}{2} = \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} \text{ (đvdt)}$$

Ta có: $\angle AOB = 2\angle AOC = 120^\circ$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$$\text{Diện tích hình quạt AOB là } \frac{\pi R^2 \cdot 120}{360} = \frac{\pi R^2}{3} \text{ (đvdt)}$$

$$\text{Suy ra diện tích hình viên phân cần tìm là } \frac{\pi R^2}{3} - \frac{R^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{R^2 (4\pi - 3\sqrt{3})}{12} \text{ (đvdt)}$$

d) Gọi J là giao điểm của AM và BD.

Vì M, B thuộc đường tròn đường kính AD nên $DM \perp AJ$, $AB \perp DJ$

$\Rightarrow K$ là trực tâm của tam giác AJD

$\Rightarrow JK \perp AD$

$\Rightarrow JK \parallel BC$ (cùng $\perp AD$) (4)

Tứ giác AMKH có $KMH = KAH (=BMD)$ nên là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow KHA = 180^\circ - KMA = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow KH \perp AD$

$\Rightarrow KH \parallel BC$ (cùng $\perp AD$) (5)

Từ (4) và (5), theo tiên đề O-clit về đường thẳng song song, ta có J, K, H thẳng hàng.

Vậy AM, BD và KH đồng quy tại J.

Đề số 3. Chuyên Toán Sư Phạm Hà Nội. Năm học: 2014-2015

Câu 1.(1,5 điểm) Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ và $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Câu 2.(1,5 điểm) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số:

$$a_n = 1 + \frac{2.6.10... (4n-2)}{(n+5)(n+6)...(2n)}$$
 là một số chính phương

Câu 4.(1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương $abc=1$.Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Câu 5 (3điểm) Cho hình vuông ABCD với tâm O .Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho MN//AP.Chứng minh rằng

1.Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc NOP=45°

2.Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

3.Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

Câu 6.(1 điểm) Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1;2;3;4;....;2014\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất

2 phần tử và nếu $x \in A, y \in A, x > y$, thì : $\frac{y^2}{x-y} \in A$

Ghi chú : Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh.....số báo danh.....

Hướng dẫn giải đề thi chuyên Toán sư phạm Hà Nội vòng 2 -2014

Ngày thi 6/6/2014

Câu 1.(1,5 điểm) Giả sử a, b, c, x, y, z là các số thực khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$ và $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ Chứng minh rằng $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Hướng dẫn

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{yz}{bc} + \frac{xz}{ac} \right) = 1$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{cxy + ayz + bxz}{abc} \right) = 1 (*)$$

Từ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0 \Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$ thay vào (*) ta có

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Câu 2.(1,5 điểm) Tìm tất cả các số thực x, y, z thỏa mãn

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$$

Hướng dẫn

$$\text{ĐKXD: } |x| \leq \sqrt{3}; |y| \leq 1; |z| \leq \sqrt{2}$$

Áp dụng Bất đẳng thức $AB \leq \frac{A^2 + B^2}{2}$ ta có đúng với mọi A,B

$$x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} \leq \frac{x^2 + 1 - y^2}{2} + \frac{y^2 + 2 - z^2}{2} + \frac{z^2 + 3 - x^2}{2} = 3$$

Kết hợp với GT ta có Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-y^2} \\ y = \sqrt{2-z^2} \\ z = \sqrt{3-x^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y^2 + z^2 = 2 \\ z^2 + x^2 = 3 \\ x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 0 \\ z^2 = 2 \\ x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Câu 3. (1,5 điểm) Chứng minh rằng với mỗi số nguyên $n \geq 6$ thì số:

$$a_n = 1 + \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \dots (4n-2)}{(n+5)(n+6) \dots (2n)} \text{ là một số chính phương}$$

Hướng dẫn

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + \frac{2^n \cdot (1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \cdot (n-4)!)}{(2n)!} + \frac{2^n \cdot (n+4)!}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} = 1 + \frac{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)!}{2^n \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \dots n} \\ &= 1 + (n+1)(n+2)(n+3)(n+4) \\ a_n &= (n^2 + 5n + 5)^2 \end{aligned}$$

Câu 4. (1,5 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương $abc=1$. Chứng minh rằng

$$\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{3}{4}$$

Hướng dẫn

$$a = \frac{x}{y}, b = \frac{y}{z}; c = \frac{z}{x}$$

Đặt

$$P = \frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2} = \frac{yz}{xy+xz+2yz} + \frac{zx}{xy+yz+2xz} + \frac{xy}{xz+yz+2xy}$$

Thì

$$\begin{aligned} 3-P &= 1 - \frac{yz}{xy+xz+2yz} + 1 - \frac{zx}{xy+yz+2xz} + 1 - \frac{xy}{xz+yz+2xy} \\ 3-P &= (xy+yz+xz) \left(\frac{1}{xy+xz+2yz} + \frac{1}{xy+yz+2xz} + \frac{1}{xz+yz+2xy} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Áp dụng Bất đẳng thức } \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{A+B+C}$$

(Do ta áp dụng bất đẳng thức Cô si cho 3 số dương: $A + B + C \geq 3\sqrt[3]{ABC}; \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{ABC}}$)

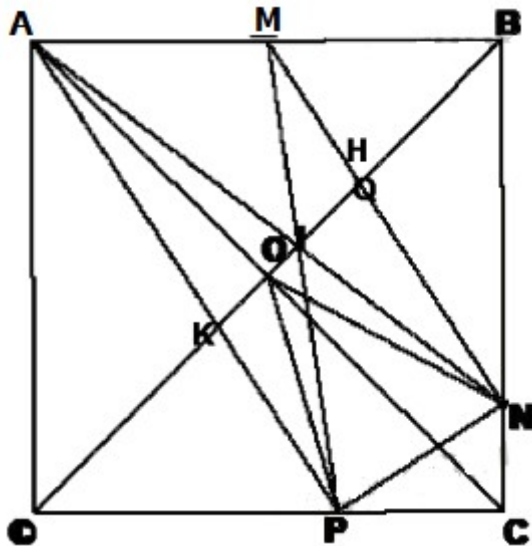
Nhân theo vế 2 bất đẳng thức trên, ta được:

$$(A + B + C) \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} \geq \frac{9}{A + B + C}$$

Khi đó Ta có
$$3 - P \geq (xy + yz + xz) \frac{9}{4xy + 4yz + 4xz} = \frac{9}{4} \Leftrightarrow P \leq 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi
$$\begin{cases} xy + yz + 2xz = xy + 2yz + xz = 2xy + yz + xz \\ xyz = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 1$$

Câu 5 (3điểm) Cho hình vuông ABCD với tâm O. Gọi M là trung điểm AB các điểm N, P thuộc BC, CD sao cho MN//AP. Chứng minh rằng



1. Tam giác BNO đồng dạng với tam giác DOP và góc NOP=45°

1. Đặt AB = a ta có AC = a√2 Chứng minh Tam giác ADP đồng dạng tam giác NBM (g.g) suy ra

$$\frac{BM}{DP} = \frac{BN}{AD} \Rightarrow BN \cdot DP = \frac{a^2}{2} \text{ mà } OB \cdot OD = \frac{a^2}{2}$$

tam giác DOP đồng dạng BNO (c.g.c). từ đó tính được $\angle NOP = 45^\circ$

2. Tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác NOP thuộc OC.

Theo a ta có
$$\frac{OB}{DP} = \frac{ON}{OP} = \frac{OD}{DP} \text{ góc PON = góc ODP} = 45^\circ$$

tam giác DOP đồng dạng ONP (c.g.c). suy ra góc DOP= góc ONP

nên DO là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác OPN

3. Ba đường thẳng BD, AN, PM đồng quy

Đặt giao điểm của MN và BC là Q và AP là K áp dụng tính chất phân giác cho tam giác MBN; APD

$$\frac{QM}{QN} = \frac{BM}{BN}; \frac{KP}{KA} = \frac{DP}{AD} \Leftrightarrow \frac{QM}{QN} = \frac{KP}{KA} \Rightarrow \frac{QM}{KP} = \frac{QN}{KA} \quad (1)$$

ta có. Giả sử MP cắt AN tại I. K I cắt MN tại H Áp dụng định lí ta lét

$$\frac{HM}{PK} = \frac{HN}{KA} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) Suy ra $\frac{HM}{HN} = \frac{QM}{QN}$ Q trùng H, vậy BD, PM, AN đồng quy

Câu 6.(1 điểm) Có bao nhiêu tập hợp con A của tập hợp $\{1;2;3;4;...;2014\}$ thỏa mãn điều kiện A có ít nhất

2 phần tử và nếu $x \in A, y \in A, x > y$, thì : $\frac{y^2}{x-y} \in A$

Hướng dẫn

Với mỗi tập A là tập con của $S = \{1;2;3;...;2014\}$ thỏa mãn đề bài, gọi a và b lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của A ($a, b \in S, a < b$)

Ta chứng minh $b \leq 2a$, thật vậy, giả sử $b > 2a$

Theo giả thiết $c = \frac{a^2}{b-a} \in A$. Mà $b > 2a \Rightarrow b - a > a > 0 \Rightarrow c = \frac{a^2}{b-a} < \frac{a^2}{a} = a$, mâu thuẫn với a là phần tử nhỏ nhất của A.

Vậy $b \leq 2a$

Gọi d là phần tử lớn nhất của tập $B = A \setminus \{b\}$. Ta chứng minh $b \geq 2d$. Thật vậy giả sử $b < 2d$, theo giả thiết thì

$$d < b \Rightarrow e = \frac{d^2}{b-d} \in A, \quad \text{mà } b < 2d \Rightarrow 0 < b-d < d \Rightarrow e > \frac{d^2}{d} = d$$

Suy ra $e \in A$ nhưng $e \notin B \Rightarrow e = b \Rightarrow \frac{d^2}{b-d} = b \Rightarrow d^2 = b^2 - bd \Rightarrow 5d^2 = 4b^2 - 4bd + d^2 = (2b-d)^2$

(mâu thuẫn vì VP là số chính phương, VT không là số chính phương)

Vậy $b \geq 2d \Rightarrow 2d \leq b \leq 2a \Rightarrow d \leq a$. Mà $a \leq d$ (a và d lần lượt là phần tử nhỏ nhất và lớn nhất của B) nên $a = d \Rightarrow b = 2a$

Vậy $A = \{a; 2a\}$. Kiểm tra lại ta thấy A thỏa mãn đề bài. Vì $a \in S$ và $2a \in S$ nên $2 \leq 2a \leq 2014 \Rightarrow 1 \leq a \leq 1007$

Vậy số tập con A thỏa mãn đề bài là 1007 tập.

Đề số 4. Chuyên SP Hà Nội. Năm học: 2014-2015

Câu 1(2 điểm)

Cho các số thực dương a, b ; $a \neq b$. Chứng minh rằng

$$\frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} = 0$$

Câu 2(2 điểm)

Cho Quãng đường AB dài 120 km. Lúc 7 giờ sáng một xe máy đi từ A đến B. Đi được $\frac{3}{4}$ xe bị hỏng phải dừng lại 10 phút để sửa rồi đi tiếp với vận tốc kém vận tốc lúc đầu 10km/h. Biết xe máy đến B lúc 11h40

phút trưa cùng ngày. Giả sử vận tốc xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường đầu không đổi và vận tốc xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường còn lại cũng không đổi. Hỏi xe máy bị hỏng lúc mấy giờ ?

Câu 3 (1,5 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho Parabol (P) : $y=x^2$ và đường thẳng (d) : $y = -\frac{2}{3}(m+1)x + \frac{1}{3}$ (m là tham số)

1.Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m đường thẳng (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt .

2. Gọi x_1 ; x_2 là hoành độ các giao điểm (d) và (P), đặt $f(x) = x^3 + (m+1)x^2 - x$

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{-1}{2}(x_1 - x_2)^3$$

CMR:

Câu 4 (3 điểm):

Cho tứ giác ABCD nội tiếp đường tròn (O) đường kính AC = 2R .Gọi gọi K,M theo thứ tự là chân các đường vuông góc hạ từ A và C xuống BD, E là giao điểm của AC và BD, biết K thuộc đoạn BE (K ≠ B ; K ≠ E)

.Đường thẳng đi qua K song song với BC cắt AC tại P.

1.Chứng minh tứ giác AKPD nội tiếp đường tròn.

2.Chứng minh $KP \perp PM$.

3. Biết $\angle ABD = 60^\circ$ và $AK=x$.Tính BD theo R và x.

Câu 5: (1 điểm) Giải phương trình

$$\frac{x(x^2 - 56)}{4 - 7x} - \frac{21x + 22}{x^3 + 2} = 4$$

-----Hết-----

Họ và tên thí sinh.....số báo danh

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN TOÁN SP HÀ NỘI VÒNG 1

Ngày 5/6/2014

Câu 1

$$\begin{aligned}
 Q &= \frac{\frac{(a-b)^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}} + \frac{3a + 3\sqrt{ab}}{b-a} \\
 &= \frac{\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3 \cdot (\sqrt{a}+\sqrt{b})^3}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^3} - b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} \\
 &= \frac{a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} + b\sqrt{b} + 2a\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} - \frac{3\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} \\
 &= \frac{3a\sqrt{a} + 3a\sqrt{b} + 3b\sqrt{a} - 3a\sqrt{a} - 3a\sqrt{b} - 3b\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(a+\sqrt{ab}+b)} \\
 &= 0(DPCM)
 \end{aligned}$$

Câu 2

Gọi vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là x (km/h) $x > 10$

Thì vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $x-10$ (km/h)

Thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu là $\frac{90}{x}$ (h)

Thời gian đi trên $\frac{1}{4}$ quãng đường sau là $\frac{30}{x-10}$ (h)

Vì thời gian đi cả 2 quãng đường là 1h40 phút – 7h- 10 phút = $2\frac{9}{10}$ (h)

Nên ta có PT:

$$\frac{90}{x} + \frac{30}{x-10} = 2\frac{9}{10}$$

$$\Leftrightarrow \frac{180(x-10)}{2x(x-10)} + \frac{60x}{2x(x-10)} = \frac{9x(x-10)}{2x(x-10)}$$

$$\Leftrightarrow 240x - 1800 = 9x^2 - 90x$$

$$\Leftrightarrow 9x^2 - 330x + 1800 = 0$$

Giải ra $x=30$ thỏa mãn điều kiện. Thời gian đi trên $\frac{3}{4}$ quãng đường ban đầu $\frac{90}{30} = 3$ (h)

Vậy xe hỏng lúc 10 h

$$\begin{cases} y = x^2 \\ y = \frac{-2(m+1)}{3}x + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ 3x^2 + 2(m+1)x - 1 = 0(1) \end{cases}$$

Câu 3 a) xét hệ phương trình

PT(1) có hệ số a và c trái dấu nên luôn có 2 nghiệm phân biệt mọi m nên (P) và (d) luôn cắt nhau tại 2 điểm phân biệt với mọi m.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-2(m+1)}{3} \\ x_1 x_2 = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m+1 = \frac{-3(x_1 + x_2)}{2} \\ 3x_1 x_2 = -1 \end{cases}$$

b) Theo Vi ét

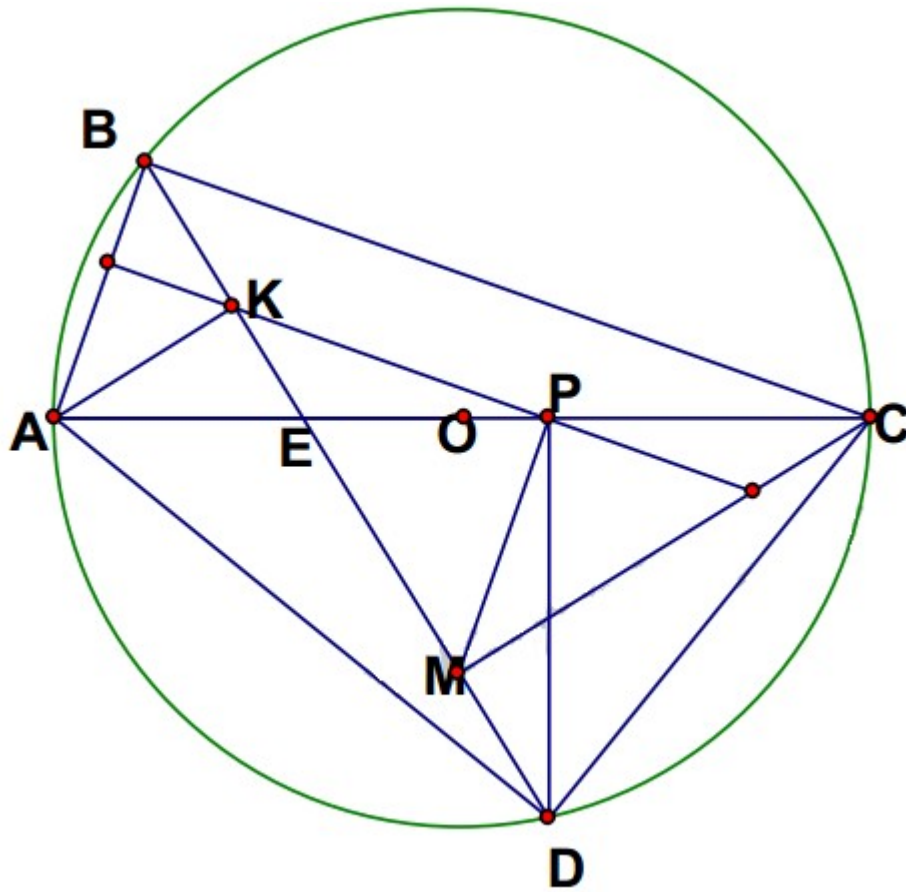
Ta có

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= x_1^3 - x_2^3 + (m+1)(x_1^2 - x_2^2) - x_1 + x_2 \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= 2x_1^3 - 2x_2^3 - 3(x_1 + x_2)(x_1^2 - x_2^2) - 2x_1 + 2x_2 \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2(x_2 - x_1) - 2(x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -x_1^3 + x_2^3 + (x_1 - x_2) - 2(x_1 - x_2) \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -(x_1^3 - x_2^3 - 3x_1 x_2(x_1 - x_2)) \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -[(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2)] \\ \Leftrightarrow 2[f(x_1) - f(x_2)] &= -(x_1 - x_2)^3 \end{aligned}$$

$$f(x_1) - f(x_2) = -\frac{1}{2}(x_1 - x_2)^3$$

Nên

Câu 4



1. Ta có $\angle PAD = \angle PKD$

(cùng bằng $\angle CBD$ đồng vị) nên tứ giác AKPD nội tiếp (quỹ tích cung chứa góc)

2.Theo phần 1 thì DP vuông góc AC nên MDCP nội tiếp suy ra: $\angle MPD = \angle MCD$ mà $\angle MCD = \angle ACB$ (cùng phụ 2 $\angle MDC = \angle ACB$) mà $\angle APK = \angle ACB$ (đồng vị) nên $\angle MPD = \angle APK$ Ta có $\angle MPD + \angle MPE = 90^\circ \Rightarrow \angle APK + \angle MPE = 90^\circ$ suy ra $KP \perp PM$.

3.ta có $AD = R\sqrt{3}$ Pitago tam giác vuông AKD vuông tại K tính được $KD = \sqrt{3R^2 - x^2}$ tam giác BAK

vuông tại K có góc $ABK = 60^\circ$
 $\Rightarrow BK = AK \cdot \cot ABK = \frac{x}{\sqrt{3}}$

$$BD = BK + KD = \frac{x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3R^2 - x^2} \quad (\text{dv độ dài})$$

Câu 5 (1 điểm)

$$x \neq \frac{4}{7}; x \neq \sqrt[3]{2}$$

ĐKXD:

$$\text{Đặt : } 4 - 7x = b; x^3 + 2 = a; (a; b \neq 0)$$

Thì

$$x^3 - 56x = x^3 + 2 + 8(4 - 7x) - 34 = a + 8b - 34$$

$$21x + 24 = -3(4 - 7x) + 34 = 32 - 3b$$

Ta có phương trình

$$\frac{a+8b-34}{b} - \frac{34-3b}{a} = 4$$

$$\Leftrightarrow a^2 + 8ab - 34a - 34b + 3b^2 = 4ab$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(a+3b-34) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ a+3b=34 \end{cases}$$

Với $a+b=0$ ta có

$$x^3 - 7x + 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)(x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=2(TM) \\ x=-3(TM) \\ x=1(TM) \end{cases}$$

Với $a+3b=34$ ta có

$$x^3 - 21x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+4)(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=-1(TM) \\ x=-4(TM) \\ x=5(TM) \end{cases}$$

PT có 6 nghiệm $S = \{-4; -3; -1; 1; 2; 5\}$

Đề số 5. Chuyên Hà Tĩnh. Năm học: 2014-2015

Bài 1: Cho biểu thức $P = \left[\frac{-x}{\sqrt{x}(x-9)} + \frac{2}{\sqrt{x}-3} - \frac{1}{\sqrt{x}+3} \right] : \left(\sqrt{x}+3 - \frac{x}{\sqrt{x}-3} \right)$ với $x > 0; x \neq 9$

a) Rút gọn biểu thức P

b) Tìm các giá trị của x để $P = -\frac{1}{4}$

Bài 2: Cho phương trình $x^2 - 2(m-2)x + m^2 - 2m + 2 = 0$ (m là tham số)

a) Giải phương trình khi $m = -1$

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|2(x_1 + x_2) + x_1 x_2| = 3$

Bài 3: a) Giải phương trình $\sqrt{2x+3} - 2\sqrt{x+1} = -1$

$$\begin{cases} xy^2 + 2y^2 - 2 = x^2 + 3x \\ x + y = 3\sqrt{y-1} \end{cases}$$

c) Giải hệ phương trình

Bài 4: Cho ΔABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) có $BAC = 45^\circ$, $BC = a$. Gọi E, F lần lượt là chân đường vuông góc hạ từ B xuống AC và từ C xuống AB. Gọi I là điểm đối xứng của O qua EF.

a) Chứng minh rằng các tứ giác BFOC và AEIF nội tiếp được đường tròn

b) Tính EF theo a

Bài 5: Biết phương trình $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ có nghiệm. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}$

BÀI GIẢI

Bài 1:

a)

$$\begin{aligned} P &= \frac{-x + 2\sqrt{x}(\sqrt{x}+3) - \sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{\sqrt{x}(x-9)} : \frac{(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3) - x}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{9\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} : \frac{-9}{\sqrt{x}-3} \\ &= \frac{9\sqrt{x}(\sqrt{x}-3)}{-9\sqrt{x}(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x}-3)} = \frac{-1}{\sqrt{x}+3} \end{aligned}$$

b)

$$P = \frac{-1}{4} \Leftrightarrow \frac{-1}{\sqrt{x+3}} = \frac{-1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 4$$

$$\Leftrightarrow x = 1(TM)$$

Bài 2: a) Khi $m = -1$ ta có phương trình

$$x^2 + 6x + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(x+5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -5 \end{cases}$$

Tập nghiệm của phương trình $S = \{-1; -5\}$ b) Ta có: $\Delta' = (m-2)^2 - (m^2 - 2m + 2) = 2 - 2m$

Để phương trình có 2 nghiệm phân biệt thì

$$\Delta' > 0 \Leftrightarrow m < 1$$

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m - 4 \\ x_1 x_2 = m^2 - 2m + 2 \end{cases}$$

Do đó:

$$|2(x_1 + x_2) + x_1 x_2| = 3$$

$$\Leftrightarrow |m^2 + 2m - 6| = 3$$

$$\Leftrightarrow |(m+1)^2 - 7| = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (m+1)^2 - 7 = 3 \\ (m+1)^2 - 7 = -3 \end{cases}$$

$$(m+1)^2 - 7 = 3 \Leftrightarrow m+1 = \pm\sqrt{10} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 + \sqrt{10}(L) \\ m = -1 - \sqrt{10}(TM) \end{cases}$$

Với

$$(m+1)^2 - 7 = -3 \Leftrightarrow m+1 = \pm 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = -3(TM) \end{cases}$$

Với

Bài 3: a) ĐKXD: $x \geq -1$. Phương trình tương đương

$$\sqrt{2x+3} + 1 = 2\sqrt{x+1} \Leftrightarrow 2x+3 + 2\sqrt{2x+3} + 1 = 4x+4$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2x+3} = x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ (x-3)(x+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \begin{cases} x = -1 \Leftrightarrow x = 3 \\ x = 3 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy nghiệm của phương trình $x = 3$ b) ĐKXD: $y \geq 1$

Từ phương trình (1) của hệ ta có

$$\Rightarrow y^2(x+2) = (x+1)(x+2)$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(y^2 - x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Xét } x = -2 \text{ thay vào (2) được } y - 2 = 3\sqrt{y-1} \Leftrightarrow y^2 - 13y + 13 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{13 \pm \sqrt{117}}{2} \text{ (với } y \geq 2)$$

$$\text{Xét } x = y^2 - 1 \text{ thay vào (2) được } y^2 + y - 1 = 3\sqrt{y-1}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{y-1} = a \geq 0 \Rightarrow y = a^2 + 1$$

$$y^2 + y - 1 = 3\sqrt{y-1}$$

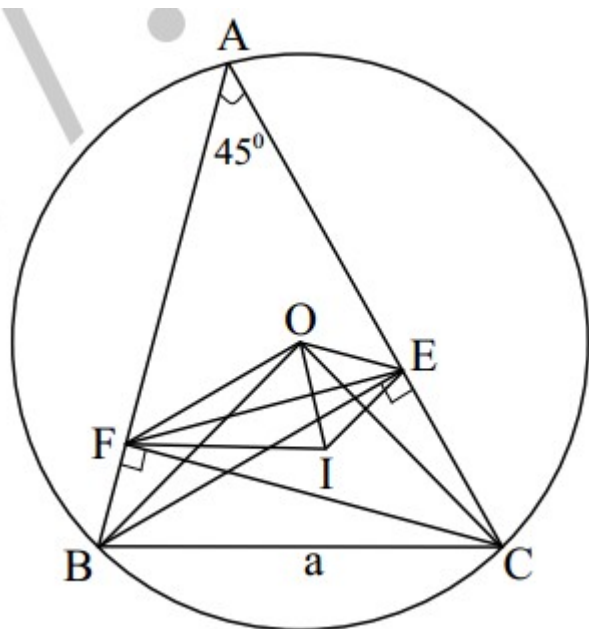
$$\Leftrightarrow (a^2 + 1)^2 + a^2 = 3a$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 3a^2 - 3a + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 3(a - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4} = 0 (VN)$$

$$\text{Đối chiếu ĐKXD ta có } \begin{cases} x = -2 \\ x = \frac{13 + \sqrt{117}}{2} \end{cases} \text{ là nghiệm của hệ phương trình đã cho}$$

Bài 4:



a) Ta có $\widehat{BOC} = 2\widehat{BAC} = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$ (Góc nội tiếp, góc ở tâm cùng chắn cung BC)

Do đó $\widehat{BFC} = \widehat{BOC} = \widehat{BEC} = 90^\circ$ suy ra đỉnh F, O, E cùng nhìn BC dưới góc 90° nên B, F, O, E, C cùng thuộc một đường tròn đường kính BC (Bài toán cung chứa góc)

Hay tứ giác BFOC nội tiếp

Ta có $\widehat{FOB} = \widehat{FCB}$ (Cùng chắn cung BF)

$\widehat{EOC} = \widehat{EBC}$ (Cùng chắn cung EC)

Mà $\widehat{FCB} + \widehat{EBC} = 90^\circ - \widehat{ABC} + 90^\circ - \widehat{ACB}$

$= 180^\circ - (\widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \widehat{BAC} = 45^\circ \Rightarrow \widehat{FOB} + \widehat{EOC} = 45^\circ$

Hay EOF= 135°. Mặt khác vì I đối xứng với O qua EF nên EIF= EOF= 135° $\Rightarrow$ EIF+ BAC= 180°

Do đó tứ giác AEIF nội tiếp đường tròn (Tổng hai góc đối bằng 180°)

b) Theo câu a tứ giác BFEC nội tiếp nên AFE = ACB (Cùng bù với EFB) $\Rightarrow \triangle AFE \sim \triangle ACB$ (g - g)

$$\Rightarrow \frac{EF}{BC} = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{\sqrt{2}AE} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow EF = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (\text{Vì } \triangle AEB \text{ vuông cân tại E})$$

Bài 5: Dễ dàng nhận thấy $x = 0$ không phải là nghiệm của phương trình

Giả sử $x_0 \neq 0$ là nghiệm của phương trình đã cho. Chia 2 vế của phương trình cho $x_0^2 \neq 0$ được

$$(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}) + a(x_0 + \frac{1}{x_0}) + b = 0$$

$$t = x_0 + \frac{1}{x_0} \Rightarrow |t| \geq 2; x_0^2 + \frac{1}{x_0^2} = t^2 - 2$$

Đặt

Do đó ta có phương trình:

$$t^2 - 2 = -at - b$$

Áp dụng BĐT Bunhia được

$$(a^2 + b^2)(t^2 + 1) \geq (at + b)^2 = (t^2 - 2)^2$$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1} = \frac{t^4 - 4t^2 + 4}{t^2 + 1} - \frac{4}{5} + \frac{4}{5} = \frac{5t^4 - 24t^2 + 16}{5(t^2 + 1)} + \frac{4}{5} = \frac{(5t^2 - 4)(t^2 - 4)}{5(t^2 + 1)} + \frac{4}{5} \geq \frac{4}{5}$$

$$\text{Vậy } a^2 + b^2 \geq \frac{4}{5}. \text{ Dấu "}" xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} |t| = 2 \\ \frac{a}{t} = \frac{b}{t} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x_0| = 1 \\ a = bt \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{2}{5} \\ a = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Bài giải: Nguyễn Ngọc Hùng – THCS Hoàng Xuân Hãn – Đức Thọ - Hà Tĩnh

Đề số 6. Chuyên Khánh Hòa. Năm học: 2014-2015

Bài 1: (2,00 điểm)

1) Không dùng máy tính cầm tay, tính giá trị biểu thức:

$$A = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} - \frac{\sqrt{8} - \sqrt{10}}{2 - \sqrt{5}}$$

$$B = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} \text{ với } a>0; a \neq 4$$

2) Rút gọn biểu thức

Bài 2: (2,00 điểm)

$$\begin{cases} ax - y = -b \\ x - by = -a \end{cases}$$

1) Cho hệ phương trình:

Tìm a và b biết hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y) = (2;3)$.

2) Giải phương trình: $2(2x-1) - 3\sqrt{5x-6} = \sqrt{3x-8}$

Bài 3: (2,00 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$

a) Vẽ đồ thị (P).

b) Trên (P) lấy điểm A có hoành độ $x_A = -2$. Tìm tọa độ điểm M trên trục Ox sao cho $|MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất, biết rằng $B(1;1)$.

Bài 4: (4,00 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính $AB = 2R$. Vẽ đường thẳng d là tiếp tuyến của (O) tại B. Trên cung AB lấy điểm M tùy ý (M khác A và B), tia AM cắt d tại N. Gọi C là trung điểm của AM, tia CO cắt d tại D.

a) Chứng minh rằng: OBNC nội tiếp.

b) Chứng minh rằng: $NO \perp AD$

c) Chứng minh rằng: $CA \cdot CN = CO \cdot CD$.

d) Xác định vị trí điểm M để $(AM \cdot AN)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

---HẾT---

HƯỚNG DẪN GIẢI

Bài 1: (2,00 điểm)

1)

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}+1} - \frac{\sqrt{8}-\sqrt{10}}{2-\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}-1}{1} - \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{5})}{2-\sqrt{5}} = \sqrt{2}-1-\sqrt{2} = -1$$

2)

$$B = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} \text{ với } a>0; a \neq 4$$

$$= \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{a}+a}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(1+\sqrt{a})}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \sqrt{a}(\sqrt{a}-2)$$

Bài 2: (2,00 điểm)

1) Vì hệ phương trình: $\begin{cases} ax - y = -b \\ x - by = -a \end{cases}$ có nghiệm $(x; y) = (2; 3)$ nên ta có hpt:

$$\begin{cases} 2a - 3 = -b \\ 2 - 3b = -a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a + b = 3 \\ a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a + 3b = 9 \\ a - 3b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7a = 7 \\ 2a + b = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

Vậy $a = 1, b = 1$

2) Giải phương trình: $2(2x-1) - 3\sqrt{5x-6} = \sqrt{3x-8}$

$$\Leftrightarrow 4(2x-1) - 6\sqrt{5x-6} = 2\sqrt{3x-8}$$

$$\Leftrightarrow [(5x-6) - 6\sqrt{5x-6} + 9] + [(3x-8) - 2\sqrt{3x-8} + 1] = 0$$

$$\Leftrightarrow (\sqrt{5x-6} + 3)^2 + (\sqrt{3x-8} - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x-6} + 3 = 0 \\ \sqrt{3x-8} - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$$

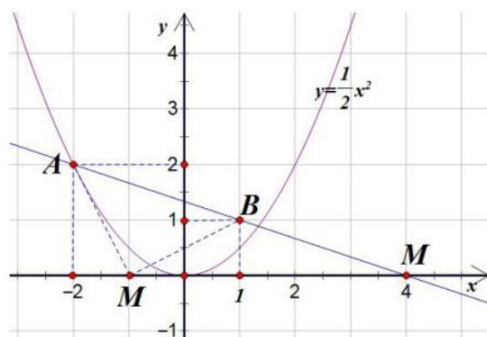
Vậy pt có nghiệm $x = 3$.

Bài 3: (2,00 điểm)

Trong mặt phẳng Oxy cho parabol (P): $y = \frac{1}{2}x^2$

a) Lập bảng giá trị (HS tự làm)

Đồ thị:



b) Vì $A \in (P)$ có hoành độ $x_A = -2$ nên $y_A = 2$. Vậy $A(-2; 2)$

Lấy $M(x_M; 0)$ bất kì thuộc Ox ,

Ta có: $|MA - MB| \leq AB$ (Do M thay đổi trên Ox và BĐT tam giác)

Dấu “=” xảy ra khi điểm A, B, M thẳng hàng khi đó M là giao điểm của đường thẳng AB và trục Ox .

$\Rightarrow \Delta AOM$ vuông tại $O \Rightarrow M$ là điểm chính giữa cung AB .

Đề số 7. Chuyên Nam Định. Năm học: 2014-2015

Bài 1: (2,0 điểm):

1) Cho a, b, c là các số thực thỏa mãn: $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ và $a + b + c = 1$.
 Chứng minh rằng $(a-1)(b-1)(c-1) = 0$

2) Với mỗi số nguyên dương n ; chứng minh $(3 + \sqrt{5})^n + (3 - \sqrt{5})^n$ là số nguyên dương.

Bài 2: (2,5 điểm):

1) Giải phương trình $(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2 + 4x - 12}) = 8$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \\ 2\sqrt{y^4 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 3 - 4x^3 \end{cases}$$

Bài 3: (3,0 điểm): Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp đường tròn (O) . Các đường cao AA_1, BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại H . Đường thẳng AA_1 cắt đường tròn (O) tại K khác A .

1) Chứng minh A_1 là trung điểm của HK .

2) Hãy tính $\frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1}$

3) Gọi M là hình chiếu vuông góc của O trên BC . Đường thẳng BB_1 cắt (O) tại giao điểm thứ hai là E ,

kéo dài MB_1 cắt AE tại N . Chứng minh rằng $\frac{AN}{NE} = \left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2$

Bài 4: (1,0 điểm): Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^3 + y^3 - 3xy = 1$

Bài 5: (1,5 điểm):

1) Trên bảng ghi một số nguyên dương có hai chữ số trở lên. Người ta thiết lập số mới bằng cách xóa đi chữ số hàng đơn vị của số đã cho, sau đó cộng vào số còn lại 7 lần số vừa bị xóa. Ban đầu trên bảng ghi số 6^{100} . Hỏi sau một số bước thực hiện như trên ta có thể thu được 100^6 hay không? Tại sao?

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}$$

Hết

Hướng dẫn giải:**Bài 1: (2,0 điểm):****1) Từ GT ta có:**

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c} \Rightarrow \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) - \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a+b+c}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{ab} + \frac{a+b}{c(a+b+c)} = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)[c(a+b+c) + ab] = 0$$

$$\Rightarrow (a+b)(b+c)(a+c) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=0 \\ b+c=0 \\ c+a=0 \end{cases}$$

$$\text{Nếu } a+b=0 \Rightarrow c=1 \Rightarrow c-1=0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$$

$$\text{Nếu } c+b=0 \Rightarrow a=1 \Rightarrow a-1=0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$$

$$\text{Nếu } a+c=0 \Rightarrow b=1 \Rightarrow b-1=0 \Rightarrow (a-1)(b-1)(c-1)=0$$

Vậy ta có đpcm.2) Với mỗi số nguyên dương n ; chứng minh $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ là số nguyên dương.**Bài 2: (2,5 điểm):****1) Giải phương trình** $(\sqrt{x+6} - \sqrt{x-2})(1 + \sqrt{x^2+4x-12}) = 8$.ĐKXĐ $x \geq 2$, đặt

$$\sqrt{x+6} = a \geq 0; \sqrt{x-2} = b \geq 0 \Rightarrow a^2 - b^2 = 8$$

$$PTTT: (a-b)(1+ab) = a^2 - b^2$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(1+ab-a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=b \Leftrightarrow \sqrt{x+6} = \sqrt{x-2} \text{ (VN)} \\ 1+ab-a-b=0 \Leftrightarrow (a-1)(b-1)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \Leftrightarrow \sqrt{x+6}=1 \text{ (VN)} \\ b=1 \Leftrightarrow \sqrt{x-2}=1 \Leftrightarrow x=3 \text{ (TM)} \end{cases} \end{cases}$$

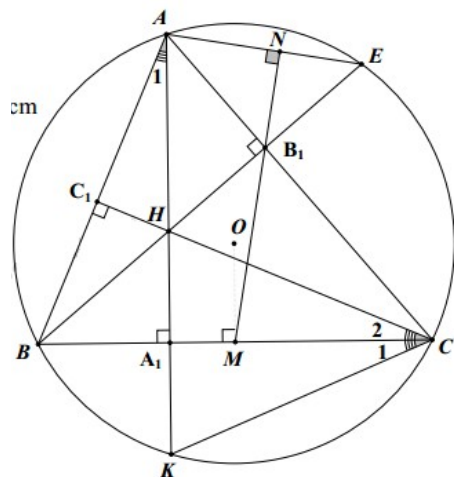
PT đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$ **2) Giải hệ phương trình**
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 = y^6 + y^4 \text{ (1)} \\ 2\sqrt{y^4+1} + \frac{1}{x^2+1} = 3 - 4x^3 \text{ (2)} \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x^3 - y^6) + xy^2 - y^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-y^2)(x^2+xy^2+y^4+y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y^2 \\ x^2+xy^2+y^4+y^2=0 \Leftrightarrow (x+\frac{1}{2}y^2)^2 + \frac{3}{4}y^4+y^2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \text{ (TM (2))} \end{cases}$$

Với $x=y^2$ **Bài 3: (3,0 điểm):** Cho tam giác ABC



a) góc $A_1 = \text{góc } C_2 = \text{góc } C_1$

$\Rightarrow \Delta CHK$ cân C, CA_1 là đ/cao + đ trung trực $\Rightarrow \text{đpcm}$

b) Có:

$$\begin{aligned} \frac{HA}{AA_1} + \frac{HB}{BB_1} + \frac{HC}{CC_1} &= \left(1 - \frac{HA_1}{AA_1}\right) + \left(1 - \frac{HB_1}{BB_1}\right) + \left(1 - \frac{HC_1}{CC_1}\right) = 3 - \left(\frac{HA_1}{AA_1} + \frac{HB_1}{BB_1} + \frac{HC_1}{CC_1}\right) \\ &= 3 - \left(\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} + \frac{S_{HBA}}{S_{ABC}}\right) = 3 - 1 = 2 \end{aligned}$$

c) Từ GT $\Rightarrow M$ trung điểm BC $\Rightarrow \dots \Rightarrow \Delta B_1MC$ cân tại M $\Rightarrow \text{góc } MB_1C = \text{góc } MCB_1 = \text{góc } AB_1N$

$\Rightarrow \Delta CBB_1$ đồng dạng ΔB_1AN (g-g) $\Rightarrow B_1N \perp AE$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\left(\frac{AB_1}{EB_1}\right)^2 = \frac{AN \cdot AE}{EN \cdot EA} = \frac{AN}{EN} \quad (\text{đpcm})$$

Bài 4: (1,0 điểm): Tìm các số nguyên $x; y$ thỏa mãn $x^3 + y^3 - 3xy = 1$

$$x^3 + y^3 - 3xy = 1$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) - 3xy = 1$$

Đặt $x+y=a$ và $xy=b$ (a, b nguyên) ta có:

$$a^3 - 3ab - 3b = 1$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a^2 - a + 1) - 3b(a+1) = 2$$

$$\Leftrightarrow (a+1)(a^2 - a + 1 - 3b) = 2$$

Vì a, b nguyên nên có các TH sau :

$$\begin{aligned}
 1) & \begin{cases} a+1=1 \\ a^2-a+1-3b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=\frac{-1}{3} \end{cases} (L) \\
 2) & \begin{cases} a+1=2 \\ a^2-a+1-3b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=0 \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \{(0;1); (1;0)\} \\
 3) & \begin{cases} a+1=-1 \\ a^2-a+1-3b=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=3 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-2 \\ xy=3 \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \emptyset \\
 4) & \begin{cases} a+1=-2 \\ a^2-a+1-3b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-3 \\ b=4 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-3 \\ xy=4 \end{cases} \Rightarrow (x; y) \in \emptyset
 \end{aligned}$$

Vậy $(x; y) \in \{(0;1); (1;0)\}$

Bài 5: (1,5 điểm):

2) Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn $x^2 + y^2 + z^2 = 3xyz$. Chứng minh rằng:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} + \frac{y^2}{y^4 + xz} + \frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{3}{2}$$

Vì x, y, z dương, áp dụng BĐT Cô-si ta có:

$$+) 2x^2\sqrt{yz} \leq x^4 + yz \Leftrightarrow \frac{1}{2x^2\sqrt{yz}} \geq \frac{1}{x^4 + yz} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{2\sqrt{yz}} \quad (1)$$

$$+) \frac{2}{\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{yz}} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$:

$$\frac{x^2}{x^4 + yz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right)$$

Tương tự:

$$\frac{y^2}{y^4 + xz} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{z} \right)$$

$$\frac{z^2}{z^4 + xy} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)$$

$$\Rightarrow A \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{xy + yz + zx}{xyz} \quad (3)$$

Mà lại có : $xy + yz + zx \leq x^2 + y^2 + z^2 \quad (4)$

$$A \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3xyz}{xyz} = \frac{3}{2}$$

Từ (3) và (4) có :

Dấu “=” xảy ra khi $x=y=z=1$

Đề số 8. Chuyên Lê Quý Đôn Bình Định. Năm học: 2014-2015

Bài 1: (2,0 điểm) Cho biểu thức $A = \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1$, với $a > 0$.

- Rút gọn A.
- Tìm giá trị của a để $A = 2$.
- Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

Bài 2: (2,0 điểm)

Gọi đồ thị hàm số $y = x^2$ là parabol (P), đồ thị hàm số $y = (m+4)x - 2m - 5$ là đường thẳng (d).

- Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.
- Khi (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 0$

Bài 3: (1,5 điểm)

Tìm x, y nguyên sao cho $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18}$

Bài 4: (3,5 điểm)

Cho đường tròn (O) và một điểm P ở ngoài đường tròn. Kẻ hai tiếp tuyến PA, PB với đường tròn (O) (A, B là hai tiếp điểm). PO cắt đường tròn tại hai điểm K và I (K nằm giữa P và O) và cắt AB tại H. Gọi D là điểm đối xứng của B qua O, C là giao điểm của PD và đường tròn (O).

- Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp.
- Chứng minh $AC \perp CH$.
- Đường tròn ngoại tiếp tam giác ACH cắt IC tại M. Tia AM cắt IB tại Q. Chứng minh M là trung điểm của AQ.

Bài 5: (1,0 điểm)

Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số: $y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x}$ với $0 < x < 1$

-----HẾT-----

BÀI GIẢI

Bài 1: (2,0 điểm)

a) Rút gọn A.

$$\begin{aligned} A &= \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1 \\ \text{Ta có: } A &= \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 + 1]}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{2a + \sqrt{a}}{\sqrt{a}} + 1 = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a} + 1)(a - \sqrt{a} + 1)}{a - \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}(2\sqrt{a} + 1)}{\sqrt{a}} + 1 \\ &= \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) - 2\sqrt{a} - 1 + 1 \\ &= a - \sqrt{a} \end{aligned}$$

b) Tìm giá trị của a để A = 2

$$\text{Ta có: } A = a - \sqrt{a}$$

$$\text{Đề } A=2 \Rightarrow a - \sqrt{a} = 2 \Rightarrow a - \sqrt{a} - 2 = 0$$

$$\text{Đặt } \sqrt{a} = t > 0 \text{ có pt:}$$

$$t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = 2(TM) \end{cases}$$

$$\text{Với } t = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a} = 2 \Leftrightarrow a = 4(TM)$$

Vậy: a = 4 là giá trị cần tìm.

c) Tìm giá trị nhỏ nhất của A.

$$\text{Ta có: } A = a - \sqrt{a} = a - 2\sqrt{a} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\sqrt{a} - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq \frac{-1}{4} \forall a > 0$$

$$\text{Dấu “=” khi } \sqrt{a} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} (TMĐK \ a > 0)$$

$$\text{Vậy } A_{\min} = \frac{-1}{4} \text{ khi } a = \frac{1}{4}$$

Bài 2: (2,0 điểm)

a) Tìm giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt

$$\text{Ta có: (d): } y = (m + 4)x - 2m - 5; (P): y = x^2$$

Pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) là:

$$x^2 = (m + 4)x - 2m - 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (m + 4)x + 2m + 5 = 0(1)$$

$$\Delta = [-(m + 4)]^2 - 4(2m + 5) = (m + 4)^2 - 4(2m + 5) = m^2 - 4 = (m - 2)(m + 2)$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi Pt (1) có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta > 0$

$$(m-2)(m+2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ m-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 > 0 \\ m+2 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < -2 \end{cases}$$

Vậy: với $m > 2$ hoặc $m < -2$ thì (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Tìm các giá trị của m sao cho $x_1^3 + x_2^3 = 0$

Với $m > 2$ hoặc $m < -2$. Thì Pt: $x^2 - (m+4)x + 2m+5 = 0$ (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

Theo Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m+4 \\ x_1 x_2 = 2m+5 \end{cases}$$

Ta có

$$\begin{aligned} x_1^3 + x_2^3 &= (x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2] = (m+4)[(m+4)^2 - 3(2m+5)] \\ &= (m+4)(m+1)^2 \end{aligned}$$

Đề: $x_1^3 + x_2^3 = 0 \Leftrightarrow$

$$(m+4)(m+1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -4(TM) \\ m = -1(L) \end{cases}$$

Vậy: $m = -4$ là giá trị cần tìm.

Bài 3: (1,5 điểm)

Ta có: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{18} (x \geq 0; y \geq 0)$

Pt viết: $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 3\sqrt{2} (1) (0 \leq \sqrt{x} \leq 3\sqrt{2}; 0 \leq \sqrt{y} \leq 3\sqrt{2})$

Pt viết:

$$\sqrt{x} = 3\sqrt{2} - \sqrt{y} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{x})^2 = (3\sqrt{2} - \sqrt{y})^2 \Leftrightarrow 6\sqrt{2}y = y - x + 18$$

$$\Rightarrow \sqrt{2}y = \frac{y-x+18}{6} \in Q$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}y = a \in Q \Leftrightarrow 2y = a^2 \in Q \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 \in N (Vi \ 2y \in Z \text{ va } a \geq 0) \\ a : 2 \end{cases}$$

$$a = 2m (m \in N)$$

$$\Rightarrow 2y = (2m)^2 \Leftrightarrow y = 2m^2 \Leftrightarrow \sqrt{y} = m\sqrt{2} \text{ TT} \Rightarrow \sqrt{x} = n\sqrt{2}$$

Pt (1) viết: $n\sqrt{2} + m\sqrt{2} = 3\sqrt{2} \Leftrightarrow m+n=3 (m; n \in N)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} n=0 \\ m=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases} \\ \begin{cases} n=1 \\ m=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases} \\ \begin{cases} n=2 \\ m=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} n=3 \\ m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy Pt đã cho có 4 nghiệm $\begin{cases} x=0 \\ y=18 \end{cases}, \begin{cases} x=2 \\ y=8 \end{cases}, \begin{cases} x=8 \\ y=2 \end{cases}, \begin{cases} x=18 \\ y=0 \end{cases}$

Bài 4: (3,5 điểm)

a) Chứng minh tứ giác BHCP nội tiếp

Xét $\triangle ABP$ có: $PA = PB$

và $AP \perp OP$ (tính chất hai tiếp tuyến cắt nhau)

$\Rightarrow \triangle ABP$ cân tại P có PO là phân giác

$\Rightarrow PO$ cũng là đường cao, trung tuyến $\triangle ABP$.

Xét tứ giác BHCP ta có $\angle BHP = 90^\circ$ (Vì $PO \perp AB$)

$\angle BCP = 90^\circ$

(Vì kẻ bù $\angle BCD = 90^\circ$ (nội tiếp nửa đường tròn (O)))

$\angle BHP = \angle BCP$

$\Rightarrow$ Tứ giác BHCP nội tiếp (Tổng hai góc đối diện bằng 180°)

b) Chứng minh $AC \perp CH$.

Xét $\triangle ACH$ ta có

$\angle HAC = \angle B_1$ (chắn cung BKC của đường tròn (O))

Mà $\angle B_1 = \angle H_1$ (do BHCP nội tiếp)

$\Rightarrow \angle HAC = \angle H_1$

Mà $\angle H_1 + \angle AHC = 90^\circ$ (Vì: $PO \perp AB$)

$\Rightarrow \angle HAC + \angle AHC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle AHC$ vuông tại C

Hay $AC \perp CH$.

c) Chứng minh M là trung điểm của AQ.

Xét tứ giác ACHM ta có M nằm trên đường tròn ngoại tiếp $\triangle ACH$

$\Rightarrow$ tứ giác ACHM nội tiếp

$\Rightarrow \angle CMH = \angle HAC$ (chắn cung HC)

Mà $\angle HAC = \angle BIC$ (chắn cung BC của đường tròn (O))

$\Rightarrow \angle CMH = \angle BIC$

$\Rightarrow MH \parallel BI$ (vì cặp góc đồng vị bằng nhau)

Xét $\triangle ABQ$ có $AH = BH$ (do PH là trung tuyến APB (C/m trên))

Và: $MH \parallel BI$

$\Rightarrow MH$ là trung bình $\triangle ABQ$

$\Rightarrow M$ là trung điểm của AQ

Bài 5: (1,0 điểm)

Ta có:

$$y = \frac{2}{1-x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{1-x} - 2 + \frac{1}{x} - 1 + 3 = \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} + 3$$

$$Vì 0 < x < 1 \Rightarrow \frac{2x}{1-x} > 0; \frac{1-x}{x} > 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{2x}{1-x} + \frac{1-x}{x} \geq 2\sqrt{\frac{2x}{1-x} \cdot \frac{1-x}{x}} = 2\sqrt{2} \quad (\text{Bất đẳng thức Cô si})$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi: } \frac{2x}{1-x} = \frac{1-x}{x} \Leftrightarrow 2x^2 = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 + \sqrt{2} (TM) \\ x = -1 - \sqrt{2} (L) \end{cases}$$

$$\Rightarrow y \geq 2\sqrt{2} + 3$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi } x = -1 + \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy } y_{\min} = 2\sqrt{2} + 3 \text{ khi } x = -1 + \sqrt{2}$$

Đề số 9. Chuyên Ninh Bình. Năm học: 2014-2015

Câu 1 (2,0 điểm).

$$A = \left(1 - \frac{a-3\sqrt{a}}{a-9} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}+3} + \frac{\sqrt{a}-3}{2-\sqrt{a}} - \frac{9-a}{a+\sqrt{a}-6} \right) \quad (a \geq 0; a \neq 4; a \neq 9)$$

Cho biểu thức

- Rút gọn A.
- Tìm a để $A + |A| = 0$

Câu 2 (2,0 điểm).

$$1. \text{ Giải phương trình: } \sqrt{29-x} + \sqrt{x+3} = x^2 - 26x + 177$$

$$2. \text{ Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x^2 - 2y^2 = xy + x + y \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - y + 1 \end{cases}$$

Câu 3 (2,0 điểm).

- Cho hai phương trình: $x^2 + bx + c = 0(1); x^2 - b^2x + bc = 0(2)$ (trong đó x là ẩn, b và c là các tham số). Biết phương trình (1) có hai nghiệm x_1 và x_2 , phương trình (2) có hai nghiệm x_3 và x_4 thỏa mãn điều kiện $x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1$. Xác định b và c.
- Chứng minh rằng nếu p là số nguyên tố lớn hơn 3 thì $(p+1)(p-1)$ chia hết cho 24.

Câu 4 (3,0 điểm).

Cho hai đường tròn $(O; R)$ và $(O'; R')$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt A và B. Từ một điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB, vẽ các tiếp tuyến CD, CE với đường tròn tâm O (D, E là các tiếp điểm và E nằm trong

đường tròn tâm O'). Hai đường thẳng AD và AE cắt đường tròn tâm O' lần lượt tại M và N (M và N khác A). Đường thẳng DE cắt MN tại I.

Chứng minh rằng:

- Bốn điểm B, D, M, I cùng thuộc một đường tròn.
- $MI \cdot BE = BI \cdot AE$
- Khi điểm C thay đổi trên tia đối của tia AB thì đường thẳng DE luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm).

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} + \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} + \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2}$$

ĐÁP ÁN

Câu 1

a) Với $a \geq 0$, $a \neq 4$, $a \neq 9$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(1 - \frac{a - 3\sqrt{a}}{a - 9}\right) : \left(\frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 3} + \frac{\sqrt{a} - 3}{2 - \sqrt{a}} - \frac{9 - a}{a + \sqrt{a} - 6}\right) \\ &= \frac{a - 9 - a + 3\sqrt{a}}{a - 9} : \frac{(\sqrt{a} - 2)^2 - (\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3) - 9 + a}{(\sqrt{a} + 3)(\sqrt{a} - 2)} \\ &= \frac{-9 + 3\sqrt{a}}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)} : \frac{(\sqrt{a} - 2)^2 - (a - 9) - (9 - a)}{(\sqrt{a} + 3)(\sqrt{a} - 2)} \\ &= \frac{3(\sqrt{a} - 3)}{(\sqrt{a} - 3)(\sqrt{a} + 3)} : \frac{(\sqrt{a} - 2)^2}{(\sqrt{a} + 3)(\sqrt{a} - 2)} \\ &= \frac{3}{\sqrt{a} + 3} : \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a} + 3} \\ &= \frac{3}{\sqrt{a} + 3} \cdot \frac{\sqrt{a} + 3}{\sqrt{a} - 2} \\ &= \frac{3}{\sqrt{a} - 2} \end{aligned}$$

b) Ta có:

$$A+|A|=0$$

$$\Leftrightarrow |A|=-A$$

$$\Leftrightarrow A \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{a}-2} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a}-2 < 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x < 4$$

Kết hợp với điều kiện, ta có $0 \leq a < 4$ là giá trị cần tìm.

Câu 2

$$1) \sqrt{29-x} + \sqrt{x+3} = x^2 - 26x + 177 \quad (1)$$

$$\text{ĐK: } -3 \leq x \leq 29.$$

Với mọi $a, b \geq 0$, ta có:

$$(a-b)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \geq (a+b)^2$$

$$\Leftrightarrow a+b \leq \sqrt{2(a^2 + b^2)}$$

Thay $a = \sqrt{29-x}; b = \sqrt{x+3}$ ta có:

$$\sqrt{29-x} + \sqrt{x+3} \leq \sqrt{2(29-x+x+3)} = 8$$

$$x^2 - 26x + 177 = (x-13)^2 + 8 \geq 8$$

$$\Rightarrow \sqrt{29-x} + \sqrt{x+3} \leq x^2 - 26x + 177$$

$$\begin{cases} \sqrt{29-x} = \sqrt{x+3} \\ x-13=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=13$$

Dấu “=” xảy ra khi

Do đó $(1) \Leftrightarrow x = 13$ (thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{13\}$.

$$2) \begin{cases} x^2 - 2y^2 = xy + x + y & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - y + 1 & (2) \end{cases} \quad (I)$$

$$\text{ĐK: } x \geq 1, y \geq 0$$

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - xy - 2y^2 = x + y$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-2y) = x+y$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{(x+y)}_{\geq 1+0=1>0} (x-2y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x-2y-1=0$$

Do đó:

$$\begin{aligned}
 (I) &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2(2y+1) - y + 1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (y+1)\sqrt{2y} = 2y + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ (y+1)(\sqrt{2y} - 3) = 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y + 1 \\ \sqrt{2y} = 3 \text{ (Do } y+1 > 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{9}{2} \\ x = 10 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $\left(10; \frac{9}{2}\right)$

Câu 3

$$1. \forall i \quad x_3 - x_1 = x_4 - x_2 = 1 \Rightarrow x_3 = x_1 + 1; x_4 = x_2 + 1$$

Áp dụng định lý Vi-ét cho phương trình (1) và phương trình (2) có:

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 x_2 = c \end{cases} \\
 &\begin{cases} x_3 + x_4 = b^2 = (x_1 + 1) + (x_2 + 1) = -b + 2 \\ x_3 x_4 = bc = (x_1 + 1)(x_2 + 1) = (x_1 + x_2) + x_1 x_2 + 1 = -b + c + 1 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} b^2 + b - 2 = 0 \\ bc + b - c - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (b-1)(b+2) = 0 \\ (c+1)(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ b = -2 \\ c = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \Delta = 1 - 4c \geq 0 \Leftrightarrow c \leq \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Nếu $b = 1$ thì (1) có nghiệm

Thử lại:

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow x^2 + x + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2} \\
 (2) &\Leftrightarrow x^2 - x + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4c}}{2}
 \end{aligned}$$

(thỏa mãn)

Nếu $b = -2, c = -1$ thì

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2} \\
 (2) &\Leftrightarrow x^2 - 4x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

(thỏa mãn)

Vậy $b = 1, c \leq \frac{1}{4}$ hoặc $b = -2, c = -1$.

$$2. \text{ Đặt } A = (p+1)(p-1)$$

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p không chia hết cho 2 và 3.

$$p \text{ lẻ} \Rightarrow p = 2k + 1 \quad (k \in \mathbb{N}^*)$$

$$\Rightarrow A = (2k+2) \cdot 2k = 4k(k+1)$$

k và $k+1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên có một số chia hết cho 2 $\Rightarrow k(k+1) : 2$

$\Rightarrow A : 8 \text{ (1)}$

Vì p không chia hết cho 3 nên $p = 3m + 1$ hoặc $p = 3m - 1 \text{ (} m \in \mathbb{N}^* \text{)}$

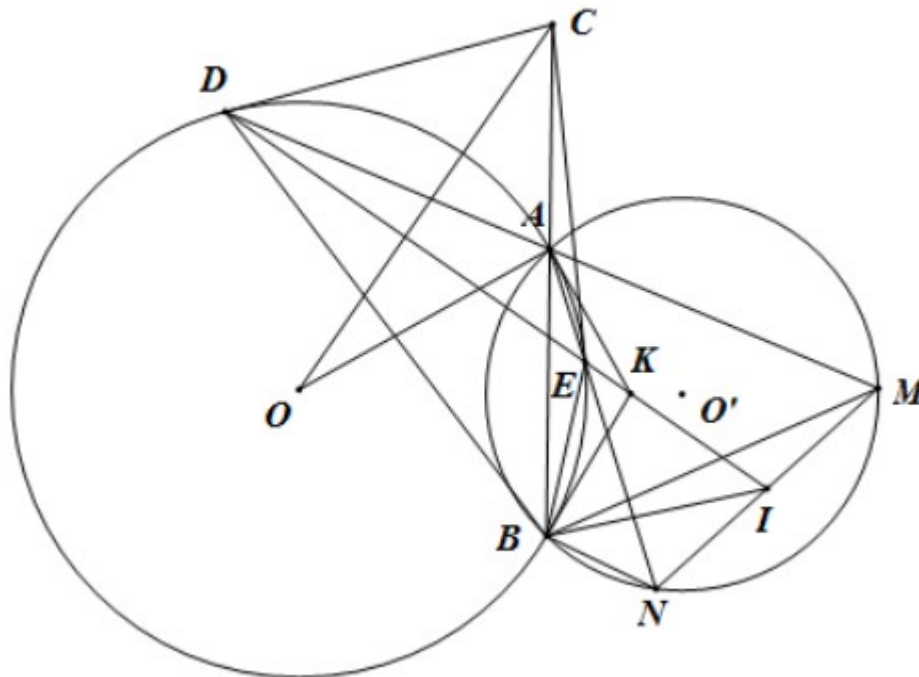
Nếu $p = 3m + 1 \Rightarrow p - 1 : 3 \Rightarrow A : 3$

Nếu $p = 3m - 1 \Rightarrow p + 1 : 3 \Rightarrow A : 3$

Vậy $A : 3 \text{ (2)}$

Từ (1) và (2), với chú ý $(3;8) = 1 \Rightarrow A : 24$.

Câu 4



a) Vì DAEB là tứ giác nội tiếp nên $\angle DAB = \angle DEB$

Vì ABNM là tứ giác nội tiếp nên $\angle DAB = \angle BNI$

Do đó $\angle DEB = \angle BNI \Rightarrow \angle BEI + \angle BNI = 180^\circ$

$\Rightarrow$ BEIN là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle BEN = \angle BIN$

Vì DAEB là tứ giác nội tiếp nên $\angle BEN = \angle ADB$

Do đó $\angle BIN = \angle ADB \Rightarrow \angle BIM + \angle MDB = 180^\circ$

$\Rightarrow$ BDMI là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ B, D, I, M cùng thuộc một đường tròn.

b) Vì ABNM là tứ giác nội tiếp nên $\angle BAE = \angle BMI \text{ (1)}$

Vì DAEB và DMIB là các tứ giác nội tiếp nên

$\angle ABE = \angle ADE$ và $\angle MBI = \angle ADE \Rightarrow \angle ABE = \angle MBI \text{ (2)}$

$$\Rightarrow \frac{BE}{BI} = \frac{AE}{MI} \Rightarrow MI \cdot BE = BI \cdot AE$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ tam giác BAE đồng dạng với tam giác BMI (g.g)

c) Ta chứng minh $AD \cdot BE = AE \cdot BD$

Vì CD là tiếp tuyến của (O) nên

$\angle CDA = \angle CBD$

$\Rightarrow$ tam giác CDA đồng dạng với tam giác CBD (g.g)

$$\Rightarrow \frac{DA}{BD} = \frac{CD}{CB}$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EB} = \frac{CE}{CB}$$

Chúng minh tương tự ta có

$$\frac{DA}{BD} = \frac{EA}{EB} \Rightarrow AD \cdot BE = AE \cdot BD$$

Mà theo tính chất tiếp tuyến ta có $CD = CE$ nên

• Ta chứng minh DE đi qua điểm K là giao hai tiếp tuyến tại A và B của (O)

Gọi K_1, K_2 lần lượt là giao điểm của DE với tiếp tuyến của (O) tại A và B.

Khi đó

$$K_1AE = K_1DA \Rightarrow \Delta K_1AE \sim \Delta K_1DA (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{K_1E}{K_1A} = \frac{K_1A}{K_1D}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{AE}{AD} \right)^2 = \frac{K_1E}{K_1A} \cdot \frac{K_1A}{K_1D} = \frac{K_1E}{K_1D}$$

Chúng minh tương tự ta có:

$$\left(\frac{BE}{BD} \right)^2 = \frac{K_2E}{K_2D}$$

$$\Rightarrow \frac{AE}{AD} = \frac{BE}{BD} \Rightarrow \frac{K_1E}{K_1D} = \frac{K_2E}{K_2D}$$

Mà $AD \cdot BE = AE \cdot BD$

Do K_1 và K_2 đều nằm ngoài đoạn DE nên K_1 và K_2 chia ngoài đoạn DE theo các tỷ số bằng nhau $\Rightarrow K_1 \equiv K_2 \equiv K$.

Vậy DE luôn đi qua điểm K cố định.

Câu 5.

Xét

$$\begin{aligned} \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} - (2b - a) &= \frac{5b^3 - a^3 - (ab + 3b^2)(2b - a)}{ab + 3b^2} \\ &= \frac{5b^3 - a^3 - (2ab^2 - a^2b + 6b^3 - 3b^2a)}{ab + 3b^2} = \frac{-b^5 - a^3 + a^2b + b^2a}{ab + 3b^2} \\ &= \frac{-(a+b)(a-b)^2}{ab + 3b^2} \leq 0 \\ \Rightarrow \frac{5b^3 - a^3}{ab + 3b^2} &\leq 2b - a \end{aligned}$$

Ta có 2 BĐT tương tự:

$$\begin{aligned} \frac{5c^3 - b^3}{bc + 3c^2} &\leq 2c - b \\ \frac{5a^3 - c^3}{ca + 3a^2} &\leq 2a - c \end{aligned}$$

Cộng từng vế 3 BĐT trên ta được

$$P \leq 2(a+b+c) - (a+b+c) = a+b+c = 3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a + b + c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c = 1$$

Dấu bằng xảy ra

Vậy giá trị lớn nhất của P là $3 \Leftrightarrow a = b = c = 1$.

Đề số 10. Chuyên Năng Khiếu HCM. Năm học: 2014-2015

Câu I. Cho phương trình $(m^2 + 5)x^2 - 2mx - 6m = 0$ (1) với m là tham số.

- Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.
- Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

Câu II. 1) Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 2(1 + x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1 + y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases}$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

Câu III. Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

- Chứng minh rằng $a + b$ không thể là số nguyên tố.

b) Chứng minh rằng nếu $c > 1$ thì $a + c$ và $b + c$ không thể đồng thời là số nguyên tố

Câu IV. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ ($C \neq A, C \neq B$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB ; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH . Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N .

a) Chứng minh rằng $AN = AC, BM = BC$.

b) Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.

c) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R .

Câu V. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

a) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.

b) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

.....Hết.....

ĐÁP ÁN

Câu I.

a) Phương trình (1) có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên là phương trình bậc hai ẩn x . Do đó

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + (m^2 + 5).6m > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m^3 + 30m > 0$$

$$\Leftrightarrow m(6m^2 + m + 30) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \left[\underbrace{5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4}}_{>0 \forall m} \right] > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5}$

Xét $m^2 + 5 - 2m = (m - 1)^2 + 4 > 0$. Mà $m > 0 \Rightarrow m^2 + 5 > 2m > 0$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2m}{m^2 + 5} < 1 \Rightarrow 0 < x_1 + x_2 < 1$$

Vậy tổng hai nghiệm của (1) không thể là số nguyên.

b) Phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 0$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5} \\ x_1 x_2 = \frac{-6m}{m^2 + 5} \end{cases}$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét:

Ta có:

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2 \\ x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \end{cases}$$

$$TH1: x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = 2 \quad (2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}}; t \geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2 - t - 2 = 0$

Xét $\Delta = 1^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

$$TH2: x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = -2 \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}}; t \geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2 - t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)(3t-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = \frac{2}{3} (TM) \Rightarrow \frac{2m}{m^2 + 5} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 4m^2 - 18m + 20 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(4m-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(TM) \\ m = \frac{5}{2} (TM) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{ 2; \frac{5}{2} \right\}$

Câu II.

$$\begin{cases} 2(1 + x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1 + y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases} \quad (I)$$

ĐK: $x \geq 0, y \geq 0$

Đặt $a = x\sqrt{y}; b = y\sqrt{x}$, điều kiện $a \geq 0, b \geq 0$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} 2(1+a)^2 = 9b(1) \\ 2(1+b)^2 = 9a(2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$2(1+a)^2 - 2(1+b)^2 = 9(b-a)$$

$$\Leftrightarrow 2(a-b)(a+b+2) + 9(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\underbrace{2a+2b+13}_{>0 \forall a, b > 0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

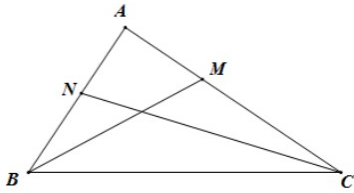
Thay $a = b$ vào (1) ta có

$$2(1+a)^2 = 9a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 2(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = 2 \\ y\sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{4} \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = \frac{1}{2} \\ y\sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}); \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

2)



Vì BM, CN lần lượt là phân giác góc ABC, ACB nên theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\frac{MC}{MA} = \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{MC+MA}{MA} = 1 + \frac{BC}{AB}$$

$$\frac{NB}{NA} = \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{BN+NA}{NA} = 1 + \frac{BC}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA.NA} = \left(1 + \frac{BC}{AB}\right)\left(1 + \frac{BC}{AC}\right) = 1 + \frac{BC^2}{AB.AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC}$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC và BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \geq 2AB.AC \Rightarrow \frac{BC^2}{AB.AC} \geq 2$$

$$\frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} \geq 2\sqrt{\frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC}} \geq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{(MA+MC)(NB+NA)}{MA.NA} \geq 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}$$

Câu III.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \Rightarrow c(a+b) = ab(*)$$

a) Ta có:

Giả sử $a + b$ là số nguyên tố, khi đó từ (*) $\Rightarrow ab : (a + b) \Rightarrow a : (a + b)$ hoặc $b : (a + b)$

Điều này mâu thuẫn do $0 < a < a + b$, $0 < b < a + b$.

Vậy $a + b$ không thể là số nguyên tố.

b) Giả sử $a + c$ và $b + c$ đồng thời là số nguyên tố.

Tür $c(a+b)=ab \Rightarrow ca+cb=ab \Rightarrow ca+ab=2ab-ab \Rightarrow a(b+c)=b(2a-c)$

$$\Rightarrow a(b + c) : b (**)$$

Mà $b + c$ là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn $b + c$ nên $(b + c, b) = 1$

Do đó từ (**) suy ra $a : b$.

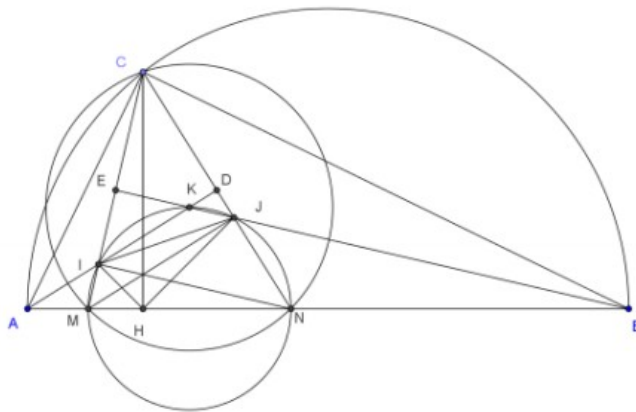
Chứng minh tương tự ta có $b(a + c) = a(2b - c) \Rightarrow b : a$

Vậy $a = b$. Từ (*) $\Rightarrow a = b = 2c$

Do đó $a + c = b + c = 3c$, không là số nguyên tố với $c > 1$ (mâu thuẫn với giả sử)

Vậy $a + c$ và $b + c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV.



a) Ta có: $HCA = ABC$ (cùng phụ với HCB)

Vì CN là phân giác của góc HCB nên $\widehat{HCN} = \widehat{BCN}$

Do đó $CAN = HCA + HCN = ABC + BCN$

Mặt khác, xét ΔBCN với góc ngoài ANC ta có: $ANC = ABC + BCN$

Suy ra $\angle C = \angle A \Rightarrow \Delta ACN$ cân tại A $\Rightarrow AC = AN$.

Chứng minh tương tự ta có $BC = BM$.

b) Vì CM, CN lần lượt là phân giác của góc ACH và BCH nên

$$MCN = MCH + NCH = \frac{1}{2}ACH + \frac{1}{2}BCH = \frac{1}{2}ACB = 45^\circ$$

Tam giác ACN cân tại A có AI là phân giác kẻ từ đỉnh A, nên cũng là trung trực của đáy CN.

$$\Rightarrow \text{IC} = \text{IN}.$$

$\Rightarrow \Delta$ ICN cân tại I.

Tam giác ICN cân tại I có $\widehat{ICN}=45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại I

$$\Rightarrow CI \perp IN$$

Chúng minh tương tự ta có $CJ \perp MJ$.

Tứ giác MIJN có $\widehat{MIN} = \widehat{MJN} = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, I, J, N cùng thuộc một đường tròn.

Vì $CH \perp MN$, $MJ \perp CN$, $NI \perp CM$ nên CH , MJ , NI đồng quy tại trục tâm của ΔCMN .

c) Đặt $AC = b; BC = a \Rightarrow a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2$ (Pi - ta - go)

Theo câu a, ta có $AN = AC = b; BM = BC = a$

Do đó $a + b = AN + BM = BC + MN \Rightarrow MN = a + b - BC = a + b - 2R$

Ta có:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 8R^2$$

$$\Leftrightarrow a + b \leq 2\sqrt{2}R \Rightarrow MN = a + b - 2R \leq 2R(\sqrt{2} - 1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Leftrightarrow CA = CB \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $CH \leq R$.

$$S_{CMN} = \frac{1}{2} CH \cdot MN \leq \frac{1}{2} R \cdot 2R(\sqrt{2} - 1) = R^2(\sqrt{2} - 1)$$

Do đó

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $2R(\sqrt{2} - 1)$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CMN là $R^2(\sqrt{2} - 1)$ đều xảy ra khi và chỉ khi C là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB .

Câu V.

a) Gọi 5 số tự nhiên đã cho là a, b, c, d, e .

Do chúng đôi một phân biệt nên có thể giả sử $a < b < c < d < e$.

Theo giả thiết ta có $a + b + c > d + e \Rightarrow a + b + c \geq d + e + 1$

Suy ra $a \geq d + e + 1 - b - c$.

Vì b, c, d, e là số tự nhiên nên từ

$$d > c \Rightarrow d \geq c + 1; c > b \Rightarrow c \geq b + 1$$

$$\text{Suy ra } d \geq b + 2 \Rightarrow d - b \geq 2$$

$$e > d \Rightarrow e \geq d + 1 \Rightarrow e \geq c + 2 \Rightarrow e - c \geq 2$$

$$\text{Do đó } a \geq (d - b) + (e - c) + 1 \geq 5. \text{ Suy ra } b, c, d, e > 5$$

Vậy tất cả các số đều không nhỏ hơn 5.

b) Nếu $a \geq 6 \Rightarrow b \geq a + 1 \geq 7$. Tương tự $c \geq 8, d \geq 9, e \geq 10 \Rightarrow a + b + c + d + e \geq 40$ (mâu thuẫn)

Suy ra $a < 6$. Mà theo câu a ta có $a \geq 5 \Rightarrow a = 5$.

$$\text{Ta có } 5 + b + c \geq d + e + 1 \Rightarrow b + c \geq d + e - 4.$$

$$\text{Mà } d - 2 \geq b, e - 2 \geq c \Rightarrow d + e - 4 \geq b + c.$$

Do đó

$$\begin{cases} b = d - 2 \\ c = e - 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d + e = 5 + 2b + 2c + 4 < 40$$

$$\Rightarrow b + c < \frac{31}{2} \Rightarrow b + (b + 1) \leq b + c < \frac{31}{2} \Rightarrow b \leq 7$$

Suy ra $b = 6$ hoặc $b = 7$

Nếu $b = 6$ thì $d = b + 2 = 8$. Vì $b < c < d$ nên $c = 7 \Rightarrow e = c + 2 = 9$.

Nếu $b = 7$ thì $d = b + 2 = 9$. Vì $b < c < d$ nên $c = 8 \Rightarrow e = c + 2 = 10$.

Có hai bộ thỏa mãn đề bài là $(5; 6; 7; 8; 9)$ và $(5; 7; 8; 9; 10)$.

Đề số 11. Chuyên Ngoại Ngữ DHQG Hà Nội. Năm học: 2014-2015**Câu 1.** (2,0 điểm)

Cho biểu thức
$$A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$$

1. Rút gọn A .
2. Tìm giá trị của x để $A > 1$.

Câu 2. (2,5 điểm)

1. Giải phương trình: $x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2 + 1)(x + 3)}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình:

Câu 3. (1,5 điểm)

Cho phương trình (ẩn x): $x^2 - 3(m+1)x + 2m^2 + 5m + 2 = 0$. Tìm giá trị của m để phương trình có hai nghiệm phân biệt x_1 và x_2 thỏa mãn $|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2|$

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn (O). Kẻ đường cao AH của tam giác ABC. Gọi P, Q lần lượt là chân của đường vuông góc kẻ từ H đến các cạnh AB, AC.

1. Chứng minh rằng BCQP là tứ giác nội tiếp.
2. Hai đường thẳng PQ và BC cắt nhau tại M. Chứng minh rằng $MH^2 = MB \cdot MC$
3. Đường thẳng MA cắt đường tròn (O) tại K (K khác A). Gọi I là tâm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác BCQP. Chứng minh rằng ba điểm I, H, K thẳng hàng.

Câu 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng: $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$

ĐÁP ÁN

Câu 1.

1. Ta có:

$$A = \left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8} + \frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1} \right) : \left(3 + \frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{2}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$\begin{aligned}
 &= \left[\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} + \frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \right] : \frac{3(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1) + (\sqrt{x}+1) + 2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} + \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1} \right) : \frac{3(x-\sqrt{x}-2) + 3\sqrt{x}-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-1 + (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} : \frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)} \\
 &= \frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)} \cdot \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}
 \end{aligned}$$

2. ĐKXD: $x \geq 0; x \neq 1; x \neq 3; x \neq 4$

$$A > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} > 1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)} - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1-3(\sqrt{x}-1)}{3(\sqrt{x}-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)} > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 < \sqrt{x} < 2$$

$$\Leftrightarrow 1 < x < 4$$

Kết hợp với ĐKXD, ta có $\begin{cases} 1 < x < 4 \\ x \neq 3 \end{cases}$ là điều kiện cần tìm.

Câu 2.

$$1.x^2 + 2x + 7 = 3\sqrt{(x^2+1)(x+3)}(1)$$

ĐK: $x \geq -3$

Nhận xét: $x^2 + 2x + 7 = (x^2 + 1) + 2(x + 3)$

Đặt $a = \sqrt{x^2+1} (a > 0), b = \sqrt{x+3} (b \geq 0)$, phương trình (1) trở thành

$$a^2 + 2b^2 = 3ab \Leftrightarrow (a-b)(a-2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

Với

$$a = b \Rightarrow \sqrt{x^2+1} = \sqrt{x+3} \Leftrightarrow x^2+1 = x+3 \Leftrightarrow (x-2)(x+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(TM) \\ x = -1(TM) \end{cases}$$

Với

$$a = 2b \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} = 2\sqrt{x + 3} \Leftrightarrow x^2 + 1 = 4(x + 3) \Leftrightarrow x^2 - 4x - 11 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \sqrt{15} (TM) \\ x = 2 - \sqrt{15} (TM) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{2; -1; 2 - \sqrt{15}; 2 + \sqrt{15}\}$

$$2. \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ x^4 + y^4 = 2 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 3 - xy \\ (3 - xy)^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy = 3 - xy \\ 9 - 6xy + x^2y^2 - 2x^2y^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 3 + xy \\ x^2y^2 + 6xy - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 3 + xy \\ xy = 1 \\ xy = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 = 4 \\ xy = 1 \\ (x + y)^2 = -4 \\ xy = -7 \end{cases} (L)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 1 \\ x + y = -2 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm (1;1) và (-1;-1)

Câu 3.

$$x^2 - 3(m+1)x + 2m^2 + 5m + 2 = 0. \quad (1)$$

Ta có:

$$\Delta = 9(m+1)^2 - 4(2m^2 + 5m + 2) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow (m-1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 1$

Khi đó, theo định lý Vi-ét, ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3(m-1) \\ x_1x_2 = 2m^2 + 5m + 2 \end{cases}$$

Do đó:

$$|x_1 + x_2| = 2|x_1 - x_2|$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 = 4(x_1 - x_2)^2$$

$$\Leftrightarrow 3(x_1 + x_2)^2 - 16x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 27(m+1)^2 - 16(2m^2 + 5m + 2) = 0$$

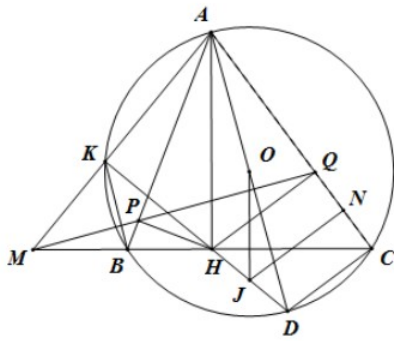
$$\Leftrightarrow 5m^2 + 26m + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (m+5)(5m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = -5 \\ m = -\frac{1}{5} \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện $m \neq 1$, ta có $m = -5$ và $m = -\frac{1}{5}$ là các giá trị cần tìm.

Câu 4.



1. Tứ giác APHQ có $\angle APH + \angle AQH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \angle APQ = \angle AHQ$

Ta có: $\angle AHQ = \angle BCQ$ (cùng phụ với $\angle CHQ$)

Do đó $\angle APQ = \angle BCQ$

Suy ra BPQC là tứ giác nội tiếp.

2. Vì BPQC là tứ giác nội tiếp nên

$\angle MBP = \angle MQC$

$$\triangle MBP \sim \triangle MQC (g.g) \Rightarrow \frac{MB}{MQ} = \frac{MP}{MC} \Rightarrow MB \cdot MC = MP \cdot MQ (1)$$

Vì APHQ là tứ giác nội tiếp nên: $\angle MQH = \angle BAH$

Mà $\angle BAH = \angle MHP$ (cùng phụ với $\angle PBH$)

nên $\angle MQH = \angle MHP$

$$\triangle MQH \sim \triangle MHP (g.g) \Rightarrow \frac{MQ}{MH} = \frac{MH}{MP} \Rightarrow MH^2 = MP \cdot MQ (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow MH^2 = MB \cdot MC$

3. Vì AKBC là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle MKB = \angle MCA \Rightarrow \triangle MKB \sim \triangle MCA \Rightarrow \frac{MK}{MC} = \frac{MB}{MA}$$

$$\Rightarrow MK \cdot MA = MB \cdot MC$$

Kết hợp với kết quả ý 2, ta có $MH^2 = MK \cdot MA$

$\Rightarrow HK$ là đường cao của tam giác vuông AHM.

$\Rightarrow AK \perp KH$

Do đó KH cắt (O) tại D (D khác K) thì AD là đường kính của (O).

Gọi J là trung điểm HD, N là trung điểm QC.

Khi đó OJ là đường trung bình của $\Delta AHD \Rightarrow OJ \parallel AH \Rightarrow OJ \perp BC$.

Mà OB = OC nên OJ là trung trực BC (3)

Vì HQ $\parallel$ DC (cùng vuông góc AC) nên HQCD là hình thang.

$\Rightarrow JN$ là đường trung bình của hình thang HQCD

$\Rightarrow JN \parallel HQ \Rightarrow JN \perp QC$

$\Rightarrow JN$ là trung trực của QC (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow J$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác BPQC (do BPQC là tứ giác nội tiếp)

$\Rightarrow J \equiv I$

Mà K, H, J thẳng hàng nên I, K, H thẳng hàng.

Câu 5.

$$\text{Đặt } S = \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}}$$

Ta có:

$$2S = \frac{3}{2} + \frac{4}{2^2} + \dots + \frac{2014}{2^{2012}} + \frac{2015}{2^{2013}}$$

$$\Rightarrow 2S - S = \frac{3}{2} + \frac{4-3}{2^2} + \frac{5-4}{2^3} + \dots + \frac{2015-2014}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}}$$

$$\Rightarrow S = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}}\right) - \frac{2015}{2^{2014}}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{2^{2013}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2014}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{2013}}$$

Ta có:

Do đó:

$$S = 2 - \frac{1}{2^{2013}} - \frac{2015}{2^{2014}} < 2 \Rightarrow 1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{4}{2^3} + \dots + \frac{2014}{2^{2013}} + \frac{2015}{2^{2014}} < 4$$

Đề số 12. Chuyên Nguyễn Trãi – Hải Dương. Năm học: 2014-2015

Câu I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{43-x} = x-1$

$$A = \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} \quad (x \geq 0; x \neq 1)$$

2) Rút gọn biểu thức:

Câu II (2,0 điểm)

Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=(m-1)x+m+4$ (tham số m)

1) Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d).

2) Tìm m để (d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung.

Câu III (2,0 điểm)

1) Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} x+y=3m+2 \\ 3x-2y=11-m \end{cases} \quad (\text{tham số } m)$$

Tìm m để hệ đã cho có nghiệm (x; y) thỏa mãn $x^2 - y^2$ đạt giá trị lớn nhất.

2) Một ô tô dự định đi từ A đến B dài 80 km với vận tốc dự định. Thực tế trên nửa quãng đường đầu ô tô đi với vận tốc nhỏ hơn vận tốc dự định là 6 km/h. Trong nửa quãng đường còn lại ô tô đi với vận tốc nhanh hơn vận tốc dự định là 12 km/h. Biết rằng ô tô đến B đúng thời gian đã định. Tìm vận tốc dự định của ô tô.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn, các đường cao AM, BN, CP của tam giác ABC cắt nhau tại H. Dựng hình bình hành BHCD.

1) Chứng minh: Các tứ giác APHN, ABDC là các tứ giác nội tiếp.

2) Gọi E là giao điểm của AD và BN. Chứng minh: $AB \cdot AH = AE \cdot AC$

3) Giả sử các điểm B và C cố định, A thay đổi sao cho tam giác ABC nhọn và $B \cdot AC$ không đổi. Chứng minh rằng đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN có diện tích không đổi

Câu V (1,0 điểm)

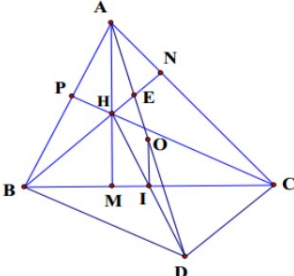
Cho x; y là hai số dương thay đổi. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}$$

ĐÁP ÁN

Câu	NỘI DUNG	Điểm
Câu 1	1) Giải phương trình: $\sqrt{43-x} = x-1$	0,25
	$\sqrt{43-x} = x-1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0(1) \\ 43-x = (x-1)^2(2) \end{cases}$	
	(1) $\Leftrightarrow x \geq 1$	0,25
	(2) $\Leftrightarrow x^2 - x - 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ x = -6 \end{cases}$	0,25
	Kết hợp nghiệm ta có: $x = 7$ (thỏa mãn), $x = -6$ (loại) Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \{7\}$.	0,25
	2) Rút gọn biểu thức: $A = \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} (x \geq 0; x \neq 1)$	1,00
	$A = \frac{10\sqrt{x}}{x+3\sqrt{x}-4} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} + \frac{\sqrt{x}+1}{1-\sqrt{x}} (x \geq 0; x \neq 1)$	
	$= \frac{10\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)} - \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}+4} - \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$	0,25
	$= \frac{10\sqrt{x} - (2\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}-1) - (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}+4)(\sqrt{x}-1)}$	0,25
Câu 2	Cho Parabol (P): $y=x^2$ và đường thẳng (d): $y=(m-1)x+m+4$ (tham số m)	0,25
	Với $m = 2$, tìm tọa độ giao điểm của (P) và (d). $m = 2$ ta có phương trình đường thẳng (d) là : $y = x + 6$	
	Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình: $x^2=x+6$	0,25
	$\Leftrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 3 \end{cases}$	0,25
	+) $x = -2 \Rightarrow y = 4$ +) $x = 3 \Rightarrow y = 9$ Vậy $m = 2$ thì (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm A(-2;4) và B(3;9)	0,25
	2. Tìm m để (d) cắt (P) tại 2 điểm nằm về hai phía của trục tung.	1,00

	Hoành độ giao điểm của (P) và (d) là nghiệm của phương trình:	0,25
	$x^2 = (m-1)x + m + 4$ $\Leftrightarrow x^2 - (m-1)x - m - 4 = 0(*)$	
	(d) cắt (P) tại hai điểm nằm về hai phía của trục tung khi và chỉ khi phương trình (*) có 2 nghiệm trái dấu	0,25
	$\Leftrightarrow 1. (-m-4) < 0$	0,25
	$\Leftrightarrow m > -4$	0,25
Câu 3	1) Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x + y = 3m + 2 \\ 3x - 2y = 11 - m \end{cases}$ (tham số m)	1,00
	$\begin{cases} x + y = 3m + 2 \\ 3x - 2y = 11 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y = 6m + 4 \\ 3x - 2y = 11 - m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x = 5m + 15 \\ x + y = 3m + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = m + 3 \\ y = 2m - 1 \end{cases}$	0,25
	$x^2 - y^2 = (m+3)^2 - (2m-1)^2 = -3m^2 + 10m + 8$ $= \frac{49}{3} - 3(m - \frac{5}{3})^2$	0,25
	Do $(m - \frac{5}{3})^2 \geq 0$ với mọi m; dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{5}{3}$	0,25
	$\Rightarrow x^2 - y^2 \leq \frac{49}{3}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{5}{3}$ Hay $x^2 - y^2$ lớn nhất bằng $\frac{49}{3}$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $m = \frac{5}{3}$	0,25
	2. Gọi vận tốc dự định của ô tô là x (km/h) ($x > 6$)	0,25
	Khi đó thời gian ô tô dự định đi hết quãng đường AB là $\frac{80}{x}$ (h)	0,25
	Thời gian thực tế ô tô đi nửa quãng đường đầu là $\frac{40}{x-6}$ (h) Thời gian thực tế ô tô đi nửa quãng đường còn lại là $\frac{40}{x+12}$ (h)	
	Theo bài ra ta có phương trình:	0,5
	$\frac{40}{x-60} + \frac{40}{x+12} = \frac{80}{x}$ $\Leftrightarrow \frac{40x(x+12)}{x(x-6)(x+12)} + \frac{40x(x-6)}{x(x-6)(x+12)} = \frac{80(x-6)(x+12)}{x(x-6)(x+12)}$ $\Leftrightarrow 40x^2 + 480x + 40x^2 - 240x = 80x^2 + 480x - 5760$ $\Leftrightarrow 240x = 5760$ $\Leftrightarrow x = 24$	
	Vậy vận tốc dự định của ô tô là 24 (km/h)	
		0,25

<p>Câu 4</p>		<p>0,25</p>
	<p>Từ giả thiết ta có: $\angle APH = 90^\circ$; $\angle ANH = 90^\circ$</p>	
	<p>$\Rightarrow$ Tứ giác APHN nội tiếp đường tròn đường kính AH</p>	
	<p>Ta có: $BD \parallel CH$ (BDCH là hình bình hành) và $CH \perp AB$ $\Rightarrow BD \perp AB \Rightarrow \angle ABD = 90^\circ$ $\Rightarrow$ Tương tự ta có: $\angle ACD = 90^\circ$</p>	<p>0,25</p>
	<p>$\Rightarrow$ Tứ giác ABDC nội tiếp đường tròn (đường kính AD)</p>	<p>0,25</p>
	<p>2. Xét 2 tam giác ABE và ACH có:</p>	<p>0,25</p>
	<p>$\angle ABE = \angle ACH$ (cùng phụ với góc BAC) (1)</p>	
	<p>Góc BAE phụ với góc BDA; $\angle BDA = \angle BCA$ (góc nội tiếp cùng chắn cung AB)</p>	<p>0,25</p>
	<p>Góc CAH phụ với góc BCA $\Rightarrow \angle BAE = \angle CAH$ (2)</p>	
	<p>Từ (1) và (2) suy ra 2 tam giác ABE, ACH đồng dạng</p>	<p>0,25</p>
	<p>$\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AH} \Rightarrow AB \cdot AH = AC \cdot AE$</p>	<p>0,25</p>
	<p>3. Gọi I là trung điểm của BC $\Rightarrow$ I cố định (do B, C cố định)</p>	<p>0,25</p>
	<p>Gọi O là trung điểm AD $\Rightarrow$ O cố định (do góc BAC không đổi, B, C cố định, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC) $\Rightarrow$ Độ dài OI không đổi</p>	<p>0,25</p>
	<p>Tứ giác ABDC là hình bình hành $\Rightarrow$ I là trung điểm của HD</p>	<p>0,25</p>
	<p>$\Rightarrow OI = \frac{1}{2} AH$ (OI là đường trung bình của tam giác ADH) $\Rightarrow$ Độ dài AH không đổi</p>	<p>0,25</p>
	<p>Vì AH là đường kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN, độ dài AH không đổi $\Rightarrow$ độ dài bán kính đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN không đổi $\Rightarrow$ đường tròn ngoại tiếp tứ giác APHN có diện tích không đổi.</p>	<p>0,25</p>
<p>Câu 5</p>	<p>Ta có:</p>	<p>0,25</p>
	$S = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2} + \frac{(x+y)^2}{xy}$ $= 1 + \frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{xy} + 2$	
	$= 3 + \left(\frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{2xy} \right) + \frac{x^2+y^2}{2xy}$	<p>0,25</p>
	<p>Do x, y là các số dương nên ta có:</p> $\frac{2xy}{x^2+y^2} + \frac{x^2+y^2}{2xy} \geq 2\sqrt{\frac{2xy}{x^2+y^2} \cdot \frac{x^2+y^2}{2xy}} = 2$	<p>0,25</p>

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:	
$\frac{2xy}{x^2 + y^2} = \frac{x^2 + y^2}{2xy} \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 4x^2y^2 \Leftrightarrow (x^2 - y^2)^2 = 0$ $\Leftrightarrow x^2 = y^2$ $\Leftrightarrow x = y(x, y > 0)$ $x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow \frac{x^2 + y^2}{2xy} \geq 1 \Leftrightarrow x = y$	
Cộng các bất đẳng thức ta được $S \geq 6$	0,25
$S = 6 \Leftrightarrow x = y$. Vậy Min $S = 6$ khi và chỉ khi $x = y$	

Đề số 13. Chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An. Năm học: 2014-2015

Câu 1 (7,0 điểm).

a) Giải phương trình $\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+3} = 2x + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ 3xy = x + y + 1 \end{cases}$$

b) Giải hệ phương trình

Câu 2 (3,0 điểm).

a) Tìm các số nguyên x và y thỏa mãn phương trình $9x + 2 = y^2 + y$

b) Tìm các chữ số a, b sao cho $(\overline{ab})^2 = (a+b)^3$

Câu 3 (2,0 điểm).

Cho các số a, b, c không âm. Chứng minh rằng

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3\sqrt[3]{(abc)^2} = 2(ab + bc + ca)$$

Đẳng thức xảy ra khi nào?

Câu 4 (6,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) có các đường cao AE và CF cắt nhau tại H . Gọi P là điểm thuộc cung nhỏ BC (P khác B, C); M, N lần lượt là hình chiếu của P trên các đường thẳng AB và AC . Chứng minh rằng:

a) $\frac{BH}{BO} = 2 \cdot \frac{EF}{AC}$

b) Đường thẳng MN đi qua trung điểm của đoạn thẳng HP .

Câu 5 (2,0 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC có $\angle BAC = 60^\circ$; $BC = 2\sqrt{3}cm$. Bên trong tam giác này cho 13 điểm bất kỳ. Chứng minh rằng trong 13 điểm ấy luôn tìm được 2 điểm mà khoảng cách giữa chúng không lớn hơn 1cm.

----- HẾT -----

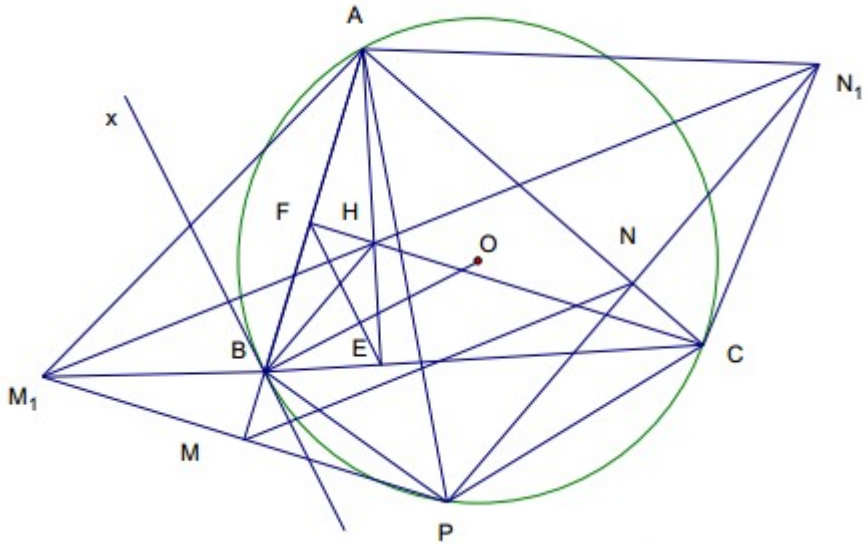
SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NGHỆ AN

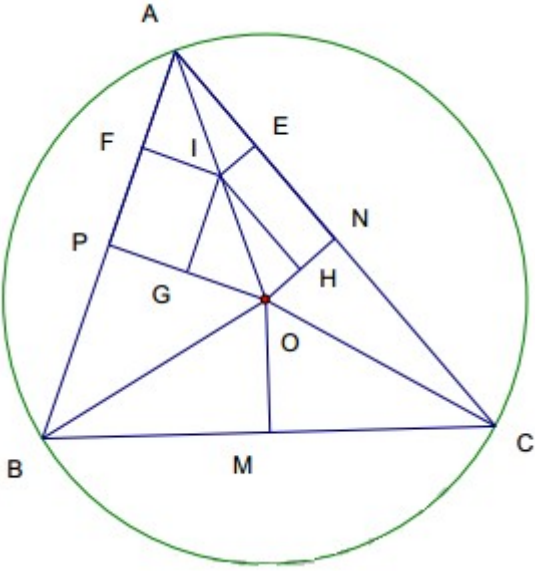
KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN PHAN BỘI CHÂU
NĂM HỌC 2014 – 2015

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ THI CHÍNH THỨC
Môn: TOÁN

Câu	Nội dung	Điểm
1.		7,0
a)		3,5
	Điều kiện: $x \geq -1$	0,5
	Ta có: $\sqrt{x+1} + 2x\sqrt{x+3} = 2x + \sqrt{x^2 + 4x + 3}$	
	$\Leftrightarrow 2x\sqrt{x+3} - 2x + \sqrt{x+1} - \sqrt{(x+1)(x+3)} = 0$	0,25
	$\Leftrightarrow 2x(\sqrt{x+3} - 1) - \sqrt{x+1}(\sqrt{x+3} - 1) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x+1} - 2x) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1(1) \\ \sqrt{x+1} = 2x(2) \end{cases}$	0,5
	Ta có (1) $\Leftrightarrow x = -2$ (loại)	0,5
	$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+1 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{8} \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow x = \frac{1 + \sqrt{17}}{8} (TM)$	
	Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{8}$	0,25
b)		3,5
	Điều kiện: $x \neq -1; y \neq -1$	0,5

	$\begin{cases} \frac{x^2}{(y+1)^2} + \frac{y^2}{(x+1)^2} = \frac{1}{2} \\ \frac{x}{y+1} \cdot \frac{y}{x+1} = \frac{1}{4} \end{cases}$ <p>Hệ phương trình đã cho tương đương với</p>	
	<p>Đặt $u = \frac{x}{y+1}; v = \frac{y}{x+1}$, hệ đã cho trở thành</p> $\begin{cases} u^2 + v^2 = \frac{1}{2} \\ uv = \frac{1}{4} \end{cases}$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 + 2uv = 1 \\ u^2 + v^2 - 2uv = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2 = 1 \\ (u-v)^2 = 0 \end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow \begin{cases} u = v = \frac{1}{2} \\ u = v = -\frac{1}{2} \end{cases}$	0,5
	<p>Nếu $u = v = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y+1 = 2x \\ x+1 = 2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1 \text{ (TM)}$</p>	0,75
	<p>Nếu $u = v = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} y+1 = -2x \\ x+1 = -2y \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -\frac{1}{3} \text{ (TM)}$</p> <p>Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm: $x = y = 1, x = y = -\frac{1}{3}$</p>	0,75
2.		3,0
a)		2,0
	<p>Phương trình đã cho tương đương với $9x = (y-1)(y+2)(1)$</p>	0,5
	<p>Nếu $y-1 \vdots 3$ thì $y+2 = (y-1)+3 \vdots 3 \Rightarrow (y-1)(y+2) \vdots 9$</p> <p>Mà $9x \vdots 9 \forall x \in \mathbb{Z}$ nên ta có mâu thuẫn.</p>	0,5
	<p>Suy ray $-1 \vdots 3$, do đó: $y-1 = 3k (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow y = 3k+1 (k \in \mathbb{Z})$</p>	0,5
	<p>Thay vào (1) ta có: $9x = 3k(3k+3) \Rightarrow x = k(k+1)$</p>	0,25
	<p>Vậy phương trình có nghiệm: $\begin{cases} x = k(k+1) \\ y = 3k+1 \end{cases} (k \in \mathbb{Z})$</p>	0,25
b)		1,0
	<p>Từ giả thiết suy ra $\overline{ab} = (a+b)\sqrt{a+b} (1)$</p> <p>Vì $\overline{ab}$ và $a+b \in \mathbb{N}^*$ nên $a+b$ là số chính phương.</p>	0,25
	<p>Mặt khác $1 \leq a+b \leq 18 \Rightarrow a+b \in \{1; 4; 9; 16\}$</p>	0,25
	<p>Nếu $a+b=1, a+b=4, a+b=16$ thì thay vào (1) không thỏa mãn</p> <p>Nếu $a+b=9$ thay vào (1) ta được $\overline{ab} = 27$</p> <p>Vậy $a=2; b=7$</p>	0,5
3.		2,0

	<p>Đặt $\sqrt[3]{a^2} = x; \sqrt[3]{b^2} = y; \sqrt[3]{c^2} = z.$ $\Rightarrow a^2 = x^3; b^2 = y^3; c^2 = z^3, a = \sqrt{x^3}; b = \sqrt{y^3}; c = \sqrt{z^3}; x, y, z \geq 0$ Bất đẳng thức đã cho trở thành: $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3})(1)$</p>	0,5
	<p>Vì vai trò của x; y ;z bình đẳng nên có thể giả sử $x \geq y \geq z \geq 0$ Khi đó $x(x-y)^2 + z(y-x)^2 + (z+x-y)(x-y)(y-z) \geq 0$ $\Rightarrow x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy(z+y) + yz(y+z) + zx(z+x)(2)$</p>	0,5
	<p>Áp dụng Bất đẳng thức Côsi ta có $xy(x+y) \geq 2xy\sqrt{xy} = 2\sqrt{x^3 y^3} (3)$ Tương tự ta có: $yz(y+z) \geq 2\sqrt{y^3 z^3} (4)$ $zx(z+x) \geq 2\sqrt{z^3 x^3} (5)$ Cộng vế theo vế các bất đẳng thức (3), (4), (5) ta được $xy(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x) \geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3})(6)$</p>	0,5
	<p>Từ (2) và (6) ta có $x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq 2(\sqrt{x^3 y^3} + \sqrt{y^3 z^3} + \sqrt{z^3 x^3})$ Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z$ hay $a=b=c$.</p>	0,5
4.		6,0
a)		4,0
		
	Vì $\angle AEC = \angle AFC = 90^\circ$ nên tứ giác ACEF nội tiếp.	0,5
	Suy ra $\angle BFE = \angle ACB$ (cùng bù với góc AFE) (1)	0,5
	Kẻ tia tiếp tuyến Bx của đường tròn (O) tại B. Ta có $\angle ACB = \angle ABx$ (cùng chắn cung AB) (2)	0,5
	Từ (1) và (2) suy ra $\angle BFE = \angle ABx$	0,5
	Do đó $Bx \parallel EF$	0,5

	Mà $OB \perp Bx$ nên $OB \perp EF$	0,5
	Xét $\triangle BEF$ và $\triangle BAC$ có $\angle BFE = \angle ACB$ (theo (1)) nên $\triangle BEF$ và $\triangle BAC$ đồng dạng.	0,5
	Mặt khác $\triangle BEF$ và $\triangle BAC$ lần lượt nội tiếp đường tròn bán kính $\frac{BH}{2}$ và đường tròn bán kính $\frac{EF}{2}$ OB nên $\frac{EF}{AC} = \frac{BH}{2.OB}$ Từ đó ta có $\frac{BH}{BO} = 2 \cdot \frac{EF}{AC}$	0,5
b)		2,0
	Gọi M_1 và N_1 lần lượt là các điểm đối xứng với P qua AB và AC. Ta có: $AM_1B = APB$ (do tính chất đối xứng) (3)	0,25
	$APB = ACB$ (cùng chắn cung AB) (4)	0,25
	Tứ giác BEHF nội tiếp nên $\angle BFE = \angle BHE$ (5)	0,25
	Mặt khác theo câu a) $\angle BFE = \angle ACB$ (6)	
	Từ (3), (4), (5), (6) suy ra $AM_1B = \angle BHE \Rightarrow \angle AM_1B + \angle AHB = 180^\circ$,	0,25
	do đó tứ giác AHBM ₁ nội tiếp	0,25
	$\Rightarrow \angle AHM_1 = \angle ABM_1$ mà $\angle ABM_1 = \angle ABP$ nên $\angle AHM_1 = \angle ABP$.	0,25
	Chứng minh tương tự ta có $\angle AHN_1 = \angle ACP$	0,25
	$\Rightarrow \angle AHM_1 + \angle AHN_1 = \angle ABP + \angle ACP = 180^\circ \Rightarrow M_1, N_1, H$ thẳng hàng	0,25
	Mặt khác MN là đường trung bình của tam giác PM_1N_1 , do đó MN đi qua trung điểm của PH.	
5.		2,0
		
	Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác Gọi (O') là đường tròn ngoại tiếp tam giác BC, CA, AB. Do tam giác ABC nhọn nên O nằm trong tam giác ABC $\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle MOC = 60^\circ \Rightarrow OA = OB = OC = \frac{MC}{\sin 60^\circ} = 2$ Vì	0,5
	Vì O nằm trong tam giác ABC và $OM \perp BC, ON \perp AC, OP \perp AB$ Suy ra tam giác ABC được chia thành 3 tứ giác ANOP, BMOP, CMON nội tiếp các đường	0,25

	tròn có đường kính 2 (đường kính lần lượt là OA, OB, OC).	
	Theo nguyên lý Dirichlê, tồn tại ít nhất một trong 3 tứ giác này chứa ít nhất 5 điểm trong 13 điểm đã cho, giả sử đó là tứ giác ANOP.	0,25
	Gọi E, F, G, H lần lượt là trung điểm của NA, AP, PO, ON và I là trung điểm OA, suy ra IA=IP=IO=IN=1	0,25
	Khi đó tứ giác ANOP được chia thành 4 tứ giác AEIF, FIGP, IGOH, IHNE nội tiếp các đường tròn có đường kính 1.	0,25
	Theo nguyên lý Dirichlê, tồn tại ít nhất một trong 4 tứ giác này chứa ít nhất 2 điểm trong 5 điểm đã cho, giả sử đó là tứ giác AEIF chứa 2 điểm X, Y trong số 13 điểm đã cho.	0,25
	Vì X, Y nằm trong tứ giác AEIF nên X, Y nằm trong đường tròn ngoại tiếp tứ giác này, do đó XY không lớn hơn đường kính đường tròn này, nghĩa là khoảng cách giữa X, Y không vượt quá 1.	0,25

Đề số 14. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2014-2015

Bài 1. (2,0 điểm)

Cho biểu thức

$$A = \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \quad (x > 0, x \neq 4)$$

- 1, Rút gọn biểu thức A.
- 2, Tìm x sao cho A nhận giá trị là một số nguyên.

Bài 2. (2, 5 điểm)

Cho parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d) : $y = 2(m+3)x - 2m + 2$ (m là tham số, $m \in \mathbb{R}$).

- 1, Với $m = -5$ tìm tọa độ giao điểm của parabol (P) và đường thẳng (d).
- 2, Chứng minh rằng: với mọi m parabol (P) và đường thẳng (d) cắt nhau tại hai điểm phân biệt. Tìm m sao cho hai giao điểm đó có hoành độ dương.
- 3, Tìm điểm cố định mà đường thẳng (d) luôn đi qua với mọi m

Bài 3. (1,5 điểm)

Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0 \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases}$$

Bài 4. (3,5 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O; R). Tiếp tuyến tại B và C của đường tròn (O; R) cắt nhau tại T, đường thẳng AT cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D khác A.

- 1, Chứng minh rằng tam giác ABT đồng dạng với tam giác BDT.

2, Chứng minh rằng: $AB.CD = BD.AC$

3, Chứng minh rằng hai đường phân giác góc BAC , góc BDC và đường thẳng BC đồng quy tại một điểm.

4, Gọi M là trung điểm của BC, chứng minh rằng góc BAD bằng góc MAC.

Bài 5. (0,5 điểm)

Cho các số dương x, y, z thay đổi thỏa mãn: $x(x+1) + y(y+1) + z(z+1) \leq 18$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $B = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1}$

ĐÁP ÁN

Bài 1.

1. Với $x > 0, x \neq 4$ ta có:

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{2}{\sqrt{x}-2} + \frac{3}{2\sqrt{x}+1} - \frac{5\sqrt{x}-7}{2x-3\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2\sqrt{x}+3}{5x-10\sqrt{x}} \\ &= \frac{2(2\sqrt{x}+1) + 3(\sqrt{x}-2) - (5\sqrt{x}-7)}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5x-10\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{2\sqrt{x}+3}{(\sqrt{x}-2)(2\sqrt{x}+1)} \cdot \frac{5\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2\sqrt{x}+3} \\ &= \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} \end{aligned}$$

2. Vì $x > 0 \Rightarrow 5\sqrt{x} > 0; 2\sqrt{x}+1 > 0 \Rightarrow A > 0$

Mặt khác, xét $A-3 = \frac{5\sqrt{x}-3(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}+1} = \frac{-\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}+1} < 0 \quad \forall x > 0 \Rightarrow A < 3$

Vậy $0 < A < 3$

Do đó A nguyên $\Leftrightarrow A = 1$ hoặc $A = 2$.

$$A = 1 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 1 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2\sqrt{x}+1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{1}{9} \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$A = 2 \Leftrightarrow \frac{5\sqrt{x}}{2\sqrt{x}+1} = 2 \Leftrightarrow 5\sqrt{x} = 2(2\sqrt{x}+1) \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = 2 \Leftrightarrow x = 4 \quad (\text{loại})$$

Vậy $A \in \square \Leftrightarrow x = \frac{1}{9}$

Bài 2.

1. Khi $m = -5 \Rightarrow (d) : y = -4x + 12$

Khi đó , phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là:

$$x^2 = -4x + 12 \Leftrightarrow x^2 + 4x - 12 = 0 \Leftrightarrow (x + 6)(x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \text{ hoặc } x = 2$$

Khi $x = -6 \Rightarrow y = 36$

Khi $x = 2 \Rightarrow y = 4$

Vậy tọa độ giao điểm của (P) và (d) là $(-6;36)$ và $(2;4)$

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d):

$$x^2 = 2(m+3)x - 2m + 2 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+3)x + 2m - 2 = 0 \quad (1)$$

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = (m+3)^2 - (2m-2) > 0$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + 6m + 9) - (2m - 2) > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 4m + 7 > 0$$

$$\Leftrightarrow (m+2)^2 + 3 > 0$$

(luôn đúng $\forall m$)

Vậy (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1)

Hai giao điểm có hoành độ dương $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+3) > 0 \\ x_1 x_2 = 2m - 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 \\ m > 1 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1$$

Vậy $m > 1$.

3. Gọi $(x_0; y_0)$ là điểm cố định mà (d) luôn đi qua $\forall m$

Khi đó:

$$\begin{aligned} y_0 &= 2(m+3)x_0 - 2m + 2 (\forall m) \\ \Leftrightarrow m(2x_0 - 2) + (6x_0 + 2 - y_0) &= 0 (\forall m) \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 - 2 = 0 \\ 6x_0 + 2 - y_0 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ 6 \cdot 1 + 2 - y_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 8 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy (d) luôn đi qua điểm $(1; 8) \forall m$.

Bài 3.

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy - 2y^2 - 5(2x - y) = 0(1) \\ x^2 - 2xy - 3y^2 + 15 = 0(2) \end{cases} (I)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y) - 5(2x - y) = 0 \\ &\Leftrightarrow (2x - y)(x + 2y - 5) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x = 5 - 2y \end{cases} \end{aligned}$$

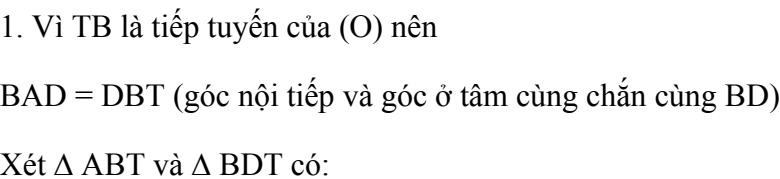
Do đó: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x^2 - 2x \cdot 2x - 3(2x)^2 + 15 = 0 \end{cases} (II) \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} x = 5 - 2y \\ (5 - 2y)^2 - 2(5 - 2y)y - 3y^2 + 15 = 0 \end{cases} (III)$

$$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -15x^2 + 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 2 \\ x = -1; y = -2 \end{cases}$$

$$(III) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2y \\ 5y^2 - 30y + 40 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2; x = 1 \\ y = 4; x = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm $(1; 2)$, $(-1; -2)$, $(-3; 4)$

Bài 4.



$\widehat{BAD} = \widehat{DBT}$ (góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cùng BD)

Xét Δ ABT và Δ BDT có:

$$\begin{cases} ATB(chung) \\ DBT = BAT(cmt) \end{cases} \Rightarrow \Delta ABT \sim \Delta BDT(g.g)$$

$$\Delta ABT \sim \Delta BDT \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AT}{BT} = \frac{BT}{DT} \Rightarrow \left(\frac{AB}{BD} \right)^2 = \frac{AT}{BT} \cdot \frac{BT}{DT} = \frac{AT}{DT}$$

Chúng mình tương tự ta có:

$$\left(\frac{AC}{CD}\right)^2 = \frac{AT}{DT}$$

$$\text{Do đó } \left(\frac{AB}{BD}\right)^2 = \left(\frac{AC}{CD}\right)^2 \Rightarrow \frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD} \Rightarrow AB.CD = BD.AC$$

3. Gọi I_1, I_2 lần lượt là giao điểm của BC với tia phân giác góc BAC và góc BDC.

Xét ΔABC có tia phân giác AI_1 , theo tính chất đường phân giác ta có:

$$\frac{I_1B}{I_1C} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{I_2B}{I_2C} = \frac{DB}{DC}$$

Chúng minh tương tự ta có:

$$AB.CD = BD.AC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{I_1B}{I_1C} = \frac{I_2B}{I_2C}$$

Theo câu 2) ta có

Mà I_1, I_2 cùng thuộc đoạn BC nên chúng chia trong đoạn BC theo các tỉ số bằng nhau.

$$\Rightarrow I_1 \equiv I_2$$

$\Rightarrow$ Đường phân giác góc BAC, đường phân giác góc BDC và đường thẳng BC đồng quy.

4. Gọi M' là điểm thuộc đoạn BC sao cho $CAM' = BAD$. Ta chứng minh $M' \equiv M$.

$$\text{Vì } CAM' = BAD \Rightarrow BAM' = CAD$$

Vì ABDC là tứ giác nội tiếp nên $ADB = ACM'$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AB)

$$\text{Mà } CAM' = BAD \Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle ACM' \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BD}{CM'} = \frac{AD}{AC} \Rightarrow BD.AC = AD.CM' \quad (1)$$

$$\text{Chúng minh tương tự ta có: } AB.CD = AD.BM' \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) với chú ý } BD.AC = AB.CD \Rightarrow AD.CM' = AD.BM' \Rightarrow CM' = BM'$$

$$\Rightarrow M' \equiv M$$

$$\Rightarrow BAD = MAC$$

Bài 5. Với mọi $a, b, c > 0$, ta có:

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

$$\Leftrightarrow 3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a+b+c)^2 \quad (*)$$

Với mọi $a, b, c > 0$, áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương, ta có:

$$\begin{cases} a+b+c \geq 3\sqrt[3]{abc} > 0 \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{1}{abc}} > 0 \end{cases} \Rightarrow (a+b+c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (**)$$

Áp dụng BDT (*) với $a = x$, $b = y$, $c = z$ và từ điều kiện của x, y, z ta có:

$$18 \geq x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z \geq \frac{(x+y+z)^2}{3} + x + y + z$$

$$\Rightarrow (x+y+z)^2 + 3(x+y+z) - 54 \leq 0$$

$$\Rightarrow (x+y+z+9)(x+y+z-6) \leq 0$$

$$\Rightarrow x+y+z \leq 6 \quad (\text{do } x+y+z+9 > 0) \quad (***)$$

Áp dụng BDT (**) với $a = x + y + 1$, $b = y + z + 1$, $c = z + x + 1$, ta có:

$$B = \frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \geq \frac{9}{x+y+1+y+z+1+z+x+1} = \frac{9}{2(x+y+z)+3}$$

Áp dụng (***) ta có: $B \geq \frac{9}{2 \cdot 6 + 3} = \frac{3}{5}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z \\ x + y + 1 = y + z + 1 = z + x + 1 \\ x + y + z = 6 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = z = 2$$

Dấu bằng xảy ra

Vậy giá trị nhỏ nhất của B là $\frac{3}{5}$, xảy ra khi và chỉ khi $x = y = z = 2$.

Đề số 15. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2014-2015

Bài 1. (3,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - x - 2$

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 96y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

Bài 2. (2,0 điểm)

1) Cho phương trình $x^2 - 2x - 4 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 . Tính $S = x_1^7 + x_2^7$

2) Cho a, b, c, d là các số nguyên dương thỏa mãn: $a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2$. Chứng minh $a + b + c + d$ là hợp số.

Bài 3. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là ba số thực dương và có tổng bằng 1.

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2}$$

Chứng minh:

Bài 4. (3,0 điểm)

Cho hình bình hành ABCD với A, C cố định và B, D di động. Đường phân giác của góc BCD cắt AB và AD theo thứ tự tại I và J (J nằm giữa A và D). Gọi M là giao điểm khác A của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD và AIJ, O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác AIJ.

- 1) Chứng minh AO là phân giác góc IAJ.
- 2) Chứng minh bốn điểm A, B, D, O cùng thuộc một đường tròn.
- 3) Tìm đường tròn cố định luôn đi qua M khi B, D di động.

Bài 5. (1,0 điểm)

Chứng minh rằng trong 39 số tự nhiên liên tiếp bất kỳ luôn tồn tại ít nhất một số có tổng các chữ số chia hết cho 11

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$a) \sqrt{5x-6} + \sqrt{10-3x} = 2x^2 - x - 2 \quad \left(\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{10}{5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5x-6} - 2 + \sqrt{10-3x} - 2 = 2x^2 - x - 6$$

$$\Leftrightarrow \frac{5(x-2)}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3(x-2)}{\sqrt{10-3x}+2} - (x-2)(2x+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)\left(\frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x-3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(TM) \\ \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x-3 = 0(*) \end{cases}$$

Vì

$$\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{10}{5} \Rightarrow \sqrt{5x-6} + 2 \geq 2 \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} \leq \frac{5}{2} \Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - 3 < 0$$

$$\frac{6}{5} \leq x \leq \frac{10}{5} \Rightarrow -\frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x < 0$$

$$\Rightarrow \frac{5}{\sqrt{5x-6}+2} - \frac{3}{\sqrt{10-3x}+2} - 2x-3 < 0 \Rightarrow (*) \text{ VN}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{2\}$

$$2) \begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 96y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 48 \cdot 2y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 8xy^2 = 2y(x^2 + 32y^2) (*) \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + 8xy^2 - 64y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 - (4y)^3 - 2xy(x - 4y) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 4y)(x^2 + 2xy + 16y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x^2 + 2xy + 16y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ (x + y)^2 + 15y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x = y = 0 \end{cases}$$

Vì $x = y = 0$ không thỏa mãn hệ phương trình nên $x = 4y$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ x^2 + 32y^2 = 48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ 16y^2 + 32y^2 = 48 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(4;1), (-4;-1)$

Bài 2.

1) Phương trình $x^2 - 2x - 4 = 0$ có hai nghiệm $x_1; x_2$. Theo định lý Vi-ét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases}$

Ta có:

$$(x_1 + x_2)^3 = x_1^3 + x_2^3 + 3x_1 x_2 (x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)^3 - 3x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 2^3 - 3 \cdot (-4) \cdot 2 = 32$$

Và

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 2^2 - 2 \cdot (-4) = 12$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2 = 12^2 - 2 \cdot (-4)^2 = 112$$

Khi đó:

$$(x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_2^4) = x_1^7 + x_2^7 + x_1^3 x_2^4 + x_1^4 x_2^3$$

$$\Rightarrow S = x_1^7 + x_2^7 = (x_1^3 + x_2^3)(x_1^4 + x_2^4) - (x_1 x_2)^3 (x_1 + x_2)$$

$$= 32 \cdot 112 - (-4)^3 \cdot 2 = 3712$$

Vậy $S = 3712$.

2) Ta có

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2cd + d^2 + ab - cd$$

$$\Leftrightarrow ab - cd = (a + b)^2 - (c + d)^2 = (a + b + c + d)(a + b - c - d) (*)$$

Nếu $ab-cd=0$: Do $a+b+c+d>0 \Rightarrow a+b-c-d=0 \Rightarrow a+b+c+d=2(c+d)$ là hợp số do $c+d \in \mathbb{N}^*$ và $c+d > 1$

Nếu $ab-cd \neq 0$: Từ (*) $\Rightarrow ab-cd : (a+b+c+d)$.

$$a^2 + ab + b^2 = c^2 + cd + d^2 \Rightarrow 3(ab-cd) + (a^2 - 2ab + b^2) = c^2 - 2cd + d^2$$

$$\Rightarrow 3(ab-cd) = (c-d)^2 - (a-b)^2 = (c-d+a-b)(c-d-a+b) \neq 0$$

$$\Rightarrow (c-d+a-b)(c-d-a+b) : (a+b+c+d)$$

Giả sử $a+b+c+d$ là số nguyên tố thì ta có

$$c-d+a-b : a+b+c+d \text{ hoặc } c-d-a+b : a+b+c+d$$

Điều này mâu thuẫn do $-(a+b+c+d) < c-d+a-b < a+b+c+d$;

$$-(a+b+c+d) < c-d-a+b < a+b+c+d \text{ và } (c-d+a-b)(c-d-a+b) \neq 0$$

Vậy $a+b+c+d$ là hợp số.

Bài 3.

Thay $1 = a+b+c$ ta có:

$$A+bc=a(a+b+c)+bc=(a+b)(a+c)$$

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc} = \frac{a+bc-2bc}{a+bc} = 1 - \frac{2bc}{a+bc} = 1 - \frac{2bc}{(a+b)(a+c)}$$

Ta có 2 đẳng thức tương tự

$$\frac{b-ca}{b+ca} = 1 - \frac{2ca}{(b+c)(b+a)}$$

$$\frac{c-ab}{c+ab} = 1 - \frac{2ab}{(c+a)(c+b)}$$

Cộng từng vế của 3 đẳng thức trên ta có:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} = 3 - 2 \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right]$$

Do đó:

$$\frac{a-bc}{a+bc} + \frac{b-ca}{b+ca} + \frac{c-ab}{c+ab} \leq \frac{3}{2} \Leftrightarrow \left[\frac{bc}{(a+b)(a+c)} + \frac{ca}{(b+c)(b+a)} + \frac{ab}{(c+a)(c+b)} \right] \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \geq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow 4(b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2) \geq 3(a^2b + ab^2 + b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + 2abc)$$

$$\Leftrightarrow b^2c + bc^2 + c^2a + ca^2 + a^2b + ab^2 \geq 6abc(*)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số dương ta có:

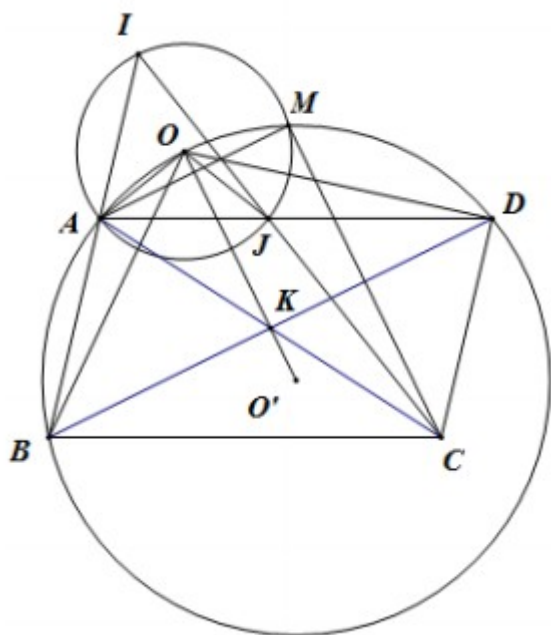
$$\begin{cases} b^2c + c^2a + a^2b \geq 3abc \\ bc^2 + ca^2 + ab^2 \geq 3abc \end{cases} \Rightarrow (*) \quad \text{đúng}$$

Vậy BĐT đã cho được chứng minh.

$$a = b = c = \frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi

Bài 4.



1) Vì $AI \parallel DC$ (do $ABCD$ là hình bình hành) nên $\angle AIJ = \angle DCJ$ (so le trong)
 Vì $AJ \parallel BC$ nên $\angle AJI = \angle BCJ$ (đồng vị)
 Mà $\angle CJ$ là phân giác góc BCD nên $\angle DCJ = \angle BCJ \Rightarrow \angle AIJ = \angle AJI \Rightarrow \triangle AIJ$ cân ở A
 Do O là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle AIJ$ cân nên AO là trung trực IJ đồng thời là phân giác góc IAJ .

2) Vì $JD \parallel BC$ nên $\angle DJC = \angle JCB = \angle JCD \Rightarrow \triangle JDC$ cân tại D
 Suy ra $JD = DC = AB$ (do $ABCD$ là hình bình hành)
 Ta có $OA = OJ$ (bằng bán kính (O))
 Xét $\triangle OAJ$ với góc ngoài $\angle OJD$ có:
 $\angle OJD = \angle AOJ + \angle OAJ = 2\angle AIJ + \angle OAJ = 2\angle DCJ + \angle OAJ = \angle DCB + \angle OAJ = \angle DAB + \angle OAJ = \angle OAB$
 Xét $\triangle OAB$ và $\triangle OJD$ có:

$$\begin{cases} OA = OJ (cmt) \\ \angle OAB = \angle OJD (cmt) \Rightarrow \triangle OAB = \triangle OJD (c.g.c) \\ AB = JD (cmt) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle OBA = \angle ODJ$$

$\Rightarrow AODB$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow A, O, D, B$ cùng thuộc một đường tròn.

3) Vì $\triangle OAB = \triangle OJD$ nên $OB = OD$. Mà $O'B = O'D$ (bằng bán kính (O')) nên OO' là trung trực của BD .

Gọi K là giao BD và $AC \Rightarrow K$ là trung điểm BD và AC .

$$\Rightarrow K \in OO'$$

Vì $OA = OM, O'A = O'M$ nên OO' là trung trực của AM

$$\text{Mà } K \in OO' \Rightarrow KA = KM = KC$$

$\Rightarrow M$ thuộc đường tròn tâm K bán kính KA , hay đường tròn đường kính AC .

Vậy khi B, D thay đổi, M luôn nằm trên đường tròn đường kính AC .

Bài 5.

Xét 20 số đầu tiên. Trong 20 số này có 2 số chia hết cho 10, chúng có chữ số hàng đơn vị là 0.

Mặt khác, trong 2 số đó có một số có chữ số hàng chục khác 9.

Gọi số đó là N . Xét dãy 11 số thuộc 39 số đã cho:

$$N, N + 1, \dots, N + 9, N + 19$$

Tổng các chữ số của các số này tương ứng là.

$$s, s + 1, s + 2, \dots, s + 9, s + 10$$

Thật vậy, nếu N có tổng chữ số là s thì mỗi số $N + i$ với $1 \leq i \leq 9$ có tất cả các chữ số (trừ hàng đơn vị) giống số N và chữ số hàng đơn vị của $N + i$ là i , do đó tổng chữ số của $N + i$ là $s + i$.

Số $N + 19$ có chữ số hàng đơn vị là 9, chữ số hàng chục hơn chữ số hàng chục của số N là 1, còn lại tất cả các chữ số ở hàng khác của hai số bằng nhau, do đó tổng chữ số của $N + 19$ là $s + 10$.

Trong 11 số liên tiếp $s, s + 1, s + 2, \dots, s + 9, s + 10$ có một số chia hết cho 11.

Bài toán được chứng minh.

Đề số 16. Chuyên HCM. Năm học: 2014-2015

Câu 1: (2 điểm)

- a) Giải phương trình: $x\sqrt{2x-3} = 3x-4$
 b) Cho 3 số thực x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x + y + z = 0$ và $xyz \neq 0$.

$$P = \frac{x^2}{y^2 + z^2 - x^2} + \frac{y^2}{z^2 + x^2 - y^2} + \frac{z^2}{x^2 + y^2 - z^2}$$

Tính giá trị biểu thức

Câu 2: (1,5 điểm)

$$\begin{cases} x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} \\ x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} \end{cases}$$

Giải hệ phương trình:

Câu 3: (1,5 điểm)

Cho tam giác đều ABC và M là một điểm bất kì trên cạnh BC . Gọi D, E lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên AB và AC . Xác định vị trí của M để tam giác MDE có chu vi nhỏ nhất

Câu 4: (2 điểm).

- a) Cho x, y là 2 số thực khác 0. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$$P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

- b) Cho a, b là hai số dương. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Câu 5: (2 điểm)

Từ một điểm M nằm ngoài đường tròn (O), kẻ các tiếp tuyến MA, MB với (O) (A, B là các tiếp điểm). Gọi H là giao điểm của AB với OM, I là trung điểm của MH. Đường thẳng AI cắt (O) tại điểm K (K khác A).

a) Chứng minh HK vuông góc AI.

b) Tính số đo góc MKB

Câu 6: (1 điểm)

Tìm cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn phương trình: $2015(x^2 + y^2) - 2014(2xy + 1) = 25$

ĐÁP ÁN

Câu 1

$$a) x\sqrt{2x-3} = 3x-4 \quad (\text{ĐKXĐ: } x \geq 3/2)$$

$$\Leftrightarrow x^2(2x-3) = (3x-4)^2$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 3x^2 = 9x^2 - 24x + 16$$

$$\Leftrightarrow 2x^3 - 12x^2 + 24x - 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-2)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2(TM)$$

Vậy $S = \{2\}$

b) Ta có

$$x + y + z = 0$$

$$\Leftrightarrow (y+z)^2 = (-x)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2 + z^2 - x^2 = -2yz$$

Tương tự:

$$z^2 + x^2 - y^2 = -2zx$$

$$x^2 + y^2 - z^2 = -2yx$$

$$P = \frac{x^2}{-2yz} + \frac{y^2}{-2zx} + \frac{z^2}{-2yx} = \frac{x^3 + y^3 + z^3}{-2xyz}$$

Mà

$$\begin{aligned}x^3 + y^3 + z^3 &= (x + y)^3 - 3x^2y - 3xy^2 + z^3 \\&= (-z)^3 - 3xy(x + y) + z^3 = 3xy \\ \Rightarrow P &= \frac{3xyz}{-2xyz} = \frac{-3}{2}\end{aligned}$$

Câu 2

ĐKXĐ: $x, y \neq 0$

$$\begin{cases}x + y + \frac{1}{y} = \frac{9}{x} \quad (1) \\ x + y - \frac{4}{x} = \frac{4y}{x^2} \quad (2)\end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$\begin{aligned}\frac{1}{y} + \frac{4}{x} &= \frac{9}{x} - \frac{4y}{x^2} \\ \Leftrightarrow \frac{4y}{x^2} - \frac{5}{x} + \frac{1}{y} &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 5xy + 4y^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x - 4y)(x - y) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x = 4y \end{cases}\end{aligned}$$

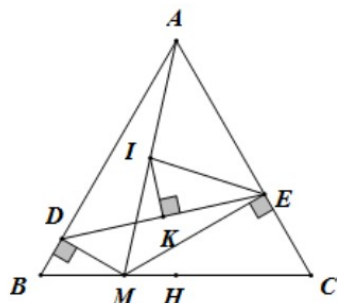
Với $x = y$, thế vào (1) có $2x - \frac{8}{x} = 0 \Leftrightarrow x = y = \pm 2$

Với $x = 4y$, thế vào (1) có $5y - \frac{5}{4y} = 0 \Leftrightarrow y = \pm \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm 2$

$$S = \left\{ (2; 2); (-2; -2); (2; \frac{1}{2}); (-2; \frac{-1}{2}) \right\}$$

Vậy

Câu 3:



$$\begin{aligned}C_{MDE} &= MD + ME + DE = (BM + CM) \sin 60^\circ + DE \\ &= BC \cdot \sin 60^\circ + DE\end{aligned}$$

Mà $BC \cdot \sin 60^\circ$ không đổi nên chỉ vì tam giác MDE nhỏ nhất $\Leftrightarrow DE$ nhỏ nhất

Tứ giác ADME nội tiếp đường tròn đường kính AM ($\angle ADM = \angle AEM = 90^\circ$) nên tam giác ADE cũng nội tiếp đường tròn đường kính AM, tâm I là trung điểm AM.

$$EIK = BAC (= \frac{DIE}{2})$$

Gọi K là trung điểm DE, suy ra $IK \perp DE$ và

Gọi R là bán kính đường tròn tâm I đường kính AM thì

$$\sin KIE = \frac{KE}{IE} = \frac{0,5 DE}{R} = \frac{DE}{2R} = \frac{DE}{AM}$$

$$\Rightarrow DE = AM \cdot \sin BAC = AM \cdot \sin 60^\circ$$

Vì $\sin 60^\circ$ không đổi nên DE nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ AM nhỏ nhất $\Leftrightarrow M \equiv H$ (H là chân đường vuông góc hạ từ A xuống BC, mà tam giác ABC đều nên H là trung điểm BC).

Vậy khi M là trung điểm BC thì chu vi tam giác MDE nhỏ nhất.

Câu 4

$$a) \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \geq \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (x \neq 0; y \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} - \frac{x}{y} - \frac{y}{x} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^4 + y^4 - x^3y - xy^3}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)(x^3 - y^3)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2(x^2 + xy + y^2)}{x^2y^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-y)^2 \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \right]}{x^2y^2} \geq 0$$

(luôn đúng $\forall x, y \neq 0$)

c) Tìm minP (a, b > 0)

$$P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$= \frac{(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(a+b)^2 + ab + \frac{3}{4}(a+b)^2}{\sqrt{ab}(a+b)}$$

$$= \frac{\frac{1}{4}(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)} + \frac{\frac{3}{4}(a+b)}{\sqrt{ab}} \geq \frac{2\sqrt{\frac{1}{4}(a+b)^2 \cdot ab}}{\sqrt{ab}(a+b)} + \frac{\frac{3}{4}\sqrt{ab}}{\sqrt{ab}} = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{4}(a+b)^2 = ab \\ a = b \end{cases} \Leftrightarrow a = b$$

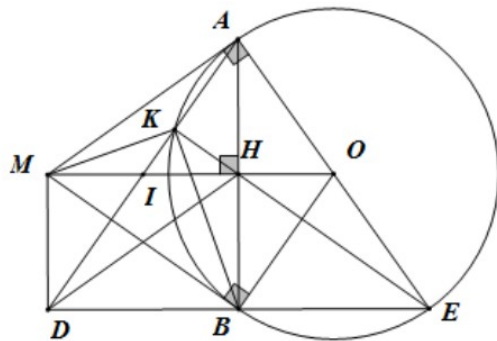
Dấu bằng xảy ra

$$\text{Vậy } \text{Min}P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow a = b$$

*Cách khác

$$P = \frac{a^2 + 3ab + b^2}{\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{(a+b)^2 + ab}{\sqrt{ab}(a+b)} = \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b} = \frac{3}{4} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{\sqrt{ab}}{a+b}\right) \geq \frac{3}{4} \cdot 2 + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{5}{2}$$

Câu 5



- a) Kẻ đường kính AE của (O), EH cắt (O) tại K', AK' cắt EB tại D. Dễ thấy H là trực tâm tam giác AED nên DH ⊥ AO

⇒ DH // AM (1)

Ta có BDH = EAH = HMB nên tứ giác HMDB nội tiếp

⇒ HM ⊥ MD ⇒ DM // AH (2)

Từ (1) và (2) ⇒ AHDM là hình bình hành.

⇒ AD đi qua trung điểm I của HM

⇒ K' là giao của AI với (O)

⇒ K' ≡ K

⇒ HK ⊥ AI

- b) Ta có IAM = ABK (cùng chắn cung AK)

AMI = OBA (OAMB nội tiếp)

Nên

IAM + AMI = ABK + OBA

⇔ AIH = OBK

Mặt khác

AIH + KHI = 90°

OBK + KBM = 90°

⇒ KHI = KBM

⇒ Tứ giác HKMB nội tiếp

⇒ BKM = BHM = 90°

Câu 6

$$2015(x^2 + y^2) - 2014(2xy + 1) = 25$$

$$\Leftrightarrow 2014(x - y)^2 + x^2 + y^2 = 2039$$

Đặt $t = |x - y|$, $t \in \mathbb{N}$ do x, y nguyên

Xét các trường hợp:

TH1: $t = 0$, tức $x = y \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

TH2: $t = 1$, tức là $x - y = \pm 1$

+ Với $x - y = 1$ hay $x = y + 1$, phương trình trở thành:

$$(y+1)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 + y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -4 \end{cases}$$

Với $y = 3$ thì $x = 4$; với $y = -4$ thì $x = -3$

+ Với $x - y = -1$ hay $x = y - 1$, phương trình trở thành:

$$(y-1)^2 + y^2 = 25 \Leftrightarrow y^2 - y - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -3 \\ y = 4 \end{cases}$$

Với $y = -3$ thì $x = -4$; với $y = 4$ thì $x = 3$

TH3: $t \geq 2$, VT > VP $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm

Vậy các cặp $(x;y)$ thỏa là $(4;3)$, $(-3;-4)$, $(-4;-3)$, $(3;4)$

Cách khác: Sử dụng phương pháp biến đổi phương trình về dạng vế trái là tổng của các bình phương. Vế phải là tổng của các số chính phương, hoặc cách điều kiện có nghiệm của phương trình bậc hai cũng có thể giải ra đáp số.

Đề số 17. Chuyên Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2014-2015

Câu 1: (2.0 điểm) Cho biểu thức:
$$P = \frac{3x + \sqrt{16x - 7}}{x + 2\sqrt{x - 3}} - \frac{\sqrt{x + 1}}{\sqrt{x + 3}} - \frac{\sqrt{x - 3}}{\sqrt{x - 1}} \quad (\text{Với } x > 0)$$

1. Rút gọn biểu thức P

2. Tính giá trị của biểu thức khi $x = 2\sqrt{2} + 3$

Câu 2: (2.0 điểm)

1. Cho phương trình: $2013x^2 - (m - 2014)x - 2015$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có hai nghiệm

x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2$

2. Giải phương trình:
$$\frac{1}{(2x + 1)^2} + \frac{1}{(2x + 2)^2} = 3$$

Câu 3: (2.0 điểm) Tìm nghiệm của phương trình: $x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$

Câu 4: (3.0 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Gọi M là điểm thuộc cung AB ($AB \neq A, M \neq B$) và I là điểm thuộc đoạn OA ($I \neq O, I \neq A$). Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa điểm M, kẻ các tia tiếp tuyến Ax, By với đường tròn (O). Qua M kẻ đường thẳng vuông góc với IM, đường thẳng này cắt Ax, By lần lượt tại C và D. Gọi E là giao điểm của AM với IC, F là giao điểm của BM với ID. Chứng minh rằng:

1. Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp

2. $EF \parallel AB$

3. OM là tiếp tuyến chung của hai đường tròn ngoại tiếp tam giác CEM và DFM.

Câu 5: (1.0 điểm) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn:

$$\sqrt{x^2 + y^2} + \sqrt{y^2 + z^2} + \sqrt{z^2 + x^2} = 2014$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức
$$T = \frac{x^2}{y + z} + \frac{y^2}{z + x} + \frac{z^2}{x + y}$$

Hết

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

Chữ ký của giám thị 1:Chữ ký của giám thị 2:

HƯỚNG DẪN CHẤM ĐỀ CHUYÊN TIN

Câu 1:

1.1

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{3x + \sqrt{16x - 7}}{x + 2\sqrt{x} - 3} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 3} - \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 1} \quad (0,25d) \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - (\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1) - (\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \quad (0,25d) \\
 &= \frac{3x + 4\sqrt{x} - 7 - x + 1 - x + 9}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} \quad (0,25d) \\
 &= \frac{x + 4\sqrt{x} + 3}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} + 3)(\sqrt{x} - 1)} = \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} \quad (0,25d)
 \end{aligned}$$

1.2

$$\begin{aligned}
 x &= 2\sqrt{2} + 3 = (\sqrt{2} + 1)^2 \quad (\text{thỏa mãn ĐKXD}) \\
 \Rightarrow \sqrt{x} &= \sqrt{2} + 1 \quad (0,5d) \\
 \Rightarrow P &= \frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 2} = \frac{\sqrt{2} + 1 + 1}{\sqrt{2} + 1 - 1} = \frac{\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2} \quad (0,5d)
 \end{aligned}$$

Câu 2:

2.1

Ta có: $\Delta = (m - 2014)^2 + 4 \cdot 2013 \cdot 2015 > 0$ với mọi m . Vậy phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m . (0.25 đ)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m - 2014}{2013} \\ x_1 x_2 = \frac{-2015}{2013} \end{cases}$$

Theo hệ thức Vi – et ta có:

$$\text{Từ } \sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1 = \sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2 \quad (0,25đ)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \begin{cases} 2014 = (\sqrt{x_1^2 + 2014} + x_1)(\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_2) \\ 2014 = (\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1)(\sqrt{x_2^2 + 2014} - x_2) \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2014 = (\sqrt{(x_1^2 + 2014)(x_2^2 + 2014)} + x_2\sqrt{x_1^2 + 2014} + x_1\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_1x_2) \\ 2014 = (\sqrt{(x_1^2 + 2014)(x_2^2 + 2014)} - x_2\sqrt{x_1^2 + 2014} - x_1\sqrt{x_2^2 + 2014} + x_1x_2) \end{cases} \\
&\Rightarrow \sqrt{x_1^2 + 2014}(x_1 + x_2) + \sqrt{x_2^2 + 2014}(x_1 + x_2) = 0 \\
&\Rightarrow (x_1 + x_2)(\sqrt{x_1^2 + 2014} + \sqrt{x_2^2 + 2014}) = 0 \\
&\Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \\
&\Rightarrow \frac{m - 2014}{2013} = 0 \\
&\Rightarrow m = 2014 \quad (0,25 \text{ đ})
\end{aligned}$$

Vậy $m=2014$ là giá trị thỏa mãn đề bài. (0.25 đ)

2.2 Giải phương trình: $\frac{1}{(2x+1)^2} + \frac{1}{(2x+2)^2} = 3$ (*)

Đk : $x \neq -1; x \neq -\frac{1}{2}$. Đặt $2x+1=t$

$$PT(*) \Leftrightarrow \frac{1}{t^2} + \frac{1}{(t+1)^2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)^2 + \frac{2}{t(t+1)} - 3 = 0 \quad (0,25d)$$

Đặt $y = \frac{1}{t(t+1)}$ ta có pt:

$$y^2 + 2y - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = -3 \end{cases} \quad (0,25d)$$

Với $y=1 \Rightarrow$

$$\frac{1}{t(t+1)} = 1 \Rightarrow t^2 + t - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3+\sqrt{5}}{4} \\ t = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow x = \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \end{cases} (TM) \quad (0,25d)$$

Với $y=-3 \Rightarrow \frac{1}{t(t+1)} = -3 \Rightarrow t^2 + t + \frac{1}{3} = 0 (VN)$

Vậy pt có hai nghiệm $x_1 = \frac{-3+\sqrt{5}}{4}; x_2 = \frac{-3-\sqrt{5}}{4} \quad (0,25đ)$

Câu 3 :

$$x^3 + y^3 - x^2y - xy^2 = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2) - xy(x+y) = 5$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x^2 - 2xy + y^2) = 5 \quad (0,25đ)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)(x-y)^2 = 5$$

Do $(x-y)^2 \geq 0$ và x, y thuộc $\mathbb{Z}$ nên xảy ra hai trường hợp:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ (x-y)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=1 \\ x+y=5 \\ x-y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \\ x=2 \\ y=3 \end{cases} \quad (0,25đ)$$

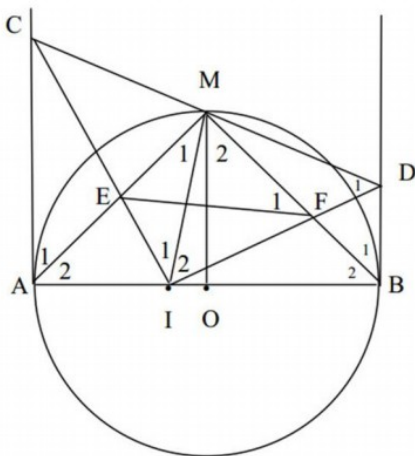
Th1:

$$\begin{cases} x+y=1 \\ (x-y)^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ x-y=\pm\sqrt{5} \end{cases} \quad (L) \quad (0,25đ)$$

Th2:

Vậy phương trình có hai nghiệm nguyên $(x, y) \in \{(3; 2); (2; 3)\}$

Câu 4 :



4.1 CM: Tứ giác MEIF là tứ giác nội tiếp:

C/m được các tứ giác ACMI BDMI nội tiếp (đ)

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} I_1 &= A_1 \\ I_2 &= B_1 \end{aligned} \right\} \Rightarrow I_1 + I_2 = A_1 + B_1 \\ \text{Do đó: } & \text{Mà } A_2 + B_2 = 90^\circ \text{ Và } A_1 + A_2 + B_1 + B_2 = 180^\circ \Rightarrow I_1 + I_2 = 90^\circ \quad (0,25đ) \\ & \Rightarrow EIF = EMF = 90^\circ \text{ Tứ giác MEIF nội tiếp được. (0.25 đ)} \end{aligned}$$

4.2

CM: $EF \parallel AB$:

Tứ giác MEIF nội tiếp (câu 1) $\Rightarrow I_1 = F_1$

Tứ giác ACMI nội tiếp (câu 1) $\Rightarrow I_1 = A_1 \quad (0,5đ)$

Trong (O) $B_2 = A_1$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung AM) (0,25đ)

Do đó $\Rightarrow B_2 = F_1$, mà chúng ở vị trí đồng vị $\Rightarrow EF \parallel AB$. (0.25 đ)

4.3

CM: OM là tiếp tuyến chung của 2 đường tròn ngoại tiếp các tam giác: CEM, DFM

Ta có $OA = OM \Rightarrow M_1 = A_2$ Mà $C_1 = A_2$ (cùng chắn cung IM) $\Rightarrow C_1 = M_1 \Rightarrow OM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác CME (1). (0.5 đ)

Lại có: $OM = OB \Rightarrow M_2 = B_2$ mà $D_1 = B_2$ (cùng chắn cung IM) $\Rightarrow D_1 = M_2 \Rightarrow OM$ là tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác DMF (2). (0.5 đ)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow$ ĐPCM

Câu 5:

Đặt $a = \sqrt{x^2 + y^2}; b = \sqrt{y^2 + z^2}; c = \sqrt{z^2 + x^2}$ (*) $\Rightarrow a + b + c = 2014$ (1)

$$\text{Từ (*)} \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2}; y^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}; z^2 = \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{2}$$

Áp dụng BĐT Cau chy ta có:

$$y + z \leq \sqrt{2(y^2 + z^2)} = b\sqrt{2}$$

$$z + x \leq \sqrt{2(z^2 + x^2)} = c\sqrt{2}$$

$$x + y \leq \sqrt{2(x^2 + y^2)} = a\sqrt{2} \quad (0,25đ)$$

Từ đó ta có:

$$T = \frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{z+x} + \frac{z^2}{x+y} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2 - b^2 + c^2}{b} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{c} + \frac{-a^2 + b^2 + c^2}{a} \right)$$

$$T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} - a - b - c \right) \quad (0,25đ)$$

Áp dụng BĐT Cauchy ta lại có:

$$\frac{a^2}{b} + b \geq 2a; \frac{c^2}{b} + b \geq 2c; \frac{a^2}{c} + c \geq 2a; \frac{b^2}{c} + c \geq 2b; \frac{b^2}{a} + a \geq 2b; \frac{c^2}{a} + a \geq 2c \quad (0,25đ)$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{b} + \frac{c^2}{b} + \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{a} \geq 4(a+b+c) - 2(a+b+c) = 2(a+b+c) \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} (a+b+c) \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4)} \Rightarrow T \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot 2014.$$

$$\text{Vậy } T_{\min} = \frac{2014}{2\sqrt{2}} \text{ khi } x=y=z = \frac{2014}{3\sqrt{2}}$$

Đề số 18. Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2014-2015

Bài 1: (2,0 điểm): Cho biểu thức:
$$C = \frac{2}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4}$$

1. Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa và rút gọn C.

2. Tìm giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$

Bài 2: (2,0 điểm)

Cho hệ phương trình:
$$\begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases} \quad (m \text{ là tham số})$$

1. Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

2. Chứng minh rằng với mọi m, hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất (x;y) thỏa mãn: $x + 2y \leq 3$

Bài 3: (2,0 điểm):

1. Trong hệ tọa độ Oxy, tìm m để đường thẳng (d): $y = mx - m + 2$ cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung.

2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4 - x - 2y & (1) \\ \sqrt{2x+6} + \sqrt{2y} = 2 & (2) \end{cases}$$

Bài 4: (3,0 điểm): Cho đường tròn O đường kính BC và một điểm A nằm bất kì trên đường tròn (A khác B và C). Gọi AH là đường cao của DABC, đường tròn tâm I đường kính AH cắt các dây cung AB, AC tương ứng tại D, E.

1. Chứng minh rằng: góc DHE bằng 90° và $AB \cdot AD = AC \cdot AE$

2. Các tiếp tuyến của đường tròn (I) tại D và E cắt BC tương ứng tại G và F. Tính số đo góc GIF.

3. Xác định vị trí điểm A trên đường tròn (O) để tứ giác DEFG có diện tích lớn nhất.

Bài 5: (1,0 điểm): Cho ba số thực x, y, z. Tìm giá trị lớn nhất biểu thức
$$S = \frac{xyz(x+y+z+\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)}$$

LỜI GIẢI VÀ THANG ĐIỂM TOÁN CHUNG LAM SƠN

Ngày thi: 17/06/2014

Câu 1:

1/Tìm điều kiện của a để biểu thức C có nghĩa, rút gọn C .

$$\begin{cases} a \geq 0 \\ a - 16 \neq 0 \\ \sqrt{a} - 4 \neq 0 \\ \sqrt{a} + 4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 0 \\ a \neq 16 \\ a \neq 16 \\ \forall a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow a \geq 0, a \neq 16 \quad (0,25 \text{ d})$$

+Biểu thức C có nghĩa khi

+Rút gọn biểu thức C

$$\begin{aligned} C &= \frac{a}{a-16} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} - \frac{2}{\sqrt{a}-4} - \frac{2}{\sqrt{a}+4} \\ &= \frac{a - 2(\sqrt{a}+4) - 2(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} \\ &= \frac{a - 2\sqrt{a} - 8 - 2\sqrt{a} + 8}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} \\ &= \frac{a - 4\sqrt{a}}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} \\ &= \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-4)}{(\sqrt{a}-4)(\sqrt{a}+4)} \\ &= \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} \quad (1,25 \text{ d}) \end{aligned}$$

2/ Tìm giá trị của biểu thức C khi $a = 9 - 4\sqrt{5}$

Ta có: $a = 9 - 4\sqrt{5} = 4 + 4\sqrt{5} + 5 = (2 + \sqrt{5})^2 \Rightarrow \sqrt{a} = 2 + \sqrt{5}$

$$C = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+4} = \frac{2+\sqrt{5}}{2+\sqrt{5}+4} = \frac{2+\sqrt{5}}{6+\sqrt{5}} \quad (0,5 \text{ đ})$$

Câu 2:

1/Giải hệ phương trình khi $m = 2$.

Khi $m = 2$ thay vào ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (2-1)x + y = 2 \\ 2x + y = 2+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (0,75đ)$$

Kết luận: Với $m = 2$ hệ phương trình có một nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \quad (0,25đ)$

2/Chứng minh rằng với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất $(x;y)$ thỏa mãn $2x + y \leq 3$

$$\begin{aligned} \begin{cases} (m-1)x + y = 2 \\ mx + y = m+1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ mx + 2 - (m-1)x = m+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ mx + 2 - mx + x = m+1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)x \\ x = m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - (m-1)(m-1) \\ x = m-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -m^2 + 2m + 1 \\ x = m-1 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy với mọi m hệ phương trình luôn có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} y = -m^2 + 2m + 1 \\ x = m-1 \end{cases} \quad (0,5đ)$$

Ta có:

$$\begin{aligned} 2x + y - 3 &= 2(m-1) - m^2 + 2m + 1 - 3 = -m^2 + 4m - 4 = -(m-2)^2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow 2x + y - 3 &\leq 0 \\ \Leftrightarrow 2x + y &\leq 3 \quad (0,5đ) \end{aligned}$$

Câu 3:

1/Hoành độ giao điểm của đường thẳng (d) và Parabol (P) là nghiệm của phương trình:

$$\begin{aligned} 2x^2 &= mx - m + 2 \\ \Leftrightarrow 2x^2 - mx + m - 2 &= 0(1) \end{aligned}$$

$$\Delta = m^2 - 4.2(m-2) = m^2 - 8m + 16 = (m-4)^2$$

Để đường thẳng (d): $y = mx - m + 2$ cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung thì

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (m-4)^2 > 0 \\ \frac{m}{2} > 0 \\ \frac{m-2}{2} > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m \neq 4 \\ m > 0 \\ m > 2 \end{cases} \Rightarrow m > 2, m \neq 4$$

Kết luận: Để đường thẳng (d): $y = mx - m + 2$ cắt Parabol (P): $y = 2x^2$ tại hai điểm phân biệt nằm bên phải trục tung thì: $m > 2, m \neq 4 \quad (1đ)$

$$2/\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 3\sqrt{x+2y} = 4 - x - 2y(1) \\ \sqrt[3]{2x+6} + \sqrt{2y} = 2(2) \end{cases}$$

$$\text{Điều kiện: } \begin{cases} x+2y \geq 0 \\ 2y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases} (*)$$

Đặt $\sqrt{x+2y} = t \geq 0$, thay vào phương trình (1) ta có:

$$3t = 4 - t^2 \Rightarrow t^2 + 3t - 4 = 0$$

$1 + 3 - 4 = 0$, nên phương trình có hai nghiệm $t = 1$ và $t = -4$ (loại)

Với $t = 1 \Rightarrow \sqrt{x+2y} = 1 \Rightarrow x+2y = 1 \Rightarrow x = 1-2y$ thay vào phương trình (2) ta có

$$\sqrt[3]{2(1-2y)+6} + \sqrt{2y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-4y+8} + \sqrt{2y} = 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[3]{-4y+8} = 2 - \sqrt{2y}$$

$$\Leftrightarrow -4+8 = 8 - 12\sqrt{2y} + 12y - 2y\sqrt{2y}$$

$$\Leftrightarrow 16y - 12\sqrt{2y} - 2y\sqrt{2y} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8y - 6\sqrt{2y} - y\sqrt{y} = 0$$

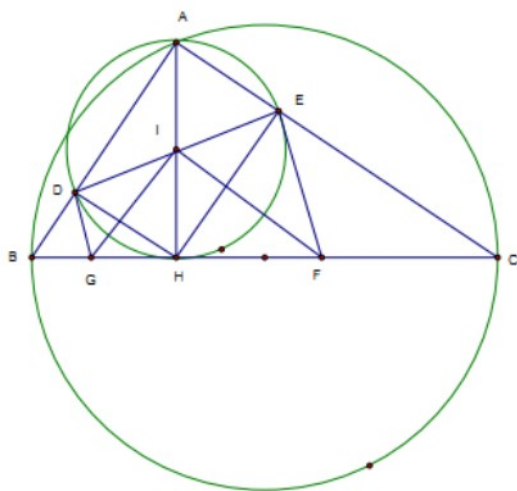
$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(-\sqrt{2y} + 8\sqrt{y} - 6\sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{y}(\sqrt{y} - \sqrt{2})(\sqrt{2}\sqrt{y} - 6) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = 1(TM(*)) \\ \sqrt{y} = \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = -3(TM(*)) \\ \sqrt{y} = \frac{6}{\sqrt{2}} \Rightarrow y = 18 \Rightarrow x = -35(TM(*)) \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có 3 nghiệm $(x;y)=(1;0);(-3;2);(-35;18)$ (1đ)

Câu 4:



1. Chứng minh $\angle DHE = 90^\circ$

Tứ giác ADHE có: $\angle A = \angle D = \angle E \Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật $\Rightarrow \angle DHE = 90^\circ$

Chứng minh: $AB \cdot AD = AC \cdot AE$

Xét hai tam giác vuông HAB và HAC ta có: $AB \cdot AD = AH^2 = AC \cdot AE$ (1đ)

2/ Tính góc GIF

$\angle DHE = 90^\circ \Rightarrow DE$ là đường kính $\Rightarrow I$ thuộc DE

$$\Rightarrow \angle GIF = \frac{1}{2} \angle DIH + \frac{1}{2} \angle HIE = \frac{1}{2} \angle DIE = 90^\circ \quad (1đ)$$

3/ Tứ giác DEFG là hình thang vuông có đường cao $DE = AH$

Hai đáy $DG=GH=GB=\frac{1}{2}BH$ và $EF=FC=CH=\frac{1}{2}HC$

=>Diện tích tứ giác DEFG là

$$\frac{\frac{1}{2}(HB+HC).AH}{2} = \frac{BC.AH}{4}$$

Lớn nhất khi AH lớn nhất vì BC = 2R không đổi

Ta có: AH lớn nhất =>AH là đường kính => A là trung điểm cung AB (1.0 đ)

Câu 5:

Theo Bunhia:

$$(x+y+z)^2 \leq 3(x^2+y^2+z^2) \Rightarrow x+y+z \leq \sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{xyz(\sqrt{3}\sqrt{x^2+y^2+z^2} + \sqrt{x^2+y^2+z^2})}{(x^2+y^2+z^2)(xy+yz+zx)} = \frac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}(xy+yz+zx)}$$

$$\Rightarrow S \leq \frac{xyz(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}\sqrt{x^2y^2z^2}\sqrt{x^2y^2z^2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow S_{\max} = \frac{\sqrt{3}+1}{3\sqrt{3}} \text{ khi } x=y=z \quad (1đ)$$

Chú ý:

1/Bài hình không vẽ hình hoặc vẽ hình sai không chấm điểm

2/Làm cách khác đúng vẫn cho điểm tối đa.

Đề Số 19. Chuyên Năng Khiếu - HCM. Năm học: 2014-2015

Câu I. Cho phương trình $(m^2 + 5)x^2 - 2mx - 6m = 0(1)$ với m là tham số.

- c) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt. Chứng minh rằng khi đó tổng của hai nghiệm không thể là số nguyên.
 d) Tìm m sao cho phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

Câu II. 1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2(1 + x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1 + y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases}$$

2) Cho tam giác ABC vuông tại A với các đường phân giác trong BM và CN. Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{(MC + MA)(NB + NA)}{MA \cdot NA} \geq 3 + 2\sqrt{2}$$

Câu III. Cho các số nguyên dương a, b, c sao cho $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$

- c) Chứng minh rằng $a + b$ không thể là số nguyên tố.
 d) Chứng minh rằng nếu $c > 1$ thì $a + c$ và $b + c$ không thể đồng thời là số nguyên tố

Câu IV. Cho điểm C thay đổi trên nửa đường tròn đường kính $AB = 2R$ ($C \neq A, C \neq B$). Gọi H là hình chiếu vuông góc của C lên AB; I và J lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ACH và BCH. Các đường thẳng CI, CJ cắt AB lần lượt tại M, N.

- d) Chứng minh rằng $AN = AC, BM = BC$.
 e) Chứng minh 4 điểm M, N, J, I cùng nằm trên một đường tròn và các đường thẳng MJ, NI, CH đồng quy.
 f) Tìm giá trị lớn nhất của MN và giá trị lớn nhất của diện tích tam giác CMN theo R.

Câu V. Cho 5 số tự nhiên phân biệt sao cho tổng của ba số bất kỳ trong chúng lớn hơn tổng của hai số còn lại.

- c) Chứng minh rằng tất cả 5 số đã cho đều không nhỏ hơn 5.
 d) Tìm tất cả các bộ gồm 5 số thỏa mãn đề bài mà tổng của chúng nhỏ hơn 40.

.....Hết.....

ĐÁP ÁN**Câu I.**

c) Phương trình (1) có hệ số $a = m^2 + 5 > 0$ nên là phương trình bậc hai ẩn x. Do đó

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 + (m^2 + 5).6m > 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 6m^3 + 30m > 0$$

$$\Leftrightarrow m(6m^2 + m + 30) > 0$$

$$\Leftrightarrow m \underbrace{\left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4} \right]}_{>0 \forall m} > 0$$

$$\Leftrightarrow m > 0$$

Khi đó theo định lý Vi-ét ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5}$

Xét $m^2 + 5 - 2m = (m - 1)^2 + 4 > 0$. Mà $m > 0 \Rightarrow m^2 + 5 > 2m > 0$

$$\Rightarrow 0 < \frac{2m}{m^2 + 5} < 1 \Rightarrow 0 < x_1 + x_2 < 1$$

Vậy tổng hai nghiệm của (1) không thể là số nguyên.

d) Phương trình (1) có hai nghiệm $x_1; x_2$

$$\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \left[5m^2 + \left(m + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{119}{4} \right] \geq 0$$

$$\Leftrightarrow m \geq 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 = \frac{2m}{m^2 + 5} \\ x_1 x_2 = \frac{-6m}{m^2 + 5} \end{array} \right.$$

Khi đó, theo định lý Vi-ét:

Ta có:

$$(x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2})^4 = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2 \\ x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \end{cases}$$

$$TH1: x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2 + 5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2 + 5}} = 2(2)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}; t \geq 0$ phương trình (2) trở thành $-3t^2 - t - 2 = 0$

Xét $\Delta = 1^2 - 4(-3)(-2) = -23 < 0 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

$$TH2: x_1 x_2 - \sqrt{x_1 + x_2} = -2 \Leftrightarrow \frac{-6m}{m^2+5} - \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}} = -2 \quad (3)$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{2m}{m^2+5}}; t \geq 0$ phương trình (3) trở thành $-3t^2 - t + 2 = 0$

$$\Leftrightarrow (t+1)(3t-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1(L) \\ t = \frac{2}{3}(TM) \Rightarrow \frac{2m}{m^2+5} = \frac{4}{9} \Leftrightarrow 4m^2 - 18m + 20 = 0 \Leftrightarrow (m-2)(4m-10) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2(TM) \\ m = \frac{5}{2}(TM) \end{cases} \end{cases}$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left\{2; \frac{5}{2}\right\}$

Câu II.

$$\begin{cases} 2(1+x\sqrt{y})^2 = 9y\sqrt{x} \\ 2(1+y\sqrt{x})^2 = 9x\sqrt{y} \end{cases} \quad (I)$$

ĐK: $x \geq 0, y \geq 0$

Đặt $a = x\sqrt{y}; b = y\sqrt{x}$, điều kiện $a \geq 0, b \geq 0$. Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} 2(1+a)^2 = 9b(1) \\ 2(1+b)^2 = 9a(2) \end{cases}$$

Lấy (1) trừ (2) ta được:

$$2(1+a)^2 - 2(1+b)^2 = 9(b-a)$$

$$\Leftrightarrow 2(a-b)(a+b+2) + 9(a-b) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-b)(\underbrace{2a+2b+13}_{>0 \forall a, b > 0}) = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b$$

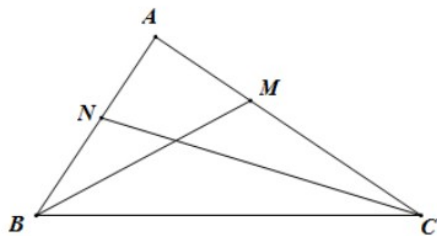
Thay $a = b$ vào (1) ta có

$$2(1+a)^2 = 9a \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \Rightarrow b = 2(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = 2 \\ y\sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{4} \\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}(TM) \Rightarrow \begin{cases} x\sqrt{y} = \frac{1}{2} \\ y\sqrt{x} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \end{cases}$$

$$\left(\sqrt[3]{4}; \sqrt[3]{4}\right); \left(\sqrt[3]{\frac{1}{4}}; \sqrt[3]{\frac{1}{4}}\right)$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm

2)



Vì BM, CN lần lượt là phân giác góc ABC, ACB nên theo tính chất đường phân giác, ta có:

$$\begin{aligned}\frac{MC}{MA} &= \frac{BC}{AB} \Rightarrow \frac{MC+MA}{MA} = 1 + \frac{BC}{AB} \\ \frac{NB}{NA} &= \frac{BC}{AC} \Rightarrow \frac{NB+NA}{NA} = 1 + \frac{BC}{AC} \\ \Rightarrow \frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA \cdot NA} &= \left(1 + \frac{BC}{AB}\right) \left(1 + \frac{BC}{AC}\right) = 1 + \frac{BC^2}{AB \cdot AC} + \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC}\end{aligned}$$

Áp dụng định lý Pi-ta-go cho tam giác vuông ABC và BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 \geq 2AB \cdot AC \Rightarrow \frac{BC^2}{AB \cdot AC} \geq 2 \\ \frac{BC}{AB} + \frac{BC}{AC} &\geq 2\sqrt{\frac{BC}{AB} \cdot \frac{BC}{AC}} \geq 2\sqrt{2} \\ \Rightarrow \frac{(MC+MA)(NB+NA)}{MA \cdot NA} &\geq 1 + 2 + 2\sqrt{2} = 3 + 2\sqrt{2}\end{aligned}$$

Câu III.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow \frac{a+b}{ab} = \frac{1}{c} \Rightarrow c(a+b) = ab(*)$$

c) Ta có:

Giả sử $a+b$ là số nguyên tố, khi đó từ (*) $\Rightarrow ab : (a+b) \Rightarrow a : (a+b)$ hoặc $b : (a+b)$

Điều này mâu thuẫn do $0 < a < a+b$, $0 < b < a+b$.

Vậy $a+b$ không thể là số nguyên tố.

d) Giả sử $a+c$ và $b+c$ đồng thời là số nguyên tố.

$$\text{Từ } c(a+b)=ab \Rightarrow ca+cb=ab \Rightarrow ca+ab=2ab-ab \Rightarrow a(b+c)=b(2a-c)$$

$$\Rightarrow a(b+c) : b(**)$$

Mà $b+c$ là số nguyên tố, b là số nguyên dương nhỏ hơn $b+c$ nên $(b+c, b) = 1$

Do đó từ (**) suy ra $a : b$.

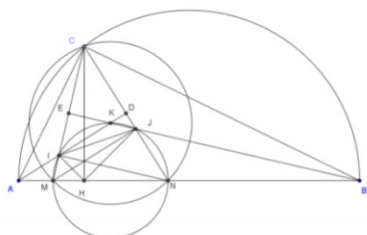
$$\text{Chúng minh tương tự ta có } b(a+c) = a(2b-c) \Rightarrow b : a$$

$$\text{Vậy } a = b. \text{ Từ } (*) \Rightarrow a = b = 2c$$

Do đó $a+c = b+c = 3c$, không là số nguyên tố với $c > 1$ (mâu thuẫn với giả sử)

Vậy $a+c$ và $b+c$ không thể đồng thời là số nguyên tố.

Câu IV.



d) Ta có: $\angle HCA = \angle ABC$ (cùng phụ với $\angle HCB$)

Vì CN là phân giác của góc HCB nên $\angle HCN = \angle BCN$

Do đó $\angle CAN = \angle HCA + \angle HCN = \angle ABC + \angle BCN$

Mặt khác, xét $\triangle BCN$ với góc ngoài $\angle ANC$ ta có: $\angle ANC = \angle ABC + \angle BCN$

Suy ra $\angle CAN = \angle ANC \Rightarrow \triangle ACN$ cân tại A $\Rightarrow AC = AN$.

Chứng minh tương tự ta có $BC = BM$.

e) Vì CM, CN lần lượt là phân giác của góc $\angle ACH$ và $\angle BCH$ nên

$$\angle MCN = \angle MCH + \angle NCH = \frac{1}{2} \angle ACH + \frac{1}{2} \angle BCH = \frac{1}{2} \angle ACB = 45^\circ$$

Tam giác $\triangle ACN$ cân tại A có AI là phân giác kẻ từ đỉnh A, nên cũng là trung trực của đáy CN.

$\Rightarrow IC = IN$.

$\Rightarrow \triangle ICN$ cân tại I.

Tam giác $\triangle ICN$ cân tại I có $\angle ICN = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân tại I

$\Rightarrow CI \perp IN$

Chứng minh tương tự ta có $CJ \perp MJ$.

Tứ giác $MIJN$ có $\angle MIN = \angle MJN = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, I, J, N cùng thuộc một đường tròn.

Vì $CH \perp MN$, $MJ \perp CN$, $NI \perp CM$ nên CH, MJ, NI đồng quy tại trực tâm của $\triangle CMN$.

f) Đặt $AC = b$; $BC = a \Rightarrow a^2 + b^2 = BC^2 = 4R^2$ (Pitago)

Theo câu a, ta có $AN = AC = b$; $BM = BC = a$

Do đó $a + b = AN + BM = BC + MN \Rightarrow MN = a + b - BC = a + b - 2R$

Ta có:

$$(a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow 2ab \leq a^2 + b^2 \Rightarrow (a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) = 8R^2$$

$$\Leftrightarrow a + b \leq 2\sqrt{2}R \Rightarrow MN = a + b - 2R \leq 2R(\sqrt{2} - 1)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a = b \Leftrightarrow CA = CB \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vì C thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên $CH \leq R$.

$$S_{CMN} = \frac{1}{2} CH \cdot MN \leq \frac{1}{2} R \cdot 2R(\sqrt{2} - 1) = R^2(\sqrt{2} - 1)$$

Do đó

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa nửa đường tròn.

Vậy giá trị nhỏ nhất của MN là $2R(\sqrt{2} - 1)$ và giá trị nhỏ nhất của diện tích tam giác CMN là $R^2(\sqrt{2} - 1)$ đều xảy ra khi và chỉ khi C là điểm chính giữa nửa đường tròn đường kính AB.

Câu V.

c) Gọi 5 số tự nhiên đã cho là a, b, c, d, e.

Do chúng đôi một phân biệt nên có thể giả sử $a < b < c < d < e$.

Theo giả thiết ta có $a + b + c > d + e \Rightarrow a + b + c \geq d + e + 1$

Suy ra $a \geq d + e + 1 - b - c$.

Vì b, c, d, e là số tự nhiên nên từ

$d > c \Rightarrow d \geq c + 1$; $c > b \Rightarrow c \geq b + 1$

Suy ra $d \geq b + 2 \Rightarrow d - b \geq 2$

$e > d \Rightarrow e \geq d + 1 \Rightarrow e \geq c + 2 \Rightarrow e - c \geq 2$

Do đó $a \geq (d - b) + (e - c) + 1 \geq 5$. Suy ra b, c, d, e > 5

Vậy tất cả các số đều không nhỏ hơn 5.

d) Nếu $a \geq 6 \Rightarrow b \geq a + 1 \geq 7$. Tương tự $c \geq 8$, $d \geq 9$, $e \geq 10 \Rightarrow a + b + c + d + e \geq 40$ (mâu thuẫn)

Suy ra $a < 6$. Mà theo câu a ta có $a \geq 5 \Rightarrow a = 5$.

Ta có $5 + b + c \geq d + e + 1 \Rightarrow b + c \geq d + e - 4$.

Mà $d - 2 \geq b$, $e - 2 \geq c \Rightarrow d + e - 4 \geq b + c$.

Do đó

$$\begin{cases} b = d - 2 \\ c = e - 2 \end{cases} \Rightarrow a + b + c + d + e = 5 + 2b + 2c + 4 < 40$$

$$\Rightarrow b + c < \frac{31}{2} \Rightarrow b + (b + 1) \leq b + c < \frac{31}{2} \Rightarrow b \leq 7$$

Suy ra $b = 6$ hoặc $b = 7$

Nếu $b = 6$ thì $d = b + 2 = 8$. Vì $b < c < d$ nên $c = 7 \Rightarrow e = c + 2 = 9$.

Nếu $b = 7$ thì $d = b + 2 = 9$. Vì $b < c < d$ nên $c = 8 \Rightarrow e = c + 2 = 10$.

Có hai bộ thỏa mãn đề bài là $(5; 6; 7; 8; 9)$ và $(5; 7; 8; 9; 10)$.

Đề số 20. Chuyên Hà Nội Amsterdam. Năm học: 2014-2015**Bài I (2,0 điểm)**

1) Giải phương trình: $x - \sqrt{x-8} - 3\sqrt{x+1} = 0$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 10x - 10y \end{cases}$$

Bài II (2,5 điểm).

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4 - 1) \vdots 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn
$$\begin{cases} p-1 = 2x(x+2) \\ p^2-1 = 2y(y+2) \end{cases}$$

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn
$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2$$

Bài III (1,5 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a+b)(b+c)(c+a) = 1$. Chứng minh $ab + ac + bc \leq \frac{3}{4}$

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O) . Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H . Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC . Gọi E, F là điểm đối xứng của Q qua AB, AC .

1) CMR: $MH \cdot MA = MP \cdot MN$

2) CMR : E, F, H thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB . Gọi I là giao điểm của QF và AC . Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để

$\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Bài V (1,0 điểm)

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < \left| a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \right| < \frac{1}{1000}$

ĐÁP ÁN

Bài I (2,0 điểm)

1) Giải phương trình: $x - \sqrt{x-8} - 3\sqrt{x} + 1 = 0$. (1)

ĐK: $x \geq 8$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2x - 2\sqrt{x-8} - 6\sqrt{x} + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x-8-2\sqrt{x-8}+1) + (x-6\sqrt{x} \\ &\Leftrightarrow (\sqrt{x-8}-1)^2 + (\sqrt{x}-3)^2 = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

Ta có:
$$\begin{cases} (\sqrt{x-8}-1)^2 \geq 0 \\ (\sqrt{x}-3)^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (\sqrt{x-8}-1)^2 + (\sqrt{x}-3)^2 \geq 0$$

Do đó
$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-8}-1=0 \\ \sqrt{x}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=9 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{9\}$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 10x - 10y \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^3 + 2y^3 = 2(x^2 + y^2)(x - y)(*) \end{cases}$$

$$(*) \Leftrightarrow x^3 + 2y^3 = 2x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 2y^3$$

$$\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + 2xy^2 - 4y^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)(x^2 + 2y^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + 2y^2 = 0 \end{cases}$$

Ta có $x^2 + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y = 0$ không là nghiệm của hệ.

Do đó $(I) \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y^2 + y^2 = 5 \\ x = 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases} \text{ hay } \begin{cases} y = -1 \\ x = -2 \end{cases}$

Vậy hệ có nghiệm $(2;1)$ và $(-2;-1)$

Bài II (2,5 điểm).

1) Cho số nguyên dương n thỏa mãn n và 10 là hai số nguyên tố cùng nhau. Chứng minh $(n^4 - 1) : 40$

Vì n và 10 nguyên tố cùng nhau nên n không chia hết cho 2 và 5.

$\Rightarrow n$ chỉ có thể có dạng $10k \pm 1$ và $10k \pm 3$ với $k \in \mathbb{N}$.

Ta có: $n^4 - 1 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n - 1)(n + 1)(n^2 + 1)$

Do n lẻ nên $n - 1 : 2$; $n + 1 : 2$ và $n^2 + 1 : 2 \Rightarrow n^4 - 1 : 8$. (1)

• Nếu $n = 10k \pm 1 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow n^2 - 1 : 10 \Rightarrow n^4 - 1 : 5$ (2)

Từ (1) và (2), chú ý $(5;8) = 1$ suy ra $n^4 - 1 : 40$

• Nếu $n = 10k \pm 3 \Rightarrow n^2 \equiv (\pm 3)^2 \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow n^2 + 1 : 10 \Rightarrow n^4 - 1 : 5$ (3)

Từ (1) và (3) chú ý $(5;8) = 1$ suy ra $n^4 - 1 : 40$

Vậy trong mọi trường hợp ta có $n^4 - 1 : 40$

2) Tìm tất cả các số nguyên tố p và các số nguyên dương x, y thỏa mãn
$$\begin{cases} p - 1 = 2x(x + 2) \\ p^2 - 1 = 2y(y + 2) \end{cases}$$

Từ (1) $\Rightarrow p - 1$ là số chẵn $\Rightarrow p$ là số nguyên tố lẻ.

Trừ từng vế của (2) cho (1) ta được $p^2 - p = 2y^2 - 2x^2 + 4y - 4x \Leftrightarrow p(p - 1) = 2(y - x)(y + x + 2)(*)$

$\Rightarrow 2(y-x)(y+x+2) : p$. Mà $(2;p) = 1$ nên xảy ra 2 TH:

• $y-x : p \Rightarrow y-x = kp \ (k \in \mathbb{N}^*)$

Khi đó từ (*) $\Rightarrow p-1 = 2k(x+y+2) \Rightarrow kp-k = 2k^2(x+y+2) \Rightarrow y-x-k = 2k^2(x+y+2)$

(loại vì $x+y+2 > y-x-k > 0$; $2k^2 > 1 \Rightarrow 2k^2(x+y+2) > y-x-k$)

• $y+x+2 : p \Rightarrow x+y+2 = kp \ (k \in \mathbb{N}^*)$

Từ (*) $\Rightarrow p-1 = 2k(y-x) \Rightarrow kp-k = 2k^2(y-x) \Rightarrow x+y+2-k = 2k^2(y-x) \ (**)$

Ta chứng minh $k=1$. Thật vậy nếu $k \geq 2$ thì từ (**) $\Rightarrow x+y = 2k^2(y-x) + k-2 \geq 8(y-x)$ (vì $y-x > 0$)
 $\Rightarrow 9x \geq 7y \Rightarrow 7y < 14x \Rightarrow y < 2x$

Do đó từ (2) $\Rightarrow (p-1)(p+1) = 2y(y+2) < 4x(2x+2) < 4x(2x+4) = 8x(x+2) = 4(p-1)$

(vì $2x(x+2) = p-1$ theo (1))

$\Rightarrow p+1 < 4 \Rightarrow p < 3$, mâu thuẫn với p là số nguyên tố lẻ.

Do đó $k=1$, suy ra

$$\begin{cases} x+y+2=p \\ p-1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ x+y+1=2(y-x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2=p \\ y=3x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=3x+1 \\ p-1=4x+2 \end{cases}$$

Thay $p-1=4x+2$ vào (1) ta có: $4x+2 = 2x(x+2) \Leftrightarrow 2x+1 = x^2+2x \Leftrightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1$

$\Rightarrow y=4, p=7$ (thỏa mãn)

Vậy $x=1, y=4$ và $p=7$.

3) Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn

$$x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2 \quad (1)$$

Giả sử n là số nguyên dương sao cho tồn tại các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn (1)

Không mất tính tổng quát, giả sử $x \geq y \geq z \geq 1$.

Từ (1) $\Rightarrow 0 < y^3 + z^3 = x^2(ny^2z^2 - 1) \Rightarrow ny^2z^2 - 1 > 0 \Rightarrow ny^2z^2 - 1 \geq 1$

$\Rightarrow y^3 + z^3 = x^2(ny^2z^2 - 1) \geq x^2 (*)$

Vì $x \geq y \geq z$ nên $3x^3 \geq x^3 + y^3 + z^3 = nx^2y^2z^2 \Rightarrow ny^2z^2 \Rightarrow 9x^2 \geq n^2y^4z^4$

$9(y^3 + z^3) \geq 9x^2 \geq n^2y^4z^4 \Rightarrow 9\left(1 + \frac{z^3}{y^3}\right) \geq n^2yz^4$

Kết hợp với (*) ta có

$$y \geq z \Rightarrow \frac{z^3}{y^3} \leq 1 \Rightarrow n^2 y z^4 \leq 9 \left(1 + \frac{z^3}{y^3} \right) \leq 18 (**)$$

Mà

$$(**) \Rightarrow z^4 \leq 18 \Rightarrow \begin{cases} z = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ta có:

$$\bullet \text{ Nếu } z = 2 : (**) \Rightarrow 16n^2 y \leq 18 \Rightarrow n = y = 1 \text{ (loại vì } y < z)$$

$$\bullet \text{ Nếu } z = 1 : (**) \Rightarrow n^2 y \leq 18 \Rightarrow n^2 \leq 18 \Rightarrow n \leq 4$$

Ta chứng minh $n \notin \{2; 4\}$. Thật vậy,

*Nếu $n = 4$ thì từ $n^2 y \leq 18 \Rightarrow 16y \leq 18 \Rightarrow y = 1$. Từ (1) $\Rightarrow x^3 + 2 = 4x^2 \Rightarrow x^2(4 - x) = 2 \Rightarrow x^2$ là ước của 2 $\Rightarrow x = 1$ (không thỏa mãn)

*Nếu $n = 2$ thì từ $n^2 y \leq 18$ suy ra $4y \leq 18 \Rightarrow 1 \leq y \leq 4$.

$$+ y = 1 : (1) \Rightarrow x^3 - 2x^2 + 2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 2) = -2 < 0 \Rightarrow x < 2 \Rightarrow x = 1 (L)$$

$$+ y = 2 : (1) \Rightarrow x^3 - 8x^2 + 9 = 0 \Rightarrow 9 = x^2(8 - x). \text{ Suy ra } x^2 \text{ là ước của 9. Mà } x^2 \geq y^2 = 4 \text{ nên } x = 3 \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$+ y = 3 : (1) \Rightarrow x^3 - 18x^2 + 28 = 0 \Rightarrow x^2(18 - x) = 28. \text{ Suy ra } x^2 \text{ là ước của 28. Mà } x^2 \geq y^2 = 9 \text{ nên không tồn tại } x \text{ thỏa mãn.}$$

$$+ y = 4 : (1) \Rightarrow x^3 - 32x^2 + 65 = 0 \Rightarrow x^2 \text{ là ước của 65 (loại vì 65 không có ước chính phương)}$$

Vậy $n \notin \{2; 4\}$. Do đó $n \in \{1; 3\}$

Thử lại với $n = 1$, tồn tại bộ $(x; y; z)$ nguyên dương chẳng hạn $(x; y; z) = (3; 2; 1)$ thỏa mãn (1)

với $n = 3$, tồn tại bộ $(x; y; z) = (1; 1; 1)$ thỏa mãn (1).

Vậy tất cả các giá trị n thỏa mãn bài toán là $n \in \{1; 3\}$

Bài III (1,5 điểm)

Cho ba số thực dương a, b, c thỏa mãn $(a + b)(b + c)(c + a) = 1$. Chứng minh $ab + ac + bc \leq \frac{3}{4}$

Áp dụng BĐT Cô-si cho ba số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$(a + b) + (b + c) + (c + a) \geq 3\sqrt{(a + b)(b + c)(c + a)} = 3 \Rightarrow a + b + c \geq \frac{3}{2} (2)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, kết hợp điều kiện (1) ta có:

$$\begin{cases} a+b \geq 2\sqrt{ab} \\ b+c \geq 2\sqrt{ac} \\ c+a \geq 2\sqrt{ca} \end{cases} \Rightarrow 1 = (a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \Rightarrow abc \leq \frac{1}{8} \quad (3)$$

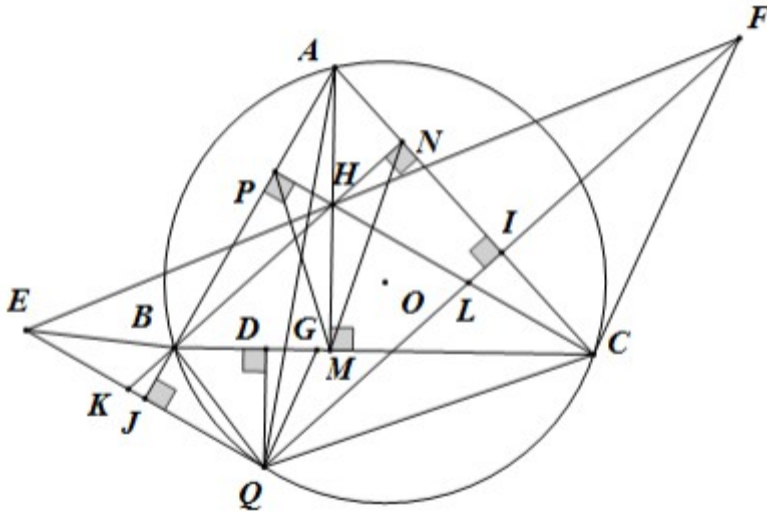
Biến đổi (1), chú ý 2 BĐT (2) và (3), ta được:

$$\begin{aligned} (a+b)(b+c)(c+a) &= 1 \\ \Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+c^2+ca) &= 1 \\ \Leftrightarrow (a+b)(bc+ba+ca) + ac^2 + bc^2 &= 1 \\ \Leftrightarrow (a+b)(ab+bc+ca) + c(ab+bc+ca) - abc &= 1 \\ \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+bc+ca) - abc &= 1 \\ \Leftrightarrow ab+bc+ca = \frac{1+abc}{a+b+c} &\leq \frac{1+\frac{1}{8}}{3} = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = \frac{1}{2}$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O). Các đường cao AM, BN, CP cắt nhau tại H. Gọi Q là điểm bất kỳ trên cung nhỏ BC. Gọi E, F là điểm đối xứng của Q qua AB, AC.



1) CMR: $MH \cdot MA = MP \cdot MN$

1) Xét tứ giác ANMB có $\angle ANB = \angle AMB = 90^\circ$ nên nó là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle BAM = \angle BNM$ hay $\angle PAM = \angle HNM$ (1)

Xét tứ giác CNHM có $\angle HNC + \angle HMC = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên nó là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow \angle NHM + \angle NCM = 180^\circ$ (2)

Tứ giác APMC có $\angle APC = \angle AMC = 90^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle APM + \angle ACM = 180^\circ$ (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ NHM = APM (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow \Delta NHM \sim \Delta APM$ (g.g) $\Rightarrow \frac{NM}{AM} = \frac{HM}{PM} \Rightarrow MH.MA = MN.MP.$

2) CMR : E, F, H thẳng hàng.

Gọi K là giao BH và QE, L là giao CH và QF.

Tứ giác AJQI có $\angle AIQ + \angle AJQ = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle JAI + \angle JQI = 180^\circ$

Mà $\angle JAI + \angle BQC = 180^\circ$ (do ABQC là tứ giác nội tiếp) nên $\angle JQI = \angle BQC \Rightarrow \angle BQE = \angle CQF$ (5)

Vì E, F đối xứng với Q qua AB, AC nên BQ = BE, CQ = CF $\Rightarrow \Delta BEQ$ và ΔCQF cân

$\Rightarrow \angle CQF = \angle CFQ$ (6). Từ (5) và (6) suy ra $\angle CFL = \angle BQK$ (7)

Ta có LH // QK (cùng vuông góc AB); KH // QL (cùng vuông góc AC) nên QKHL là hình bình hành $\Rightarrow \angle QKH = \angle QLH = \angle FLC$ hay $\angle QKB = \angle FLC$ (8)

Từ (7) và (8) $\Rightarrow \Delta QKB \sim \Delta FLC$ (g.g) $\Rightarrow \frac{QK}{FL} = \frac{QB}{FC}$

Hai tam giác cân BQE và CFQ đồng dạng, nên $\frac{QB}{FC} = \frac{QE}{QF} \Rightarrow \frac{QK}{FL} = \frac{QE}{QF} \Rightarrow \frac{QK}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Mà QK = LH (do QKHL là hình bình hành) nên $\frac{LH}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Vì LH' // QE nên theo định lý Ta-lét ta có: $\frac{LH'}{QE} = \frac{FL}{FQ}$

Do đó LH = LH' $\Rightarrow H' \equiv H \Rightarrow H \in EF \Rightarrow H, E, F$ thẳng hàng.

3) Gọi J là giao điểm của QE và AB. Gọi I là giao điểm của QF và AC. Tìm vị trí của Q trên cung nhỏ BC để

$\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất.

Vẽ QD $\perp$ BC tại D. Trên cạnh BC lấy điểm G sao cho CQG = BQA $\Rightarrow$ BQG = CQA

Vì ABQC là tứ giác nội tiếp nên $\angle BAQ = \angle GCQ \Rightarrow \Delta BAQ \sim \Delta GCQ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BA}{GC} = \frac{AQ}{CQ}$

Vì $\angle JAQ = \angle DCQ$; $\angle QJA = \angle QDC = 90^\circ \Rightarrow \Delta JAQ \sim \Delta DCQ$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AQ}{CQ} = \frac{JQ}{DQ}$

Do đó $\frac{BA}{GC} = \frac{JQ}{DQ} \Rightarrow \frac{AB}{QJ} = \frac{GC}{DQ}$

Chứng minh tương tự ta có:

$$\frac{AC}{QI} = \frac{GB}{DQ}$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI} = \frac{GC + GB}{DQ} = \frac{BC}{DQ}$$

Vì BC không đổi nên $\frac{AB}{QJ} + \frac{AC}{QI}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow$ DQ lớn nhất $\Leftrightarrow$ Q là điểm chính giữa cung BC nhỏ của đường tròn (O).

Bài V (1,0 điểm)

Chứng minh tồn tại các số nguyên a, b, c sao cho $0 < \left| a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} \right| < \frac{1}{1000}$

Xét nửa khoảng $A = (0; 1]$. Chia nửa khoảng này thành 1000 nửa khoảng

$$A_1 = \left(0; \frac{1}{1000} \right], A_2 = \left(\frac{1}{1000}; \frac{2}{1000} \right], \dots, A_n = \left(\frac{n-1}{1000}; \frac{n}{1000} \right], \dots, A_{1000} = \left(\frac{999}{1000}; 1 \right]$$

Xét bộ số $x_1; x_2; \dots; x_{1001}$ với $x_k = \left[1 - k\sqrt{2} \right] + k\sqrt{2} (k \in \mathbb{N}^*, k \leq 1001)$

Với mọi k ta có $-k\sqrt{2} < \left[1 - k\sqrt{2} \right] \leq 1 - k\sqrt{2}$ (tính chất phần nguyên) nên $0 < \left[1 - k\sqrt{2} \right] + k\sqrt{2} \leq 1 \Rightarrow x_k \in A$

$\Rightarrow x_k$ thuộc một trong các 1000 khoảng $A_1, A_2, \dots, A_{1000}$

Có 1001 số x_k mà có 1000 nửa khoảng, do đó tồn tại 2 số x_i, x_j thuộc cùng một nửa khoảng A_m nào đó

$$0 \leq |x_i - x_j| < \frac{1}{1000}$$

Đặt $a = \left[1 - i\sqrt{2} \right] - \left[1 - j\sqrt{2} \right], b = i - j \Rightarrow x_i - x_j = a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3}$

Mà a là số nguyên, $b\sqrt{2}$ là số vô tỷ nên $a + b\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow |x_i - x_j| > 0$

Do đó $0 < |x_i - x_j| < \frac{1}{1000} \Rightarrow 0 < \left| a + b\sqrt{2} + 0.\sqrt{3} \right| < \frac{1}{1000}$

Vậy tồn tại các số nguyên a, b, c thỏa mãn đề bài.

Đề số 21. Chuyên Bắc Giang. Năm học: 2015-2016

Câu I: Giải các phương trình và hệ phương trình sau:

1) $2x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} = 0$

2) $x^4 - 2x^2 - 8 = 0$

3)
$$\begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Câu II:

1) Cho biểu thức:
$$A = \frac{\sqrt{x} - 11}{x - \sqrt{x} - 2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1} + \frac{2\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} - 2}$$

a) Tìm điều kiện của x để biểu thức A có nghĩa, khi đó rút gọn A

b) Tìm số chính phương x sao cho A có giá trị là số nguyên

2) Tìm giá trị m để phương trình: $x^2 + mx + m^2 - 3 = 0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ sao cho: $x_1 + 2x_2 = 0$

Câu III: Cho quãng đường AB dài 150 km. Cùng một lúc có xe thứ nhất xuất phát từ A đến B, xe thứ hai đi từ B về A. Sau khi xuất phát được 3 giờ thì 2 xe gặp nhau. Biết thời gian đi cả quãng đường AB của xe thứ nhất nhiều hơn xe thứ hai là 2 giờ 30 phút. Tính vận tốc mỗi xe.

Câu IV: Cho đường tròn (O;R) có đường kính AB. Điểm C là điểm bất kỳ trên (O). $C \neq A, B$. Tiếp tuyến tại C cắt tiếp tuyến tại A, B lần lượt tại P, Q

1) Chứng minh: $AP \cdot BQ = R^2$

2) Chứng minh: AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ

3) Gọi M là giao điểm của OP với AC, N là giao điểm của OQ với BC. Chứng minh: PMNQ là tứ giác nội tiếp.

4) Xác định vị trí điểm C để đường tròn ngoại tiếp tứ giác PMNQ có bán kính nhỏ nhất

Câu V: Cho a, b, c > 0 thỏa mãn: $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{1}{3}$$

ĐÁP ÁN

Câu I:

$$1) 2x^2 + (\sqrt{3} - 2)x - \sqrt{3} = 0 \quad (1)$$

Phương trình (1) là phương trình bậc hai có tổng các hệ số

$$a + b + c = 2 + (\sqrt{3} - 2) + (-\sqrt{3}) = 0 \text{ nên có hai nghiệm } x_1 = 1; x_2 = \frac{c}{a} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{1; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

$$2) x^4 - 2x^2 - 8 = 0 \quad (2)$$

Đặt $t = x^2$, với $t \geq 0$ phương trình (2) trở thành

$$t^2 - 2t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t-4) = 0 \Leftrightarrow t = -2 \text{ (loại) hoặc } t = 4 \text{ (thỏa mãn)}$$

Với $t = 4$ thì $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là $\{-2; 2\}$

$$3) \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}y = 3 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 3x + 4y = 18 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 8y = 36 \\ 6x + 9y = 39 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 6x + 9y = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ 6x + 9 \cdot 3 = 39 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là (2;3)

Câu II:

$$1) A = \frac{\sqrt{x}-11}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

a) Để A có nghĩa, điều kiện là:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - \sqrt{x} - 2 \neq 0 \\ \sqrt{x} - 2 \neq 0 \\ \sqrt{x} + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \sqrt{x} \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x \neq 4 \end{cases}$$

Với điều kiện trên, ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{\sqrt{x}-11}{x-\sqrt{x}-2} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} + \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-11-\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)+(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}-11-(x-2\sqrt{x})+(2x+\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{x+4\sqrt{x}-12}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} = \frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+6)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)} \\
 &= \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}
 \end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1}$ với $x \geq 0$ và $x \neq 4$.

b) Ta có: $A = \frac{\sqrt{x}+6}{\sqrt{x}+1} = 1 + \frac{5}{\sqrt{x}+1}$

Để A có giá trị là số nguyên thì $\frac{5}{\sqrt{x}+1}$ là số nguyên

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \text{ là ước của } 5 (*)$$

Mặt khác $\sqrt{x}+1 \geq 1$ nên $(*) \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 \in \{1; 5\}$

– Nếu $\sqrt{x}+1 = 1 \Rightarrow x = 0$ (tm)

– Nếu $\sqrt{x}+1 = 5 \Rightarrow x = 16$ (tm)

Vậy các giá trị x cần tìm là $x = 0$ và $x = 16$.

2) $x^2 + mx + m^2 - 3 = 0 \quad (1)$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4(m^2 - 3) > 0$

$$\Leftrightarrow -3m^2 + 12 > 0 \Leftrightarrow m^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

Hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $x_1 + 2x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2x_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -m \\ x_1 x_2 = m^2 - 3 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ -2x_2 + x_2 = -m \\ -2x_2 x_2 = m^2 - 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_2 = m \\ -2m^2 = m^2 - 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow -2m^2 = m^2 - 3 \Rightarrow m^2 = 1 \Rightarrow m = \pm 1 \quad (\text{tm})$$

Thử lại:

$$- \text{ Với } m = 1: (1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -2; x_2 = 1 \quad (\text{tm})$$

$$- \text{ Với } m = -1: (1) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2; x_2 = -1 \quad (\text{tm})$$

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Câu III:

Gọi vận tốc của xe đi từ A đến B là x (km/h) ($x > 0$)

Gọi vận tốc của xe đi từ B đến A là y (km/h) ($y > 0$)

Sau 3 giờ, quãng đường đi được của xe đi từ A là $3x$ (km)

quãng đường đi được của xe đi từ B là $3y$ (km)

Sau 3 giờ kể từ khi cùng xuất phát, hai xe gặp nhau, do đó ta có phương trình $3x + 3y = 150$ (1)

Thời gian đi quãng đường AB của xe đi từ A là $\frac{150}{x}$ (giờ) và của xe đi từ B là $\frac{150}{y}$ (giờ)

Theo bài ra ta có phương trình: $\frac{150}{x} - \frac{150}{y} = 2,5$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 50 \\ \frac{150}{x} - \frac{150}{y} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{50 - x} = \frac{1}{60} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 50 - x \\ \frac{50 - 2x}{x(50 - x)} = \frac{1}{60} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 60(50 - 2x) = x(50 - x) \Rightarrow x^2 - 170x + 3000 = 0$$

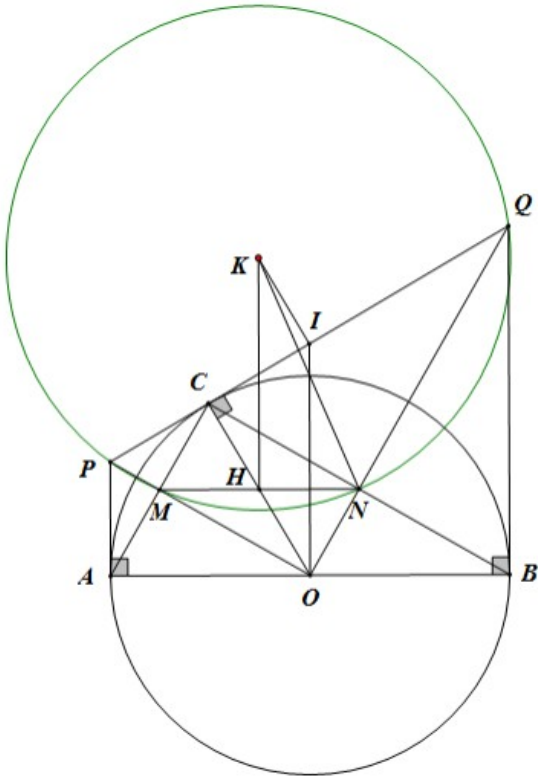
$$\Leftrightarrow x = 20 \text{ hoặc } x = 150$$

$$x = 20 \Rightarrow y = 30 \quad (\text{tm})$$

$$x = 150 \Rightarrow y = -100 \quad (\text{loại})$$

Vậy vận tốc của hai xe lần lượt là 20km/h và 30km/h.

Câu IV:



1) Vì AP và CP là tiếp tuyến của (O) nên $OA \perp AP$, $OC \perp PC$

Xét tam giác vuông OAP và tam giác vuông OCP có:

$$\begin{cases} OP(\text{chung}) \\ OA = OC = R \end{cases} \Rightarrow \triangle OAP = \triangle OCP \quad (\text{cạnh huyền-cạnh góc vuông})$$

$$\Rightarrow \begin{cases} PC = PA(1) \\ POA = POC \Rightarrow POC = \frac{1}{2}COA(2) \end{cases}$$

Tương tự ta có: $\begin{cases} QC = QB(3) \\ QOC = \frac{1}{2}COB(4) \end{cases}$

Từ (2) và (4) ta có: $POQ = POC + QOC = \frac{1}{2}(COA + COB) = \frac{1}{2}.180^\circ = 90^\circ$

$\Rightarrow \triangle POQ$ vuông tại O

Từ (1), (3) và áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông OPQ ta có: $AP.BQ = CP.CQ = CO^2 = R^2$ (đpcm)

2) Xét tam giác vuông OPQ, gọi I là trung điểm cạnh huyền PQ, khi đó: $IP = IQ = IO$

$\Rightarrow O$ thuộc đường tròn đường kính PQ (5)

Mặt khác, do $AP \parallel BQ$ nên $APQB$ là hình thang và nhận IO là đường trung bình, suy ra $OI \parallel BQ$

$$\text{Mà } BQ \perp AB \Rightarrow OI \perp AB \quad (6)$$

Từ (5) và (6) $\Rightarrow AB$ là tiếp tuyến của đường tròn đường kính PQ tại O .

3) Vì $OC = OA = R$, $PC = PA$ (cmt) nên PO là trung trực của đoạn $AC \Rightarrow PO \perp AC$

Tương tự $QO \perp BC$.

Tứ giác $OMCN$ có ba góc vuông nên nó là hình chữ nhật $\Rightarrow OMCN$ là tứ giác nội tiếp

$$\Rightarrow OMN = OCN \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } ON) \quad (7)$$

Mặt khác, do các tam giác OCQ và OCN vuông, suy ra:

$$OCN = PQO \text{ (cùng phụ với } CON) \quad (8)$$

$$\text{Từ (7) và (8)} \Rightarrow OMN = PQO$$

$$\text{Mặt khác } OMN + PMN = 180^\circ \Rightarrow PQO + PMN = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Tứ giác $PMNQ$ là tứ giác nội tiếp.

4) Gọi H, I là trung điểm MN, PQ . K là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác $PMNQ$.

Ta có: $KH \perp MN$ và $KI \perp PQ$

Vì OP là trung trực AC (cmt) nên M là trung điểm AC , tương tự N là trung điểm BC .

$$\Rightarrow MN \parallel AB \text{ và } MN = \frac{AB}{2} \Rightarrow HN = \frac{MN}{2} = \frac{AB}{4} = \frac{R}{2} \quad (9)$$

Vì $MN \parallel AB$, $OI \perp AB \Rightarrow MN \perp OI$. Mà $MN \perp KH$ nên $OI \parallel KH$. Mà $KI \parallel HO$ (cùng vuông góc PQ) nên $OIKH$ là hình bình hành.

$$\Rightarrow KH = OI \geq OC = R \quad (10)$$

Bán kính đường tròn (K) là KN . Từ (9) và (10) ta có:

$$KN = \sqrt{KH^2 + HN^2} \geq \sqrt{R^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2}$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow OI = OC \Leftrightarrow O \equiv C \Leftrightarrow OC \perp AB \Leftrightarrow C$ là điểm chính giữa cung AB .

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp $PMNQ$ nhỏ nhất khi C là điểm chính giữa cung AB của đường tròn (O).

Câu V:

Áp dụng BDT Cô-si cho 4 số không âm, ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{a+2}{27} + \frac{b+2}{27} + \frac{1}{9} \geq 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} \cdot \frac{a+2}{27} \cdot \frac{b+2}{27} \cdot \frac{1}{9}} = 4\sqrt[4]{\frac{a^4}{9^4}} = \frac{4a}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{a^4}{(a+2)(b+2)} \geq \frac{11a}{27} - \frac{b}{27} - \frac{7}{27} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b^4}{(b+2)(c+2)} \geq \frac{11b}{27} - \frac{c}{27} - \frac{7}{27} \quad (2)$$

$$\frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{11c}{27} - \frac{a}{27} - \frac{7}{27} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{11(a+b+c)}{27} - \frac{a+b+c}{27} - \frac{21}{27}$$

Thay điều kiện $a + b + c = 3$ ta được:

$$\frac{a^4}{(a+2)(b+2)} + \frac{b^4}{(b+2)(c+2)} + \frac{c^4}{(c+2)(a+2)} \geq \frac{1}{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Đề số 22. Chuyên Bạc Liêu. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (2,0 điểm)

- Chứng minh với mọi số n lẻ thì $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8.
- Tìm nghiệm $(x; y)$ của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$ với x, y thuộc $\mathbb{N}^*$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

- Cho phương trình $x^4 - 2(m - 2)x^2 + 2m - 6 = 0$. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình có 4 nghiệm phân biệt.

- Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN . Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B . Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F .

- Chứng minh rằng $MNFE$ là tứ giác nội tiếp.
- Gọi K là trung điểm của FE . Chứng minh rằng AK vuông góc với MN .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường thẳng d đi qua A sao cho d không cắt đoạn BC . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d . Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác $BHKC$.

-----HẾT-----

**HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO 10 MÔN TOÁN CHUYÊN BẠC LIÊU
NĂM HỌC 2015 – 2016**

Câu 1.

a. $n^2 + 4n + 5 = (n + 2)^2 + 1$

Vì n là số lẻ suy ra $n + 2 = 2k + 1$, k là số nguyên

Ta có $(n + 2)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4

Vậy $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8

b. $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + xy + 2y^2 - 8(x + y) - (x + 2y) + 8 = 0$

$\Leftrightarrow x(x + 2y) + y(x + 2y) - 8(x + y) - (x + 2y) + 8 = 0$

$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x + 2y) - 8(x + y - 1) = 0$

$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x + 2y - 8) = 0$ (a)

Với $x \geq 1, y \geq 1$ (vì thuộc $\mathbb{N}^*$) suy ra $x + y - 1 \geq 1 > 0$

Do đó (a) $\Leftrightarrow x + 2y = 8$

Ta có $2y \leq 8 - 1 = 7$

Nên $y \leq 7/2$

Mà y thuộc $\mathbb{N}^*$ suy ra $y = 1; 2; 3$

Lập bảng kết quả

x	1	2	3
y	6	4	2

Vậy tập hợp bộ số (x, y) thỏa mãn là $\{(6; 1), (4; 2), (2; 3)\}$

Câu 2. $5x^2 + mx - 28 = 0$

$\Delta = m^2 + 560 > 0$ với mọi m

Nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta có: $x_1 + x_2 = -m/5$ (1)

$x_1 x_2 = -28/5$ (2)

$5x_1 + 2x_2 = 1$ (3)

Từ (3) suy ra $x_2 = (1 - 5x_1)/2$ (4)

Thay (4) vào (2) suy ra $5x_1(1 - 5x_1) = -56$

$\Leftrightarrow 25x_1^2 - 5x_1 - 56 = 0$

$\Leftrightarrow x_1 = 8/5$ hoặc $x_1 = -7/5$

Với $x_1 = 8/5 \rightarrow x_2 = -7/2$

Thay vào (1) ta có $8/5 - 7/2 = -m/5 \Leftrightarrow m = 19/2$

Với $x_1 = -7/5 \rightarrow x_2 = 4 \rightarrow -7/5 + 4 = -m/5$ suy ra $m = -13$

Câu 3.

a. $x^4 - 2(m - 2)x^2 + 2m - 6 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$)

(1) $\Leftrightarrow t^2 - 2(m - 2)t + 2m - 6 = 0$ (2)

$\Delta' = (m - 2)^2 - (2m - 6) = m^2 - 6m + 10 = (m - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi m .

Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ứng với mỗi nghiệm $t > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương.

$\Leftrightarrow 2m - 6 > 0$ và $2(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m > 3$.

Vậy $m > 3$ thỏa mãn yêu cầu.

b. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 6$
 Áp dụng bất đẳng thức cô si: $a^5 + 1/a \geq 2a^2$; $b^5 + 1/b \geq b^2$; $c^5 + 1/c \geq c^2$.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$$

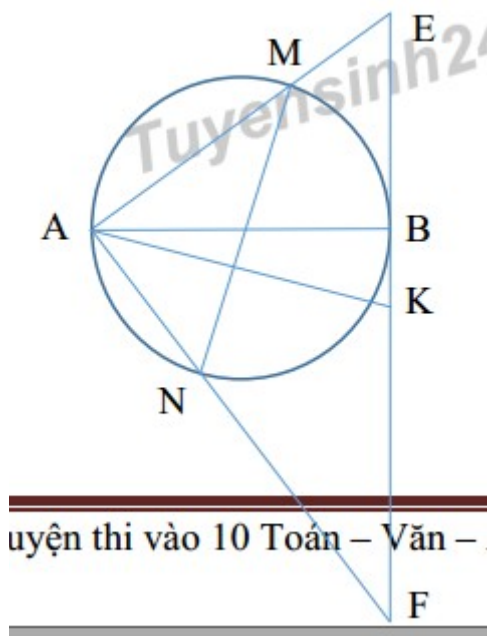
Suy ra $a^5 + b^5 + c^5 + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq 2(a^2 + b^2 + c^2)$

Mặt khác $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 3$

Vậy đpcm.

Câu 4.



a. Tam giác ABE vuông tại B và BM vuông góc với AE

Nên ta có $AM \cdot AE = AB^2$

Tương tự $AN \cdot AF = AB^2$

Suy ra $AM \cdot AE = AN \cdot AF$

Hay $AM/AN = AE/AF$

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle AFE$ có góc MAN chung

Và $AM/AN = AE/AF$

Do đó $\triangle AMN$ và $\triangle AFE$ đồng dạng

Suy ra góc AMN = góc AFE.

Mà góc AMN + góc NME = 180° (kề bù)

Nên góc AFE + góc NME = 180°

Vậy tứ giác MNFE nội tiếp đường tròn.

b.

Góc MAN = 90°

Nên tam giác AEF vuông tại A suy ra $AK = KB = KF$

Do đó góc KAF = góc KFA

Mà góc AMN = góc KFA (cmt)

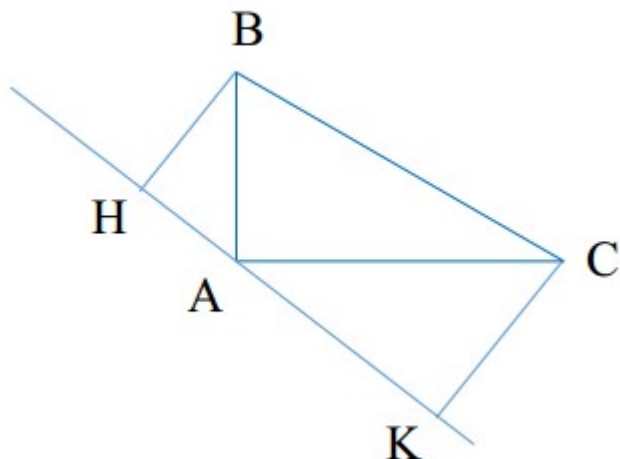
Suy ra góc KAF = góc AMN

Mà góc AMN + góc ANM = 90°

Suy ra góc KAF + góc ANM = 90° .

Vậy AK vuông góc với MN

Câu 5.



Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = BH^2 + AH^2 + AK^2 + CK^2$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) (*)$$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$
(đúng với mọi a, b, c, d)

Dấu bằng xảy ra khi $ad = bc$ hay $a/c = b/d$

Áp dụng (*) ta được: $2(BH^2 + AH^2) \geq (BH + AH)^2$ (1)

Tương tự ta có $2(AK^2 + CK^2) \geq (AK + CK)^2$ (2)

Suy ra $2BC^2 \geq (BH + AH)^2 + (AK + CK)^2$ (3)

Đặt $BH + AH = m$; đặt $AK + CK = n$

Vì góc CAK + góc BAH = 90° ; mà góc BAH + góc ABH = 90° nên góc CAK = góc ABH

Dẫn đến tam giác ABH đồng dạng với tam giác CAK

$$\rightarrow AH/CK = BH/AK = AB/AC = (AH + BH)/(CK + AK) = m/n$$

$$\text{Nên } AB^2/m^2 = AC^2/n^2 = (AB^2 + AC^2)/(m^2 + n^2) \geq BC^2/(2BC^2) = 1/2$$

$$\text{Hay } m \leq AB\sqrt{2} \text{ và } n \leq AC\sqrt{2}$$

$$\text{Chu vi tứ giác BHKC là } BC + BH + AH + AK + KC = BC + m + n \leq BC + (AB + AC)\sqrt{2}$$

$$\text{Vậy chu vi BHKC lớn nhất là } BC + (AB + AC)\sqrt{2}$$

Đề số 23. Chuyên Bạc Liêu. Năm học: 2015-2016**Câu 1.** (2,0 điểm)

- c. Chứng minh với mọi số n lẻ thì $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8.
 d. Tìm nghiệm $(x; y)$ của phương trình $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$ với x, y thuộc $\mathbb{N}^*$.

Câu 2. (2,0 điểm)

Cho phương trình $5x^2 + mx - 28 = 0$ (m là tham số). Tìm các giá trị của m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $5x_1 + 2x_2 = 1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

- c. Cho phương trình $x^4 - 2(m - 2)x^2 + 2m - 6 = 0$. Tìm các giá trị của m sao cho phương trình có 4 nghiệm phân biệt.
 d. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 +$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho đường tròn tâm O có hai đường kính AB và MN . Vẽ tiếp tuyến d của đường tròn (O) tại B . Đường thẳng AM, AN lần lượt cắt đường thẳng d tại E và F .

- c. Chứng minh rằng $MNFE$ là tứ giác nội tiếp.
 d. Gọi K là trung điểm của FE . Chứng minh rằng AK vuông góc với MN .

Câu 5. (2,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A . Vẽ đường thẳng d đi qua A sao cho d không cắt đoạn BC . Gọi H, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của B và C trên d . Tìm giá trị lớn nhất của chu vi tứ giác $BHKC$.

-----HẾT-----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO 10 MÔN TOÁN CHUYÊN BẠC LIÊU NĂM HỌC 2015 – 2016

Câu 1.

c. $n^2 + 4n + 5 = (n + 2)^2 + 1$

Vì n là số lẻ suy ra $n + 2 = 2k + 1$, k là số nguyên

Ta có $(n + 2)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2$ không chia hết cho 4

Vậy $n^2 + 4n + 5$ không chia hết cho 8

d. $x^2 + 2y^2 + 3xy + 8 = 9x + 10y$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + xy + 2y^2 - 8(x + y) - (x + 2y) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x + 2y) + y(x + 2y) - 8(x + y) - (x + 2y) + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x + 2y) - 8(x + y - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + y - 1)(x + 2y - 8) = 0 \quad (a)$$

Với $x \geq 1, y \geq 1$ (vì thuộc $\mathbb{N}^*$) suy ra $x + y - 1 \geq 1 > 0$

Do đó (a) $\Leftrightarrow x + 2y = 8$

Ta có $2y \leq 8 - 1 = 7$

Nên $y \leq 7/2$

Mà y thuộc $\mathbb{N}^*$ suy ra $y = 1; 2; 3$

Lập bảng kết quả

x	1	2	3
y	6	4	2

Vậy tập hợp bộ số (x, y) thỏa mãn là $\{(6; 1), (4; 2), (2; 3)\}$

Câu 2. $5x^2 + mx - 28 = 0$

$\Delta = m^2 + 560 > 0$ với mọi m

Nên phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

Ta có: $x_1 + x_2 = -m/5$ (1)

$x_1 x_2 = -28/5$ (2)

$5x_1 + 2x_2 = 1$ (3)

Từ (3) suy ra $x_2 = (1 - 5x_1)/2$ (4)

Thay (4) vào (2) suy ra $5x_1(1 - 5x_1) = -56$

$$\Leftrightarrow 25x_1^2 - 5x_1 - 56 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 8/5 \text{ hoặc } x_1 = -7/5$$

Với $x_1 = 8/5 \rightarrow x_2 = -7/2$

Thay vào (1) ta có $8/5 - 7/2 = -m/5 \Leftrightarrow m = 19/2$

Với $x_1 = -7/5 \rightarrow x_2 = 4 \rightarrow -7/5 + 4 = -m/5$ suy ra $m = -13$

Câu 3.

c. $x^4 - 2(m - 2)x^2 + 2m - 6 = 0$. (1)

Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$)

(2) $\Leftrightarrow t^2 - 2(m - 2)t + 2m - 6 = 0$ (2)

$\Delta' = (m - 2)^2 - (2m - 6) = m^2 - 6m + 10 = (m - 3)^2 + 1 > 0$ với mọi m .

Phương trình (2) luôn có 2 nghiệm phân biệt.

Ứng với mỗi nghiệm $t > 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt. Do đó, phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt khi chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt dương.

$$\Leftrightarrow 2m - 6 > 0 \text{ và } 2(m - 2) > 0 \Leftrightarrow m > 3.$$

Vậy $m > 3$ thỏa mãn yêu cầu.

d. Cho $a, b, c > 0$ và $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $a^5 + b^5 + c^5 +$
Áp dụng bất đẳng thức cô si: $a^5 + 1/a \geq 2a^2$; $b^5 + 1/b \geq b^2$; $c^5 + 1/c \geq c^2$.

Suy ra $a^5 + b^5 + c^5 +$

Mặt khác $a^2 + 1 \geq 2a$; $b^2 + 1 \geq 2b$; $c^2 + 1 \geq 2c$

Suy ra $a^2 + b^2 + c^2 \geq 2a + 2b + 2c - 3 = 3$

Vậy đpcm.

Câu 4.

c. Tam giác ABE vuông tại B và BM vuông góc với AE

Nên ta có $AM.AE = AB^2$

Tương tự $AN.AF = AB^2$

Suy ra $AM.AE = AN.AF$

Hay $AM/AN = AE/AF$

Xét $\triangle AMN$ và $\triangle AFE$ có góc MAN chung

Và $AM/AN = AF/AE$

Do đó $\triangle AMN$ và $\triangle AFE$ đồng dạng

Suy ra góc AMN = góc AFE.

Mà góc AMN + góc NME = 180° (kề bù)

Nên góc AFE + góc NME = 180°

Vậy tứ giác MNFE nội tiếp đường tròn.

d.

Góc $MAN = 90^\circ$

Nên tam giác AEF vuông tại A suy ra $AK = KB = KF$

Do đó góc $KAF =$ góc KFA

Mà góc $AMN =$ góc KFA (cmt)

Suy ra góc $KAF =$ góc AMN

Mà góc $AMN +$ góc $ANM = 90^\circ$

Suy ra góc $KAF +$ góc $ANM = 90^\circ$.

Vậy AK vuông góc với MN

Câu 5.

Ta có $BC^2 = AB^2 + AC^2 = BH^2 + AH^2 + AK^2 + CK^2$

Ta cần chứng minh bất đẳng thức:

$$(ac + bd)^2 \leq (a^2 + b^2)(c^2 + d^2) (*)$$

Ta có: $(*) \Leftrightarrow a^2c^2 + 2acbd + b^2d^2 \leq a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \Leftrightarrow a^2d^2 - 2abcd + b^2c^2 \geq 0 \Leftrightarrow (ad - bc)^2 \geq 0$

(đúng với mọi a, b, c, d)

Dấu bằng xảy ra khi $ad = bc$ hay $a/c = b/d$

Áp dụng $(*)$ ta được: $2(BH^2 + AH^2) \geq (BH + AH)^2$ (1)

Tương tự ta có $2(AK^2 + CK^2) \geq (AK + CK)^2$ (2)

Suy ra $2BC^2 \geq (BH + AH)^2 + (AK + CK)^2$ (3)

Đặt $BH + AH = m$; đặt $AK + CK = n$

Vì góc $CAK +$ góc $BAH = 90^\circ$; mà góc $BAH +$ góc $ABH = 90^\circ$ nên góc $CAK =$ góc ABH

Dẫn đến tam giác ABH đồng dạng với tam giác CAK

$$\rightarrow AH/CK = BH/AK = AB/AC = (AH + BH)/(CK + AK) = m/n$$

$$\text{Nên } AB^2/m^2 = AC^2/n^2 = (AB^2 + AC^2)/(m^2 + n^2) \geq BC^2/(2BC^2) = 1/2$$

Hay m và n

$$\text{Chu vi tứ giác } BHKC \text{ là } BC + BH + AH + AK + KC = BC + m + n \leq BC + (AB + AC)$$

Vậy chu vi $BHKC$ lớn nhất là $BC + (AB + AC)$

Đề số 24. Chuyên Đại học Vinh. Năm học: 2015-2016**Câu 1** (2,0 điểm) Giải các phương trình:

a) $\frac{1}{x+1} + \frac{3}{2x+1} = \frac{8}{x-2}$

b) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{3-x} = \sqrt{3x+5}$

Câu 2 (1,5 điểm). Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^2 + x = y^2 + y \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 3 (1,5 điểm) Cho hai số thực a, b thỏa mãn $a + b = 3$, $ab = 1$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a^2 - b^2)}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}}$$

Câu 4 (4,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O), $AB < AC$. Phân giác góc BAC cắt BC tại D. Đường tròn tâm I đường kính AD cắt AB, AC lần lượt tại E và F.a) Chứng minh rằng $AD \perp EF$.b) Gọi K là giao điểm thứ hai của AD và (O). Chứng minh rằng $\triangle ABD \sim \triangle AKC$ c) Kẻ $EH \perp AC$ tại H. Chứng minh rằng $HE \cdot AD = EA \cdot EF$

d) Hãy so sánh diện tích của tam giác ABC với diện tích của tứ giác AEKF.

Câu 5 (1,0 điểm) Cho các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}$$

————— HẾT —————

ĐÁP ÁN
ĐỀ THI TUYỂN SINH
VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH NĂM 2015

Câu 1

$$\text{a) } \frac{1}{x+1} + \frac{3}{2x+1} = \frac{8}{x-2} \quad (1)$$

$$\text{ĐK: } x \neq -1; x \neq 2; x \neq -\frac{1}{2}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(2x+1)(x-2) + 3(x+1)(x-2) - 8(x+1)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x^2 - 3x - 2) + 3(x^2 - x - 2) - 8(2x^2 + 3x + 1)}{(x+1)(2x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-11x^2 - 30x - 16}{(x+1)(2x+1)(x-2)} = 0$$

$$\Rightarrow 11x^2 + 30x + 16 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(tm) \\ x = -\frac{8}{11}(tm) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\left\{ -2; -\frac{8}{11} \right\}$

$$\text{b) } \sqrt{2x+1} + \sqrt{3-x} = \sqrt{3x+5} \quad (2)$$

$$\begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 3-x \geq 0 \\ 3x+5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ x \leq 3 \\ x \geq -\frac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq x \leq 3$$

ĐK:

Với điều kiện trên, ta có:

$$(2) \Leftrightarrow 2x+1+3-x+2\sqrt{(2x+1)(3-x)} = 3x+5 \Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+3} = 2x+1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \\ 4(-2x^2+5x+3) = 4x^2+4x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 12x^2-16x-11=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ x = \frac{11}{6} \end{cases} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} (tm) \\ x = \frac{11}{6} (tm) \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình (2) là $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{11}{6}\right\}$

Câu 2

$$\begin{cases} x^2+x=y^2+y(1) \\ x^2+y^2=5(2) \end{cases} (I)$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2-y^2+x-y=0$$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y+1)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=x \\ y=-x-1 \end{cases}$$

• $y = x$: Thay vào (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow 2x^2=5 \Leftrightarrow x^2=\frac{5}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

• $y = -x - 1$. Thay vào (2) ta được:

$$(2) \Leftrightarrow x^2 + (-x-1)^2 = 5 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$x = 1 \Rightarrow y = -x - 1 = -2$$

$$x = -2 \Rightarrow y = -x - 1 = 1$$

$$(1; -2), (-2; 1), \left(\frac{\sqrt{10}}{2}; \frac{\sqrt{10}}{2}\right), \left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$$

Vậy hệ phương trình (I) có 4 nghiệm là

Câu 3

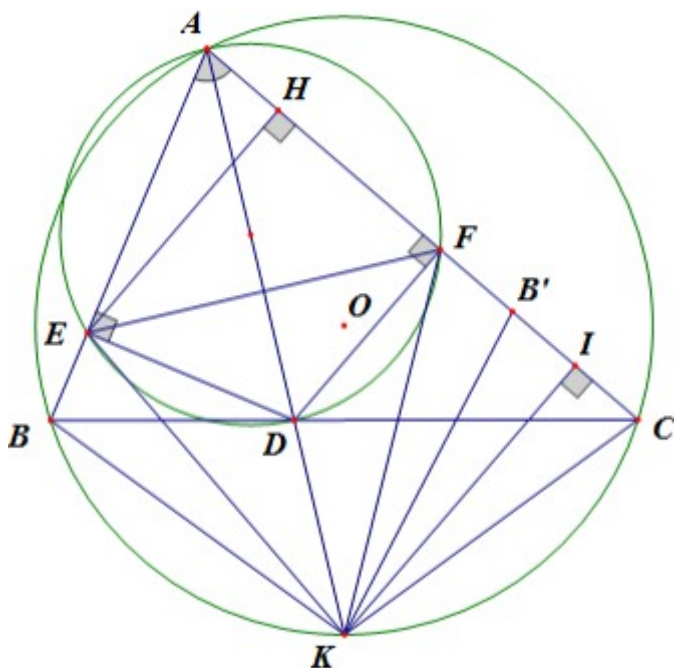
Ta có

$$\begin{aligned} P &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a^2 - b^2)}{a\sqrt{a} + b\sqrt{b}} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(a - b)(a + b)}{(\sqrt{a})^3 + (\sqrt{b})^3} \\ &= \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b)}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(a + b - \sqrt{ab})} \\ &= \frac{(a + b - 2\sqrt{ab})(a + b)}{a + b - \sqrt{ab}} \end{aligned}$$

Thay $a + b = 3$, $ab = 1$ ta được:

$$P = \frac{(3 - 2 \cdot 1) \cdot 3}{3 - 1} = \frac{3}{2}$$

Câu 4



a) Do E, F thuộc đường tròn đường kính AD nên $\angle AED = \angle AFD = 90^\circ$

Xét hai tam giác vuông AED và AFD có

$$\begin{cases} AD(\text{chung}) \\ \angle EAD = \angle FAD(\text{gt}) \end{cases} \Rightarrow \triangle AED = \triangle AFD \quad (\text{cạnh huyền – góc nhọn})$$

$\Rightarrow AE = AF$ và $DE = DF$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow AD$ là đường trung trực của đoạn EF.

$\Rightarrow AD \perp EF$.

b) Do ABKC là tứ giác nội tiếp đường tròn (O) nên $\angle ABC = \angle AKC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Xét hai tam giác ABD và ACK có

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle CAK(\text{gt}) \\ \angle ABD = \angle ACK(\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle ACK \quad (\text{g.g})$$

c) Vì AEDF là tứ giác nội tiếp nên $\angle EDA = \angle EFH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EA)

Xét tam giác AED và tam giác EHF ta có:

$$\begin{cases} \angle AED = \angle EHF = 90^\circ \\ \angle EDA = \angle EFH(\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow \triangle AED \sim \triangle EHF \quad (\text{g.g})$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EH} = \frac{AD}{EF}$$

$$\Rightarrow HE \cdot AD = EA \cdot EF$$

d) Trên tia AC lấy B' sao cho $AB = AB'$. Vẽ $KI \perp AC$ tại I

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle AB'K$ có

$$\begin{cases} AK(\text{chung}) \\ \angle KAB = \angle KAB'(\text{gt}) \\ AB = AB' \end{cases} \Rightarrow \triangle ABK = \triangle AB'K \quad (\text{c.g.c})$$

$\Rightarrow KB = KB'$ (hai cạnh tương ứng)

Mặt khác AK là phân giác góc BAC nên K là điểm chính giữa cung BC $\Rightarrow KB = KC$.

$\Rightarrow KB' = KC$

$\Rightarrow \triangle KB'C$ cân tại K

$\Rightarrow I$ là trung điểm B'C

$$\Rightarrow AI = \frac{AB + AC}{2} = \frac{AB + AC}{2}$$

$\Rightarrow I$ là trung điểm BC

$$S_{ABC} = S_{ABD} + S_{ACD} = \frac{1}{2} DE \cdot AB + \frac{1}{2} DF \cdot AC = \frac{1}{2} DF \cdot (AB + AC)$$

Vì AK là trung trực EF nên $AE = AF$, $EK = FK \Rightarrow \triangle AEK = \triangle AFK$ (c.c.c). Do đó

$$S_{AEDF} = 2 \cdot S_{AKF} = KI \cdot AF$$

Vì $DF \parallel KI$ (cùng vuông góc AC) nên theo định lí Ta-lét:

$$\frac{DF}{KI} = \frac{AF}{AI} \Rightarrow S_{AEDF} = KI \cdot AF = DF \cdot AI = DF \cdot \frac{AB + AC}{2} = S_{ABC}$$

$$\text{Vậy } S_{ABC} = S_{AEDF}$$

Câu 5

$$P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2}$$

Ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \quad (1)$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có $1+b^2 \geq 2b$

Thay vào (1) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \quad (2)$$

Tương tự, ta có:

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \quad (3)$$

$$\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2} \quad (4)$$

Cộng từng vế ba BĐT (2), (3), (4) ta được:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \left(\frac{ab+bc+ca}{2} \right) \quad (5)$$

Mặt khác

$$(a+b+c)^2 - 3(ab+bc+ca) = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] \geq 0$$

$$\Rightarrow ab+bc+ca \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} = 3 \quad (6)$$

Thay điều kiện $a+b+c=3$ và BĐT (6) vào (5) ta có

$$P = \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq \frac{3}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{3}{2}$, đạt được khi $a=b=c=1$.

Đề số 25. Chuyên Hà Giang. Năm học: 2015-2016

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{1}{\sqrt{a}-1} - \frac{1}{\sqrt{a}} \right) : \left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-2} - \frac{\sqrt{a}+2}{\sqrt{a}-1} \right)$$

a. Rút gọn biểu thức P

b. Tìm a để $P > \frac{1}{6}$

Câu 2 (2,0 điểm)

Cho phương trình: $x^2 - 2(m-1)x + m + 1 = 0$

a. Với giá trị nào của m thì phương trình có hai nghiệm phân biệt

b. Tìm m để phương trình có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 = 3x_2$

Câu 3 (1,5 điểm)

Hai người thợ làm một công việc trong 16 giờ thì xong. Nếu người thứ nhất làm trong 3 giờ và người thứ hai làm trong 6 giờ thì họ làm được $\frac{1}{4}$ công việc. Hỏi mỗi người làm công việc đó một mình trong mấy giờ thì xong.

Câu 4 (3,5 điểm)

Cho nửa đường tròn $(O;R)$, đường kính AB , C là điểm chính giữa cung AB . Điểm M thuộc cung AC ($M \neq A$, $M \neq C$). Qua M kẻ tiếp tuyến d với nửa đường tròn, gọi H là giao điểm của BM với OC . Từ H kẻ một đường thẳng song song với AB , đường thẳng đó cắt tiếp tuyến d ở E .

- Chứng minh $OHME$ là tứ giác nội tiếp
- Chứng minh $EH = R$
- Kẻ MK vuông góc với OC tại K . Chứng minh đường tròn ngoại tiếp ΔOBC đi qua tâm đường tròn nội tiếp ΔOMK .

Câu 5 (1,0 điểm)

Tìm giá trị lớn nhất của $A = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-2}$, biết $x + y = 4$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

- Ta có: Điều kiện: $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$

$$\begin{aligned} P &= \frac{\sqrt{a} - (\sqrt{a} - 1)}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} : \frac{(\sqrt{a} + 1)(\sqrt{a} - 1) - (\sqrt{a} + 2)(\sqrt{a} - 2)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} : \frac{(a-1) - (a-4)}{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)} = \frac{1}{\sqrt{a}(\sqrt{a} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{a} - 2)(\sqrt{a} - 1)}{3} \\ &= \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}} \end{aligned}$$

- Điều kiện: $a > 0$, $a \neq 1$, $a \neq 4$

$$P > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} - 2}{3\sqrt{a}} > \frac{1}{6} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{a} - 2}{\sqrt{a}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(\sqrt{a} - 2) > \sqrt{a} \Leftrightarrow \sqrt{a} > 4 \Leftrightarrow a > 16 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $a > 16$ là điều kiện cần tìm

Câu 2

- Phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' = (m - 1)^2 - (m + 1) > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m > 0 \Leftrightarrow m(m - 3) > 0 \Leftrightarrow m > 3 \text{ hoặc } m < 0$$

b. Với $m > 3$ hoặc $m < 0$, phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 . Theo Viét ta có

$$x_1 + x_2 = 2m - 2; x_1 x_2 = m + 1 \Rightarrow x_1 = 2m - 2 - x_2$$

$$\text{Ta có } x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow 2m - 2 - x_2 = 3x_2 \Leftrightarrow 4x_2 = 2m - 2 \Leftrightarrow x_2 = \frac{m-1}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{3(m-1)}{2}$$

$$\Rightarrow m + 1 = x_1 x_2 = \frac{m-1}{2} \cdot \frac{3(m-1)}{2} \Rightarrow 4(m+1) = 3(m-1)^2$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 - 10m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{5+2\sqrt{7}}{3} \quad (\text{thỏa mãn}) \text{ hoặc } m = \frac{5-2\sqrt{7}}{3} \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$\text{Vậy } m = \frac{5 \pm 2\sqrt{7}}{3} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

Câu 3

Gọi số giờ để mỗi người làm một mình hết công việc đó lần lượt là x và y (h) ($x, y > 0$)

Mỗi giờ, người thứ nhất và người thứ hai làm được $\frac{1}{x}$ và $\frac{1}{y}$ (công việc)

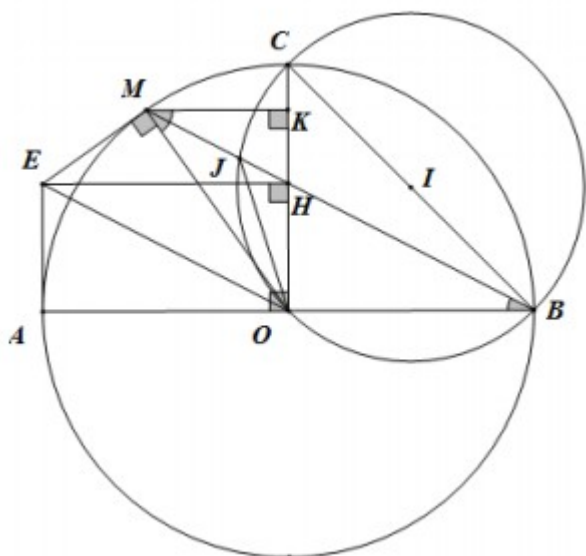
$$\text{Hai người làm hết công việc đó trong 16h nên } 16\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\text{Người thứ nhất làm trong 3h và người thứ 2 làm trong 6h thì được } \frac{1}{4} \text{ công việc nên } 3 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) có hệ: } \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{16} \\ 3 \cdot \frac{1}{x} + 6 \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{48} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 24 \\ y = 48 \end{cases} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy thời gian để mỗi người làm một mình xong công việc là 24h và 48h

Câu 4



a. Vì C là điểm chính giữa cung AB nên $OC \perp AB$. ME là tiếp tuyến của (O) $\Rightarrow ME \perp MO$

$\Rightarrow OHE = OME = 90^\circ \Rightarrow OHME$ là tứ giác nội tiếp (1)

b. Có góc nội tiếp chắn nửa đường tròn $AMB = 90^\circ \Rightarrow AMH + AOH = 180^\circ$

$\Rightarrow OHMA$ là tứ giác nội tiếp (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 5$ điểm O, H, M, E, A cùng thuộc 1 đường tròn $\Rightarrow OMEA$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow EAO = 180^\circ - EMO = 90^\circ$

Tứ giác OHEA có 3 góc vuông nên là hình chữ nhật. $\Rightarrow EH = OA = R$.

c. Gọi I là trung điểm BC $\Rightarrow$ đường tròn (I), đường kính BC là đường tròn ngoại tiếp ΔOBC

Gọi J là giao của (I) và BH.

Vì $OM = OB$ nên ΔOMB cân tại O $\Rightarrow OMB = OBM$

Vì $MK \perp OC \Rightarrow MK \parallel AB \Rightarrow OBM = KMB$

Suy ra $OMB = KMB \Rightarrow MJ$ là phân giác của góc OMK (3)

Vì $OJCB$ là tứ giác nội tiếp nên $JOC = JBC$ (4)

Có $MOC = 2.MBC$ (góc ở tâm và góc nội tiếp) (5)

Từ (4) và (5) $\Rightarrow MOC = 2.JOC \Rightarrow MOJ = JOC \Rightarrow OJ$ là phân giác góc MOC (6)

Từ (3) và (6) $\Rightarrow J$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác MKO

Vậy đường tròn (I) đi qua tâm đường tròn nội tiếp ΔMKO

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số $(1;1)$ và $(\sqrt{x-1}; \sqrt{y-2})$ ta có

$$A^2 = (1 \cdot \sqrt{x-1} + 1 \cdot \sqrt{y-2})^2 \leq (1^2 + 1^2)(x-1 + y-2) = 2(x+y-3) = 2 \Rightarrow A \leq \sqrt{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi
$$\begin{cases} \frac{1}{1} = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{y-2}} \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=y-2 \\ x+y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$$

Vậy GTLN của A là $\sqrt{2}$

Đề số 26. Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình. Năm học: 2015-2016

Câu I (2,0 điểm)

1) Tính giá trị của các biểu thức sau:

$$a) A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}}$$

$$b) B = \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$$

2) Rút gọn biểu thức:

$$C = \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1$$

Câu II (2,0 điểm)

- 1) Giải phương trình: $\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{9x-2} + \frac{1}{5-4x}$
- 2) Tìm nghiệm nguyên dương của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x + y = z \\ x^3 + y^3 = z^2 \end{cases}$$

Câu III (2,0 điểm)

Một vận động viên A chạy từ chân đồi đến đỉnh đồi cách nhau 6km với vận tốc 10km/h rồi chạy xuống dốc với vận tốc 15km/h. Vận động viên B chạy từ chân đồi lên đỉnh đồi với vận tốc 12km/h và gặp vận động viên A đang chạy xuống. Hỏi điểm hai người gặp nhau cách đỉnh đồi bao nhiêu ki-lô-mét, biết rằng B chạy sau A là 15 phút.

Câu IV (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn đường kính AB và dây MN có độ dài bằng bán kính (M thuộc cung AN, M khác A, N khác B). Các tia AM và BN cắt nhau tại I, các dây AN và BM cắt nhau tại K.

- 1) Chứng minh rằng: IK vuông góc với AB.
- 2) Chứng minh rằng: $AK \cdot AN + BK \cdot BM = AB^2$
- 3) Tìm vị trí của dây MN để diện tích tam giác IAB lớn nhất.

Câu V (1,0 điểm)

- 1) Chứng minh rằng nếu p và (p+2) là hai số nguyên tố lớn hơn 3 thì tổng của chúng chia hết cho 12.

- 2) Cho $\begin{cases} x > 0, y > 0, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases}$. Chứng minh rằng: $\frac{1}{x+y+1} + \frac{1}{y+z+1} + \frac{1}{z+x+1} \leq 1$
- Hết -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh: Phòng thi:

Giám thị 1 (Họ và tên, chữ ký):

Giám thị 2 (Họ và tên, chữ ký):

SỞ GD & ĐT HOÀ BÌNH

KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRƯỜNG THPT CHUYÊN HOÀNG VĂN THỤ
NĂM HỌC 2015-2016
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN TOÁN
(DÀNH CHO CHUYÊN TOÁN)
(Hướng dẫn chấm này gồm có 03 trang)

Câu I (2,0 điểm)

Phần ý	Nội dung	Điểm
--------	----------	------

1	$A = \frac{4}{3+\sqrt{5}} - \frac{8}{1+\sqrt{5}} + \frac{15}{\sqrt{5}}$ $= \frac{4(3-\sqrt{5})}{4} - \frac{8(1-\sqrt{5})}{-4} + \frac{15\sqrt{5}}{5} = 3 - \sqrt{5} + 2 - 2\sqrt{5} + 3\sqrt{5} = 5$	0,5đ
	$B = \sqrt{\sqrt{2} + 2\sqrt{\sqrt{2}-1}} + \sqrt{\sqrt{2} - 2\sqrt{\sqrt{2}-1}}$ $= \sqrt{(\sqrt{\sqrt{2}-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{\sqrt{2}-1}-1)^2}$ $= \sqrt{\sqrt{2}-1} + 1 + 1 - \sqrt{\sqrt{2}-1}$ $= 2$	0,5đ
2	$C = \frac{a^2 - \sqrt{a}}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{a^2 + \sqrt{a}}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1 \quad (\text{DK : } a \geq 0)$ $C = \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 - 1]}{a + \sqrt{a} + 1} - \frac{\sqrt{a}[(\sqrt{a})^3 + 1]}{a - \sqrt{a} + 1} + a + 1$	0,5đ
	$= \sqrt{a}(\sqrt{a} - 1) - \sqrt{a}(\sqrt{a} + 1) + a + 1$ $= a - \sqrt{a} - a - \sqrt{a} + a + 1$ $= (\sqrt{a} - 1)^2$	0,5đ

Câu II (2,0 điểm)

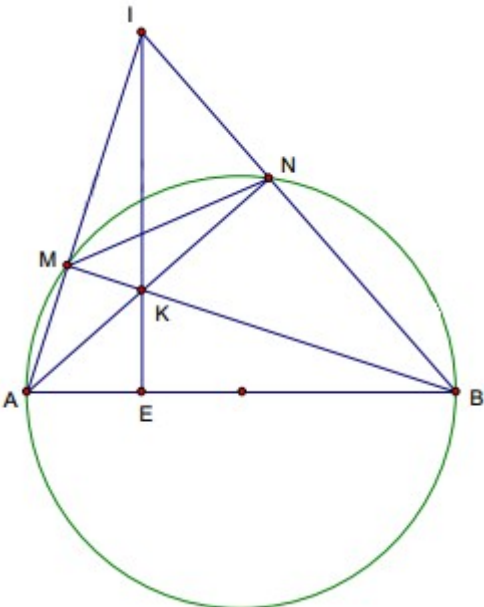
Phần ý	Nội dung	Điểm
1	$\frac{1}{3x-1} + \frac{1}{2x+4} = \frac{1}{9x-2} + \frac{1}{5-4x}; \text{DK: } x \neq \frac{1}{3}, x \neq -2, x \neq \frac{2}{9}, x \neq \frac{5}{4}$	0,25đ
	<p>Ta có pt: $\frac{5x+3}{(3x-1)(2x+4)} = \frac{5x+3}{(9x-2)(5-4x)}$</p>	0,25đ
	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ (3x-1)(2x+4) = (9x-2)(5-4x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} \\ 6x^2 + 12x - 2x - 4 = -36x^2 + 45x + 8x - 10 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{3}{5} (TM) \\ x = \frac{6}{7} (TM) \\ x = \frac{1}{6} (TM) \end{cases}$ <p>Vậy phương trình đã có 3 nghiệm phân biệt như trên.</p>	0,5đ
2	<p>Ta có: $x^3 + y^3 = (x+y)^2 \Leftrightarrow (x+y)(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$</p>	0,25đ
	<p>Vì x, y nguyên dương nên x+y > 0, ta có: $x^2 - xy + y^2 - x - y = 0$</p>	
	$\Leftrightarrow 2(x^2 - xy + y^2 - x - y) = 0$ $\Leftrightarrow (x-y)^2 + (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$	0,25đ
	<p>Vì x, y nguyên nên có 3 trường hợp:</p>	0,25đ

	+ Trường hợp 1: $\begin{cases} x - y = 0 \\ (x - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = y = 2, z = 4 \\ (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$	
	+ Trường hợp 2: $\begin{cases} x - 1 = 0 \\ (x - y)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1, y = 2, z = 3 \\ (y - 1)^2 = 1 \end{cases}$	
	+ Trường hợp 3: $\begin{cases} y - 1 = 0 \\ (x - y)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 2, y = 1, z = 3 \\ (x - 1)^2 = 1 \end{cases}$	
	Vậy hệ có 3 nghiệm (1,2,3);(2,1,3);(2,2,4)	0,25đ

Câu III (2,0 điểm)

Phần ý	Nội dung	Điểm
	Gọi điểm 2 vận động viên gặp nhau cách đỉnh đồi x km ($x > 0$)	0,25đ
	Thời gian B đã chạy là $\frac{6-x}{12}$. Đồi $15p = \frac{1}{4}$ (giờ)	0,25đ
	Thời gian A đã chạy từ chân đồi đến đỉnh đồi là $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$ (giờ)	0,25đ
	Thời gian A đã chạy từ đỉnh đồi đến chỗ gặp nhau là $\frac{x}{15}$.	0,25đ
	Ta có phương trình $\frac{1}{4} + \frac{6-x}{12} = \frac{x}{15} + \frac{3}{5}$	0,5đ
	Giải phương trình được $x = 1(\text{km})$. KL	0,5đ

Câu IV (3,0 điểm)

Phần ý	Nội dung	Điểm
		

1	Ta thấy $AN \perp BI$, $BM \perp AI$, nên K là trực tâm tam giác IAB. Do đó $IK \perp AB$	1,0đ
2	Vì $\triangle AEK \sim \triangle ANB \sim$ nên $AK \cdot AN = AE \cdot AB$	0,25đ
	Tương tự vì $\triangle BEK \sim \triangle BMA \sim$ nên $BK \cdot BM = BE \cdot BA$	0,25đ
	Vậy $AK \cdot AN + BK \cdot BM = AE \cdot AB + BE \cdot BA = AB^2$	0,5đ
3	Chỉ ra số $MN = 60^\circ$ nên tính được $\angle IAB = 60^\circ$, do đó điểm I thuộc cung chứa góc 60° dựng trên đoạn AB.	0,5đ
	Diện tích tam giác IAB lớn nhất khi IE lớn nhất (IE là đường cao của tam giác IAB), khi đó I nằm chính giữa cung chứa góc 60° dựng trên đoạn AB tương ứng với MN song song với AB.	0,5đ

Câu V (1,0 điểm)

Phần ý	Nội dung	Điểm
1	Ta có: $p + (p+2) = 2(p+1)$	0,25đ
	Vì p lẻ nên $(p+1) : 2 \Rightarrow 2(p+1) : 4$ (1)	
	Vì p, (p+1), (p+2) là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có ít nhất một số chia hết cho 3, mà p và (p+2) nguyên tố nên $(p+1) : 3$ (2)	0,25đ
	Từ (1) và (2) suy ra $[p + (p+2)] : 12$ (đpcm)	
2	Đặt $\begin{cases} x = a^3 \\ y = b^3 \\ z = c^3 \end{cases}$, vì $\begin{cases} x, y, z > 0 \\ xyz = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a, b, c > 0 \\ abc = 1 \end{cases}$	0,25đ
	Ta có $x + y + 1 = a^3 + b^3 + 1 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 1 \geq (a+b)ab + 1 = ab(a+b+c) = \frac{a+b+c}{c}$	
	Do đó $\frac{1}{x+y+1} \leq \frac{c}{a+b+c}$	0,25đ
	Tương tự ta có $\frac{1}{y+z+1} \leq \frac{a}{a+b+c}$ $\frac{1}{z+x+1} \leq \frac{b}{a+b+c}$	
	Cộng 3 bất đẳng thức trên theo vế ta có đpcm.	

* Chú ý: Các lời giải đúng khác đều được xem xét cho điểm tương ứng.

Đề số 27. Chuyên Hùng Vương – Phú Thọ. Năm học: 2015-2016

Câu 1 (1,5 điểm)

- a) Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.
- b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$

Câu 2 (2,0 điểm)

$$A = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{5}}$$

- a) Rút gọn biểu thức:
- b) Tìm m để phương trình: $(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$$

Câu 4 (3,5 điểm)

Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối xứng với B qua AC và F và điểm đối xứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF.

- Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác BHCK nội tiếp.
- Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R.
- Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}$$

----- **HẾT** -----

Họ và tên thí sinh: Số báo danh:

Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
PHÚ THỌ
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10
TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG
NĂM HỌC 2015-2016
HƯỚNG DẪN CHẤM MÔN: TOÁN
(Dành cho thí sinh thi vào lớp chuyên Toán)
(Hướng dẫn chấm gồm 05 trang)**

I. Một số chú ý khi chấm bài

- Hướng dẫn chấm thi dưới đây dựa vào lời giải sơ lược của một cách, khi chấm thi, cán bộ chấm thi cần bám sát yêu cầu trình bày lời giải đầy đủ, chi tiết, hợp lô-gic và có thể chia nhỏ đến 0,25 điểm.

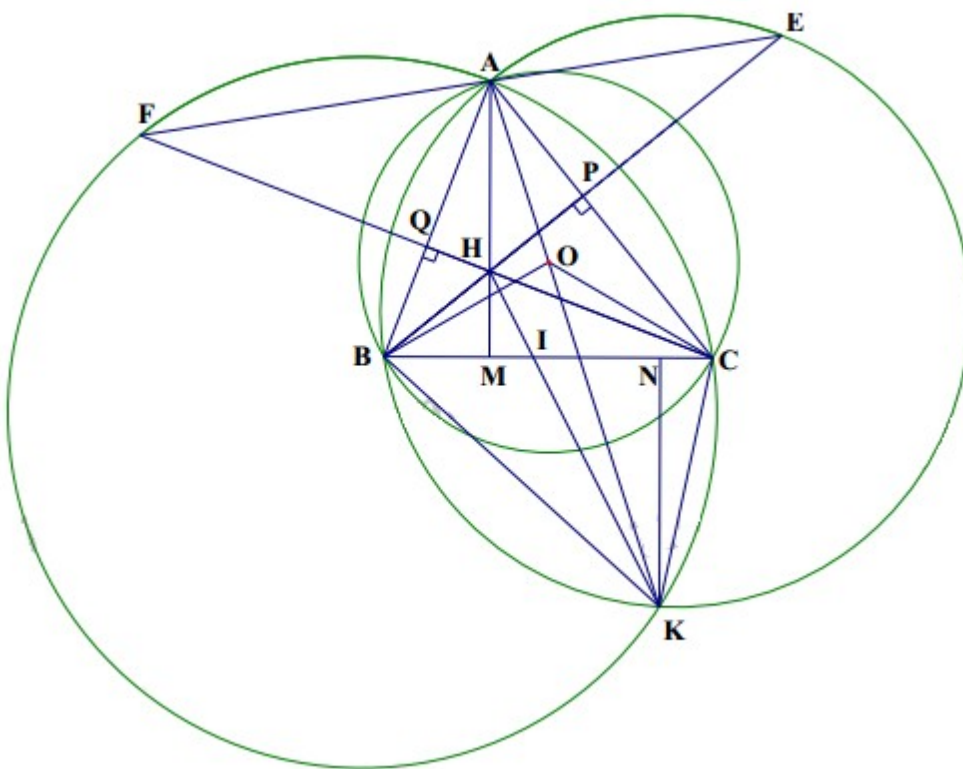
- Thí sinh làm bài theo cách khác với Hướng dẫn mà đúng thì tổ chấm cần thống nhất cho điểm tương ứng với thang điểm của Hướng dẫn chấm.
- Điểm bài thi là tổng điểm các câu không làm tròn số.

II. Đáp án-thang điểm

Câu 1 (1,5 điểm)	
a) Chứng minh rằng nếu số nguyên n lớn hơn 1 thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố thì n chia hết cho 5.	
b) Tìm nghiệm nguyên của phương trình: $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1)$	
Nội dung	Điểm
a) (0,5 điểm) Ta có với mọi số nguyên m thì m^2 chia cho 5 dư 0, 1 hoặc 4. + Nếu n^2 chia cho 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1 \Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 5; k \in \mathbb{N}^*$. Nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố	0,25
Nếu n^2 chia cho 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4 \Rightarrow n^2 + 16 = 5k + 20; k \in \mathbb{N}^*$. Nên $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Vậy $n^2 \div 5$ hay $n \div 5$	0,25
b) (1,0 điểm) $x^2 - 2y(x - y) = 2(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 2(y + 1)x + 2(y^2 - 1) = 0(1)$ Để phương trình (1) có nghiệm nguyên x thì Δ' theo y phải là số chính phương	0,25
Ta có $\Delta' = y^2 + 2y + 1 - 2y^2 + 2 = -y^2 + 2y + 3 = 4 - (y - 1)^2 \leq 4$ Δ' chính phương nên $\Delta' \in \{0; 1; 4\}$	0,25
+ Nếu $\Delta' = 4 \Rightarrow (y - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 1$ thay vào phương trình (1) ta có : $x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x - 4) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 4 \end{cases}$ + Nếu $\Delta' = 1 \Rightarrow (y - 1)^2 = 3 \Leftrightarrow y \notin \mathbb{Z}$. $\Delta' = 0 \Rightarrow (y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ + Nếu	0,25
+ Với $y = 3$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 - 8x + 16 = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ + Với $y = -1$ thay vào phương trình (1) ta có: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$ Vậy phương trình (1) có 4 nghiệm nguyên : $(x, y) \in \{(0; 1); (4; 1); (4; 3); (0; -1)\}$	0,25
Câu 2 (2,0 điểm)	
$A = \frac{\sqrt{2}(3 + \sqrt{5})}{2\sqrt{2} + \sqrt{3 + \sqrt{5}}} + \frac{\sqrt{2}(3 - \sqrt{5})}{2\sqrt{2} - \sqrt{3 - \sqrt{5}}}$	
a) Rút gọn biểu thức:	
b) Tìm m để phương trình: $(x - 2)(x - 3)(x + 4)(x + 5) = m$ có 4 nghiệm phân biệt.	
a) (1,0 điểm)	0,25
$A = \frac{2(3 + \sqrt{5})}{4 + \sqrt{6 + 2\sqrt{5}}} + \frac{2(3 - \sqrt{5})}{4 - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}}$	

$= 2 \left[\frac{3+\sqrt{5}}{4+\sqrt{(\sqrt{5}+1)^2}} + \frac{3-\sqrt{5}}{4-\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}} \right] = 2 \left(\frac{3+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}} + \frac{3-\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \right)$	0,25
$= 2 \left[\frac{(3+\sqrt{5})(5-\sqrt{5}) + (3-\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{(5+\sqrt{5})(5-\sqrt{5})} \right] = 2 \left(\frac{15-3\sqrt{5}+5\sqrt{5}-5+15+3\sqrt{5}-5\sqrt{5}-5}{25-5} \right)$	0,25
$= 2 \cdot \frac{20}{20} = 2$ Vậy A=2	0,25
b) (1,0 điểm) Phương trình $(x-2)(x-3)(x+4)(x+5) = m$ $\Leftrightarrow (x^2+2x-8)(x^2+2x-15) = m(1)$	0,25
Đặt $x^2+2x+1 = (x+1)^2 = y (y \geq 0)$ phương trình (1) trở thành: $(y-9)(y-16) = m \Leftrightarrow y^2 - 25y + 144 - m = 0(2)$ Nhận xét: Với mỗi giá trị $y > 0$ thì phương trình: $(x+1)^2 = y$ có 2 nghiệm phân biệt, do đó phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm dương phân biệt.	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = 4m + 49 > 0 \\ 25 > 0 \\ 144 - m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{-49}{4} < m < 144$	0,25
Vậy với $\frac{-49}{4} < m < 144$ thì phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.	0,25
Câu 3 (2,0 điểm)	
a) Giải phương trình: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$	
b) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases}$	
Nội dung	Điểm
a) (1,0 điểm) Điều kiện: $x \geq 1(*)$ Ta có: $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$ $\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$	0,25
Đặt $x + \sqrt{x-1} = y (y \geq 1)**$, phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$	0,25
$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$	0,25
+Với $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện (**). + Với $y = 3$ ta có phương trình:	0,25

$x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x^2-7x+10=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3 \\ x=2 \Leftrightarrow x=2 \\ x=5 \end{cases}$ <p>thỏa mãn điều kiện (*). Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.</p>	
<p>b) (1,0 điểm)</p> $\begin{cases} x^3 + xy^2 - 10y = 0 \\ x^2 + 6y^2 = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0 & (1) \\ x^2 + 6y^2 = 10 & (2) \end{cases}$	0,25
<p>Từ phương trình (1) ta có:</p> $x^3 + xy^2 - (x^2 + 6y^2)y = 0$ $\Leftrightarrow x^3 + xy^2 - x^2y - 6y^3 = 0$ $\Leftrightarrow x^3 - 2x^2y + x^2y - 2xy^2 + 3xy^2 - 6y^3 = 0$ $\Leftrightarrow (x-2y)(x^2 + xy + 3y^2) = 0$	0,25
$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ x^2 + xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$	0,25
<p>+ Trường hợp 1: $x^2 + xy + 3y^2 = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{11y^2}{4} = 0 \Rightarrow x = y = 0$</p> <p>Vì $x = y = 0$ không thỏa mãn phương trình (2).</p> <p>+ Trường hợp 2: $x = 2y$ thay vào phương trình (2) ta có:</p> $4y^2 + 8y^2 = 12 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \Rightarrow x = 2 \\ y = -1 \Rightarrow x = -2 \end{cases}$ <p>Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(x; y) \in \{(2; 1); (-2; -1)\}$</p>	0,25
<p>Câu 4 (3,5 điểm)</p> <p>Cho đường tròn $(O; R)$ và dây cung $BC = R\sqrt{3}$ cố định. Điểm A di động trên cung lớn BC sao cho tam giác ABC nhọn. Gọi E là điểm đối ứng với B qua AC và F và điểm đối ứng với C qua AB. Các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABE và ACF cắt nhau tại K (K không trùng A). Gọi H là giao điểm của BE và CF.</p> <p>a) Chứng minh KA là phân giác trong góc BKC và tứ giác BHCK nội tiếp.</p> <p>b) Xác định vị trí điểm A để diện tích tứ giác BHCK lớn nhất, tính diện tích lớn nhất của tứ giác đó theo R.</p> <p>c) Chứng minh AK luôn đi qua một điểm cố định.</p>	
Nội dung	Điểm



<p>a) (1,5 điểm)</p>	<p>0,5</p>
<p>Ta có $\angle AKB = \angle AEB$ (vì cùng chắn cung AB của đường tròn ngoại tiếp tam giác AEB) Mà $\angle ABE = \angle AEB$ (tính chất đối xứng) suy ra $\angle AKB = \angle ABE$ (1) $\angle AKC = \angle AFC$ (vì cùng chắn cung AC của đường tròn ngoại tiếp tam giác AFC) $\angle ACF = \angle AFC$ (tính chất đối xứng) suy ra $\angle AKC = \angle ACF$ (2)</p>	
<p>Mặt khác $\angle ABE = \angle ACF$ (cùng phụ với $\angle BAC$) (3). Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle AKB = \angle AKC$ hay KA là phân giác trong của góc BKC.</p>	<p>0,25</p>
<p>Gọi P, Q lần lượt là các giao điểm của BE với AC và CF với AB. Ta có $BC = R\sqrt{3}$ nên $\angle BOC = 120^\circ$; $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC = 60^\circ$. Trong tam giác vuông ABP có $\angle APB = 90^\circ$; $\angle BAC = 60^\circ \Rightarrow \angle APB = 30^\circ$ hay $\angle ABE = \angle ACF = 30^\circ$</p>	<p>0,25</p>
<p>Tứ giác APHQ có $\angle AQH + \angle APH = 180^\circ \Rightarrow \angle PAQ + \angle PHQ = 180^\circ \Rightarrow \angle PHQ = 120^\circ \Rightarrow \angle BHC = 120^\circ$ (đối đỉnh).</p>	<p>0,25</p>
<p>Ta có $\angle AKC = \angle ABE = 30^\circ$, $\angle AKB = \angle ACF = \angle ABE = 30^\circ$ (theo chứng minh phần a). Mà $\angle BKC = \angle AKC + \angle AKB = \angle AFC + \angle AEB = \angle ACF + \angle ABE = 60^\circ$ suy ra $\angle BHC + \angle BKC = 180^\circ$ nên tứ giác BHCK nội tiếp.</p>	<p>0,25</p>
<p>b) (1,5 điểm)</p>	<p>0,5</p>
<p>Gọi (O') là đường tròn đi qua bốn điểm B, H, C, K. Ta có dây cung $BC = R\sqrt{3}$ $\angle BKC = 60^\circ = \angle BAC$ nên bán kính đường tròn (O') bằng bán kính R của đường tròn (O).</p>	
<p>Gọi M là giao điểm của AH và BC thì MH vuông góc với BC, kẻ KN vuông góc với BC (N thuộc BC), gọi I là giao điểm của HK và BC. Ta có</p>	<p>0,25</p>

$S_{BHCK} = S_{BHC} + S_{BCK} = \frac{1}{2} BC.HM + \frac{1}{2} BC.KN = \frac{1}{2} BC.(HM + KN)$ $S_{BHCK} \leq \frac{1}{2} BC(HI + KI) = \frac{1}{2} BC.KH \text{ (Do } HM \leq HI; KN \leq KI)$	
<p>Ta có KH là dây cung của đường tròn (O'; R) suy ra $KH \leq 2R$ (không đổi)</p> <p>Nên S_{BHCK} lớn nhất khi $KH = 2R$ và $HM + KN = HK = 2R$.</p>	0,25
<p>Giá trị lớn nhất $S_{BHCK} = \frac{1}{2} R\sqrt{3}.2.R = R^2\sqrt{3}$</p>	0,25
<p>Khi HK là đường kính của đường tròn (O') thì M, I, N trùng nhau suy ra I là trung điểm của BC nên ΔABC cân tại A. Khi đó A là điểm chính giữa cung lớn BC.</p>	0,25
<p>c) (0,5 điểm)</p> <p>Ta có $\angle BOC = 120^\circ$; $\angle BKC = 60^\circ$ suy ra $\angle BOC + \angle BKC = 180^\circ$</p> <p>nên tứ giác BOCK nội tiếp đường tròn.</p>	0,25
<p>Ta có $OB = OC = R$ suy ra $OB = OC \Rightarrow \angle BKO = \angle CKO$ hay KO là phân giác góc BKC theo phần (a) KA là phân giác góc BKC nên K, O, A thẳng hàng hay AK đi qua O cố định</p>	0,25
<p>Câu 5 (1,0 điểm)</p> <p>Cho 3 số thực dương x, y, z thỏa mãn: $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:</p> $P = \frac{y^2 z^2}{x(y^2 + z^2)} + \frac{z^2 x^2}{y(z^2 + x^2)} + \frac{x^2 y^2}{z(x^2 + y^2)}$	
Nội dung	Điểm
<p>$P = \frac{1}{x(\frac{1}{z^2} + \frac{1}{y^2})} + \frac{1}{y(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{z^2})} + \frac{1}{z(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2})}$</p> <p>Ta có:</p>	0,25
<p>Đặt $\frac{1}{x} = a; \frac{1}{y} = b; \frac{1}{z} = c$ thì $a, b, c > 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 1$</p> $P = \frac{a}{b^2 + c^2} + \frac{b}{c^2 + a^2} + \frac{c}{a^2 + b^2} = \frac{a^2}{a(1 - a^2)} + \frac{b^2}{b(1 - b^2)} + \frac{c^2}{c(1 - c^2)}$	0,25
<p>Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 3 số dương ta có:</p> $a^2(1 - a^2)^2 = \frac{1}{2} \cdot 2a^2(1 - a^2)(1 - a^2) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2a^2 + 1 - a^2 + 1 - a^2}{3} \right) = \frac{4}{27}$ $\Rightarrow a(1 - a^2) \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} \Leftrightarrow \frac{a^2}{a(1 - a^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} a^2(1)$ <p>Tương tự: $\frac{b^2}{b(1 - b^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} b^2(2); \frac{c^2}{c(1 - c^2)} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} c^2(3)$</p>	0,25
<p>Từ (1); (2); (3) ta có</p> $P \geq \frac{3\sqrt{3}}{2} (a^2 + b^2 + c^2) = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ <p>Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{1}{\sqrt{3}}$ hay $x = y = z = \sqrt{3}$</p>	0,25

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$ <p>Vậy giá trị nhỏ nhất của P là</p>	
--	--

Đề số 28. Chuyên Khánh Hòa. Năm học: 2015-2016

Bài 1. (2.00 điểm)

$$M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}}$$

Cho biểu thức

- 1) Tìm điều kiện xác định và rút gọn M.
- 2) Tính giá trị của M, biết rằng $x = (1 - \sqrt{3})^2$ và $y = 3 - \sqrt{8}$

Bài 2. (2,00 điểm)

- 1) Không dùng máy tính cầm tay, giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$
- 2) Tìm giá trị của m để phương trình $x^2 - mx + 1 = 0$ có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn hệ thức $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$

Bài 3. (2,00 điểm)

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol (P): $y = -x^2$

- 1) Vẽ parabol (P).
- 2) Xác định tọa độ các giao điểm A, B của đường thẳng (d): $y = -x - 2$ và (P). Tìm tọa độ M trên (P) sao cho tam giác MAB cân tại M.

Bài 4. (4,00 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Hai đường tròn (B; BA) và (C; CA) cắt nhau tại điểm thứ hai là D. Vẽ đường thẳng a bất kì qua D cắt đường tròn (B) tại M và cắt đường tròn (C) tại N (D nằm giữa M và N). Tiếp tuyến tại M của đường tròn (B) và tiếp tuyến tại N của đường tròn (C) cắt nhau tại E.

- 1) Chứng minh BC là tia phân giác của ABD
- 2) Gọi I là giao điểm của AD và BC. Chứng minh: $AD^2 = 4BI \cdot CI$
- 3) Chứng minh bốn điểm A, M, E, N cùng thuộc một đường tròn.
- 4) Chứng minh rằng số đo MEN không phụ thuộc vị trí của đường thẳng a.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN CHẤM

(Hướng dẫn chấm gồm 03 trang)

I. Hướng dẫn chung

- 1) Hướng dẫn chấm chỉ trình bày các bước chính của lời giải hoặc nêu kết quả. Trong bài làm, thí sinh phải trình bày lập luận đầy đủ.
- 2) Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong đáp án mà vẫn đúng thì cho đủ điểm từng phần như hướng dẫn quy định.
- 3) Việc chi tiết hoá thang điểm (nếu có) phải đảm bảo không làm thay đổi tổng số điểm của mỗi câu, mỗi ý trong hướng dẫn chấm và được thống nhất trong Hội đồng chấm thi.
- 4) Các điểm thành phần và điểm cộng toàn bài phải giữ nguyên không được làm tròn.

II. Đáp án và thang điểm

Bài 1:

$$M = \frac{x\sqrt{y} - \sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{xy}}$$

a) DK: $x \geq 0; y \geq 0$

$$\begin{aligned} M &= \frac{x\sqrt{y} - y\sqrt{x} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{1 + \sqrt{xy}} \\ &= \frac{\sqrt{xy}(\sqrt{x} - \sqrt{y}) + (\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1 + \sqrt{xy}} \\ &= \frac{(1 + \sqrt{xy})(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{1 + \sqrt{xy}} \\ &= \sqrt{x} - \sqrt{y} \end{aligned}$$

b) Với $x = (1 - \sqrt{3})^2$ và $y = 3 - \sqrt{8} = 3 - 2\sqrt{2} = (\sqrt{2} - 1)^2$

$$M = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2} = \sqrt{3} - 1 - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} - \sqrt{2}$$

Bài 2:

a)

$$\begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\sqrt{x} - 3\sqrt{y} = 4 \\ 4\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5\sqrt{y} = 0 \\ 2\sqrt{x} + \sqrt{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{y} = 0 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

b) $\Delta = (-m)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = m^2 - 4$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì: $m^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$ hoặc $m \leq -2$

Theo hệ thức Viet, ta có: $x_1 + x_2 = m$; $x_1 \cdot x_2 = 1$

Ta có: $(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 = 2$.

$$x_1^2 + 2x_1 + 1 + x_2^2 + 2x_2 + 1 = 2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 + 2(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 2m - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = \sqrt{3} - 1 (L) \\ m = -\sqrt{3} - 1 (TM) \end{cases}$$

Vậy $m = -\sqrt{3} - 1$

Bài 3:

a) Vẽ đồ thị $y = -x^2$

TXĐ: $D = \mathbb{R}$

Tọa độ đỉnh: $I(0;0)$

Trục đối xứng: $x = 0$

Tính biến thiên:

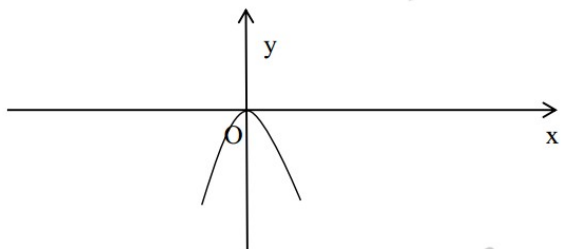
Hàm số đồng biến trên $(-\infty; 0)$ và nghịch biến trên $(0; +\infty)$.

BBT:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y		0	

Bảng giá trị

x	-1	0	1
y	-1	0	-1



b) HD: Viết pt đường trung trực (d') của AB, tìm giao điểm của (d') và (P), ta tìm được hai điểm M.

Hoành độ các giao điểm A, B của đường thẳng (d): $y = -x - 2$ và (P) là nghiệm của phương trình: $-x^2 = -x - 2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ hoặc $x = 2$

+ Với $x = -1$, thay vào (P), ta có: $y = -(-1)^2 = -1$, ta có: A(-1; -1)

+ Với $x = 2$, thay vào (P), ta có: $y = -(2)^2 = -4$, ta có: B(2; -4)

Suy ra trung điểm của AB là: $I(\frac{1}{2}; \frac{-5}{2})$

Đường thẳng (d') vuông góc với (d) có dạng: $y = x + b$;

Vi (d'): $y = x + b$ đi qua I nên: $\frac{-5}{2} = \frac{1}{2} + b \Leftrightarrow b = -3$

Vậy (d'): $y = x - 3$

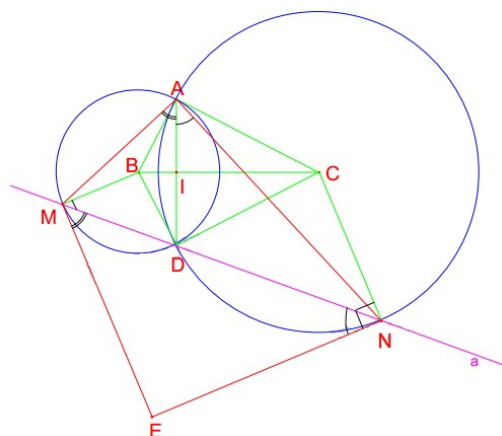
Phương trình hoành độ của (d') và (P) là: $x^2 + x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$

+ Với $x = \frac{-1 - \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{-7 - \sqrt{13}}{2}$

+ Với $x = \frac{-1 + \sqrt{13}}{2} \Rightarrow y = \frac{-7 + \sqrt{13}}{2}$

Vậy có hai điểm M cần tìm là: $(\frac{-1 - \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 - \sqrt{13}}{2})$ và $(\frac{-1 + \sqrt{13}}{2}; \frac{-7 + \sqrt{13}}{2})$

Bài 4:



a) C/m: $\triangle ABC = \triangle DBC$ (ccc) $\Rightarrow \angle ABC = \angle DBC$ hay: BC là phân giác của $\angle ABD$

b) Ta có: $AB = BD$ (=bk(B))

$$CA = CD (=bk(C))$$

Suy ra: BC là trung trực của AD hay $BC \perp AD \Rightarrow AI \perp B$

Ta lại có: $BC \perp AD$ tại I $\Rightarrow IA = ID$ (đlí)

Xét $\triangle ABC$ vuông tại A (gt) có: $AI \perp BC$, suy ra: $AI^2 = BI \cdot CI$ hay: $\frac{AD^2}{4} = BI \cdot CI \Rightarrow AD^2 = 4BI \cdot CI$

c) Ta có: $DME = DAM$ (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

$DNE = DAN$ (hệ quả t/c góc tạo bởi tia tuyến và dây cung)

Suy ra: $DME + DNE = DAM + DAN$

Trong $\triangle MNE$ có: $MEN + EMN + ENM = 180^\circ$, suy ra: $MEN + DAM + DAN = 180^\circ$

Hay: $MEN + MAN = 180^\circ \Rightarrow$ tứ giác AMEN nội tiếp.

d) Trong $\triangle AMN$ có: $MAN + AMN + ANM = 180^\circ$, mà: $MEN + MAN = 180^\circ$

suy ra: $MEN = AMN + ANM$

Ta lại có: $AND = ACB = \frac{1}{2}ACD, AMD = ABC = \frac{1}{2}ABD$ (góc ở tâm và góc nội tiếp cùng chắn một cung)

Mà: $\triangle ABC$ vuông tại A nên: $MEN = 90^\circ$ (không đổi)

Vậy số đo góc MEN không phụ thuộc vào đường thẳng a.

-----HẾT-----

Đề số 29. Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa. Năm học: 2015-2016

Câu 1: (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $M = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4} (a > 0, a \neq 4)$

a) Rút gọn biểu thức M.

b) Tìm tất cả các giá trị của a để $M \leq 0$.

Câu 2: (2,5 điểm)

a) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2x + \frac{3}{y} = 3 \\ x - \frac{2}{y} = 5 \end{cases}$$

b) Cho phương trình: $x^2 + 2(m-2) - m^2 = 0$, với m là tham số. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 < x_2; |x_1| - |x_2| = 6$

Câu 3: (1,5 điểm)

Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A và (C) là đường tròn tâm C bán kính CA. Lấy điểm D thuộc đường tròn (C)

và nằm trong tam giác ABC. Gọi M là điểm trên cạnh AB sao cho $BDM = \frac{1}{2}ACD$; N là giao điểm của đường thẳng MD với đường cao AH của tam giác ABC; E là giao điểm thứ hai của đường thẳng BD với đường tròn (C). Chứng minh rằng:

- a) MN song song với AE.
 b) $BD \cdot BE = BA^2$ và tứ giác DHCE nội tiếp.
 c) HA là đường phân giác của góc DHE và D là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Câu 5: (1,0 điểm) Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn: $x + y + z = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$$

----HẾT----

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI CHUYÊN LAM SƠN – MÔN TOÁN CHUNG

Câu	Nội dung	Điểm
Câu 1	<p>a/ Rút gọn biểu thức M ($a > 0$ và $a \neq 4$.)</p> $M = \left(\frac{a}{a-2\sqrt{a}} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{a-4\sqrt{a}+4}$ $= \left(\frac{a}{\sqrt{a}(\sqrt{a}-2)} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) : \frac{\sqrt{a}+1}{(\sqrt{a}-2)^2}$ $= \left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}-2} + \frac{a}{\sqrt{a}-2} \right) \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1} = \frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}+1)}{\sqrt{a}-2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-2)^2}{\sqrt{a}+1}$ $= \sqrt{a}(\sqrt{a}-2) = a - 2\sqrt{a}$	
	<p>b/ Tìm tất cả các giá trị của a để $M \leq 0$</p> $M \leq 0 \Rightarrow \sqrt{a}(\sqrt{a}-2) \leq 0 \Rightarrow \sqrt{a}-2 \leq 0 \text{ (do } \sqrt{a} \geq 0)$ $\Rightarrow \sqrt{a} \leq 2 \Rightarrow a \leq 4$ <p>Kết hợp điều kiện : Với $0 < a < 4$ thì $M \leq 0$. Không xảy ra dấu = vì $a \neq 0$ và $a \neq 4$.</p>	
Câu 2	<p>a/ Giải hệ phương trình</p> $\begin{cases} 2x + \frac{3}{y} = 3 \\ x - \frac{2}{y} = 5 \end{cases}$ <p>Điều kiện: $y \neq 0$. Đặt $\frac{1}{y} = t$ ta có hệ phương trình</p> $\begin{cases} 2x + 3t = 3 \\ x - 2t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 3t = 3 \\ 2x - 4t = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7t = 7 \\ x - 2t = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ <p>Với $t = -1 \Rightarrow \frac{1}{y} = -1 \Rightarrow y = -1$</p>	

	$\begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$ <p>Vậy hệ phương trình có 1 nghiệm duy nhất</p>	
	<p>b/ $x^2 + 2(m-2)x - m^2 = 0$ (m là tham số)</p> <p>Ta có: $\Delta' = (m-2)^2 + m^2$</p> <p>Do $\begin{cases} (m-2)^2 \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta' = (m-2)^2 + m^2 \geq 0$</p> <p>Dấu = xảy ra khi $\begin{cases} (m-2)^2 = 0 \\ m^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \Phi$</p> <p>Vậy $\Delta' = (m-2)^2 + m^2 > 0$ Vậy phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2$</p> <p>Theo viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 - 2m \\ x_1 x_2 = -m^2 \end{cases}$</p> <p>Đề</p> <p>$x_1 - x_2 = 6 \Rightarrow (x_1 - x_2)^2 = 36 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 - 2 x_1 x_2 = 36(1)$</p> <p>Do $x_1 x_2 = -m^2 \leq 0 \Rightarrow x_1 x_2 = -x_1 x_2$</p> <p>$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2 = 36 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 = 36 \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 6 \\ x_1 + x_2 = -6 \end{cases}$</p> <p>Thay vào (1) $\Rightarrow$</p> <p>- Nếu : $x_1 + x_2 = 6 \Rightarrow 4 - 2m = 6 \Rightarrow m = -1$</p> <p>- Nếu : $x_1 + x_2 = -6 \Rightarrow 4 - 2m = -6 \Rightarrow m = 5$</p> <p>Với $m = -1$, thay vào ta có phương trình</p> <p>$x^2 - 6x - 1 = 0$</p> <p>$\Delta' = 10 > 0$</p> <p>Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ là</p> <p>$x_2 = 3 + \sqrt{10}; x_1 = 3 - \sqrt{10}$</p> <p>Khi đó: $3 - \sqrt{10} - 3 + \sqrt{10} = -6(KTM)$</p> <p>Với $m = 5$, thay vào ta có phương trình</p> <p>$x^2 + 6x - 25 = 0$</p> <p>$\Delta' = 34 > 0$</p> <p>Phương trình có 2 nghiệm $x_1 < x_2$ là</p> <p>$x_2 = -3 + \sqrt{34}; x_1 = -3 - \sqrt{34}$</p> <p>Khi đó : $-3 - \sqrt{34} - -3 + \sqrt{34} = 6(TM)$</p> <p>Vậy $m = 5$.</p>	
Câu 3	<p>Giải phương trình: $5\sqrt{x^3+1} = 2(x^2+2)$ (Điều kiện $x \geq -1$)</p> <p>$PT \Leftrightarrow 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)} = 2(x^2+2)$</p> <p>Đặt $\sqrt{x+1} = a; \sqrt{x^2-x+1} = b (a, b \geq 0)$</p>	

$\Rightarrow a^2 + b^2 = x^2 + 2$. thay vào ta có PT

$$5ab = 2(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (2a - b)(2b - a) = 0$$

TH1: $2a - b = 0 \Rightarrow 2a = b$

$$2\sqrt{x+1} = \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$\Rightarrow 4x + 4 = x^2 - x + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 3 = 0$$

$$\Delta = 37 > 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{5 + \sqrt{37}}{2} (TM) \\ x_2 = \frac{5 - \sqrt{37}}{2} (TM) \end{cases}$$

TH2: $2b - a = 0$

$$\Rightarrow 2b = a$$

$$2\sqrt{x^2 - x + 1} = \sqrt{x + 1}$$

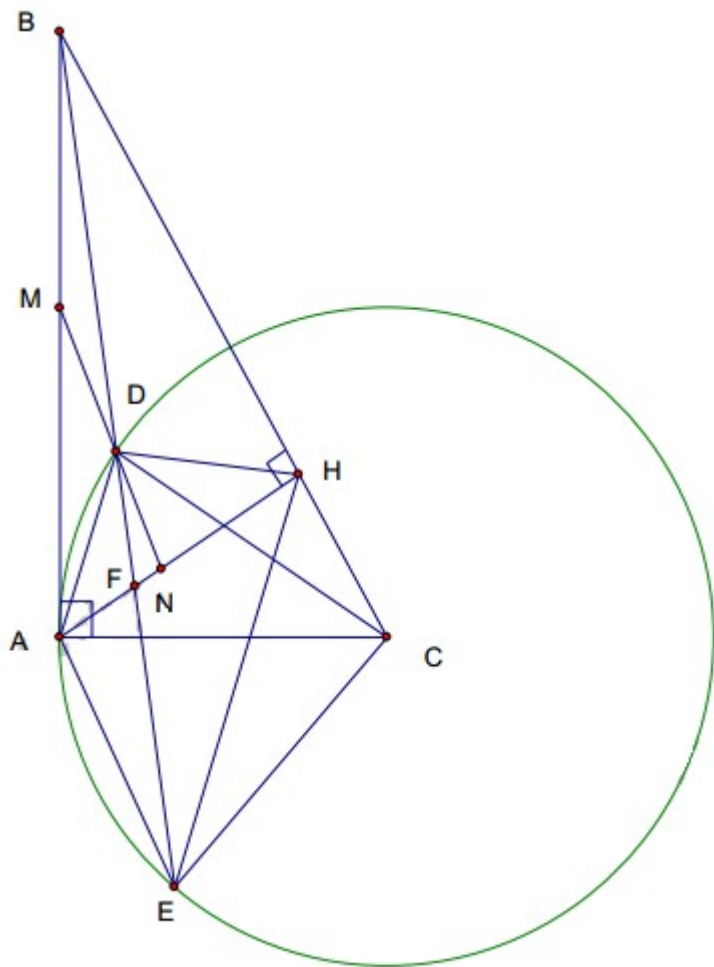
$$\Rightarrow 4x^2 - 4x + 4 = x + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$\Delta = -23 < 0 \Rightarrow PTVN$$

Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm : $x_1 = \frac{5 + \sqrt{37}}{2}; x_2 = \frac{5 - \sqrt{37}}{2}$

Câu 4



a/ Chứng minh $MN \parallel AE$

Xét đường tròn (C) ta có : $\angle AED = \frac{1}{2} \angle ACD$ (góc nội tiếp bằng nửa góc ở tâm cùng chắn cung AD) (1)

$$\angle BDM = \frac{1}{2} \angle ACD \text{ (gt)} \quad (2)$$

Từ 1, 2 $\Rightarrow \angle AED = \angle BDM$

$\Rightarrow MN \parallel AE$ (Vì có 2 góc đồng vị bằng nhau)

b/ Chứng minh $BD \cdot BE = DA^2$ và tứ giác DHCE nội tiếp
+ Chứng minh $BD \cdot BE = BA^2$

Xét $\triangle BAD$ và $\triangle BEA$ có

$\angle ABE$ chung (3)

$AD = BEA$ (cùng chắn cung AD) (4)

Từ 3, 4 $\Rightarrow \triangle BAD \sim \triangle BEA$ (g.g)

$$\Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{BA}{BE} \Rightarrow BD \cdot BE = BA^2 \quad (5) \quad (\text{ĐPCM})$$

+ Chứng minh DHCE nội tiếp

Xét $\triangle BAC$ vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow BA^2 = BH \cdot BC$ (Hệ thức) (6)

$$\text{Từ 5, 6} \Rightarrow BD \cdot BE = BH \cdot BC \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BH}{BE} \quad (7) \quad \text{Mà } \angle CBE \text{ chung (8)}$$

	<p>$\Rightarrow \triangle BDH \sim \triangle BCE$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BHD = \angle BEC$ (Hai góc tương ứng) (9)</p> <p>Mà $\angle BHD + \angle DHC = 180^\circ$ (10)</p> <p>Từ 9,10 $\Rightarrow \angle DHC + \angle BEC = 180^\circ \Rightarrow$ Tứ giác DHCE nội tiếp (Đ/l) (ĐPCM)</p>	
	<p>c/ Chứng minh HA là đường phân giác của góc DHE và D là trung điểm của đoạn thẳng MN</p> <p>+ Chứng minh HA là đường phân giác của góc DHE</p> <p>Xét $\triangle CHE$ và $\triangle CEB$ có HCE chung (11)</p> <p>Xét $\triangle BAC$ vuông tại A có AH là đường cao $\Rightarrow CA^2 = CH.CB$ (Hệ thức)</p> $\frac{CE}{CB} = \frac{CH}{CE} \quad (12)$ <p>Hay $CE^2 = CH.CB$ (do $CE = CA = R$) $\Rightarrow \frac{CE}{CB} = \frac{CH}{CE}$ (12)</p> <p>Từ 11,12 $\Rightarrow \triangle CHE$ và $\triangle CEB$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle CHE = \angle CEB$ (13)</p> <p>Từ 9.13 $\Rightarrow \angle CHE = \angle BHD$</p> <p>$\Rightarrow \angle AHE = \angle AHD$ (cùng phụ với 2 góc bằng nhau)</p> <p>$\Rightarrow$ HA là đường phân giác của góc DHE</p> <p>+ D là trung điểm của đoạn thẳng MN</p> $\frac{DM}{EA} = \frac{BD}{BE} \quad (talet) \quad (14)$ <p>Ta có : $MD \parallel AE$ (câu a) $\Rightarrow \frac{DM}{EA} = \frac{BD}{BE}$ (14)</p> <p>Gọi giao của DE và AH là F</p> $\frac{DN}{EA} = \frac{FD}{FE} = \frac{HD}{HE}$ <p>Ta có : $\frac{DN}{EA} = \frac{FD}{FE} = \frac{HD}{HE}$ (Ta lét – T/c tia phân giác) (15)</p> $\Rightarrow \frac{DH}{HC} = \frac{BD}{CE} \Rightarrow DH.CE = CH.BD \quad (16)$ <p>Ta có : $\triangle HDB \sim \triangle HCE$ (g.g)</p> $\Rightarrow \frac{HC}{CE} = \frac{HE}{BE} \Rightarrow HC.BE = HE.CE \quad (17)$ <p>Ta có : $\triangle CHE \sim \triangle CEB$ (g.g) $\Rightarrow \frac{DH.CE}{HE.CE} = \frac{HC.BD}{HC.BE} \Rightarrow \frac{DH}{HE} = \frac{BD}{BE}$ (18)</p> <p>Từ 16,17 $\Rightarrow \frac{DH.CE}{HE.CE} = \frac{HC.BD}{HC.BE} \Rightarrow \frac{DH}{HE} = \frac{BD}{BE}$ (18)</p> $\frac{DM}{EA} = \frac{DN}{EA} \Rightarrow DM = DN$ <p>Từ 14.15.18 $\Rightarrow \frac{DM}{EA} = \frac{DN}{EA} \Rightarrow DM = DN$</p> <p>$\Rightarrow$ D là trung điểm của MN (ĐPCM)</p>	
Câu 5	<p>Cho ba số thực dương x, y, z thỏa mãn : $x + y + z = 3$</p> $S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2}$ <p>Tìm giá trị nhỏ nhất của</p> $Ta\ có : \frac{x}{1+y^2} + \frac{xy^2}{1+y^2} = x; \frac{y}{1+z^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} = y; \frac{z}{1+x^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} = z$ $\Rightarrow S = \frac{x}{1+y^2} + \frac{y}{1+z^2} + \frac{z}{1+x^2} = (x+y+z) - \left(\frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \right)$ $\Rightarrow S = 3 - \left(\frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \right)$ <p>Ta có:</p>	

$\frac{xy^2}{1+y^2} \leq \frac{xy^2}{2y} = \frac{xy}{2}; \frac{yz^2}{1+z^2} \leq \frac{yz^2}{2z} = \frac{yz}{2}; \frac{zx^2}{1+x^2} \leq \frac{zx^2}{2x} = \frac{zx}{2}$ $\Rightarrow \frac{xy^2}{1+y^2} + \frac{yz^2}{1+z^2} + \frac{zx^2}{1+x^2} \leq \frac{xy + yz + zx}{2}$ $\Rightarrow S \geq 3 - \frac{xy + yz + zx}{2}$ <p>Do</p> $(x + y + z)^2 \geq 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx \leq 3$ $\Rightarrow S \geq 3 - \frac{3}{2} \Rightarrow S \geq \frac{3}{2}$ $\Rightarrow S_{MIN} = \frac{3}{2} \text{ khi } x=y=z=1$	
---	--

Đề số 30. Chuyên Nam Định . Năm học: 2015-2016

Bài 1. (2,0 điểm)

1) Cho đa thức $P(x) = ax^2 + bx + c$. Biết $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 3, $P(x)$ chia cho x dư 1 và $P(x)$ chia cho $x - 1$ dư 5. Tìm các hệ số a, b, c .

2) Cho các số a, b, x, y thỏa mãn $ab \neq 0, a + b \neq 0, \frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b}; x^2 + y^2 = 1$. Chứng minh rằng:

a) $ay^2 = bx^2$

b) $\frac{x^{200}}{a^{100}} + \frac{y^{200}}{b^{100}} = \frac{2}{(a+b)^{100}}$

Bài 2. (2,5 điểm)

1) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} (y-x)(y-x-4) = x^2 - 4x \\ x(y-4) + 4\sqrt{x^2 - y} = 6 \end{cases}$$

2) Giải phương trình $3(x+1)\sqrt{x^2 + x + 3} - 3x^2 - 4x - 7 = 0$.

Bài 3. (3,0 điểm) Cho hai đường tròn $(O_1), (O_2)$ tiếp xúc ngoài tại M . Một đường thẳng cắt đường tròn (O_1) tại hai điểm phân biệt A, B và tiếp xúc với đường tròn (O_2) tại E (B nằm giữa A và E). Đường thẳng EM cắt đường tròn (O_1) tại điểm J khác M . Gọi C là điểm thuộc cung MJ không chứa A, B của đường tròn (O_1) (C khác M và J). Kẻ tiếp tuyến CF với đường tròn (O_2) (F là tiếp điểm) sao cho các đoạn thẳng CF, MJ không cắt nhau. Gọi I là giao điểm của các đường thẳng JC và EF, K là giao điểm khác A của đường thẳng AI và đường tròn (O_1) . Chứng minh rằng:

1) Tứ giác $MCFI$ là tứ giác nội tiếp và $JA = JI = \sqrt{JE \cdot JM}$

2) CI là phân giác góc ngoài tại C của tam giác ABC .

3) K là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI

Bài 4. (1,0 điểm) Tìm các số tự nhiên x, y thỏa mãn

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

Bài 5. (1,5 điểm)

1) Trong mặt phẳng cho tập S gồm 8065 điểm đôi một phân biệt mà diện tích của mỗi tam giác có 3 đỉnh thuộc tập S đều không lớn hơn 1 (quy ước nếu 3 điểm thẳng hàng thì diện tích của tam giác tạo bởi 3 điểm này bằng 0). Chứng minh rằng tồn tại một tam giác T có diện tích không lớn hơn 1 chứa ít nhất 2017 điểm thuộc tập S (mỗi điểm trong số 2017 điểm đó nằm trong hoặc nằm trên cạnh của tam giác T)

2) Cho ba số dương a, b, c . Chứng minh bất đẳng thức

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{4b^2 + (c-a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{4c^2 + (a-b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \geq 3.$$

ĐÁP ÁN**Bài 1.**

Vì $P(x)$ chia cho $x + 1$ dư 3 nên $P(x) - 3$ chia hết cho $x + 1$.

$$\Rightarrow P(x) - 3 = f(x).(x + 1)$$

Thay $x = -1$ vào đẳng thức trên ta có:

$$P(-1) - 3 = f(-1).(-1 + 1) = 0.$$

$$\Rightarrow P(-1) = 3 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự, } P(x) \text{ chia cho } x \text{ dư } 1 \text{ nên } P(0) = 1 \quad (2)$$

$$P(x) \text{ chia cho } x - 1 \text{ dư } 5 \text{ nên } P(1) = 5 \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} a.(-1)^2 + b.(-1) + c = 3 \\ a.0^2 + b.0 + c = 1 \\ a.1^2 + b.1 + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 3 \\ c = 1 \\ a + b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow P(x) = 3x^2 + x + 1$. Thử lại ta thấy $P(x)$ thỏa mãn đề bài.

$$\text{Vậy } P(x) = 3x^2 + x + 1.$$

2)

a) Ta có:

$$\frac{x^4}{a} + \frac{y^4}{b} = \frac{1}{a+b} \Leftrightarrow \frac{x^4b + y^4a}{ab} = \frac{1}{a+b}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)(x^4b + y^4a) = ab$$

$$\Leftrightarrow abx^4 + a^2y^4 + b^2x^4 + aby^4 - ab = 0$$

$$\Leftrightarrow ab(x^4 + y^4 - 1) + (ay^2)^2 + (bx^2)^2 = 0(*)$$

$$\text{Mặt khác } x^2 + y^2 = 1 \Rightarrow (x^2 + y^2)^2 = 1 \Rightarrow x^4 + y^4 - 1 = -2x^2y^2$$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow -2abx^2y^2 + (ay^2)^2 + (bx^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (ay^2 - bx^2)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow ay^2 = bx^2$$

b) Vì $ab \neq 0$ nên

$$ay^2 = bx^2 \Rightarrow \frac{x^2}{a} = \frac{y^2}{b}$$

Theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có

$$\begin{aligned} \frac{x^2}{a} &= \frac{y^2}{b} = \frac{x^2 + y^2}{a + b} = \frac{1}{a + b} \\ \Rightarrow \left(\frac{x^2}{a} \right)^{100} &= \left(\frac{y^2}{b} \right)^{100} = \frac{1}{(a + b)^{100}} \\ \Rightarrow \frac{x^{200}}{a^{100}} + \frac{y^{200}}{b^{100}} &= \frac{2}{(a + b)^{100}} \end{aligned}$$

Bài 2. (2,5 điểm)

$$1) \text{ Giải hệ phương trình } \begin{cases} (y - x)(y - x - 4) = x^2 - 4x & (1) \\ x(y - 4) + 4\sqrt{x^2 - y} = 6 & (2) \end{cases}$$

Biến đổi phương trình (1):

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow (y - x)(y - 4) - x(y - x) = x(x - 4) \\ &\Leftrightarrow (y - x)(y - 4) = x(x - 4 + y - x) \\ &\Leftrightarrow (y - x)(y - 4) = x(y - 4) \\ &\Leftrightarrow (y - 4)(y - 2x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 \\ y = 2x \end{cases} \end{aligned}$$

• Với $y = 4$, thay vào (2) được:

$$(2) \Leftrightarrow 4\sqrt{x^2 - 4} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 4} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x} - 3 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{x^2 - 2x}$, phương trình trở thành:

$$\begin{aligned} t^3 + 2t - 3 &= 0 \Leftrightarrow (t - 1)(t^2 + t + 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 + t + 3 = 0 & (3) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (3) có $\Delta = 1 - 4.3 = -11 < 0$ nên vô nghiệm.

Do đó

$$t = 1 \Rightarrow x^2 - 2x = 1 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$x = 1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 + 2\sqrt{2}$$

$$x = 1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = 2 - 2\sqrt{2}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 4 nghiệm $\left(\frac{\sqrt{118}}{4}; 4\right), \left(-\frac{\sqrt{118}}{4}; 4\right), (1 + \sqrt{2}; 2 + 2\sqrt{2}), (1 - \sqrt{2}; 2 - 2\sqrt{2})$

2) Giải phương trình $3(x+1)\sqrt{x^2+x+3} - 3x^2 - 4x - 7 = 0$. (1)

$$\text{ĐK: } x^2 + x + 3 \geq 0$$

Đặt $a = x + 1; b = \sqrt{x^2 + x + 3}$ ($b \geq 0$). Ta có $a^2 + 2b^2 = (x^2 + 2x + 1) + 2(x^2 + x + 3) = 3x^2 + 4x + 7$

Phương trình (1) trở thành

$$3ab - a^2 - 2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (-a + b)(a - 2b) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 2b \end{cases}$$

Do đó

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = \sqrt{x^2 + x + 3} \\ x + 1 = 2\sqrt{x^2 + x + 3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 + 2x + 1 = x^2 + x + 3 \\ x^2 + 2x + 1 = 4(x^2 + x + 3) \end{cases}$$

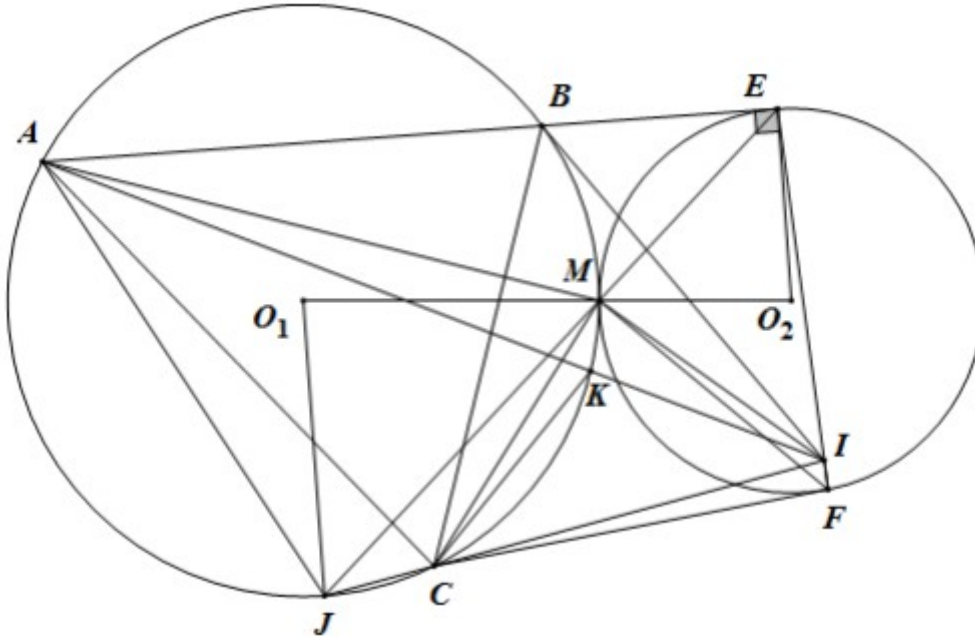
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 2 \\ 3x^2 + 2x + 11 = 0(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (thỏa mãn)}$$

(Phương trình (2) có $\Delta' = 1 - 3.11 = -32 < 0$ nên vô nghiệm)

Do đó $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

Bài 3.



1) Ta có tam giác O_1MJ và O_2ME cân nên $O_1MJ = O_1JM$; $O_2ME = O_2EM$

Mặt khác $O_1MJ = O_2ME$ (hai góc đối đỉnh) nên

$\Delta O_1MJ \sim \Delta O_2ME$ (g.g)

$\Rightarrow O_1 = O_2$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm trong một đường tròn ta có:

$$JAM = \frac{1}{2} O_1$$

$$MFI = \frac{1}{2} O_2$$

$$\Rightarrow JAM = MFI$$

Mặt khác, vì $AJCM$ là tứ giác nội tiếp, nên $MCI = JAM$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện)

$\Rightarrow MCI = MFI$

$\Rightarrow MCFI$ là tứ giác nội tiếp.

$\Rightarrow MIC = MFC$ (2 góc nội tiếp cùng chắn cung MC)

Mặt khác xét đường tròn O_2 ta có: $MFC = MEF$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung cùng chắn cung MF)

$\Rightarrow MIC = MEI$

Do đó $\Delta JMI \sim \Delta JIE$ (g.g) $\Rightarrow \frac{JM}{JI} = \frac{JI}{JE} \Rightarrow JM \cdot JE = JI^2$

Tương tự $JAM = MFE = AEJ \Rightarrow \Delta JAM \sim \Delta JEA \Rightarrow JM \cdot JE = JA^2$

Do đó $JA = JI = \sqrt{JE \cdot JM}$

2) Do $O_1 = O_2$ (cmt) nên $O_1J \parallel O_2E \Rightarrow O_1J \perp AB$.

Mà $O_1A = O_1B$ nên O_1J là trung trực của AB

$\Rightarrow$ Tam giác JAB cân tại J

Vì $ABCI$ là tứ giác nội tiếp nên ta có:

$$\angle BCI = \angle BAJ = \frac{180^\circ - \angle AJB}{2} = \frac{180^\circ - \angle ACB}{2} = 90^\circ - \frac{1}{2} \angle ACB$$

Do đó CI là phân giác ngoài tại đỉnh C của tam giác ABC .

3) Do $AJCK$ là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle ICK = \angle IAJ = \angle KIC \Rightarrow KI = KC$$

Áp dụng tính chất góc ngoài với tam giác ACI , ta có:

$$\angle KAC = \angle ACJ - \angle AIC = \angle ABJ - \angle AIJ = \angle BAJ - \angle JAK = \angle BAK \Rightarrow KB = KC.$$

Do đó $KB = KC = KI \Rightarrow K$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCI .

Bài 4.

$$(2^x + 1)(2^x + 2)(2^x + 3)(2^x + 4) - 5^y = 11879.$$

$$\Leftrightarrow (2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 4)(2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 6) - 5^y = 11879 \quad (1)$$

Đặt $t = 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 5, t \in \mathbb{N}^*$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (t-1)(t+1) - 5^y = 11879$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 5^y = 11880 \quad (2)$$

Xét các TH sau:

• TH1: $y \geq 2 \Rightarrow 5^y \equiv 25$

Từ (2) suy ra $t^2 \equiv 5 \Rightarrow t^2 \not\equiv 25$. Do đó từ (2) $\Rightarrow 11880 \not\equiv 25$ (vô lý)

• TH2: $y = 1$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 = 11885 \text{ (loại vì 11885 không phải là số chính phương)}$$

• TH3: $y = 0$

$$(2) \Leftrightarrow t^2 = 11881 \Rightarrow t = 109$$

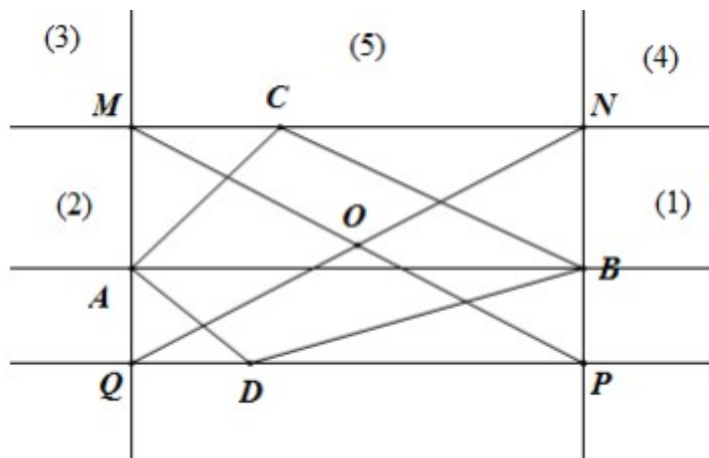
$$\Rightarrow 2^{2x} + 5 \cdot 2^x + 5 = 109 \Rightarrow 2^{2x} + 5 \cdot 2^x - 104 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 8(tm) \\ 2^x = -13(L) \end{cases} \Rightarrow x = 3.$$

Vậy $x = 3, y = 0$ là các số tự nhiên cần tìm.

Bài 5.

1)



Gọi A, B là 2 điểm có khoảng cách lớn nhất thuộc 8065 điểm đã cho.

Gọi a, b lần lượt là các đường thẳng qua A, B và vuông góc AB.

Gọi C là điểm có khoảng cách đến đường thẳng AB là lớn nhất trong 8065 điểm đã cho.

Đường thẳng qua C và song song AB cắt a, b lần lượt ở M, N.

Xét 2 trường hợp:

•TH1: Không tồn tại điểm nào thuộc S mà nằm khác phía C so với AB.

Khi đó tất cả 8065 điểm đã cho đều nằm trong hình chữ nhật AMNB.

Thật vậy, nếu $\forall$ điểm $I \in S$ không nằm trong hình chữ nhật đó thì I chỉ có thể nằm trong các miền (1), (2), (3), (4) hoặc (5).

Nếu $I \in (1)$ hoặc $I \in (4)$ thì dễ thấy $AI > AB$ (mâu thuẫn với giả sử)

Nếu $I \in (2)$ hoặc $I \in (3)$ thì dễ thấy $BI > AB$ (mâu thuẫn với giả sử)

Nếu $I \in (5)$ thì $d(I; AB) > d(C; AB)$ (mâu thuẫn).

Do đó I thuộc hình chữ nhật AMNB $\forall I \in S$.

Khi đó xét ba tam giác AMC, ABC và BNC, ta có

$$S_{AMC} < S_{ABC} \leq 1$$

$$S_{BNC} < S_{ABC} \leq 1$$

và tồn tại một trong ba tam giác chứa ít nhất 2017 điểm, vì nếu không thì cả hình chữ nhật AMNB sẽ chứa ít hơn $3 \cdot 2017 = 6051$ (điểm), vô lí.

Do đó chọn được tam giác T thỏa mãn.

•TH2 : Tồn tại tập S' các điểm nằm khác phía với C so với AB.

Khi đó gọi D là điểm thuộc S' mà có khoảng cách đến AB là lớn nhất.

Qua D kẻ đường thẳng song song AB cắt a, b lần lượt ở Q, P. Gọi O là giao MP, NQ.

Chúng minh tương tự ta có 8065 điểm đã cho đều nằm trong hình chữ nhật MNPQ.

Theo nguyên lí Đê-rích-lê $\Rightarrow$ Tồn tại một trong bốn tam giác OMN, ONP, OPQ, OQM chứa ít nhất 2017 điểm.

$$\text{Mặt khác } S_{OMN} = S_{ONP} = S_{OPQ} = S_{OQM} = \frac{1}{4} S_{MNPQ} = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (S_{ACB} + S_{ADB}) \leq \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot (1+1) = 1$$

Bài toán được chứng minh.

2) Ta có:

$$\frac{4a^2 + (b-c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2(2a^2 + b^2 + c^2) - (b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} = 2 - \frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2}$$

Có hai đẳng thức tương tự.

BĐT đã cho tương đương với

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \leq 3.$$

Áp dụng BĐT Cauchy – Schwarz cho 4 số dương $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} \geq \frac{(x+y)^2}{m+n}$, ta có:

$$\frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2}$$

Ta có hai BĐT tương tự, cộng từng vế ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{(b+c)^2}{2a^2 + b^2 + c^2} + \frac{(c+a)^2}{2b^2 + c^2 + a^2} + \frac{(a+b)^2}{2c^2 + a^2 + b^2} \\ & \leq \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) + \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{a^2}{c^2 + a^2} + \frac{b^2}{c^2 + b^2} \right) \\ & = \left(\frac{b^2}{a^2 + b^2} + \frac{a^2}{a^2 + b^2} \right) + \left(\frac{c^2}{b^2 + c^2} + \frac{b^2}{c^2 + b^2} \right) + \left(\frac{a^2}{a^2 + c^2} + \frac{c^2}{a^2 + c^2} \right) \end{aligned}$$

= 3

⇒ BĐT đã cho được chứng minh

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c$.

Đề số 31. Chuyên Nam Định. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (2,0 điểm)

- Với giá trị nào của x thì biểu thức $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$ xác định.
- Tính giá trị của biểu thức $A = \sqrt{x+3} - \sqrt{3-x}$ khi $x = 2\sqrt{2}$
- Tìm tọa độ của các điểm có tung độ bằng 8 và nằm trên đồ thị hàm số $y = 2x^2$
- Cho tam giác ABC vuông tại A, $AB=3$; $BC = 5$. Tính $\cos ACB$.

Câu 2. (1,5 điểm) Cho biểu thức $Q = \left(\frac{1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2}{x-1}\right)\left(\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}\right)$ (với $x > 0; x \neq 1$)

- Rút gọn biểu thức Q.
- Tìm các giá trị của x để $Q = -1$.

Câu 3. (2,5 điểm)

- Cho phương trình $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$ (1) (với m là tham số).
- Giải phương trình với $m = 3$.
- Với giá trị nào của m thì phương trình (1) có các nghiệm x_1, x_2 , thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 = 16$.

- Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y} \\ x^2 + (x+3)(2x-y+5) = x+16 \end{cases}$$

Câu 4. (3,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$), đường cao AH. Đường tròn tâm I đường kính AH cắt các cạnh AB, AC, lần lượt tại M, N. Gọi O là trung điểm của đoạn BC, D là giao điểm của MN và OA.

- Chứng minh rằng:
 - $AM \cdot AB = AN \cdot AC$
 - Tứ giác BMNC là tứ giác nội tiếp.
- Chứng minh rằng:
 - $\triangle ADI \sim \triangle AHO$.
 - $\frac{1}{AD} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HC}$
- Gọi P là giao điểm của BC và MN, K là giao điểm thứ hai của AP và đường tròn đường kính AH. Chứng minh rằng $\angle BKC = 90^\circ$.

Câu 5. (1,0 điểm)

- Giải phương trình $\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3\sqrt{(2-x)^5} + (7x-19)\sqrt{2-x}$
- Xét các số thực dương a, b, c thỏa mãn $abc = 1$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$T = \frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c}$$

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
NAM ĐỊNH
ĐỀ CHÍNH THỨC**

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM THI
KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN
NĂM HỌC 2015 – 2016
Môn: TOÁN (Đề chung)**

Câu 1 (2,0 điểm)

Đáp án	Điểm
1) $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$ xác định $\Leftrightarrow \sqrt{x+1}; \sqrt{x-3}$ đồng thời xác định	0,25
$\sqrt{x+1}$ xác định $\Leftrightarrow x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ $\sqrt{x-3}$ xác định $\Leftrightarrow x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$ Vậy điều kiện xác định của biểu thức $\sqrt{x+1} + \sqrt{x-3}$ là $x \geq 3$	0,25
2) Với $x = 2\sqrt{2}$ ta có: $A = \sqrt{2\sqrt{2}+3} - \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} - \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$	0,25
$= \sqrt{2}+1 - \sqrt{2}-1 = (\sqrt{2}+1) - (\sqrt{2}-1) = 2$	0,25
3) Hoành độ của điểm cần tìm là nghiệm phương trình $2x^2 = 8$	0,25
$\Leftrightarrow x = \pm 2$. Vậy có hai điểm thỏa mãn là: (2;8) và (-2;8).	0,25
4) Vì tam giác ABC vuông tại A nên $AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$	0,25
Do đó $\cos ACB = \frac{AC}{BC} = \frac{4}{5}$	0,25

Câu 2 (2,0 điểm)

Đáp án	Điểm
1) (1,0 điểm) Với điều kiện $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có $Q = \left(\frac{\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} - \frac{2}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}+1} - \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}(1-\sqrt{x})} \right)$	0,5
$= \left(\frac{\sqrt{x}+1}{x-1} - \frac{2}{x-1} \right) \cdot \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right)$	0,25
$= \left(\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} \right) \cdot \left(\frac{x-1}{\sqrt{x}} \right) = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$	0,25
2) (0,5 điểm) Với $x > 0$ và $x \neq 1$, ta có Do đó $Q = \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}$	0,25

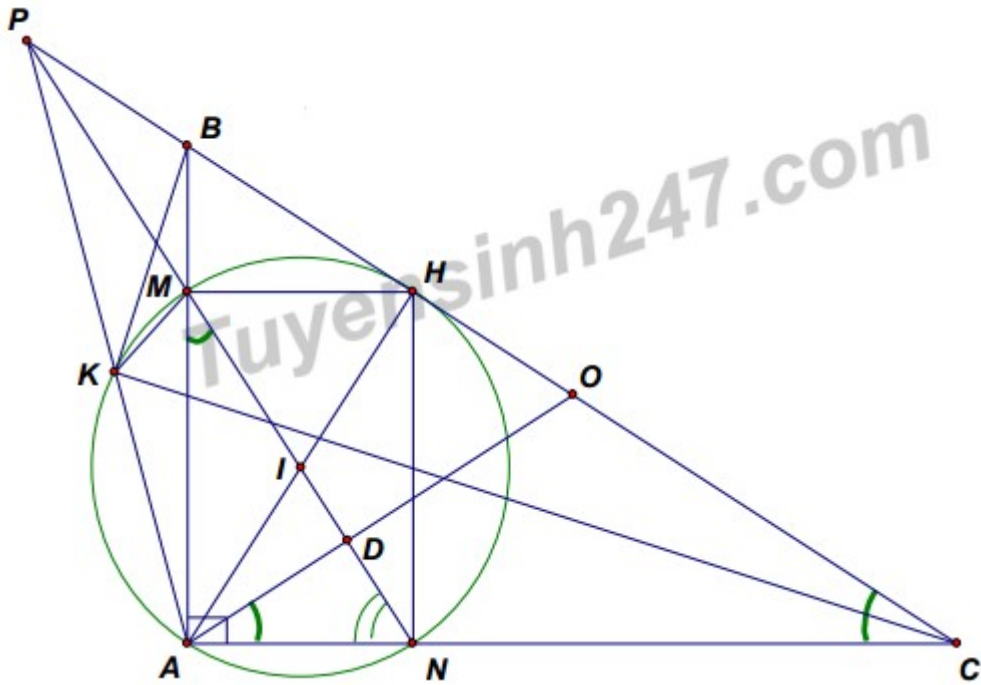
$Q = -1 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}} = -1$ $\Leftrightarrow \sqrt{x}-1 = -\sqrt{x}$	
$\Leftrightarrow 2\sqrt{x} = 1$ $\Leftrightarrow x = \frac{1}{4} (TM)$ <p>Vậy với $x = \frac{1}{4}$ thì $Q = -1$</p>	0,25

Câu 3 (2,5 điểm)

Đáp án	Điểm
1) (1,5 điểm)	0,25
a) (0,75 điểm) Với $m = 3$, ta có phương trình (1) trở thành $x^2 - 4x + 3 = 0$	
Ta có $a+b+c = 1-4+3 = 0$ nên phương trình có 2 nghiệm phân biệt $x_1=1; x_2=3$	0,25
Vậy với $m = 3$, phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x_1=1; x_2=3$	0,25
b) (0,75 điểm) $x^2 - 2(m-1)x + m^2 - 6 = 0$	0,25
<p>Phương trình (1) là phương trình bậc 2 ẩn x có $\Delta' = (m-1)^2 - (m^2 - 6) = 7 - 2m$</p> $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 7 - 2m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{7}{2} (*)$ <p>Phương trình (1) có các nghiệm x_1, x_2</p>	
<p>Khi đó theo định lý Viét ta có $x_1 + x_2 = 2(m-1); x_1 x_2 = m^2 - 6$</p> <p>Do đó: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4(m-1)^2 - 2(m^2 - 6) = 2m^2 - 8m + 16$</p>	0,25
<p>Vậy $x_1^2 + x_2^2 = 16 \Leftrightarrow 2m^2 - 8m + 16 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$</p> <p>Kết hợp điều kiện (*) ta có $m = 0$ là giá trị thỏa mãn.</p>	0,25
<p>2) (1,0 điểm) $\begin{cases} \sqrt{x+2}(x-y+3) = \sqrt{y} & (1) \\ x^2 + (x+3)(2x-y+5) = x+16 & (2) \end{cases}$ Điều kiện: $\begin{cases} x \geq -2 \\ y \geq 0 \end{cases}$</p> <p>Với $x \geq -2; y \geq 0$, phương trình (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}(x-y+2) + \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$</p> $\Leftrightarrow \sqrt{x+2}[(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{y})^2] + \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$	0,25
$(\sqrt{x+2} - \sqrt{y})[\underbrace{\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2} + \sqrt{y}) + 1}_{>0 \forall x \geq -2; y \geq 0}] = 0$ $\Leftrightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{y} = 0$ $\Leftrightarrow x+2 = y$	0,25
Thay $y = x+2$ vào phương trình (2) ta được phương trình:	0,25

$x^2 + (x+3)(2x - (x+2) + 5) = x + 16$ $\Leftrightarrow x^2 + (x+3)^2 = x + 16$ $\Leftrightarrow 2x^2 + 5x - 7 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1(TM) \\ x = -\frac{7}{2}(L) \end{cases}$	
<p>+) Với $x=1 \Rightarrow y=3$.</p> <p>Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm $(x;y)=(1;3)$</p>	0,25

Câu 4 (3,0 điểm)

Đáp án	Điểm
	
<p>1) (1,0 điểm)</p> <p>a) (0,5 điểm) Xét đường tròn (I) có $\angle AMH = \angle ANH = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) nên HM, HN tương ứng là đường cao của các tam giác vuông ABH, ACH</p> <p>+) $\triangle ABH$ vuông tại H, có đường cao HM nên suy ra $AM \cdot AB = AH^2$.</p> <p>+) $\triangle ACH$ vuông tại H, có đường cao HN nên suy ra $AN \cdot AC = AH^2$.</p> <p>Do đó $AM \cdot AB = AN \cdot AC$</p>	0,25
<p>b) (0,5 điểm) Theo câu a) ta có</p> $AM \cdot AB = AN \cdot AC \Rightarrow \frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ <p>Xét $\triangle AMN$ và $\triangle ACB$ có A chung, $\frac{AM}{AC} = \frac{AN}{AB}$ nên suy ra $\triangle AMN \sim \triangle ACB$ (c.g.c)</p>	0,25
<p>Do đó $\angle AMN = \angle ACB \Rightarrow \angle BCN + \angle BMN = \angle ACB + \angle BMN = \angle AMN + \angle BMN = 180^\circ$</p> <p>Mà các góc BCN, BMN, ở vị trí đối diện nên suy ra tứ giác BMNC nội tiếp.</p>	0,25
<p>2) (1,0 điểm)</p> <p>a) (0,5 điểm) Ta có tam giác ABC vuông tại A và O là trung điểm của cạnh BC nên $OA = OB = OC \Rightarrow \triangle OAC$ cân tại O $\Rightarrow \angle OAC = \angle OCA \Rightarrow \angle OAC = \angle BCN$ Mà $\angle AMN = \angle ACB = \angle BCN \Rightarrow \angle AMN = \angle OAC \Rightarrow AMN = DAN$</p>	0,25

<p>Vì $\triangle AMN$ vuông tại A nên $AMN + ANM = 90^\circ \Rightarrow DAN + ANM = 90^\circ \Rightarrow ADN = 90^\circ$ Mà $MAN = 90^\circ \Rightarrow MN$ là đường kính của đường tròn (I) $\Rightarrow I$ là trung điểm của MN nên $ADI = 90^\circ$. Xét $\triangle AID$ và $\triangle AOH$ có $ADI = AHO = 90^\circ$ và A chung do đó $\triangle ADI \sim \triangle AHO$ (g.g)</p>	0,25
<p>b) (0,5 điểm)</p> $\Rightarrow \frac{AD}{AH} = \frac{AI}{AO} \Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{AO}{AH \cdot AI}$ <p>Vì $\triangle ADI \sim \triangle AHO$</p> <p>Mà $AO = \frac{1}{BC}$; $AI = \frac{1}{2} AH$; $\Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{BC}{AH^2}$</p>	0,25
<p>Mặt khác, vì tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao nên $AH^2 = HB \cdot HC$.</p> $\Rightarrow \frac{1}{AD} = \frac{HB + HC}{HB \cdot HC} = \frac{1}{HB} + \frac{1}{HC}$	0,25
<p>3) (1,0 điểm)</p> <p>Vì tứ giác BMNC nội tiếp $\Rightarrow PBM = MNC \Rightarrow PBM + ANM = MNC + ANM = 180^\circ$ (1) Vì tứ giác ANMK nội tiếp $\Rightarrow PKM = ANM$ (2) Từ (1) và (2) suy ra $PBM + PKM = 180^\circ$, do đó tứ giác PKMB nội tiếp $\Rightarrow PKB = PMB = AMN = ACB \Rightarrow AKB + ACB = AKB + PKB = 180^\circ$ Do đó tứ giác BKAC nội tiếp $\Rightarrow BKC = BAC = 90^\circ$.</p>	0,5

Câu 5 (1,0 điểm)

Đáp án	Điểm
<p>1) (0,5 điểm) Điều kiện xác định $\begin{cases} 3x^2 - 6x - 6 \geq 0 \\ 2 - x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{3}$</p> <p>Với $x \leq 1 - \sqrt{3}$, phương trình đã cho tương đương với:</p> $\sqrt{3x^2 - 6x - 6} = 3(2 - x)^2 \sqrt{2 - x} + (7 - 19) \sqrt{2 - x}$ $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} = (3x^2 - 5x - 7) \sqrt{2 - x}$ $\Leftrightarrow \sqrt{3x^2 - 6x - 6} - \sqrt{2 - x} = (3x^2 - 5x - 7) \sqrt{2 - x}$ $\Leftrightarrow \frac{3x^2 - 5x - 8}{\sqrt{3x^2 - 6x - 6} + \sqrt{2 - x}} = (3x^2 - 5x - 7) \sqrt{2 - x}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 5x - 8 = 0 \\ 1 = \sqrt{2 - x} (\sqrt{3x^2 - 6x - 6} + \sqrt{2 - x}) \end{cases} \quad (Do \sqrt{3x^2 - 6x - 6} + \sqrt{2 - x} > 0 \forall x \leq 1 - \sqrt{3})$	0,25

$+) 3x^2 - 5x - 8 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ (TM)} \\ x = \frac{8}{3} \text{ (L)} \end{cases}$ $+) 1 = \sqrt{2-x}(\sqrt{3x^2-6x-6} + \sqrt{2-x})$ $\Leftrightarrow 1 = 2-x + \sqrt{2-x}\sqrt{3x^2-6x-6}$ $\Leftrightarrow x-1 = \sqrt{2-x}\sqrt{3x^2-6x-6} (*)$ $Do x \leq 1 - \sqrt{3} \Rightarrow x-1 < 0 \leq \sqrt{2-x}\sqrt{3x^2-6x-6} \Rightarrow (*) \text{ VN}$ <p>Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = -1$</p>	0,25
<p>2) (0,5 điểm) Ta có: $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2) \forall a, b \in R$</p> <p>Thật vậy:</p> $a^4 + b^4 \geq ab(a^2 + b^2)$ $\Leftrightarrow a^4 + b^4 \geq a^3b + ab^3$ $\Leftrightarrow (a-b)(a^3 - b^3) \geq 0$ $\Leftrightarrow (a-b)^2(a^2 + ab + b^2) \geq 0 \text{ (luôn đúng } \forall a, b \in R)$ $\Rightarrow a^4 + b^4 + c \geq ab(a^2 + b^2) + c \Leftrightarrow a^4 + b^4 + c \geq ab(a^2 + b^2) + abc^2 > 0 \text{ (vì } a, b, c > 0 \text{ và } abc=1)$ $\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2) + abc^2} \text{ (Vì } c > 0) \Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c}{ab(a^2 + b^2 + c^2)}$ $\Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{abc(a^2 + b^2 + c^2)} \Leftrightarrow \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} (1)$	0,25
<p>Tương tự:</p> $\frac{b}{a^4 + c^4 + b} \leq \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} (2)$ $\frac{a}{b^4 + c^4 + a} \leq \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} (3)$ <p>Cộng theo về các bất đẳng thức (1), (2) và (3) ta có:</p> $\frac{a}{b^4 + c^4 + a} + \frac{b}{a^4 + c^4 + b} + \frac{c}{a^4 + b^4 + c} \leq \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = 1$ <p>Vậy $T \leq 1 \forall a, b, c > 0$ thỏa mãn $abc=1$</p> <p>Với $a=b=c=1$ thì $T=1$</p> <p>Vậy GTLN của T là 1</p>	0,25

Đề số 32. Chuyên HCM. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (1,5 điểm)

Cho hai số thực a, b thỏa điều kiện $ab = 1, a + b \neq 0$. Tính giá trị của biểu thức:

$$P = \frac{1}{(a+b)^3} \left(\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} \right) + \frac{3}{(a+b)^4} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) + \frac{6}{(a+b)^5} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

Câu 2. (2,5 điểm)

a) Giải phương trình: $2x^2 + x + 3 = 3x\sqrt{x+3}$

b) Chứng minh rằng: $abc(a^3 - b^3)(b^3 - c^3)(c^3 - a^3) \neq 0 \forall a, b, c \in \mathbb{R}$

Câu 3. (2 điểm)

Cho hình bình hành ABCD. Đường thẳng qua C vuông góc với CD cắt đường thẳng qua A vuông góc với BD tại F. Đường thẳng qua B vuông góc với AB cắt đường trung trực của AC tại E. Hai đường thẳng BC và

EF cắt nhau tại K. Tính tỉ số $\frac{KE}{KF}$

Câu 4. (1 điểm)

Cho hai số dương a, b thỏa mãn điều kiện: $a+b \leq 1$.

Chứng minh rằng: $a^2 - \frac{3}{4a} - \frac{a}{b} \leq \frac{-9}{4}$

Câu 5. (2 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp đường tròn (O). Gọi M là trung điểm của cạnh BC và N là điểm đối xứng của M qua O. Đường thẳng qua A vuông góc với AN cắt đường thẳng qua B vuông góc với BC tại D. Kẻ đường kính AE. Chứng minh rằng:

a) Chứng minh $BA \cdot BC = 2 \cdot BD \cdot BE$

b) CD đi qua trung điểm của đường cao AH của tam giác ABC.

Câu 6. (1 điểm)

Mười vận động viên tham gia cuộc thi đấu quần vợt. Cứ hai người trong họ chơi với nhau đúng một trận. Người thứ nhất thắng x_1 trận và thua y_1 trận, người thứ hai thắng x_2 trận và thua y_2 trận, ..., người thứ mười thắng x_{10} trận và thua y_{10} trận. Biết rằng trong một trận đấu quần vợt không có kết quả hòa. Chứng minh rằng:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_{10}^2$$

HẾT

Hướng dẫn giải

Câu 1.

Với $ab = 1$, $a + b \neq 0$, ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3(ab)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4(ab)^2} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5(ab)} \\
 &= \frac{a^3 + b^3}{(a+b)^3} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6(a+b)}{(a+b)^5} \\
 &= \frac{a^2 + b^2 - 1}{(a+b)^2} + \frac{3(a^2 + b^2)}{(a+b)^4} + \frac{6}{(a+b)^4} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 - 1)(a+b)^2 + 3(a^2 + b^2) + 6}{(a+b)^4} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 - 1)(a^2 + b^2 + 2) + 3(a^2 + b^2) + 6}{(a+b)^4} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2)^2 + 4(a^2 + b^2) + 4}{(a+b)^4} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 + 2)^2}{(a+b)^4} \\
 &= \frac{(a^2 + b^2 + 2ab)^2}{(a+b)^4} \\
 &= \frac{[(a+b)^2]^2}{(a+b)^4} \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Vậy $P = 1$, với $ab = 1$, $a+b \neq 0$.

Câu 2a.

Điều kiện: $x \geq -3$

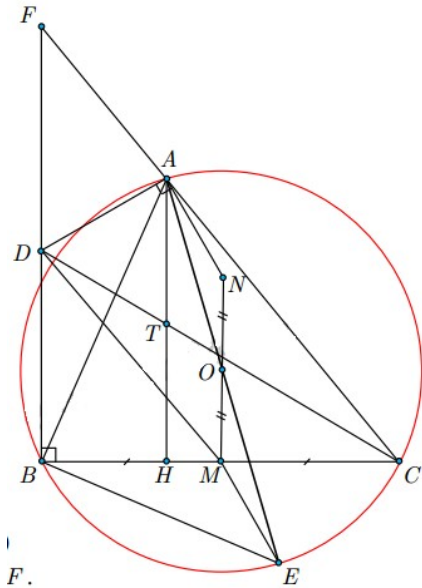
Với điều kiện trên, phương trình trở thành:

$$\begin{aligned}
 2x^2 - 3x\sqrt{x+3} + (\sqrt{x+3})^2 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2x^2 - 2x\sqrt{x+3} + (\sqrt{x+3})^2 - x\sqrt{x+3} &= 0 \\
 \Leftrightarrow 2x(x - \sqrt{x+3}) - \sqrt{x+3}(x - \sqrt{x+3}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow (x - \sqrt{x+3})(2x - \sqrt{x+3}) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = x(1) \\ \sqrt{x+3} = 2x(2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\bullet(1): \sqrt{x+3} = x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \\ x = \frac{1-\sqrt{13}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1+\sqrt{13}}{2}$$

$$\bullet(2): \sqrt{x+3} = 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x+3 = 4x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = 1 \\ x = \frac{-3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x = 1$$

Câu 5.



Mà $BD = FD$ (D là trung điểm BF) (5)

- Từ (3), (4) và (5) suy ra $TA = TH \Rightarrow T$ là trung điểm AH .

Đề số 33. Chuyên Lương Văn Chánh – Phú Yên. Năm học: 2015-2016

Bài 1: (1,5 điểm)

Cho $A = \sqrt{3} - 1; B = \sqrt{3} + 1$

Tính giá trị của biểu thức $A + B; A.B; \frac{A}{B}; A^2 + B^2$ bằng cách rút gọn hoặc biến đổi thích hợp

Bài 2: (2,0 điểm) Giải hệ phương trình và phương trình:

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

b)
$$\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{5} \\ \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Bài 3: (1,0 điểm)

Cho phương trình $x^4 + 2mx^2 + 4m + 5 = 0(1)$. Tìm giá trị của m để phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt.

Bài 4: (1,5 điểm)

Hai người đi xe đạp cùng khởi hành một lúc tại một địa điểm: người thứ nhất đi về phía nam, người thứ hai đi về phía tây. Sau 4 giờ hai người cách nhau 100km theo đường chim bay. Tính vận tốc của mỗi người, biết rằng vận tốc của người thứ nhất nhỏ hơn vận tốc của người thứ hai 5km/h.

Bài 5: (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) đường kính AB. Lấy hai điểm C, D trên nửa đường tròn sao cho AC=BD (C nằm giữa A và D). Gọi E là giao điểm của AD và BC.

- Chứng minh hai tam giác ACE, BDE bằng nhau.
- Chứng minh tứ giác AOEC, BOED nội tiếp.
- Đường thẳng qua O vuông góc AD cắt CD tại F. Tứ giác AODF là hình gì? Vì sao?
- Gọi G là giao điểm của AC và BD. Chứng minh O, E, G thẳng hàng.

——Hết——

ĐÁP ÁN

Bài 1:

Ta có:

$$A + B = (\sqrt{3} - 1) + (\sqrt{3} + 1) = 2\sqrt{3}$$

$$AB = (\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1) = (\sqrt{3})^2 - 1^2 = 3 - 1 = 2$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2} = 2 - \sqrt{3}$$

$$A^2 + B^2 = (A + B)^2 - 2AB = (2\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8$$

Bài 2:

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$ (1)

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn x, có tổng các hệ số $a + b + c = 1 + 5 + (-6) = 0$ nên có hai

ng nghiệm $x_1 = 1; x_2 = \frac{-6}{1} = -6$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{-6; 1\}$

$$b) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{8}{5} \\ \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{x} + \frac{5}{y} = 8 \\ \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{x} = \frac{23}{3} \\ \frac{2}{x} - \frac{5}{y} = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{23}{21} \\ 2 \cdot \frac{23}{21} - \frac{5}{y} = \frac{-1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{23}{21} \\ \frac{1}{y} = \frac{53}{105} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{21}{23} \\ y = \frac{105}{53} \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình (I) có nghiệm duy nhất $(x; y) = \left(\frac{21}{23}; \frac{105}{53} \right)$

Bài 3:

$$x^4 + 2mx^2 + 4m + 5 = 0(1)$$

Đặt $t = x^2; t \geq 0$, phương trình (1) trở thành

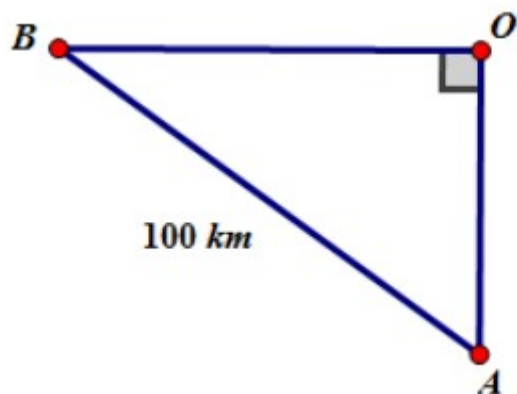
$$t^2 + 2mt + 4m + 5 = 0(2)$$

Phương trình (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm dương phân biệt

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 - (4m + 5) > 0 \\ S = -2m > 0 \\ P = 4m + 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 - 4m + 5 > 0 \\ m < 0 \\ m > \frac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m < -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ m > \frac{-5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{5}{4} < m < -1$$

Vậy tất cả các giá trị m cần tìm là $m \in \left(\frac{-5}{4}; -1 \right)$

Bài 4:



Gọi O là điểm khởi hành của 2 xe.

Sau 4 giờ, người thứ nhất ở vị trí A, người thứ hai đang ở vị trí B và $AB = 100\text{km}$.

Gọi vận tốc của người thứ nhất là x (km / h) ($x > 0$)

Vì vận tốc của người thứ nhất nhỏ hơn vận tốc của người thứ hai 5km/h nên vận tốc của người thứ hai là $x + 5$ (km / h)

Quãng đường người thứ nhất đi trong 4 giờ là $OA = 4x$ (km)

Quãng đường người thứ hai đi trong 4 giờ là $OB = 4(x + 5)$ (km)

Vì $\triangle OAB$ vuông ở O nên ta có phương trình:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 + 16(x+5)^2 = 100^2$$

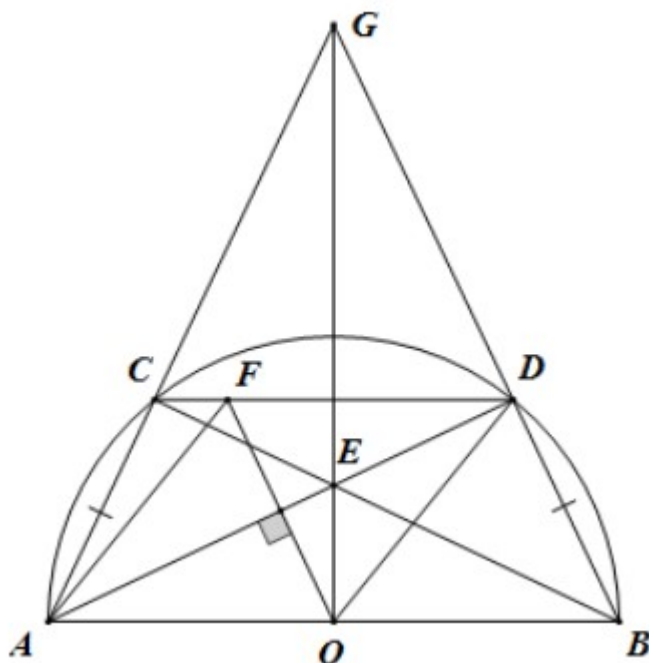
$$\Leftrightarrow 2x^2 + 10x - 600 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(x-15)(x+20) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 15 \text{ (thỏa mãn) hoặc } x = -20 \text{ (loại)}$$

Vận tốc của người thứ nhất là 15 km/h và của người thứ hai là 20 km/h .

Bài 5:



a) Vì C, D thuộc đường tròn đường kính AB nên:

$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow$ Hai tam giác ACE và BDE vuông

$$\Rightarrow \angle CAE + \angle AEC = 90^\circ; \angle DBE + \angle BED = 90^\circ$$

Mà $\widehat{AEC} = \widehat{BED}$ (hai góc đối đỉnh) nên $\widehat{CAE} = \widehat{DBE}$

Xét $\triangle ACE$ và $\triangle BDE$ có:

$$\begin{cases} ACE = BDE = 90^\circ (\text{cmt}) \\ AC = BD (\text{gt}) \\ CAE = DBE (\text{cmt}) \end{cases} \Rightarrow \triangle ACE = \triangle BDE (g.c.g)$$

b) Vì $\triangle ACE = \triangle BDE$ nên $AE = BE$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $OA = OB$ nên OE là đường trung trực của đoạn AB

$$\Rightarrow \angle AOE = 90^\circ$$

Tứ giác AOEC có tổng hai góc đối $\text{AOE} + \text{ACE} = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên AOEC là tứ giác nội tiếp

Chứng minh tương tự ta có BOED là tứ giác nội tiếp.

c) Vì $EA = EB$ (cmt) nên ΔABE cân ở E

$$\Rightarrow \angle EAB = \angle EBA \quad (1)$$

Vì ACDB là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle EAB = \angle ECD \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD)} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \angle ECD = \angle EBA$$

$$\Rightarrow CD \parallel AB \quad (3)$$

Vì $OF \perp AD$, $BD \perp AD$ nên $OF \parallel BD$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ OFDB là hình bình hành

$$\Rightarrow DF = OB = OA$$

Mà $DF \parallel OA$ nên tứ giác AODF là hình bình hành

Hình bình hành AODF có hai đường chéo OF và AD vuông góc với nhau nên nó là hình thoi.

d) Vì $\Delta ACE = \Delta BDE$ nên $\angle CAE = \angle DBE$

$$\text{Mà } \angle EAB = \angle EBA \text{ (cmt) nên } \angle CAE + \angle EAB = \angle DBE + \angle EBA \Rightarrow \angle CAB = \angle DBA$$

$$\Rightarrow \Delta GAB \text{ cân ở G}$$

$$\Rightarrow GA = GB$$

$\Rightarrow$ G thuộc đường trung trực của đoạn AB.

$$\Rightarrow G \in OE$$

$\Rightarrow O, E, G$ thẳng hàng.

Đề số 34. Chuyên Lương Văn Tụy – Ninh Bình. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (2,0 điểm)

$$A = \frac{1}{x + \sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} + \frac{1}{x - \sqrt{x}}$$

1. Rút gọn biểu thức:

$$B = \sqrt[3]{85 + 62\sqrt{7}} + \sqrt[3]{85 - 62\sqrt{7}}$$

2. Tính giá trị biểu thức:

Câu 2. (2,0 điểm)

$$\begin{cases} x + 2y = 2m + 1 \\ 4x + 2y = 5m - 1 \end{cases}$$

1. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho hệ phương trình

2. Tìm tất cả các giá trị của tham số m sao cho parabol (P): $y = x^2$ cắt đường thẳng d: $y = mx - 2$ tại 2 điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$

Câu 3. (2,0 điểm)

1. Giải phương trình $\sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1$

$$\begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases}$$

2. Giải hệ phương trình

Câu 4. (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$) ngoại tiếp đường tròn tâm O. Gọi D, E, F lần lượt là tiếp điểm của (O) với các cạnh AB, AC, BC. Đường thẳng BO cắt các đường thẳng EF và DF lần lượt tại I và K.

1. Tính số đo góc BIF
2. Giả sử M là điểm di chuyển trên đoạn CE .
 - a. Khi $AM = AB$, gọi H là giao điểm của BM và EF. Chứng minh rằng ba điểm A, O, H thẳng hàng, từ đó suy ra tứ giác ABHI nội tiếp.
 - b. Gọi N là giao điểm của đường thẳng BM với cung nhỏ EF của (O), P, Q lần lượt là hình chiếu của N trên các đường thẳng DE và DF. Xác định vị trí điểm M để độ dài đoạn thẳng PQ max.

Câu 5. (1,0 điểm)

Cho a, b, c là các số dương thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq 3$$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI VÀO 10 CHUYÊN LƯƠNG VĂN TỰY – NINH BÌNH

Câu 1.

1. Ta có:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{x+\sqrt{x}} - \frac{2\sqrt{x}}{x-1} + \frac{1}{x-\sqrt{x}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} - \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} + \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} \\
&= \frac{(\sqrt{x}-1) - 2\sqrt{x}\sqrt{x} + (\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{-2x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{-2\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \\
&= \frac{-2}{\sqrt{x}+1}
\end{aligned}$$

Vậy $A = \frac{-2}{\sqrt{x}+1}$

2. $B = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}} + \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}}$

Đặt $a = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}}; b = \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}} \Rightarrow a+b=B$

Mặt khác:

$$a^3 + b^3 = (85+62\sqrt{7}) + (85-62\sqrt{7}) = 170$$

$$ab = \sqrt[3]{85+62\sqrt{7}} \sqrt[3]{85-62\sqrt{7}} = \sqrt[3]{85^2 - (62\sqrt{7})^2} = \sqrt[3]{-19683} = -27$$

Ta có:

$$B^3 = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$= 170 - 3 \cdot 27 \cdot B$$

$$\Rightarrow B^3 + 81B - 170 = 0$$

$$\Rightarrow (B-2)(\underbrace{B^2+2B+85}_{>0}) = 0$$

$$\Rightarrow B = 2$$

Vậy $B=2$

Câu 2.

1.
$$\begin{cases} x+2y=2m+1 \\ 4x+2y=5m-1 \end{cases} \quad (I)$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{x+2y-1}{2} \\ m = \frac{4x+2y+1}{5} \end{cases} \Rightarrow \frac{x+2y-1}{2} = \frac{4x+2y+1}{5}$$

$$\Rightarrow 5(x+2y-1) = 2(4x+2y+1) \Rightarrow 3x-6y+7=0$$

Giả sử hệ phương trình đã cho có nghiệm nguyên $(x_0; y_0)$ thì

$$3x_0 - 6y_0 + 7 = 0 \Rightarrow 6y_0 - 7 = 3x_0 : 3 \Rightarrow 7 : 3 \quad (\text{vô lí})$$

Vậy hệ phương trình không có nghiệm nguyên $\forall m$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$$x^2 - mx + 2 = 0 \quad (1)$$

(P) cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2) \Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = m^2 - 4 \cdot 2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > 8 \Leftrightarrow m > 2\sqrt{2} \text{ hoặc } m < -2\sqrt{2}$$

Khi đó x_1, x_2 là nghiệm của (1). Áp dụng định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = m; x_1 x_2 = 2$.

Do $A, B \in d$ nên $y_1 = mx_1 - 2$ và $y_2 = mx_2 - 2$.

Ta có:

$$y_1 + y_2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

$$\Leftrightarrow mx_1 - 2 + mx_2 - 2 = 2(x_1 + x_2) - 1$$

$$\Leftrightarrow (m - 2)(x_1 + x_2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m - 2) - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -1 \text{ (loại) hoặc } m = 3 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $m = 3$ là giá trị cần tìm.

Câu 3.

$$1. \sqrt{x^2 - 9} - \sqrt{x^2 - 16} = 1 \quad (1)$$

ĐK: $x^2 \geq 16 \Leftrightarrow x \geq 4$ hoặc $x \leq -4$.

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{x^2 - 16} + 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9 = x^2 - 16 + 2\sqrt{x^2 - 16} + 1$$

$$\Leftrightarrow 6 = 2\sqrt{x^2 - 16}$$

$$\Leftrightarrow 3 = \sqrt{x^2 - 16}$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 25 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \pm 5$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $S = \{-5; 5\}$.

$$2. \begin{cases} x^3 + 4y = y^3 + 16x \\ 1 + y^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \quad (I)$$

$$\begin{cases} 4y = y^3 \\ y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow y = \pm 2$$

– Xét $x = 0$, hệ (I) trở thành

$$\frac{y}{x} = t \Leftrightarrow y = xt$$

– Xét $x \neq 0$, đặt x . Hệ (I) trở thành

$$\begin{cases} x^3 + 4xt = x^3 t^3 + 16x \\ 1 + x^2 t^2 = 5(1 + x^2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4xt - 16x \\ x^2(t^2 - 5) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3(t^3 - 1) = 4x(t - 4) \quad (1) \\ 4 = x^2(t^2 - 5) \quad (2) \end{cases}$$

Nhân từng vế của (1) và (2), ta được phương trình hệ quả

$$4x^3(t^3 - 1) = 4x^3(t - 4)(t^2 - 5)$$

$$\Leftrightarrow t^3 - 1 = t^3 - 4t^2 - 5t + 20 \quad (\text{Do } x \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow 4t^2 + 5t - 21 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \frac{7}{4} \end{cases}$$

+ Với $t = -3$, thay vào (2) được $x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

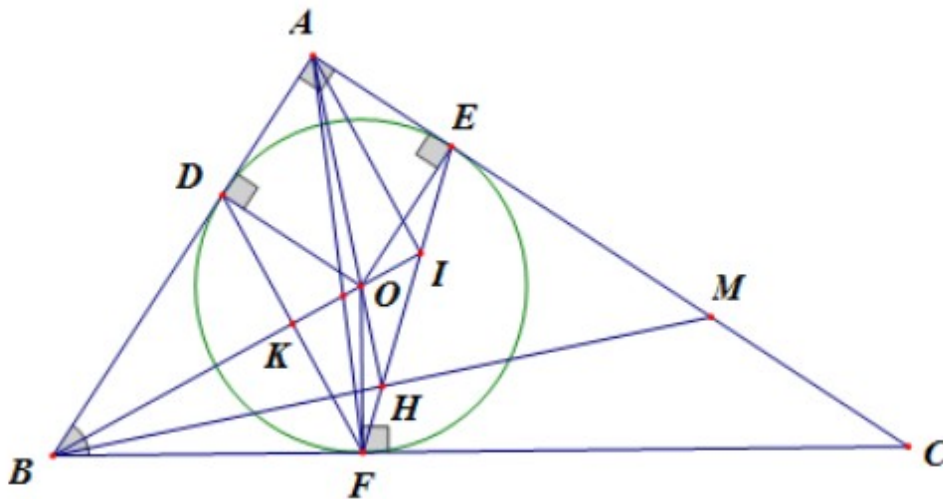
$x = 1$ thì $y = -3$, thử lại $(1; -3)$ là một nghiệm của (I)

$x = -1$ thì $y = 3$, thử lại $(-1; 3)$ là một nghiệm của (I)

+ Với $t = \frac{7}{4}$, thay vào (2) được $x^2 = -\frac{64}{31}$ (loại)

Vậy hệ (I) có các nghiệm $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(1; -3)$, $(-1; 3)$.

Câu 4.



1. Vì BD, BF là các tiếp tuyến của (O) nên $OD \perp BD$, $OF \perp BF$.

Xét 2 tam giác vuông OBD và OBF có

$$\left. \begin{array}{l} OB \text{ chung} \\ OBD = OBF(\text{gt}) \end{array} \right\} \Rightarrow \triangle OBD = \triangle OBF \quad (\text{cạnh huyền-góc nhọn})$$

$$\Rightarrow BD = BF$$

Mà $OD = OF = r$ nên OB là trung trực của DF $\Rightarrow OB \perp DF \Rightarrow \triangle KIF$ vuông tại K.

Mà $OD = OF = r$ nên OB là trung trực của DF $\Rightarrow OB \perp DF \Rightarrow \triangle KIF$ vuông tại K. $\angle DOE = 90^\circ$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cho đường tròn (O), ta có:

$$\angle DFE = \frac{1}{2} \angle DOE = 45^\circ$$

$\Rightarrow \triangle KIF$ vuông cân tại K.

$$\Rightarrow \angle BIF = 45^\circ$$

2.

a. Hình chữ nhật ADOE có $OD = OE = r$ nên nó là hình vuông

$\Rightarrow AO$ là trung trực DE (1)

Vì $AB = AM$ nên tam giác ABM vuông cân tại A, suy ra $\angle ABM = 45^\circ$

$$\Rightarrow DBH = DFH = 45^\circ$$

$\Rightarrow$ BDHF là tứ giác nội tiếp (2)

Vì $BDO + BFO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên BDOF là tứ giác nội tiếp (3)

Từ (2) và (3) $\Rightarrow$ 5 điểm B, D, O, H, F nằm trên một đường tròn.

$$\Rightarrow BHO = BFO = 90^\circ$$

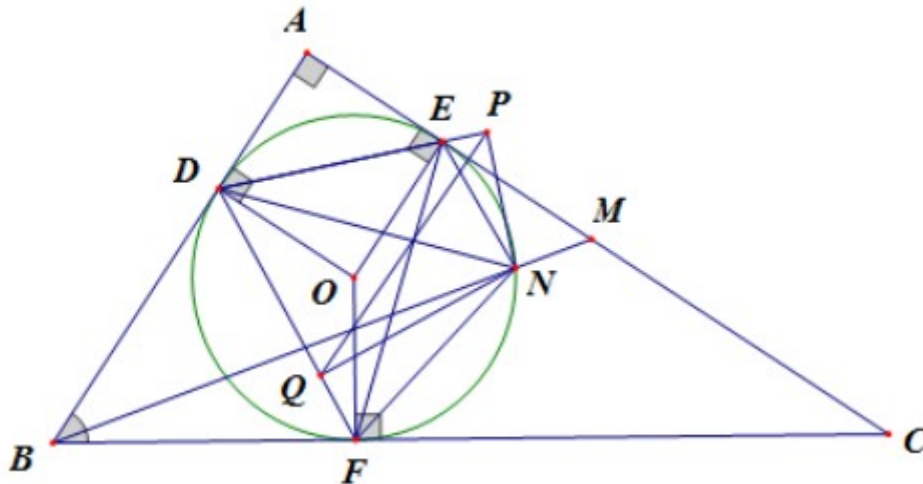
$\Rightarrow OH \perp BM$.

Mặt khác $ADE = ABM = 45^\circ \Rightarrow DE \parallel BM \Rightarrow OH \perp DE$

Mà $OD = OE$ nên OH là trung trực của đoạn OE (4)

Từ (1) và (4) $\Rightarrow A, O, H$ thẳng hàng.

b.



Vì $DPN + DQN = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$ nên DPNQ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow QPN = QDN$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QN) (5)

Mặt khác DENF là tứ giác nội tiếp nên $QDN = FEN$ (6)

Từ (5) và (6) ta có $FEN = QPN$ (7)

Tương tự ta có: $EFN = PQN$ (8)

$$\triangle NPQ \sim \triangle NEF (g.g) \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF}$$

Từ (7) và (8) suy ra

Theo quan hệ đường vuông góc – đường xiên, ta có

$$NQ \leq NF \Rightarrow \frac{PQ}{EF} = \frac{NQ}{NF} \leq 1 \Rightarrow PQ \leq EF$$

Dấu bằng xảy ra khi $Q \equiv F \Leftrightarrow NF \perp DF \Leftrightarrow D, O, N$ thẳng hàng.

Do đó PQ max khi M là giao điểm của AC và BN, với N là điểm đối xứng với D qua O.

Câu 5.

Ta chứng minh BĐT

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \geq 9 (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow 3 + \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \right) \geq 9$$

Áp dụng BĐT Cô – si cho hai số dương ta có:

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$$

$$\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \geq 2$$

$$\frac{c}{a} + \frac{a}{c} \geq 2$$

$\Rightarrow (*)$ đúng

$$\Rightarrow \frac{9}{a+b+c} \leq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq 3 \Rightarrow a+b+c \geq 3$$

Trở lại bài toán: Áp dụng BĐT Cô si cho hai số dương ta có $1+b^2 \geq 2b$

Ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} = a - \frac{ab^2}{1+b^2} \geq a - \frac{ab^2}{2b} = a - \frac{ab}{2} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{b}{1+c^2} \geq b - \frac{bc}{2} \quad (2)$$

$$\frac{c}{1+a^2} \geq c - \frac{ca}{2} \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có:

$$\frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} \geq a+b+c - \frac{1}{2}(ab+bc+ca)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1+b^2} + \frac{b}{1+c^2} + \frac{c}{1+a^2} + \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geq a+b+c \geq 3$$

$\Rightarrow$ đpcm

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = c = 1$.

Đề số 35. Chuyên Nguyễn Du - Đaklak. Năm học: 2015-2016

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^4 - 2(m+4)x^2 + m^2 + 8 = 0$ (*) với m là tham số.

a) Giải phương trình (*) khi $m = 0$

b) Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $x_1; x_2; x_3; x_4$ thỏa mãn điều kiện

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 = 240$$

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7 \\ 2y^3 + 2xy^2 = 5 \end{cases}$$

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x + 1}$

Câu 3 (2,0 điểm)

a) Tìm tất cả các số x, y nguyên dương thỏa mãn phương trình $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617}$

b) Tìm số tự nhiên bé nhất có 4 chữ số biết nó chia hết cho 7 được số dư là 2 và bình phương của nó chia hết cho 11 được số dư là 3.

Câu 4 (3,0 điểm)

a) Cho tam giác ABC có ba góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm I. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Hai đường thẳng BH, CH cắt đường tròn (I) lần lượt tại hai điểm P và Q (P khác B và Q khác C)

1, Chứng minh $IA \perp PQ$

2, Trên hai đoạn HB và HC lần lượt lấy hai điểm M, N sao cho $AM \perp MC$, $AN \perp NB$. Chứng minh ΔAMN cân

b) Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 2\angle CBA = 4\angle ACB$. Chứng minh $\frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$

Câu 5 (1,0 điểm) Cho ba số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện $x + y + z = 1$. Chứng minh rằng

$$\frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} > 2015$$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a) Khi $m = 0$ ta có phương trình:

$$(*) \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 8 = 0 \Leftrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 8 \Leftrightarrow (x^2 - 4)^2 = (2\sqrt{2})^2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4 = 2\sqrt{2} \\ x^2 - 4 = -2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 + 2\sqrt{2} \\ x^2 = 4 - 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}} \\ x = \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \end{cases}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{ \pm\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}; \pm\sqrt{4 - 2\sqrt{2}} \right\}$

b) Đặt $t = x^2 (t \geq 0)$ ta có $(*) \Leftrightarrow t^2 - 2(m+4)t + m^2 + 8 = 0 \quad (**)$

Với $t = 0 \Rightarrow x = 0$ và mỗi giá trị $t > 0$ cho 2 giá trị của x nên $(*)$ có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (**) \text{ có 2 nghiệm dương phân biệt}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = (m+4)^2 - (m^2 + 8) > 0 \\ S = 2(m+4) > 0 \\ P = m^2 + 8 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8m + 8 > 0 \\ m > -4 \end{cases} \Leftrightarrow m > -1$$

Giả sử t_1, t_2 là 2 nghiệm của $(**)$ thì theo Viét ta có $t_1 + t_2 = 2(m+4)$; $t_1 t_2 = m^2 + 8$

Giả sử 4 nghiệm của $(*)$ là $x_1 = -\sqrt{t_2}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_1}; x_4 = \sqrt{t_2}$. Suy ra

$$\begin{aligned} x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 + x_4^4 &= 240 \Leftrightarrow 2(t_1^2 + t_2^2) = 240 \Leftrightarrow t_1^2 + t_2^2 = 120 \Leftrightarrow (t_1 + t_2)^2 - 2t_1 t_2 = 120 \\ &\Leftrightarrow [2(m+4)]^2 - 2(m^2 + 8) = 120 \Leftrightarrow 2m^2 + 32m - 72 = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow m = 2 \text{ (thỏa mãn) hoặc } m = -18 \text{ (loại)}$$

Vậy $m = 2$.

Câu 2 (2,0 điểm)

a) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7(1) \\ 2y^3 + 2xy^2 = 5(2) \end{cases} \quad (I)$$

+) Nếu $x = 0$, ta có $0^3 + 6 \cdot 0^2 \cdot y = 0 \neq 7$, nên $x \neq 0$

+) Với $x \neq 0$, đặt $y = xt$ ta có

$$\begin{cases} x^3 + 6x^2y = 7(1) \\ 2y^3 + 3xy^2 = 5(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 6x^3t = 7(1) \\ 2x^3t^3 + 3x^3t = 5(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{x^3 + 6x^3t}{2x^3t^3 + 3x^3t} = \frac{7}{5} \Leftrightarrow 14t^3 - 9t - 5 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(14t^2 + 14t + 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1(14t^2 + 14t + 5 = 0 \text{ vn})$$

Do đó $y = x$, nên ta có:

$$7x^3 = 7 \Leftrightarrow x = 1 \Rightarrow y = 1$$

Vậy hệ có 1 nghiệm duy nhất (1;1)

b) Giải phương trình $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = 2x - 4 + \sqrt{x+1}$ (1)

Điều kiện: $x \geq -1$. Có (1) $\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 12} - \sqrt{x+1} = 2x - 4$ (2)

$$\left((x^2 + 4x + 12) - (x+1) \right) = x^2 + 3x + 11 = \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 + \frac{35}{4} > 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 12} > \sqrt{x+1}$$

Xét

Do đó từ (2) $\Rightarrow 2x - 4 > 0 \Rightarrow x > 2$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 2(*) \\ (x^2 + 4x + 12) - 2\sqrt{x^2 + 4x + 12} \cdot \sqrt{x+1} + (x+1) = 4(x^2 - 4x + 4)(3) \end{cases}$$

Đặt $\sqrt{x^2 + 4x + 12} = a; \sqrt{x+1} = b (a, b > 0) \Rightarrow a^2 - 8b^2 = x^2 - 4x + 4$

$$(3) \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 = 4(a^2 - 8b^2) \Leftrightarrow 3a^2 + 2ab - 33b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a - 3b)(3a + 11b) = 0 \Leftrightarrow a = 3b$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + 4x + 12} = 3\sqrt{x+1} \Leftrightarrow x^2 + 4x + 12 = 9x + 9$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5 - \sqrt{13}}{2} \text{ (không thỏa mãn (*)) hoặc } x = \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{5 + \sqrt{13}}{2} \right\}$

Câu 3

a) Ta có

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow \frac{x+y}{xy} = \frac{1}{617} \Leftrightarrow xy - 617(x+y) = 0 \Leftrightarrow xy - 617x - 617y + 617^2 = 617^2$$

$$\Leftrightarrow (x-617)(y-617) = 617^2$$

Vì x, y nguyên dương nên x - 617 và y - 617 là ước lớn hơn -617 của 617².

Do 617 là số nguyên tố nên xảy ra 3 trường hợp:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} x-617 = 617 \\ y-617 = 617 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x-617 = 1 \\ y-617 = 617^2 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} x-617 = 617^2 \\ y-617 = 1 \end{array} \right. \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 1234 \\ x = 618; y = 381306 \\ x = 381306; y = 618 \end{array} \right.$$

Vậy tất cả các cặp (x;y) nguyên dương cần tìm là (1234;1234) , (618; 381306), (381306; 618)

b) Gọi x là số cần tìm ($x \in \mathbb{N}, 1000 \leq x \leq 9999$)

Vì x² chia cho 11 dư 3, nên x chia cho 11 dư 5 hoặc dư 6

+) Nếu x² chia cho 11 dư 5 nên $x - 5 : 11 \Rightarrow x - 5 + 66 = x + 61 : 11$

Lại có x² chia cho 7 dư 2 $\Rightarrow x - 2 : 7 \Rightarrow x - 2 + 63 = x + 61 : 7$

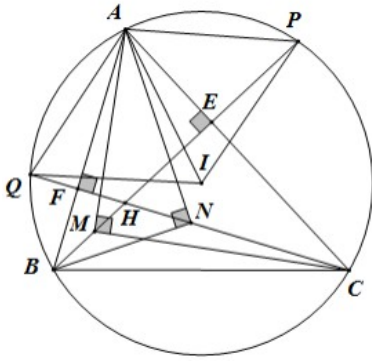
Do đó $x + 61 \in \text{BC}(11;7) \Rightarrow x + 61 = 77k \Rightarrow x = 77k - 61 (k \in \mathbb{N})$

Vì ($x \in \mathbb{N}, 1000 \leq x \leq 9999$) $\Rightarrow 1000 \leq 77k - 61 \leq 9999 \Rightarrow 14 \leq k \leq 130$

Mà x bé nhất, nên chọn $k = 14 \Rightarrow x = 77.14 - 61 = 1017$

Vậy số cần tìm là 1017

Câu 4



a) Gọi E, F lần lượt là giao của BH và AC, CH và AB.

1, Ta có $\angle ABE = \angle ACF = 90^\circ - \angle BAC$ suy ra số đo hai cung AP và AQ của đường tròn (I) bằng nhau
 $\Rightarrow AP = AQ$

Mà $IP = IQ$ nên IA là trung trực PQ $\Rightarrow IA \perp PQ$.

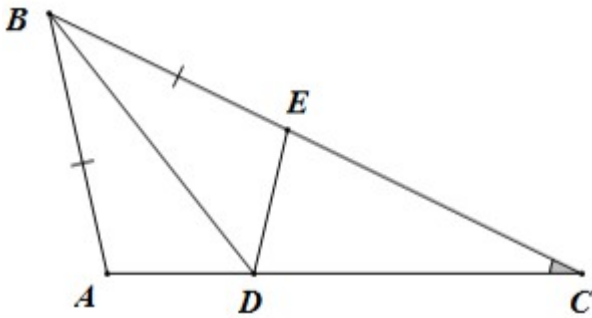
2, Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông AMC ta có: $AM^2 = AE \cdot AC$

Tương tự ta có: $AN^2 = AF \cdot AB$.

Có $\Delta ABE \sim \Delta ACF (g.g) \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow AE \cdot AC = AB \cdot AF \Rightarrow AM^2 = AN^2$

Suy ra $AM = AN$. Tam giác AMN cân tại A.

b)



Đặt $C = \alpha \Rightarrow \angle ABC = 2\alpha; \angle A = 4\alpha$

Gọi BD là phân giác của góc ABC ($D \in AC$). E thuộc đoạn BC sao cho $BE = BA$

Ta có $\angle ABD = \angle EBD = \alpha \Rightarrow \Delta BDC$ cân tại D $\Rightarrow BD = DC$

$$\Delta ABD = \Delta AED (c.g.c) \Rightarrow \angle BED = \angle A = 4\alpha \quad (1)$$

$$\text{Vì } \angle ABD = \angle C = \alpha \Rightarrow \Delta ABD \sim \Delta ACB (g.g) \Rightarrow \angle ADB = \angle ABC = 2\alpha$$

$$\Rightarrow \angle EDB = \angle ADB = 2\alpha \Rightarrow \angle ADE = 4\alpha \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle BED = \angle ADE = 4\alpha \Rightarrow \angle CED = \angle CDE = 180^\circ - 4\alpha$. Suy ra ΔCED cân tại C

Suy ra $CE = CD \Rightarrow BC - BE = BD \Rightarrow BD = BC - BA$ (3)

$$\text{Vì } \triangle ABD \sim \triangle ACD \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{BD}{CB} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow BD = \frac{CB \cdot AB}{AC} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra

$$BC - BA = \frac{CB \cdot AB}{AC} \Rightarrow \frac{BC - BA}{BC \cdot BA} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{BA} - \frac{1}{BC} = \frac{1}{AC} \Rightarrow \frac{1}{AB} = \frac{1}{BC} + \frac{1}{CA}$$

Câu 5

Với mọi $a, b > 0$ và x, y, z thỏa điều kiện đề bài, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương:

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 2\sqrt{ab} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}} = 4 \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} (*)$$

$$(x^2 + y^2) + (y^2 + z^2) + (z^2 + x^2) \geq 2xy + 2yz + 2zx \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz + 2zx \geq 3(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx \leq \frac{(x+y+z)^2}{3} = \frac{1}{3}$$

Áp dụng 2 bất đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{350}{xy + yz + zx} + \frac{386}{x^2 + y^2 + z^2} = 386 \left(\frac{1}{2xy + 2yz + 2zx} + \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \right) + \frac{157}{xy + yz + zx} \\ &\geq 386 \cdot \frac{4}{2xy + 2yz + 2zx + x^2 + y^2 + z^2} + \frac{157}{xy + yz + zx} \\ &= \frac{1544}{(x+y+z)^2} + \frac{157}{xy + yz + zx} = 1544 + \frac{157}{xy + yz + zx} \geq 1544 + \frac{157}{\frac{1}{3}} = 2015 \end{aligned}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi } \begin{cases} x = y = z \\ x + y + z = 1 \\ 2xy + 2yz + 2zx = x^2 + y^2 + z^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \end{cases} \quad (\text{không xảy ra})$$

Vậy $P > 2015$ (đpcm)

Đề số 36. Chuyên Hải Dương. Năm học: 2015-2016

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho $a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2015$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0$.

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x + 3 + \sqrt{4x^2 + 9x + 2} = 2\sqrt{x+2} + \sqrt{4x+1}$.

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2 - y^2 + xy - 5x + y + 2 = \sqrt{y-2x+1} - \sqrt{3-3x} \\ x^2 - y - 1 = \sqrt{4x+y+5} - \sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$.

2) Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

Câu IV (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.

1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

Câu V (1,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.

-----Hết-----

Câu I (2,0 điểm)

1) Cho $a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5}$. Tính giá trị của biểu thức:

$$A = a^2(a+1) - b^2(b-1) - 11ab + 2015$$

$$a - b = \sqrt{29 + 12\sqrt{5}} - 2\sqrt{5} = \sqrt{(3 + 2\sqrt{5})^2} - 2\sqrt{5} = 3$$

$$A = a^3 - b^3 + a^2 + b^2 - 11ab + 2015$$

$$= (a-b)(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015$$

$$= 3(a^2 + b^2 + ab) + a^2 + b^2 - 11ab + 2015$$

$$= 4(a^2 - 2ab + b^2) + 2015 = 4(a-b)^2 + 2015 = 2051$$

2) Cho x, y là hai số thực thỏa mãn $xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1$.

Chứng minh rằng $x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = 0$.

$$xy + \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1+x^2)(1+y^2)} = 1 - xy$$

$$\Rightarrow (1+x^2)(1+y^2) = (1-xy)^2$$

$$\Leftrightarrow 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1 - 2xy + x^2y^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$$

$$\Rightarrow x\sqrt{1+y^2} + y\sqrt{1+x^2} = x\sqrt{1+x^2} - x\sqrt{1+x^2} = 0$$

Câu II (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $2x+3+\sqrt{4x^2+9x+2}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}$.

$$Pt \Leftrightarrow 2x+3+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}. \quad ĐK: x \geq -\frac{1}{4}$$

$$Đặt \quad t^2=8x+4\sqrt{(x+2)(4x+1)}+9 \Leftrightarrow 2x+\sqrt{(x+2)(4x+1)}=\frac{t^2-9}{4}$$

$$PTTT \quad t^2-4t+3=0 \Leftrightarrow t=1 \text{ hoặc } t=3$$

TH1. $t=1$ giải ra vô nghiệm hoặc kết hợp với ĐK $t \geq \sqrt{7}$ bị loại

$$TH 2. \quad t=3 \Rightarrow 2\sqrt{x+2}+\sqrt{4x+1}=3. \text{ Giải pt tìm được } x=-\frac{2}{9} \text{ (TM)}$$

Vậy pt có nghiệm duy nhất $x=-\frac{2}{9}$

2) Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} 2x^2-y^2+xy-5x+y+2=\sqrt{y-2x+1}-\sqrt{3-3x} \\ x^2-y-1=\sqrt{4x+y+5}-\sqrt{x+2y-2} \end{cases}$$

$$ĐK: y-2x+1 \geq 0, 4x+y+5 \geq 0, x+2y-2 \geq 0, x \leq 1$$

$$TH 1. \quad \begin{cases} y-2x+1=0 \\ 3-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0=0 \\ -1=\sqrt{10}-1 \end{cases} \text{ (Không TM hệ)}$$

TH 2. $x \neq 1, y \neq 1$ Đưa pt thứ nhất về dạng tích ta được

$$(x+y-2)(2x-y-1)=\frac{x+y-2}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}$$

$$(x+y-2)\left[\frac{1}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}+y-2x+1\right]=0 \quad . \text{ Do } y-2x+1 \geq 0$$

$$\text{nên } \frac{1}{\sqrt{y-2x+1}+\sqrt{3-3x}}+y-2x+1 > 0 \Rightarrow x+y-2=0$$

$$\text{Thay } y=2-x \text{ vào pt thứ 2 ta được } x^2+x-3=\sqrt{3x+7}-\sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + x - 2 = \sqrt{3x+7} - 1 + 2 - \sqrt{2-x}$$

$$\Leftrightarrow (x+2)(x-1) = \frac{3x+6}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{2+x}{2+\sqrt{2-x}}$$

$$\Leftrightarrow (x+2) \left[\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1-x \right] = 0$$

Do $x \leq 1$ nên $\frac{3}{\sqrt{3x+7}+1} + \frac{1}{2+\sqrt{2-x}} + 1-x > 0$

Vậy $x+2=0 \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=4$ (TMDK)

Câu III (2,0 điểm)

1) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn $x^4 + x^2 - y^2 - y + 20 = 0$. (1)

Ta có (1) $\Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = y^2 + y$

Ta thấy $x^4 + x^2 < x^4 + x^2 + 20 \leq x^4 + x^2 + 20 + 8x^2$

$$\Leftrightarrow x^2(x^2+1) < y(y+1) \leq (x^2+4)(x^2+5)$$

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ nên ta xét các trường hợp sau

+ TH1. $y(y+1) = (x^2+1)(x^2+2) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 3x^2 + 2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$$

Với $x^2 = 9$, ta có $y^2 + y = 9^2 + 9 + 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 110 = 0$

$$\Leftrightarrow y = 10; y = -11 (tm)$$

+ TH2. $y(y+1) = (x^2+2)(x^2+3) \Leftrightarrow x^4 + x^2 + 20 = x^4 + 5x^2 + 6$

$$\Leftrightarrow 4x^2 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{2} \text{ (loại)}$$

+ TH3. $y(y+1) = (x^2+3)(x^2+4) \Leftrightarrow 6x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = \frac{4}{3} \text{ (loại)}$

+ TH4. $y(y+1) = (x^2+4)(x^2+5) \Leftrightarrow 8x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Với $x^2 = 0$, ta có $y^2 + y = 20 \Leftrightarrow y^2 + y - 20 = 0 \Leftrightarrow y = -5; y = 4$

Vậy PT đã cho có nghiệm nguyên $(x;y)$ là :

(3;10), (3;-11), (-3; 10), (-3;-11), (0; -5), (0;4).

2) Tìm các số nguyên k để $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương.

Đặt $M = k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$

Ta có $M = (k^4 - 2k^2 + 1) - 8k(k^2 - 2k + 1) + 9k^2 - 18k + 9$

$$= (k^2 - 1)^2 - 8k(k - 1)^2 + 9(k - 1)^2 = (k - 1)^2 \cdot [(k - 3)^2 + 1]$$

M là số chính phương khi và chỉ khi $(k - 1)^2 = 0$ hoặc $(k - 3)^2 + 1$ là số chính phương.

TH 1. $(k - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

TH 2. $(k - 3)^2 + 1$ là số chính phương, đặt $(k - 3)^2 + 1 = m^2 (m \in \mathbb{Z})$

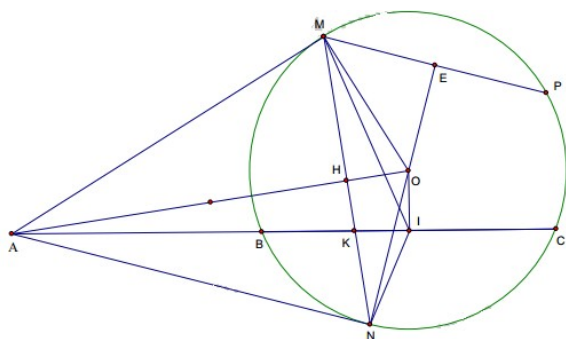
$$\Leftrightarrow m^2 - (k - 3)^2 = 1 \Leftrightarrow (m - k + 3)(m + k - 3) = 1$$

Vì $m, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow m - k + 3 \in \mathbb{Z}, m + k - 3 \in \mathbb{Z}$ nên

$$\begin{cases} m - k + 3 = 1 \\ m + k - 3 = 1 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} m - k + 3 = -1 \\ m + k - 3 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1, k = 3 \\ m = -1, k = 3 \end{cases} \Rightarrow k = 3$$

Vậy $k = 1$ hoặc $k = 3$ thì $k^4 - 8k^3 + 23k^2 - 26k + 10$ là số chính phương

Câu IV (3,0 điểm) Cho đường tròn $(O; R)$ và dây BC cố định không đi qua tâm. Trên tia đối của tia BC lấy điểm A (A khác B). Từ A kẻ hai tiếp tuyến AM và AN với đường tròn (O) (M và N là các tiếp điểm). Gọi I là trung điểm của BC.



1) Chứng minh A, O, M, N, I cùng thuộc một đường tròn và IA là tia phân giác của góc MIN

Theo giả thiết $\angle AMO = \angle ANO = \angle AIO = 90^\circ \Rightarrow 5$ điểm A, O, M, N, I thuộc đường tròn đường kính AO 0,25

$\Rightarrow \angle AIN = \angle AMN, \angle AIM = \angle ANM$ (Góc nội tiếp cùng chắn một cung)

$$AM = AN \Rightarrow \Delta AMN \text{ cân tại } A \Rightarrow AMN = ANM$$

$$\Rightarrow \angle IN = \angle IM \Rightarrow \text{đpcm}$$

2) Gọi K là giao điểm của MN và BC. Chứng minh $\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

$$\frac{2}{AK} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \Leftrightarrow 2AB \cdot AC = AK(AB + AC) \Leftrightarrow AB \cdot AC = AK \cdot AI$$

$$(\text{Do } AB + AC = 2AI)$$

$$\Delta ABN \text{ đồng dạng với } \Delta ANC \Rightarrow AB \cdot AC = AN^2$$

$$\Delta AHK \text{ đồng dạng với } \Delta AIO \Rightarrow AK \cdot AI = AH \cdot AO$$

$$\text{Tam giác } \Delta AMO \text{ vuông tại } M \text{ có đường cao } MH \Rightarrow AH \cdot AO = AM^2$$

$$\Rightarrow AK \cdot AI = AM^2. \text{ Do } AN = AM \Rightarrow AB \cdot AC = AK \cdot AI$$

3) Đường thẳng qua M và vuông góc với đường thẳng ON cắt (O) tại điểm thứ hai là P. Xác định vị trí của điểm A trên tia đối của tia BC để AMPN là hình bình hành.

$$\text{Ta có } AN \perp NO, MP \perp NO, M \notin AN \Rightarrow AN \parallel MP$$

$$\text{Do đó } AMPN \text{ là hình bình hành} \Leftrightarrow AN = MP = 2x$$

$$\text{Tam giác } \Delta ANO \text{ đồng dạng với } \Delta NEM \Rightarrow \frac{AN}{NE} = \frac{NO}{EM} \Rightarrow NE = \frac{2x^2}{R}$$

$$\text{TH 1. } NE = NO - OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R - \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 - R\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2.$$

$$2(R^2 - t^2) = R^2 - R t \Leftrightarrow 2t^2 - Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = -R \\ t = R \end{cases}$$

PTTT

$$\text{Do } t \geq 0 \Rightarrow t = R \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow A \equiv B \text{ (loại)}$$

$$\text{TH 2 } NE = NO + OE \Rightarrow \frac{2x^2}{R} = R + \sqrt{R^2 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = R^2 + R\sqrt{R^2 - x^2}$$

$$\text{Đặt } \sqrt{R^2 - x^2} = t, t \geq 0 \Rightarrow x^2 = R^2 - t^2.$$

$$2(R^2 - t^2) = R^2 + Rt \Leftrightarrow 2t^2 + Rt - R^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2t = R \\ t = -R \end{cases}$$

PTTT

$$t \geq 0 \Rightarrow 2t = R \Leftrightarrow 2\sqrt{R^2 - x^2} = R \Leftrightarrow x = \frac{R\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AO = 2R$$

Do (loại)

Vậy A thuộc BC, cách O một đoạn bằng 2R thì AMPN là hnh

Câu V (1,0 điểm) Cho a, b là các số dương thỏa mãn điều kiện $(a+b)^3 + 4ab \leq 12$.

Chứng minh bất đẳng thức $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.

Ta có $12 \geq (a+b)^3 + 4ab \geq (2\sqrt{ab})^3 + 4ab$. Đặt $t = \sqrt{ab}, t > 0$ thì

$$12 \geq 8t^3 + 4t^2 \Leftrightarrow 2t^3 + t^2 - 3 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 + 3t + 3) \leq 0$$

Do $2t^2 + 3t + 3 > 0, \forall t$ nên $t-1 \leq 0 \Leftrightarrow t \leq 1$. Vậy $0 < ab \leq 1$

Chúng minh được $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} \leq \frac{2}{1+\sqrt{ab}}, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

Thật vậy, BĐT $\frac{1}{1+a} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} + \frac{1}{1+b} - \frac{1}{1+\sqrt{ab}} \leq 0$

$$\frac{\sqrt{ab}-a}{(1+a)(1+\sqrt{ab})} + \frac{\sqrt{ab}-b}{(1+b)(1+\sqrt{ab})} \leq 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{b}-\sqrt{a}}{1+\sqrt{ab}} \right) \left(\frac{\sqrt{a}}{1+a} - \frac{\sqrt{b}}{1+b} \right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\sqrt{b}-\sqrt{a})^2(\sqrt{ab}-1)}{(1+\sqrt{ab})(1+a)(1+b)} \leq 0.$$

Do $0 < ab \leq 1$ nên BĐT này đúng

Tiếp theo ta sẽ CM $\frac{2}{1+\sqrt{ab}} + 2015ab \leq 2016, \forall a, b > 0$ thỏa mãn $ab \leq 1$

Đặt $t = \sqrt{ab}, 0 < t \leq 1$ ta được $\frac{2}{1+t} + 2015t^2 \leq 2016$

$$2015t^3 + 2015t^2 - 2016t - 2014 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (t-1)(2015t^2 + 4030t + 2014) \leq 0. \text{ BDT này đúng } \forall t: 0 < t \leq 1$$

Vậy $\frac{1}{1+a} + \frac{1}{1+b} + 2015ab \leq 2016$.
Đẳng thức xảy ra $a = b = 1$

Đề số 37. Chuyên Quảng Bình. Năm học: 2015-2016

Câu 1 (2,0 điểm) Cho biểu thức

$$P = \left(\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \text{ với } x > 0, x \neq 1, x \neq 4$$

a) Rút gọn P

b) Tìm x để $P = -1$

Câu 2 (2,5 điểm)

a) Giải phương trình $x^2 + x - 4\sqrt{3x+1} + 6 = 0$

b) Trong hệ tọa độ Oxy, cho Parabol (P): $y = x^2$ và đường thẳng (d): $y = 2mx + 2$ (m là tham số). Tìm m để

(d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho $S_{OAB} = 2\sqrt{6}$

Câu 3 (1,0 điểm)

Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 11$. Tìm GTNN

$$P = \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 11)} + \sqrt{12(b^2 + 11)} + \sqrt{c^2 + 11}}$$

Câu 4 (1,0 điểm) Tìm số tự nhiên n biết $n + S(n) = 2015$, với $S(n)$ là tổng các chữ số của n.

Câu 5 (3,5 điểm)

Cho tam giác ABC nhọn nội tiếp (O), ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau ở H và cắt (O) tại M, N, P.

a) Chứng minh M đối xứng H qua BC.

b) Chứng minh $(AHB) = (BHC) = (CHA)$ ((AHB) là đường tròn đi qua ba điểm A, H, B)

c) Tính $T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF}$

ĐÁP ÁN ĐỀ THI CHUYÊN QUẢNG BÌNH NĂM 2015 – 2016

Câu 1

a) Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \left(\frac{4\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} - \frac{8x}{4-x} \right) : \left(\frac{\sqrt{x}-4}{x+2\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \\
&= \frac{4\sqrt{x} \cdot (2+\sqrt{x}) - 8x}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{\sqrt{x}-4+(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{-4x+8\sqrt{x}}{(2-\sqrt{x})(2+\sqrt{x})} : \frac{2\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\
&= \frac{4\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{2\sqrt{x}-2} \\
&= \frac{2x}{\sqrt{x}-1}
\end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{2x}{\sqrt{x}-1}$

b) ĐKXD của P là $x > 0$, $x \neq 1$, $x \neq 4$.

$$\begin{aligned}
P = -1 &\Leftrightarrow \frac{2x}{\sqrt{x}-1} = -1 \Leftrightarrow 2x = 1 - \sqrt{x} \Leftrightarrow 2x + \sqrt{x} - 1 = 0 \\
&\Leftrightarrow (\sqrt{x}+1)(2\sqrt{x}-1) = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy $P = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$.

Câu 2

a) $x^2 + x - 4\sqrt{3x+1} + 6 = 0$ (1)

ĐK: $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$

$$\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1) + (3x + 1 - 4\sqrt{3x+1} + 4) = 0 \\
&\Leftrightarrow (x-1)^2 + (\sqrt{3x+1} - 2)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ \sqrt{3x+1}-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=1
\end{aligned}$$

(thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\{1\}$.

b) Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d:

$$x^2 - 2mx - 2 = 0 \quad (1)$$

Có $\Delta' = m^2 + 2 > 0 \forall m$ nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt $\Rightarrow$ (P) luôn cắt d tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của (1).

Theo định lí Vi-ét: $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = -2$.

Do $A, B \in d$ nên $y_1 = 2mx_1 + 2; y_2 = 2mx_2 + 2$

Tính S_{OAB} : Ta có

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (2mx_1 - 2mx_2)^2 \\ &= (1 + 4m^2)(x_1 - x_2)^2 = (1 + 4m^2)[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] \\ &= (1 + 4m^2)(4m^2 + 8) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow AB = 2\sqrt{(4m^2 + 1)(m^2 + 2)}$$

$$d(O; AB) = d(O; d) = \frac{|0 - 0 + 2|}{\sqrt{(2m)^2 + 1^2}} = \frac{2}{\sqrt{4m^2 + 1}}$$

$$\Rightarrow S_{ABO} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow 2\sqrt{m^2 + 2} = 2\sqrt{6} \Leftrightarrow m^2 = 4 \Leftrightarrow m = \pm 2$$

Vậy $m = \pm 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 3

Thay $11 = ab + bc + ca$ vào P, ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{5a + 5b + 2c}{\sqrt{12(a^2 + 11)} + \sqrt{12(b^2 + 11)} + \sqrt{c^2 + 11}} \\ &= \frac{5a + 5b + 5c}{\sqrt{12(a^2 + ab + bc + ca)} + \sqrt{12(b^2 + ab + bc + ca)} + \sqrt{c^2 + ab + bc + ca}} \\ &= \frac{5a + 5b + 5c}{2\sqrt{3(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{3(b+a)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)}}^{(*)} \end{aligned}$$

Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} \leq 3(a+b) + (a+c) = 4a + 3b + c \quad (1)$$

Tương tự:

$$2\sqrt{3(b+a)(b+c)} \leq 4b + 3a + c \quad (2)$$

$$\sqrt{(c+a)(c+b)} \leq \frac{1}{2}(a+b+2c) \quad (3)$$

Cộng từng vế của (1), (2) và (3) ta có

$$2\sqrt{3(a+b)(a+c)} + 2\sqrt{3(b+a)(b+c)} + \sqrt{(c+a)(c+b)} \leq \frac{15}{2}a + \frac{15}{2}b + 3c \quad (**)$$

Từ (*) và (**) ta có

$$P \geq \frac{5a+5b+2c}{\frac{15}{2}a + \frac{15}{2}b + 3c} = \frac{2}{3}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(a+b) = a+c \\ 3(b+a) = b+c \\ c+a = c+b \\ ab+bc+ca = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=\frac{c}{5} \\ ab+bc+ca = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=1 \\ c=5 \end{cases}$$

Vậy GTNN của P là $\frac{2}{3}$, đạt được khi $a = b = 1, c = 5$.

Câu 4

Vì $n + S(n) = 2015$ nên $n \leq 2015 \Rightarrow n$ có nhiều nhất 4 chữ số

$$\Rightarrow S(n) \leq 9 + 9 + 9 + 9 = 36$$

$$\Rightarrow n = 2015 - S(n) \geq 2015 - 36 = 1979.$$

Xét 2 TH:

• TH1: $1979 \leq n \leq 1999$. Đặt $n = \overline{19ab}$ ($0 \leq a, b \leq 9$)

$$n + S(n) = 2015 \Leftrightarrow \overline{19ab} + 1 + 9 + a + b = 2015 \Leftrightarrow 11a + 2b = 105 \Leftrightarrow 11a = 105 - 2b$$

$$\text{Ta có } 105 - 2b \text{ lẻ và } 105 - 2b \geq 105 - 2 \cdot 9 = 87 \Rightarrow a \text{ lẻ và } 11a \geq 87$$

$$\Rightarrow a = 9 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow n = 1993$$

• TH2: $2001 \leq n \leq 2015$. Đặt $n = \overline{20cd}$ ($0 \leq c, d \leq 9$)

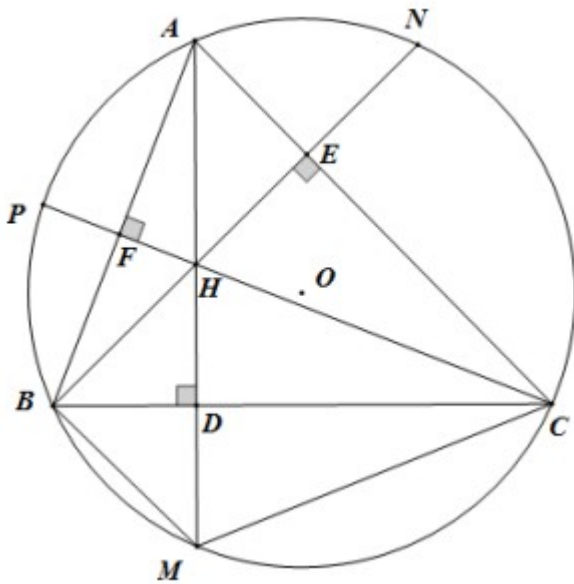
$$n + S(n) = 2015 \Leftrightarrow \overline{20cd} + 2 + 0 + c + d = 2015 \Leftrightarrow 11c + 2d = 13$$

$$\text{Vì } 11c \leq 13 \text{ và } 11c = 13 - 2d \text{ lẻ nên } c = 1 \Rightarrow d = 1$$

$$\Rightarrow n = 2011$$

Vậy tất cả các giá trị n cần tìm là $n = 1993$ và $n = 2011$

Câu 5



a) Vì 2 tam giác BEC và ADC vuông nên

$$\angle HBD = \angle DAC \text{ (cùng phụ với góc C)} \quad (1)$$

Vì ABMC là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle DAC = \angle MBD \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung MC)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\angle HBD = \angle MBD$$

Suy ra BD là phân giác của góc HBM. Tam giác HBM có BD vừa là đường cao vừa là phân giác, nên nó là tam giác cân tại B.

$\Rightarrow D$ là trung điểm HM

Mà $HM \perp BC$ nên M đối xứng với H qua BC.

b) Vì M đối xứng với H qua BC nên $HB = MB$; $HC = MC$

$$\Rightarrow \triangle HBC = \triangle MBC$$

$$\Rightarrow \angle HBC = \angle MBC = \angle O$$

Tương tự ta có:

$$\angle HAB = \angle HAC = \angle O$$

$$\text{Vậy } \angle AHB = \angle BHC = \angle CHA = \angle O$$

c) Ta có:

$$\frac{AM}{AD} = \frac{AD + DM}{AD} = 1 + \frac{DM}{AD} = 1 + \frac{HD}{AD}$$

Mặt khác:

$$\frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2}BC \cdot HD}{\frac{1}{2}BC \cdot AD} = \frac{HD}{AD}$$

Suy ra
$$\frac{AM}{AD} = 1 + \frac{S_{HBC}}{S_{ABC}} \quad (3)$$

Tương tự ta có:

$$\frac{BN}{BE} = 1 + \frac{S_{HAC}}{S_{ABC}} \quad (4)$$

$$\frac{CP}{CF} = 1 + \frac{S_{HAB}}{S_{ABC}} \quad (5)$$

Cộng từng vế của (3), (4) và (5) ta có

$$T = \frac{AM}{AD} + \frac{BN}{BE} + \frac{CP}{CF} = 3 + \frac{S_{HBC} + S_{HCA} + S_{HAB}}{S_{ABC}} = 3 + \frac{S_{ABC}}{S_{ABC}} = 4.$$

Đề số 38. Chuyên Quảng Nam. Năm học: 2015-2016

Câu 1. (2 điểm)

$$A = \frac{x\sqrt{x+1}}{x-1} - \frac{x-1}{\sqrt{x+1}}$$

a) Cho biểu thức (với $x \neq 1; x \geq 0$). Rút gọn A, sau đó tính giá trị A - 1 khi $x = 2016 + 2\sqrt{2015}$

b) Cho $A = 2(1^{2015} + 2^{2015} + \dots + n^{2015})$ với n là số nguyên dương. Chứng minh rằng A chia hết cho $n(n+1)$

Câu 2. (2 điểm)

a) Giải phương trình sau: $\frac{6}{x^2-9} + \frac{4}{x^2-11} - \frac{7}{x^2-8} - \frac{3}{x^2-12} = 0$

b) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x(x+4)(4x+y) = 6 \\ x^2 + 8x + y = -5 \end{cases}$$

Câu 3. (1 điểm) Cho parabol (P): $y = ax^2$ và đường thẳng (d): $y = bx + c$ với a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác vuông trong đó a là độ dài cạnh huyền. Chứng minh rằng (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1 và x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 < 2$

Câu 4. (2 điểm) Cho tam giác nhọn ABC có hai đường cao BD và CE cắt nhau tại H. Các tia phân giác các góc EHB, DHC cắt AB, AC lần lượt tại I và K. Qua I và K lần lượt vẽ các đường vuông góc với AB, AC chúng cắt nhau tại M.

a) Chứng minh $AI = AK$.

b) Giả sử tam giác nhọn ABC có hai đỉnh B, C cố định, đỉnh A di động. Chứng minh đường thẳng HM luôn đi qua một điểm cố định

Câu 5. (2 điểm) Cho đường tròn (O) đường kính AB. Qua A và B lần lượt vẽ các tiếp tuyến d_1 và d_2 với (O). Từ điểm M bất kì trên (O) vẽ tiếp tuyến với đường tròn cắt d_1 tại C và cắt d_2 tại D. Đường tròn đường kính CD cắt đường tròn (O) tại E và F (E thuộc cung AM), gọi I là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AB là tiếp tuyến của đường tròn đường kính CD.

b) Chứng minh MI vuông góc với AB và ba điểm E, I, F thẳng hàng.

Câu 6. (1 điểm) Cho ba số thực x; y; z thỏa mãn: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = x + y + z - (xy + yz + zx)$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT**Câu 1**

a) Với $x \geq 0, x \neq 1$ ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{(\sqrt{x})^3 + 1}{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)} - \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} + 1} = \frac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - (\sqrt{x} - 1) \\ &= \frac{x - \sqrt{x} + 1 - (\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x} - 1} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1} \\ A - 1 &= \frac{\sqrt{x} - (\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \end{aligned}$$

Ta có $x = 2016 + 2\sqrt{2015}$ thỏa mãn điều kiện $x \geq 0$ và $x \neq 1$

Có $x = 2015 + 2\sqrt{2015} + 1 = (\sqrt{2015} + 1)^2 \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2015} + 1$. Thay vào biểu thức $A - 1$ ta được:

$$A - 1 = \frac{1}{\sqrt{2015}}$$

b) Với 2 số nguyên dương a, b bất kì ta có:

$$a^{2015} + b^{2015} = (a + b)(a^{2014} + a^{2013}b + \dots + ab^{2013} + b^{2014}) \Rightarrow a^{2015} + b^{2015} : (a + b)$$

+ Xét trường hợp n là số lẻ

Áp dụng hằng đẳng thức trên ta có:

$$\begin{aligned} &2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] : n \\ &2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] : n \\ &\dots \\ &2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n \end{aligned}$$

Suy ra

$$A = n^{2015} + 2[1^{2015} + (n-1)^{2015}] + 2[2^{2015} + (n-2)^{2015}] + \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : n$$

Tương tự

$$A = 2(1^{2015} + n^{2015}) + 2[2^{2015} + (n-1)^{2015}] + \dots + 2\left[\left(\frac{n-1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+3}{2}\right)^{2015}\right] + \left[\left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015} + \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2015}\right] : (n+1)$$

Mặt khác n và $n+1$ nguyên tố cùng nhau nên $A : n(n+1)$

Tương tự với trường hợp n chẵn ta cũng có $A : n(n+1)$

Câu 2

a) Điều kiện: $x^2 \neq 8; x^2 \neq 9; x^2 \neq 11; x^2 \neq 12$

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} & \left(\frac{6}{x^2-9} - \frac{7}{x^2-8}\right) + \left(\frac{4}{x^2-11} - \frac{3}{x^2-12}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{6(x^2-8) - 7(x^2-9)}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{4(x^2-12) - 3(x^2-11)}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{-x^2+15}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{x^2-15}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0 \\ & \begin{cases} x^2-15=0(2) \\ -\frac{1}{(x^2-9)(x^2-8)} + \frac{1}{(x^2-11)(x^2-12)} = 0(3) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2) $\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{15}$ (thỏa mãn)

Phương trình (3) $\Leftrightarrow (x^2-9)(x^2-8) = (x^2-11)(x^2-12)$

$$\Leftrightarrow 6x^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 10 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{10} \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{\pm\sqrt{15}; \pm\sqrt{10}\}$

b) Hệ đã cho tương đương với

$$\begin{cases} (x^2+4x) \cdot (4x+y) = 6 \\ (x^2+4x) + (4x+y) = -5 \end{cases}$$

Suy ra x^2+4x và $4x+y$ là 2 nghiệm của phương trình

$$t^2 + 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow (t+2)(t+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = -3 \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với $\begin{cases} x^2 + 4x = -2 \\ 4x + y = -3 \end{cases} (I)$ hoặc $\begin{cases} x^2 + 4x = -3 \\ 4x + y = -2 \end{cases} (II)$

Giải (I): $x^2 + 4x = -2 \Leftrightarrow (x+2)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 4x = 5 - 4\sqrt{2} \\ x = -2 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 4x = 5 + 4\sqrt{2} \end{cases}$

Giải (II): $x^2 + 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -2 - 4x = 2 \\ x = -3 \Rightarrow y = -2 - 4x = 10 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có 4 nghiệm $(-2 + \sqrt{2}; 5 - 4\sqrt{2}), (-2 - \sqrt{2}; 5 + 4\sqrt{2}), (-1; 2), (-3; 10)$

Câu 3

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d): $ax^2 = bx + c \Leftrightarrow ax^2 - bx - c = 0 (1)$

Vì a, b, c là 3 cạnh của tam giác vuông với cạnh huyền là a nên a, b, c > 0, $a^2 = b^2 + c^2$

(d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = b^2 + 4ac > 0$ (luôn đúng $\forall$ a, b, c > 0)

Gọi 2 giao điểm có hoành độ là x_1, x_2 , là 2 nghiệm của (1). Theo Viét ta có:

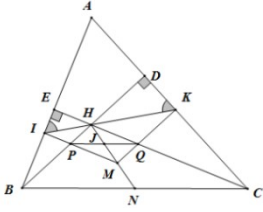
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

Xét $P = x_1^2 + x_2^2 - 2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 2 = \left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2 \cdot \frac{c}{a} - 2 = \frac{b^2 - 2ac - 2a^2}{a^2}$

Có $b^2 + 2ac - 2a^2 = b^2 + 2ac - (b^2 + c^2) - a^2 = 2ac - c^2 - a^2 = -(c-a)^2 < 0, \forall a, c, 0 < c < a$

Suy ra $P < 0 \Rightarrow$ đpcm.

Câu 4



a) Vì HI, HK là phân giác của góc EHB và góc DHC nên

$$EHI = \frac{1}{2} EHB; DHK = \frac{1}{2} DHC. \quad \text{Mà } EHB = DHC \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow EHI = DHK = CHK \quad (1)$$

$$\text{Có } AIH = 90^\circ - EHI; AKH = 90^\circ - DHK \Rightarrow AIH = AKH \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) suy ra } EHI + EHK = CHK + EHK = 180^\circ \Rightarrow I, H, K \text{ thẳng hàng} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3)} \Rightarrow \Delta AIK \text{ cân tại } A \Rightarrow AI = AK$$

b) Gọi giao IM và BH là P, giao KM và CH là Q, giao HM và PQ là J, giao HM và BC là N.

Ta có:

$$\begin{aligned} \Delta HEI \sim \Delta HDK \text{ (g.g)} &\Rightarrow \frac{HE}{HD} = \frac{EI}{DK} \\ \Delta HEB \sim \Delta HDC \text{ (g.g)} &\Rightarrow \frac{HE}{HD} = \frac{EB}{DC} \\ \Rightarrow \frac{EI}{DK} = \frac{EB}{DC} &\Rightarrow \frac{EI}{EB} = \frac{DK}{DC} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\text{Vì } IP \perp AB, HE \perp AB \Rightarrow IP \parallel HE \Rightarrow \frac{EI}{EB} = \frac{HP}{HB} \quad (5). \quad \text{Tương tự } \frac{DK}{DC} = \frac{HQ}{HC} \quad (6)$$

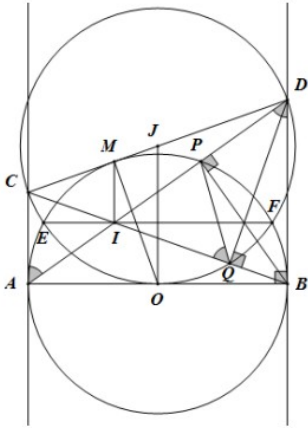
$$\text{Từ (4), (5), (6)} \Rightarrow \frac{HP}{HB} = \frac{HQ}{HC} \Rightarrow PQ \parallel BC$$

$$\text{Suy ra } \frac{PJ}{BN} = \frac{HJ}{HN} = \frac{JQ}{NC} \Rightarrow \frac{PJ}{JQ} = \frac{BN}{NC}$$

Vì $HP \parallel MQ, HQ \parallel PM$ nên HQMP là hình bình hành $\Rightarrow J$ là trung điểm PQ $\Rightarrow PJ = JQ$

$\Rightarrow BN = NC \Rightarrow N$ là trung điểm BC

Vậy HM luôn đi qua trung điểm BC là điểm cố định.



a) Vì $AC \perp AB$, $BD \perp AB \Rightarrow AC \parallel BD \Rightarrow ACDB$ là hình thang

Vì CM , CA là tiếp tuyến của (O) nên $CM = CA$. Tương tự $DM = DB$

Gọi J là trung điểm của CD thì JO là đường trung bình của hình thang $ACDB$ suy ra $JO \parallel BD$ và

$$OJ = \frac{AC + BD}{2} = \frac{CM + MD}{2} = \frac{CD}{2} = IC = ID \quad (1)$$

Vì $BD \perp AB$ nên $JO \perp AB$ tại O (2)

Từ (1) và (2) suy ra AB là tiếp tuyến của đường tròn (J) đường kính CD

b) Vì $CA \parallel BD$ nên theo định lý Talét ta có: $\frac{CI}{IB} = \frac{CA}{CD} = \frac{CM}{MD} \Rightarrow IM \parallel BD$

Mà $BD \perp AB$ nên $MI \perp AB$

Gọi P , Q lần lượt là giao của AD và (O) , BC và (J)

Có $\angle APB = \angle CQD = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow \angle DPB = \angle BQD = 90^\circ$

Suy ra $BQPD$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle PDB = \angle PQI$

Vì $AC \parallel BD$ nên $\angle PDB = \angle IAC$

$$\Rightarrow \angle PQI = \angle IAC \Rightarrow \triangle PQI \sim \triangle CAI \text{ (g.g)} \Rightarrow \frac{PI}{CI} = \frac{QI}{AI} \Rightarrow IP \cdot IA = IC \cdot IQ$$

Suy ra phương tích của điểm I đối với 2 đường tròn (O) và (J) là bằng nhau

Suy ra I nằm trên trục đẳng phương EF của 2 đường tròn.

Vậy I , E , F thẳng hàng.

Câu 6

Ta có:

$$(x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx) \leq 9 + 2(xy+yz+zx)$$

$$\Rightarrow xy+yz+zx \geq \frac{(x+y+z)^2 - 9}{2}$$

$$\Rightarrow P \leq x+y+z + \frac{9 - (x+y+z)^2}{2}$$

Đặt $x+y+z=t \Rightarrow P \leq t + \frac{9-t^2}{2} = -\frac{t^2-2t+1}{2} + 5 = -\frac{1}{2}(t-1)^2 + 5 \leq 5$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^2+y^2+z^2=9 \end{cases}$, chẳng hạn khi $x=1, y=2, z=-2$

Vậy giá trị lớn nhất của P là 5.

Đề số 39. Chuyên Quảng Nam. Năm học: 2015-2016**Câu 1. (2,0 điểm)**

Cho biểu thức: $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{4}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{\sqrt{x}}$, với $x > 0$.

- Rút gọn biểu thức A.
- Thực hiện phép tính để tính giá trị của A khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$
- Tìm x để $A = x + 1$.

Câu 2. (2,0 điểm)

- Giải hệ phương trình (không sử dụng máy tính cầm tay):
$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases}$$
- Cho parabol (P): $y = 2x^2$ và đường thẳng (d): $y = 3x + b$. Vẽ parabol (P) và tìm b biết (d) đi qua điểm M thuộc (P) có hoành độ $x = -1$.

Câu 3. (2,0 điểm)

Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 5 = 0$ (1) (m là tham số)

- Tìm m để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.
- Giả sử phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 đều khác 1. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{4}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} + (x_1 + x_2 - 6)^2$$

Câu 4. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, với $\angle ABC = 60^\circ$, $BC = 2a$ và $AB < AC$. Gọi (O) là đường tròn đường kính BC (O là trung điểm BC). Đường tròn (O) cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại D và E (D khác B, E khác C), BE cắt CD tại H.

- Chứng minh tứ giác ADHE nội tiếp và xác định tâm I của đường tròn ngoại tiếp tứ giác đó.
- Chứng minh: $HB \cdot DE = HD \cdot BC$

- Tiếp tuyến tại C của đường tròn (O) cắt đường thẳng DI tại M. Tính tỉ số $\frac{OB}{OM}$

- Gọi F là giao điểm của AH và BC. Cho $BF = \frac{3a}{4}$, tính bán kính đường tròn nội tiếp tam giác DEF theo a

**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO
QUẢNG NAM
ĐỀ CHÍNH THỨC**

KỶ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN
Năm học 2015 – 2016
Khóa ngày 03 tháng 6 năm 2015
Môn: TOÁN (Toán chung)
Thời gian làm bài: 120 phút (không kể thời gian giao đề)
ĐÁP ÁN

Câu 1.

a) Ta có

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} - \frac{4}{x+2\sqrt{x}} + \frac{x+2}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}\sqrt{x}-4+(x+2)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x-4+x\sqrt{x}+2x+2\sqrt{x}+4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{x\sqrt{x}+3x+2\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+2)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)} \\ &= \sqrt{x}+1 \end{aligned}$$

b) ĐKXĐ của A là $x > 0$, $x = 3 - 2\sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện.

Thay $x = 3 - 2\sqrt{2}$, ta có:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{3-2\sqrt{2}}+1 = \sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}+1 \\ &= |\sqrt{2}-1|+1 = \sqrt{2} \text{ (Do } \sqrt{2}-1 > 0) \end{aligned}$$

Vậy khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$ thì $A = \sqrt{2}$

c)

$$A = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}+1 = x+1 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x}-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0(L) \\ x = 1(TM) \end{cases}$$

Vậy $A = x+1 \Leftrightarrow x = 1$.

Câu 2.

a)

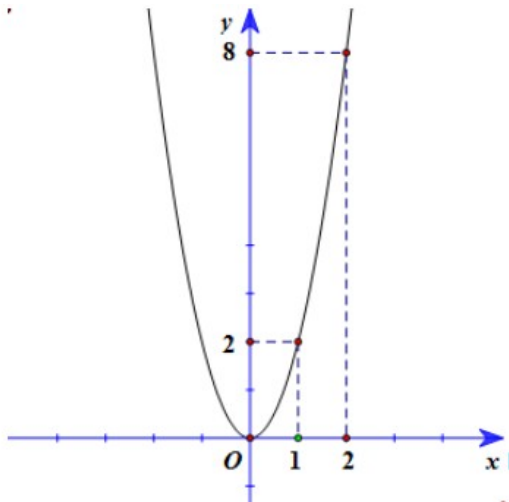
$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ 3x + 4y = 5 \end{cases} \quad (I)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 3x + 4(2x - 7) = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - 7 \\ 11x = 33 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(3; -1)$

b) Vẽ parabol (P)

(P): $y = 2x^2$ nên có đỉnh là $O(0;0)$, đi qua điểm $A(1;2)$, $B(2;8)$, nhận Oy là trục đối xứng.



Điểm $M(-1;m)$ thuộc (P) nên $m = 2.(-1)^2 = 2 \Rightarrow M(-1;2)$

$M(-1;2) \in (d) \Rightarrow 2 = 3.(-1) + b \Rightarrow b = 5$

Vậy $b = 5$.

Câu 3.

$$x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 2m + 5 = 0 \quad (1)$$

a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 2m + 5) > 0$$

$$\Leftrightarrow 4m - 4 > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

b) Phương trình có hai nghiệm phân biệt khác 1

$$\begin{cases} m > 1 \\ 1^2 - 2(m+1).1 + m^2 - 2m + 5 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m^2 - 4m + 4 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \neq 2 \end{cases}$$

$$\text{Theo định lý Vi-ét: } \begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 2 \\ x_1 x_2 = m^2 - 2m + 5 \end{cases}$$

Thay vào P ta có:

$$\begin{aligned} P &= \frac{4}{(x_1 - 1)(x_2 - 1)} + (x_1 + x_2 - 6)^2 \\ &= \frac{4}{x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 1} + (x_1 + x_2 - 6)^2 \\ &= \frac{4}{m^2 - 2m + 5 - (2m + 2) + 1} + (2m + 3 - 6)^2 \\ &= \frac{4}{m^2 - 4m + 4} + (2m - 4)^2 \\ &= 4 \left[\frac{1}{(m - 2)^2} + (m - 2)^2 \right] \end{aligned}$$

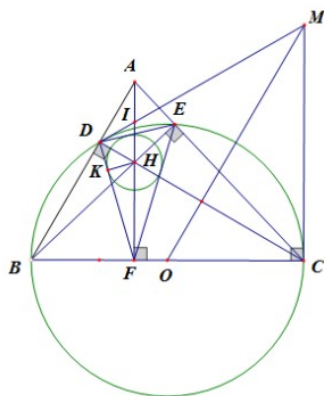
Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm, ta có:

$$\frac{1}{(m-2)^2} + (m-2)^2 \geq 2 \Rightarrow P \geq 8$$

Dấu bằng xảy ra khi $(m-2)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 3$ (thỏa mãn) hoặc $m = 1$ (loại)

Vậy GTNN của P là 8, đạt được khi $m = 3$.

Câu 4.



a) Gọi I là trung điểm AH.

Vì tam giác ADH vuông tại D, có I là trung điểm cạnh huyền nên $IA = IH = ID$.

Vì tam giác AEH vuông tại E, có I là trung điểm cạnh huyền nên $IA = IH = IE$

$$\Rightarrow \text{IA} = \text{IH} = \text{ID} = \text{IE}$$

$\Rightarrow$ Tứ giác ADHE nội tiếp đường tròn tâm I.

b) Vì BDEC là tứ giác nội tiếp nên:

HDE=HBC (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EC) (1)

HED=HCB (hai góc nội tiếp cùng chắn cung BD) (2)

Từ (1) và (2) => tam giác HDE đồng dạng với tam giác HBC (g-g)

$$\Rightarrow \frac{HD}{HB} = \frac{DE}{BC} \Rightarrow HD \cdot BC = HB \cdot DE$$

c) Vì ID = IH nên ΔIDH cân ở I $\Rightarrow IDH = IHD(3)$

Vì $IH \parallel MC$ (cùng vuông góc BC) nên $IHD = MCD$ (4)

Từ (3) và (4) $\Rightarrow$ IDH=MCD

Suy ra ΔMDC cân tại $M \Rightarrow MD = MC$.

Mà $OD = OC$ nên OM là trung trực của CD .

$$\Rightarrow OM \perp CD$$

Mà $BD \perp CD$ nên $OM \parallel BD$

$\Rightarrow \angle COM = \angle CBD = 60^\circ$

$$\text{Ta có: } \frac{OB}{OM} = \frac{OC}{OM} = \cos \angle COM = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

d) Vì $\angle BDH + \angle BFH = 90^\circ + 90^\circ + 180^\circ$ nên $BDHF$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow DBH = DFH$ (5)

Tương tự ta có: $\angle ECH = \angle EFH$ (6)

Vì $BDEC$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle DBH = \angle ECH$ (7)

Từ (5), (6), (7) $\Rightarrow \angle DFH = \angle EFH \Rightarrow FH$ là phân giác góc $\angle DFE$.

Tương tự ta có: EH là phân giác góc $\angle DEF$.

Do đó H là tâm đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$. Vẽ $HK \perp DF$ tại K . Suy ra bán kính đường tròn (H) nội tiếp $\triangle DEF$ là HK .

Tính HK :

Ta có: $BD = BC \cdot \cos \angle DBC = a$

Vì $\triangle BDC$ vuông tại D nên $DC = \sqrt{BC^2 - BD^2} = a\sqrt{3}$

Hai tam giác vuông CDB và CFH có chung góc C nên chúng đồng dạng, suy ra

$$\frac{HF}{BD} = \frac{CF}{CD} \Rightarrow HF = \frac{BD \cdot CF}{CD} = \frac{a \cdot \frac{5}{4}a}{a\sqrt{3}} = \frac{5a}{4\sqrt{3}}$$

$$\triangle BFH \text{ vuông tại } F \text{ nên } BH = \sqrt{BF^2 + HF^2} = \sqrt{\frac{9}{16}a^2 + \frac{25}{48}a^2} = \frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}$$

$$\triangle BDH \text{ vuông tại } D \text{ nên } DH = \sqrt{BH^2 - BD^2} = \sqrt{\frac{13}{12}a^2 - a^2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Có $\begin{cases} \angle BHF = \angle HDK \\ \angle HKD = \angle HFB = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle HBF \text{ đồng dạng với } \triangle HDK \text{ (g.g)}$

$$\frac{HB}{HD} = \frac{HF}{HK} \Rightarrow HK = \frac{HD \cdot HF}{HB} = \frac{\frac{a}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{5a}{4\sqrt{3}}}{\frac{a\sqrt{13}}{2\sqrt{3}}} = \frac{5a\sqrt{39}}{156}$$

Vậy bán kính đường tròn nội tiếp $\triangle DEF$ là $HK = \frac{5a\sqrt{39}}{156}$

Đề số 40. Chuyên Quang Trung – Bình Phước. Năm học: 2015-2016

$$P = \left(\frac{1}{a-1} + \frac{3\sqrt{a}+5}{a\sqrt{a}-a-\sqrt{a}+1} \right) \left[\frac{(\sqrt{a}+1)^2}{4\sqrt{a}} \right] (a > 0, a \neq 1)$$

Câu 1 Cho

a) Rút gọn P

b) Đặt $Q = (a - \sqrt{a} + 1)P$. Chứng minh $Q > 1$

Câu 2 Cho phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 = 0$ (1). Tìm m để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn $(x_1 - m)^2 + x_2 = m + 2$

Câu 3

1. Giải phương trình $(x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = x^2 - x - 2$

2. Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2+3x}) = 3 (2) \end{cases}$$

Câu 4 Giải phương trình trên tập số nguyên $x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1$ (1)

Câu 5 Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) nội tiếp đường tròn ($O; R$). Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Gọi M là trung điểm của BC

a) Chứng minh $AH = 2OM$

b) Dựng hình bình hành AHIO. Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC. Chứng minh rằng $OI \cdot OJ = R^2$

c) Gọi N là giao điểm của AH với đường tròn (O) (N khác A). Gọi D là điểm bất kì trên cung nhỏ NC của đường tròn tâm (O) (D khác N và C). Gọi E là điểm đối xứng với D qua AC, K là giao điểm của AC và HE. Chứng minh rằng $ACH = ADK$

Câu 6

1. Cho a, b là 2 số thực dương. Chứng minh rằng $\sqrt{(1+a)(1+b)} \geq 1 + \sqrt{ab}$

2. Cho a, b là 2 số thực dương thỏa mãn $a + b = ab$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{1}{a^2 + 2a} + \frac{1}{b^2 + 2b} + \sqrt{(1+a^2)(1+b^2)}$$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a) Với $a > 0$ và $a \neq 1$ ta có:

$$\begin{aligned} P &= \left[\frac{\sqrt{a}-1}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} + \frac{3\sqrt{a}+5}{(a-1)(\sqrt{a}-1)} \right] \cdot \frac{(a+2\sqrt{a}+1)-4\sqrt{a}}{4\sqrt{a}} \\ &= \frac{4\sqrt{a}+4}{(\sqrt{a}-1)^2(\sqrt{a}+1)} \cdot \frac{a-2\sqrt{a}+1}{4\sqrt{a}} = \frac{4}{(\sqrt{a}-1)^2} \cdot \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{4\sqrt{a}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}} \end{aligned}$$

b) Có $Q = \frac{a-\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}}$

Xét $Q-1 = \frac{a-2\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}} = \frac{(\sqrt{a}-1)^2}{\sqrt{a}}$

Vì $(\sqrt{a}-1)^2 > 0, \sqrt{a} > 0, \forall a > 0, a \neq 1 \Rightarrow Q-1 > 0 \Rightarrow Q > 1$

Câu 2

Phương trình (1) có 2 nghiệm $x_1; x_2$ $\Leftrightarrow \Delta' = (m+1)^2 - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 2m+1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq -\frac{1}{2}$

Theo định lý Viét ta có $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+2 \\ x_1 x_2 = m^2 \end{cases}$

$$\text{Có } (2) \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 m + m^2 + x_2 = m+2 \Leftrightarrow x_1(x_1 - 2m) + m^2 + x_2 = m+2$$

Thay $x_1 - 2m = 2 - x_2; m^2 = x_1 x_2$ vào ta có $x_1(2 - x_2) + x_1 x_2 + x_2 = m+2 \Leftrightarrow 2x_1 + x_2 = m+2$

Ta có hệ
mãn) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m+2 \\ 2x_1 + x_2 = m+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -m \\ x_2 = 3m+2 \end{cases} \Rightarrow m^2 = x_1 x_2 = -m(3m+2) \Rightarrow 4m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -\frac{1}{2} \end{cases}$ (thỏa

+ Với $m = 0$: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases}$ (thỏa mãn đề bài)

+ Với $m = -\frac{1}{2}$: $(1) \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$ (thỏa mãn đề bài)

Vậy $m = 0$ hoặc $m = -\frac{1}{2}$ là tất cả các giá trị m cần tìm.

Câu 3

$$1) (x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = x^2 - x - 2 \quad (1)$$

Điều kiện: $x^2 + 4 \geq 0$ (luôn đúng $\forall x$)

$$(1) \Leftrightarrow (x+1)\sqrt{2(x^2+4)} = (x-2)(x+1)$$

$$\Leftrightarrow (x+1)\left[\sqrt{2(x^2+4)} - (x-2)\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ \sqrt{2(x^2+4)} = x-2 \end{cases}$$

$$\text{Có } (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ 2(x^2+4) = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x = -2 \end{cases} \text{ (loại)}$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là $\{-1\}$

$$2, \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{y} = x^2 + xy - 2y^2 (1) \\ (\sqrt{x+3} - \sqrt{y})(1 + \sqrt{x^2 + 3x}) = 3 (2) \end{cases}$$

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \\ x+3 \geq 0 \\ x^2 + 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{y-x}{y\sqrt{x}} = (x-y)(x+2y) \Leftrightarrow (x-y) \left(x+2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} \right) = 0 \Leftrightarrow x=y \quad \text{do } x+2y + \frac{1}{y\sqrt{x}} > 0, \forall x, y > 0$$

Thay $y = x$ vào phương trình (2) ta được:

$$\begin{aligned} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(1 + \sqrt{x^2 + 3x}) &= 3 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 3x} = \frac{3}{\sqrt{x+3} - \sqrt{x}} \\ \Leftrightarrow 1 + \sqrt{x^2 + 3x} &= \sqrt{x+3} + \sqrt{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+3} \cdot \sqrt{x} - \sqrt{x+3} - \sqrt{x} + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow (\sqrt{x+3} - 1)(\sqrt{x} - 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x+3} = 1 \\ \sqrt{x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2(L) \\ x = 1(tm) \end{cases} \Rightarrow x = y = 1 \end{aligned}$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất (1;1)

Câu 4

$$x^{2015} = \sqrt{y(y+1)(y+2)(y+3)} + 1 \quad (1)$$

Có $y(y+1)(y+2)(y+3) = [y(y+3)][(y+1)(y+2)] = (y^2 + 3y)(y^2 + 3y + 2)$

Đặt $t = y^2 + 3y + 1 \Rightarrow y(y+1)(y+2)(y+3) = t^2 - 1 \quad (t \in \mathbb{Z}, t^2 \geq 1)$

$$(1) \Leftrightarrow x^{2015} - 1 = \sqrt{t^2 - 1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} - 1 \geq 0 \\ (x^{2015} - 1)^2 = t^2 - 1 (2) \end{cases}$$

Với x, t là số nguyên ta có:

$$(2) \Leftrightarrow (x^{2015} - 1 + t)(x^{2015} - 1 - t) = -1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} - 1 + t = 1 \\ x^{2015} - 1 - t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{2015} = t = 1 \\ x^{2015} = 1 \\ t = -1 \end{cases}$$

$$x^{2015} = t = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \\ y = -3 \end{cases}$$

Với

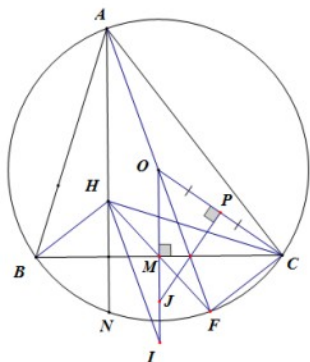
$$\begin{cases} x^{2015} = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y^2 + 3y + 1 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ y = -2 \end{cases}$$

Với

Thử lại ta thấy các cặp (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0) thỏa mãn đề bài

Vậy có 4 cặp (x;y) cần tìm là (1;-3), (1;-2), (1;-1), (1;0)

Câu 5



a) Gọi F là điểm đối xứng với A qua O $\Rightarrow$ AF là đường kính của (O)

Ta có $\angle ACF = \angle ABF = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) $\Rightarrow AC \perp CF$, $AB \perp BF$

Mà $BH \perp AC$, $CH \perp AB \Rightarrow CF \parallel BH$, $BF \parallel HC$

Suy ra BHCF là hình bình hành $\Rightarrow$ Trung điểm M của BC cũng là trung điểm của HF.

$\Rightarrow$ OM là đường trung bình của $\triangle AHF \Rightarrow AH = 2OM$

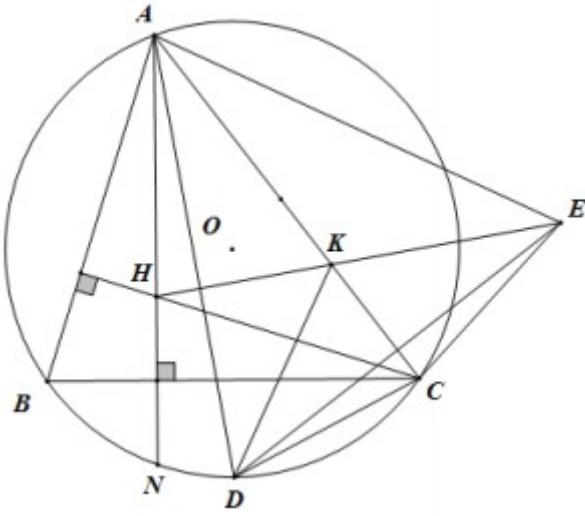
b) Vì AHIO là hình bình hành nên $OI = AH = 2OM$

Gọi P là trung điểm OC $\Rightarrow$ PJ là trung trực OC $\Rightarrow PJ \perp OC$.

Có OM là trung trực BC $\Rightarrow OM \perp BC$. Suy ra

$$\Delta OJP \sim \Delta OCM (g.g) \Rightarrow \frac{OJ}{OC} = \frac{OP}{OM} \Rightarrow OJ \cdot OM = OC \cdot OP$$

$$\Rightarrow OJ \cdot 2OM = OC \cdot 2OP \Rightarrow OJ \cdot OI = OC \cdot OC = R^2$$



c) Ta có $\angle NHC = \angle ABC$ (cùng phụ với $\angle HCB$) (1)

Vì $ABDC$ là tứ giác nội tiếp nên $\angle ABC = \angle ADC$ (2)

Vì D và E đối xứng nhau qua AC nên AC là trung trực DE suy ra

$\triangle ADC = \triangle AEC$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle ADC = \angle AEC$ (3)

Tương tự ta có $\angle AEK = \angle ADK$

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle NHC = \angle AEC \Rightarrow \angle AEC + \angle AHC = \angle NHC + \angle AHC = 180^\circ$

Suy ra $AHCE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle ACH = \angle AEK = \angle ADK$ (đpcm)

Câu 6

1. Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với

$$(1+a)(1+b) \geq (1+\sqrt{ab})^2 \Leftrightarrow 1+a+b+ab \geq 1+2\sqrt{ab}+ab$$

$$\Leftrightarrow a+b-2\sqrt{ab} \geq 0 \Leftrightarrow (\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$$

(luôn đúng với mọi $a, b > 0$)

2. Áp dụng bất đẳng thức trên ta có $\sqrt{(1+a^2)(1+b^2)} \geq 1+ab = 1+a+b$ (1)

Với mọi $x, y > 0$, áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(x+y) \geq 2\sqrt{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y}} \cdot 2\sqrt{xy} = 4 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y}$$
 (2)

Áp dụng (1) và (2) ta có:

$$P \geq \frac{4}{a^2 + 2a + b^2 + 2b} + 1 + a + b = \frac{4}{a^2 + b^2 + 2ab} + 1 + a + b$$

$$= \frac{4}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{8} + \frac{7(a+b)}{8} + 1$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$a+b = ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} \Rightarrow (a+b)^2 \geq 4(a+b) \Rightarrow a+b \geq 4$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương ta có:

$$\frac{4}{(a+b)^2} + \frac{a+b}{16} + \frac{a+b}{16} \geq 3\sqrt{\frac{4}{(a+b)^2} \cdot \frac{a+b}{16} \cdot \frac{a+b}{16}} = \frac{3}{4}$$

Suy ra $P \geq \frac{3}{4} + \frac{7}{8} \cdot 4 + 1 = \frac{21}{4}$. Dấu bằng xảy ra khi $a = b = 2$. Vậy giá trị nhỏ nhất của P là $\frac{21}{4}$

Đề số 41. Chuyên Quốc Học Huế - Thừa Thiên Huế. Năm học: 2015-2016

Câu 1: (1,5 điểm)

Giải phương trình: $2015\sqrt{2015x-2014} + \sqrt{2016x-2015} = 2016$

Câu 2: (1,5 điểm)

Cho phương trình $(x-2)(x^2-x) + (4m+1)x - 8m - 2 = 0$ (x là ẩn số). Tìm m để phương trình có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn điều kiện $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$.

Câu 3: (2,0 điểm)

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = (x+1)(y+1) \\ \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 1 \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình:

b) Cho các số dương x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x + y + z = 2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

Chứng minh rằng biểu thức sau không phụ thuộc vào x, y, z :

$$P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

Câu 4: (3,0 điểm)

Cho tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp đường tròn (O;R), Giả sử B, C cố định và A di động trên đường tròn sao cho $AB < AC$ và $AC < BC$. Đường trung trực của đoạn thẳng AB cắt AC và BC lần lượt tại P và Q. Đường trung trực của đoạn thẳng AC cắt AB và BC lần lượt tại M và N.

a) Chứng minh rằng $OM \cdot ON = R^2$

b) Chứng minh rằng bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn

c) Giả sử hai đường tròn ngoại tiếp tam giác BMN và CPQ cắt nhau tại S và T, gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên đường thẳng ST. Chứng minh H chạy trên 1 đường tròn cố định khi A di động

Câu 5: (2,0 điểm)

a) Cho a, b là hai số thay đổi thỏa mãn các điều kiện $a > 0, a + b \geq 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$A = \frac{8a^2 + b}{4a} + b^2$$

b) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 - 32x + 4y + 39 = 0$

ĐÁP ÁN

Câu 1:

$$2015\sqrt{2015x-2014} + \sqrt{2016x-2015} = 2016 \quad (1)$$

$$x \geq \frac{2015}{2016}$$

ĐK:

$$(1) \Leftrightarrow (2015\sqrt{2015x-2014} - 2015) + (\sqrt{2016x-2015} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2015(\sqrt{2015x-2014} - 1) + (\sqrt{2016x-2015} - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2015(2015x-2015)}{\sqrt{2015x-2014}+1} + \frac{2016x-2016}{\sqrt{2016x-2015}+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1) \left(\underbrace{\frac{2015^2}{\sqrt{2015x-2014}+1} + \frac{2016}{\sqrt{2016x-2015}+1}}_{>0 \quad \forall x \geq \frac{2015}{2016}} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{1\}$

Câu 2:

$$(x-2)(x^2-x) + (4m+1)x - 8m - 2 = 0(1)$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x) + (4m+1)(x-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-x+4m+1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x^2 - x + 4m + 1 = 0(2) \end{cases}$$

Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt khác 2

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4(4m+1) > 0 \\ 2^2 - 2 + 4m + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -16m - 3 > 0 \\ 4m \neq -3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < -\frac{3}{16} \\ m \neq -\frac{3}{4} \end{cases}$$

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm phân biệt của (2) $\Rightarrow$ (1) có 3 nghiệm phân biệt $x_1, x_2, x_3 = 2$ (*)

Theo định lí Vi-ét: $x_1 + x_2 = 1, x_1x_2 = 4m + 1$. (**)

Thay (*) và (**) ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 + 4 = 11$$

$$\Leftrightarrow 1 - 2(4m+1) = 7$$

$$\Leftrightarrow m = -1$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy $m = -1$ là giá trị cần tìm.

Câu 3:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = (x+1)(y+1) \end{cases} \quad (1)$$

$$a) \begin{cases} \left(\frac{x}{y+1}\right)^2 + \left(\frac{y}{x+1}\right)^2 = 1 \end{cases} \quad (2)$$

ĐK: $x \neq -1; y \neq -1$

$$(1) \Leftrightarrow x(x+1) + y(y+1) = (x+1)(y+1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y+1} + \frac{y}{x+1} = 1$$

$$a = \frac{x}{y+1}; b = \frac{y}{x+1}$$

Đặt $\frac{x}{y+1}; b = \frac{y}{x+1}$, hệ phương trình đã cho trở thành

$$\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ (a+b)^2-2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 1-2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases} \end{cases}$$

(thỏa mãn điều kiện)

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(0;1), (1;0)$

$$b) \quad P = x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} + y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} + z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}}$$

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{2}$$

Xét

Thay $x + y + z = 2$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ ta có $xy + yz + zx = 1$.

Thay $1 = xy + yz + zx$ ta có:

$$x\sqrt{\frac{(1+y^2)(1+z^2)}{1+x^2}} = x\sqrt{\frac{(xy+yz+zx+y^2)(xy+yz+zx+z^2)}{xy+yz+zx+x^2}} = x\sqrt{\frac{(y+z)(y+x)(z+y)(z+x)}{(x+y)(x+z)}} = x(y+z)$$

Tương tự ta có:

$$y\sqrt{\frac{(1+z^2)(1+x^2)}{1+y^2}} = y(z+x)$$

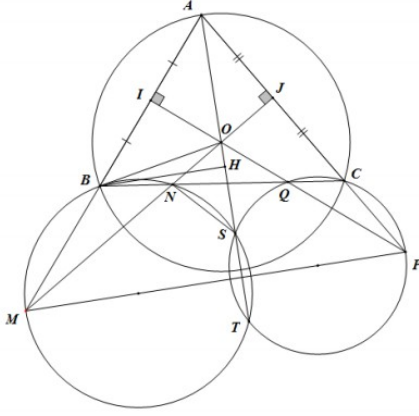
$$z\sqrt{\frac{(1+x^2)(1+y^2)}{1+z^2}} = z(x+y)$$

Cộng từng vế của ba đẳng thức trên ta có

$$P = xy + xz + yz + yx + zx + zy = 2(xy + yz + zx) = 2$$

Vậy biểu thức P không phụ thuộc vào x, y, z.

Câu 4:



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm AB, AC

ΔOAB cân ở O có OI là đường cao kẻ từ đỉnh O nên OI cũng là phân giác góc O, suy ra

$$BOI = \frac{1}{2} BOA(1)$$

Theo quan hệ giữa góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung AB của (O):

$$BCA = \frac{1}{2} BOA(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $BOI = BCA$ (3)

Xét ΔOBI vuông tại I có góc ngoài OBM:

$$OBM = 90^\circ + BOI(4)$$

Xét ΔNJC vuông tại J có góc ngoài ONB:

$$ONB = 90^\circ + BCA(5)$$

Từ (3), (4), (5) suy ra $OBM = ONB$

$\Rightarrow \Delta OBM \sim \Delta ONB(g.g)$

$$\Rightarrow \frac{OB}{ON} = \frac{OM}{OB} \Rightarrow OM \cdot ON = OB^2 = R^2$$

b) Chứng minh tương tự câu a, ta có

$$OQ \cdot OP = R^2 \Rightarrow OM \cdot ON = OQ \cdot OP$$

$$\Rightarrow \frac{OM}{OQ} = \frac{OP}{ON}$$

Xét ΔOMP và ΔOQN có:

$$\begin{cases} MOP \text{ chung} \\ \frac{OM}{OQ} = \frac{OP}{ON} \Rightarrow \Delta OMP \sim \Delta OQN(c.g.c) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \angle OMP = \angle OQN \Rightarrow \angle OMP + \angle NQP = 180^\circ$$

$\Rightarrow$ Bốn điểm M, N, P, Q cùng nằm trên một đường tròn.

c) Ta chứng minh O, S, T thẳng hàng

Gọi T' là giao điểm khác S của OS với đường tròn ngoại tiếp ΔBMN .

Khi đó MNST' là tứ giác nội tiếp, nên

$$OSN = OMT' \Rightarrow \Delta OSN \sim \Delta OMT' (g.g)$$

$$\Rightarrow \frac{OS}{OM} = \frac{ON}{OT'} \Rightarrow OS \cdot OT' = OM \cdot ON$$

$$\Rightarrow OS \cdot OT' = OQ \cdot OP$$

$$\Rightarrow \frac{OS}{OP} = \frac{OQ}{OT'}$$

Xét ΔOSQ và $\Delta OPT'$ có:

$$\begin{cases} \angle SOQ \text{ chung} \\ \frac{OS}{OP} = \frac{OQ}{OT'} \end{cases} \Rightarrow \Delta OSQ \sim \Delta OPT' (c.g.c)$$

$$\Rightarrow OSQ = OPT' \Rightarrow OPT' + QST' = 180^\circ$$

$\Rightarrow T'SQP$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow T'$ thuộc đường tròn ngoại tiếp ΔCPQ

$\Rightarrow T' \equiv T$

Vậy O, S, T thẳng hàng

$$\Rightarrow BH \perp OH$$

$\Rightarrow H$ thuộc đường tròn đường kính OB.

Vậy khi A di động, H luôn thuộc đường tròn đường kính OB.

Câu 5:

$$a) A = \frac{8a^2 + b}{4a} + b^2 = 2a + \frac{b}{4a} + b^2 = (a + b^2) + (a + \frac{b}{4a})$$

Vì

$$a > 0; a + b \geq 1 \Rightarrow \frac{b}{4a} \geq \frac{1-a}{4a}; a \geq 1-b \Rightarrow a + \frac{b}{4a} \geq \frac{1}{4a} - b + \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow A \geq (a + b^2) + (\frac{1}{4a} - b + \frac{3}{4}) = (a + \frac{1}{4a}) + (b - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2}$$

$$\text{Ta có } a + \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{4a}} = 1 \quad (\text{BĐT Cô-si cho hai số không âm}); \quad (b - \frac{1}{2})^2 \geq 0$$

$$\Rightarrow A \geq \frac{3}{2}$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra khi } a = b = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của A là } \frac{3}{2} \text{ đạt được khi } a = b = \frac{1}{2}$$

b) Ta có:

$$x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 4y^2 - 32x + 4y + 39 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 32x + 40 = 4y^2 - 4y + 1$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2(x^2+2x+10) = (2y-1)^2$$

Vì y là số nguyên nên $2y-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 2$

Vì $(2y-1)^2$ và $(x-2)^2$ là số chính phương khác 0 nên $x^2+2x+10$ là số chính phương.

Đặt $x^2+2x+10=m^2 (m \in \mathbb{N}^*)$ suy ra

$$(x+1)^2 + 9 = m^2$$

$$\Leftrightarrow (x+1-m)(x+1+m) = -9$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1+m=9 \\ x+1-m=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x+1+m=1 \\ x+1-m=-9 \end{cases} \quad (Do \ x+1+m > x+1-m)$$

$$\begin{cases} x+1+m=3 \\ x+1-m=-3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ m=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-5 \\ m=5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1 \\ m=3 \end{cases}$$

- $x=3 \Rightarrow (2y-1)^2 = 25 \Rightarrow y=3$ hoặc $y=-2$
- $x=-5 \Rightarrow (2y-1)^2 = 1225 \Rightarrow y=18$ hoặc $y=-17$
- $x=-1 \Rightarrow (2y-1)^2 = 81 \Rightarrow y=5$ hoặc $y=-4$

Vậy các bộ $(x;y)$ nguyên thỏa yêu cầu bài toán là $(3;3), (3;-2), (-5;18), (-5;-17), (-1;5), (-1;-4)$

Đề số 42. Chuyên SPHN. Năm học: 2015-2016

$$P = \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)}$$

Câu 1 (2,5 điểm) Cho biểu thức với $a > 0, b > 0, a \neq b$.

$$P = \frac{1}{ab}$$

1. Chứng minh
2. Giả sử a, b thay đổi sao cho $4a + b + \sqrt{ab} = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của P .

Câu 2 (2,0 điểm) Cho hệ phương trình
$$\begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases}$$
 với m là tham số

1. Giải hệ phương trình khi $m = 2$.
2. Chứng minh hệ luôn có nghiệm với mọi giá trị của m . Giả sử (x_0, y_0) là một nghiệm của hệ. Chứng minh đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$

Câu 3 (1,5 điểm) Cho a, b là các số thực khác 0. Biết rằng phương trình $a(a-x)^2 + b(x-b)^2 = 0$ có nghiệm duy nhất. Chứng minh $|a| = |b|$.

Câu 4 (3,0 điểm) Cho tam giác ABC có các góc $\angle ABC, \angle ACB$ nhọn và $\angle BAC = 60^\circ$. Các đường phân giác trong BB_1, CC_1 của tam giác ABC cắt nhau tại I .

1. Chứng minh tứ giác AB_1IC_1 nội tiếp.
2. Gọi K là giao điểm thứ hai (khác B) của đường thẳng BC với đường tròn ngoại tiếp tam giác BC_1I . Chứng minh tứ giác $CKIB_1$ nội tiếp.
3. Chứng minh $AK \perp B_1C_1$.

Câu 5 (1,0 điểm) Tìm các số thực không âm a và b thỏa mãn

$$\left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$

ĐÁP ÁN

Câu 1

Ta có:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 1\right)\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2}{\frac{a^2}{b^2} + \frac{b^2}{a^2} - \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)} \\
 &= \frac{\left(\frac{a^2}{ab} + \frac{b^2}{ab} + \frac{ab}{ab}\right)\left(\frac{a-b}{ab}\right)^2}{\frac{a^4}{a^2b^2} + \frac{b^4}{a^2b^2} - \left(\frac{a^3b}{a^2b^2} + \frac{ab^3}{a^2b^2}\right)} \\
 &= \frac{\left(\frac{a^2 + b^2 + ab}{ab}\right) \cdot \frac{(a-b)^2}{a^2b^2}}{\frac{a^4 + b^4 - a^3b - ab^3}{a^2b^2}} \\
 &= \frac{(a^3 - b^3)(a-b)}{a^3b^3} \\
 &= \frac{(a^3 - b^3)(a-b)}{a^2b^2} \\
 &= \frac{1}{ab}
 \end{aligned}$$

Vậy $P = \frac{1}{ab}$.

2. Áp dụng BĐT Cô-si cho hai số dương $4a$ và b ta có:

$$\begin{aligned}
 4a + b &\geq 2\sqrt{4ab} = 4\sqrt{ab} \\
 \Rightarrow 1 &= 4a + b + \sqrt{ab} \geq 5\sqrt{ab} \\
 \Leftrightarrow \sqrt{ab} &\leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow 0 < ab \leq \frac{1}{25} \\
 \Rightarrow P &= \frac{1}{ab} \geq 25
 \end{aligned}$$

$$\begin{cases} b = 4a > 0 \\ 4a + b + \sqrt{ab} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 4a > 0 \\ 10a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Dấu bằng xảy ra khi

$$\begin{cases} a = \frac{1}{10} \\ b = \frac{2}{5} \end{cases}$$

Vậy $\min P = 25 \Leftrightarrow$

Câu 2 Cho hệ phương trình:

1. Thay $m = 2$, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - 2y = -6 \\ 2x + y = 7 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 4y = -12 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5y = -19 \\ 2x + y = 7 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{19}{5} \\ 2x + \frac{19}{5} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{8}{5} \\ y = \frac{19}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\left(\frac{8}{5}; \frac{19}{5}\right)$

2. Ta có:

$$\begin{aligned} \begin{cases} x - my = 2 - 4m \\ mx + y = 3m + 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m \\ m(my + 2 - 4m) + y = 3m + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m \\ m^2y + 2m - 4m^2 + y = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = my + 2 - 4m(1) \\ (m^2 + 1)y = m + 1 + 4m^2(2) \end{cases} \end{aligned}$$

Phương trình (2) là phương trình bậc nhất ẩn y có hệ số $a = m^2 + 1 \neq 0 \forall m$ nên phương trình (2) có nghiệm

duy nhất $y = \frac{m + 1 + 4m^2}{m^2 + 1} \forall m$

Thay vào (1) ta được:

$$\begin{aligned} x &= my + 2 - 4m \\ &= \frac{m^2 + m + 4m^3 + 2(m^2 + 1) - 4m(m^2 + 1)}{m^2 + 1} \\ &= \frac{3m^2 - 3m + 2}{m^2 + 1} \end{aligned}$$

Do đó: $\forall m$, hệ phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $(x_0; y_0) = \left(\frac{3m^2 - 3m + 2}{m^2 + 1}; \frac{m + 1 + 4m^2}{m^2 + 1}\right)$

Chứng minh đẳng thức $x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 = 0$ ()

Vì $(x_0; y_0)$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho nên:

$$\begin{cases} x_0 - my_0 = 2 - 4m \\ mx_0 + y_0 = 3m + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m(y_0 - 4) = x_0 - 2(3) \\ 1 - y_0 = m(x_0 - 3)(4) \end{cases}$$

Xét $m = 0 \Rightarrow x_0 = 2$ và $y_0 = 1$. Khi đó (*) đúng.

Xét $m \neq 0$. Nhân từng vế của (3) và (4) ta được:

$$\begin{aligned} m(y_0 - 4)(1 - y_0) &= m(x_0 - 2)(x_0 - 3) \\ \Leftrightarrow -y_0^2 + 5y_0 - 4 &= x_0^2 - 5x_0 + 6 \\ \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 - 5(x_0 + y_0) + 10 &= 0 \end{aligned}$$

Vậy đẳng thức cần chứng minh đúng $\forall m$.

Câu 3:

Phương trình đã cho tương đương với

$$\begin{aligned} a(x^2 - 2ax + a^2) + b(x^2 - 2bx + b^2) &= 0 \\ \Leftrightarrow ax^2 - 2a^2x + a^3 + bx^2 - 2b^2x + b^3 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + b)x^2 - 2x(a^2 + b^2) + a^3 + b^3 &= 0 \end{aligned}$$

- Xét $a + b = 0 \Leftrightarrow b = -a$, phương trình (1) trở thành:

$$-2x(a^2 + a^2) + a^3 - a^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4a^2x = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ (Do } a \neq 0)$$

Do đó với $a + b = 0$ thì (1) có nghiệm duy nhất $x = 0$.

- Xét $a + b \neq 0$. Khi đó (1) là phương trình bậc hai ẩn x .

Phương trình (1) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi

$$\Delta = (a^2 + b^2)^2 - (a + b)(a^3 + b^3) = 0$$

$$\Leftrightarrow a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - (a^4 + ab^3 + a^3b + b^4) = 0$$

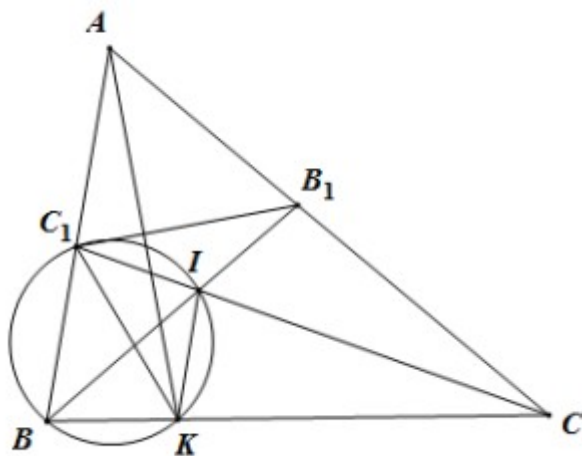
$$\Leftrightarrow 2a^2b^2 - ab^3 - a^3b = 0$$

$$\Leftrightarrow -ab(a - b)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = b \text{ (do } ab \neq 0)$$

Kết luận: Phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow b = \pm a \Leftrightarrow |a| = |b|$.

Câu 4



1. Ta có

$B_1IC_1 = BIC$ (hai góc đối đỉnh)

$$BIC = 180^\circ - IBC - ICB = 180^\circ - \frac{ABC}{2} - \frac{ACB}{2} = 180^\circ - \frac{ABC + ACB}{2} = 180^\circ - \frac{180^\circ - BAC}{2} = 120^\circ$$

$$\Rightarrow B_1IC_1 + BAC = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$$

Mà hai góc này là hai góc đối nhau của tứ giác AC_1IB_1 nên tứ giác AC_1IB_1 là tứ giác nội tiếp.

2. Vì tứ giác BC_1IK là tứ giác nội tiếp (gt) nên $BKI = AC_1I$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện) (1)

Vì tứ giác AC_1IB_1 là tứ giác nội tiếp (cmt) nên $AC_1I = IB_1C$ (góc trong và góc ngoài đỉnh đối diện) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $IB_1C = BKI = 180^\circ - CKI \Rightarrow IB_1C + CKI = 180^\circ$

Đây là hai góc đối của tứ giác $CKIB_1$ nên tứ giác này là tứ giác nội tiếp.

3. Vì BC_1IK là tứ giác nội tiếp nên

$$BKC_1 = BIC_1 = 180^\circ - BIC = 60^\circ \Rightarrow CKC_1 = 180^\circ - BKC_1 = 120^\circ$$

$$\Rightarrow CKC_1 + CAC_1 = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác AC_1KC là tứ giác nội tiếp.

$$\Rightarrow \angle C_1KA = \angle C_1CA \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } C_1A)$$

Và $\Rightarrow C_1AK = C_1CK$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung C_1K)

Mặt khác CC_1 là phân giác góc C (gt) nên $C_1CK = C_1CA \Rightarrow C_1KA = C_1AK$

Suy ra tam giác C_1AK cân tại $C_1 \Rightarrow C_1A = C_1K$ (3)

Tương tự ta có: $B_1A = B_1K$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra C_1B_1 là trung trực của đoạn thẳng AK .

$\Rightarrow AK \perp B_1C_1$ (đpcm).

Câu 5

Với mọi x, y không âm, ta có:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{4} \geq x(*) \quad \text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

và

$$(x - y)^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$\Leftrightarrow (x + y)^2 \geq 4xy(**)$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow x = y$.

Áp dụng BĐT (*) với $x = a$ và $x = b$ ta được

$$\begin{cases} a^2 + b + \frac{3}{4} = \left(a^2 + \frac{1}{4}\right) + b + \frac{1}{2} \geq a + b + \frac{1}{2} > 0 \\ b^2 + a + \frac{3}{4} = \left(b^2 + \frac{1}{4}\right) + a + \frac{1}{2} \geq b + a + \frac{1}{2} > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) \geq \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 (1)$$

Áp dụng BĐT (**) ta được:

$$\begin{aligned} \left(a + b + \frac{1}{2}\right)^2 &= \left[\left(a + \frac{1}{4}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{4}\right)^2\right] \geq 4\left(a + \frac{1}{4}\right)\left(b + \frac{1}{4}\right) \\ &= \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right) (2) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) và (2) ta suy ra: } \left(a^2 + b + \frac{3}{4}\right)\left(b^2 + a + \frac{3}{4}\right) = \left(2a + \frac{1}{2}\right)\left(2b + \frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ a + \frac{1}{4} = b + \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

Vậy $a = b = \frac{1}{2}$ là giá trị cần tìm.

Đề số 43. Chuyên Thái Bình. Năm học: 2015-2016

Bài 1 (3,0 điểm).

Cho biểu thức:
$$P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

a) Rút gọn biểu thức P.

b) Tính giá trị của thức P khi $x = 3 - 2\sqrt{2}$

c) Chứng minh rằng: với mọi giá trị của x để biểu thức P có nghĩa thì biểu thức $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên.

Bài 2 (2,0 điểm).

Cho phương trình $x^2 - 2mx + (m-1)^3 = 0$ (m là tham số).

a) Giải phương trình khi $m = -1$.

b) Tìm m để phương trình có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng bình phương nghiệm còn lại.

Bài 3 (1,0 điểm).

Giải phương trình:
$$\frac{9}{x^2} + \frac{2x}{\sqrt{2x^2+9}} - 1 = 0$$

Bài 4 (3,5 điểm).

Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Đường tròn đường kính AH, tâm O, cắt các cạnh AB và AC lần lượt tại E và F. Gọi M là trung điểm của cạnh HC.

a) Chứng minh $AE \cdot AB = AF \cdot AC$.

b) Chứng minh rằng MF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH.

c) Chứng minh $\widehat{HAM} = \widehat{HBO}$

d) Xác định điểm trực tâm của tam giác ABM.

Bài 5 (0,5 điểm). Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $ab + bc + ca = 3$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a^2+1} + \frac{1}{b^2+1} + \frac{1}{c^2+1} \geq \frac{3}{2}$$

-----Hết-----

SỞ GD-ĐT THÁI BÌNH

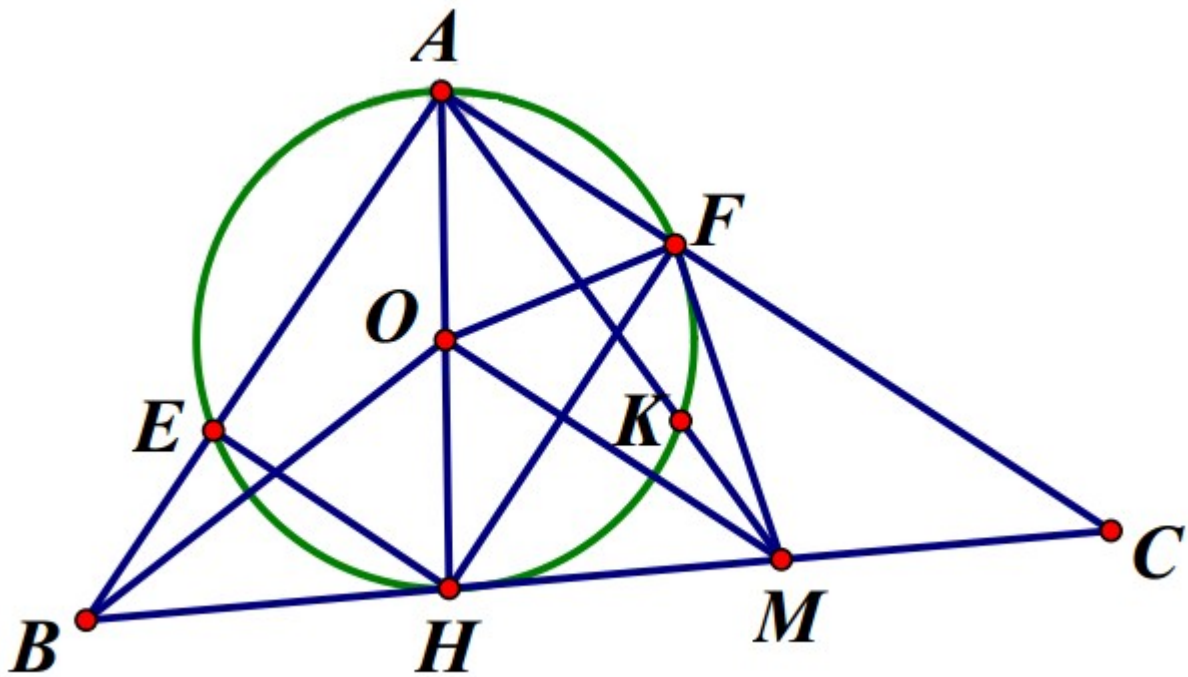
KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 CHUYÊN NĂM 2015-2016

DỰ THẢO HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ BIỂU ĐIỂM

MÔN TOÁN CHUNG

Câu	Nội dung	Điểm
1a	$P = \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x^2+\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+x} \quad (x > 0; x \neq 1)$	
	$= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}}$	0,25
	$= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x}-1)(x+\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} - \frac{(\sqrt{x}+1)(x-\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$	0,5
	$= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + \frac{x+\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} - \frac{x-\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}$	0,5
	$= \frac{2x+2}{\sqrt{x}} + 2 = \frac{2x+2\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}}$	0,25
1b	Ta có $x = 2 - 2\sqrt{x} \Rightarrow \sqrt{x} = \sqrt{2} - 1$	0,25
	Thay vào biểu thức $P = 2(\sqrt{2}-1) + 2 + \frac{2}{\sqrt{2}-1}$ $= 2\sqrt{2} - 2 + 2 + \frac{2(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}$ $= 2\sqrt{2} + 2\sqrt{2} + 2$	0,25
	$P = 4\sqrt{2} + 2$	0,25
1c	Đưa được $\frac{7}{P} = \frac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}}$	0,25
	Đánh giá $2x+2+2\sqrt{x} \geq 6\sqrt{x} \Rightarrow 0 < \frac{7\sqrt{x}}{2x+2+2\sqrt{x}} < \frac{7}{6}$	0,25
	Vậy $\frac{7}{P}$ chỉ nhận một giá trị nguyên đó là 1 khi $7\sqrt{x} = 2x+2+2\sqrt{x} \Leftrightarrow 2x-5\sqrt{x}+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}=2 \\ \sqrt{x}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=\frac{1}{4} \end{cases}$	0,25

2a	Khi $m = -1$ ta có phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$	0,5
	Ta có: $\Delta = 1 + 8 = 9 > 0$ Giải phương trình ta được hai nghiệm: $x_1 = 2; x_2 = -4$	0,5
2b	Tính được $\Delta' = m^2 - (m-1)^3$	0,25
	Để phương trình có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow m^2 - (m-1)^3 > 0 (*)$	0,25
	Gọi $x_1; x_2$ là hai nghiệm của phương trình, theo Viet ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m(1) \\ x_1 x_2 = (m-1)^3(2) \end{cases}$	
	Giả sử $x_1 = (x_2)^2$ thay vào (2) ta được $x_2 = m-1; x_1 = (m-1)^2$	0,25
	Thay hai nghiệm $x_1; x_2$ vào (1) ta được: $(m-1)^2 + m-1 = 2m$ $\Leftrightarrow m^2 - 3m = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3 \end{cases}$	
	Khẳng định hai giá trị m vừa tìm được thỏa mãn điều kiện (*), kết luận	0,25
3	Điều kiện: $x \neq 0$, đưa phương trình trở thành: $\frac{2x^2 + 9}{x^2} + 2 \frac{x}{\sqrt{2x^2 + 9}} - 3 = 0$	0,25
	Đặt ẩn phụ: $\frac{x}{\sqrt{2x^2 + 9}} = t$, phương trình trở thành: $\frac{1}{t^2} + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^3 - 3t^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(2t^2 - t - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$	0,25
	Trường hợp: $t = 1 \Leftrightarrow x = \sqrt{2x^2 + 9} (VN)$	0,25
	Trường hợp: $t = \frac{-1}{2} \Leftrightarrow \sqrt{2x^2 + 9} = -2x \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ 2x^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{-3\sqrt{2}}{2}$	0,25

4a	 <p>Xét hai tam giác: AEF và ACB có góc A chung</p>	0,25
	Ta có $\angle AEF = \angle AHF$; $\angle AHF = \angle ACB$; suy ra $\angle AEF = \angle ACB$ (hoặc $\angle AFE = \angle AHE$; $\angle AHE = \angle ABC$; suy ra $\angle AFE = \angle ABC$)	0,25
	Suy ra hai tam giác AEF và ACB đồng dạng	0,25
	Từ tỷ số đồng dạng $\frac{AE}{AC} = \frac{AF}{AB}$ ta có $AE \cdot AB = AC \cdot AF$	0,25
4b	Xét hai tam giác OHM và OFM có OM chung, $OF = OH$.	0,25
	Có $MF = MH$ (vì tam giác HFC vuông tại F, trung tuyến FM)	0,25
	Suy ra $\triangle OHM = \triangle OFM$ (c.c.c)	0,25
	Từ đó $\angle MFO = 90^\circ$, MF là tiếp tuyến của đường tròn đường kính AH	0,25
4c	Xét hai tam giác AHM và BHO có $\angle AHM = \angle BHO = 90^\circ$	0,25
	Trong tam giác vuông ABC, đường cao AH có $AH^2 = HB \cdot HC \Rightarrow AH \cdot 2OH = HB \cdot 2HM \Rightarrow \frac{AH}{HB} = \frac{HM}{HO}$	0,25
	Suy ra $\triangle HBO$ đồng dạng với $\triangle HAM$	0,25
	Suy ra $HO = HM$	0,25
4d	Gọi K là giao điểm của AM với đường tròn	
	Ta có $\angle HBO = \angle HAM = \angle MHK$, suy ra $BO \parallel HK$	0,25
	Mà $HK \perp AM$, suy ra $BO \perp AM$, suy ra O là trực tâm của tam giác ABM	0,25
5	<p>Giả sử $a \geq b \geq c$, từ giả thiết suy ra $ab \geq 1$. Ta có bất đẳng thức sau:</p> $\frac{1}{1+a^2} + \frac{1}{1+b^2} \geq \frac{2}{1+ab} \Leftrightarrow \frac{(a-b)^2(ab-1)}{(1+a^2)(1+b^2)(1+ab)} \geq 0 \quad (\text{luôn đúng}).$ <p>Vậy ta cần chứng minh: $\frac{2}{1+ab} + \frac{1}{1+c^2} \geq \frac{3}{2}$</p>	0,25

	$\Leftrightarrow c^2 + 3 - ab \geq 3abc^2 \Leftrightarrow c^2 + ca + bc \geq 3abc^2 \Leftrightarrow a + b + c \geq 3abc$ $\begin{cases} (a+b+c)^2 \geq 3(ab+bc+ca) = 9 \\ ab+bc+ca \geq 3\sqrt[3]{(abc)^2} \end{cases}$ Bất đẳng thức hiển nhiên đúng vì Hay $a+b+c \geq 3 \geq 3abc$ Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$	0,25
	Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a+b+c=3$. Chứng minh rằng: $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} + \frac{bc}{\sqrt{a^2+3}} + \frac{ca}{\sqrt{b^2+3}} \leq \frac{3}{2}$	
	Ta có: $\frac{(a+b+c)^2}{3} \geq ab+bc+ca \Rightarrow ab+bc+ca \leq 3$	0,25
	Ta có $\frac{ab}{\sqrt{c^2+3}} \leq \frac{ab}{\sqrt{c^2+ab+bc+ca}} = \frac{ab}{\sqrt{(a+c)(b+c)}} \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{1}{a+c} + \frac{1}{b+c} \right)$ $VT \leq \frac{1}{2} \left(\frac{ab}{a+c} + \frac{ab}{b+c} + \frac{bc}{c+a} + \frac{bc}{b+a} + \frac{ca}{c+b} + \frac{ca}{a+b} \right) = \frac{1}{2} (a+b+c) = \frac{3}{2}$ Dấu bằng xảy ra khi $a=b=c=1$	0,25

Đề số 44. Chuyên Vũng Tàu. Năm học: 2016-2017

Câu 1 (2,5 điểm)

a) Rút gọn biểu thức $A = \frac{1}{\sqrt{3}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} + \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\sqrt{2}}$

b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases}$

c) Giải phương trình $x^2 + 2x - 8 = 0$

Câu 2 (2,0 điểm)

Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng (d): $y = 4x - m$

a) Vẽ parabol (P)

b) Tìm tất cả các giá trị của tham số m để (d) và (P) có đúng một điểm chung

Câu 3 (1,5 điểm).

- a) Cho phương trình $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$ (m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình trên có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1^2 - x_2^2| = 15$
- b) Giải phương trình $(x - 1)^4 = x^2 - 2x + 3$

Câu 4 (3,5 điểm).

Cho nửa đường tròn (O) có đường kính $AB = 2R$. CD là dây cung thay đổi của nửa đường tròn sao cho $CD = R$ và C thuộc cung AD (C khác A và D khác B). AD cắt BC tại H, hai đường thẳng AC và BD cắt nhau tại F.

- a) Chứng minh tứ giác CFDH nội tiếp
- b) Chứng minh $CF \cdot CA = CH \cdot CB$
- c) Gọi I là trung điểm của HF. Chứng minh tia OI là tia phân giác của góc COD.
- d) Chứng minh điểm I thuộc một đường tròn cố định khi CD thay đổi

Câu 5 (0,5 điểm).

Cho a, b, c là 3 số dương thỏa mãn $ab + bc + ca = 3abc$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{3}{2}$$

ĐÁP ÁN – LỜI GIẢI CHI TIẾT

Câu 1

a)
$$A = \frac{\sqrt{3}-1+\sqrt{3}+1}{(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)} + \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3-1} + 2 - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2$$

b)
$$\begin{cases} 3x - y = 1 \\ 2x + 3y = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 2x + 3(3x - 1) = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ 11x = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x - 1 \\ x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Hệ có nghiệm duy nhất (1;2)

c) $x^2 + 2x - 8 = 0$. Có $\Delta' = 1 + 8 = 9 > 0$

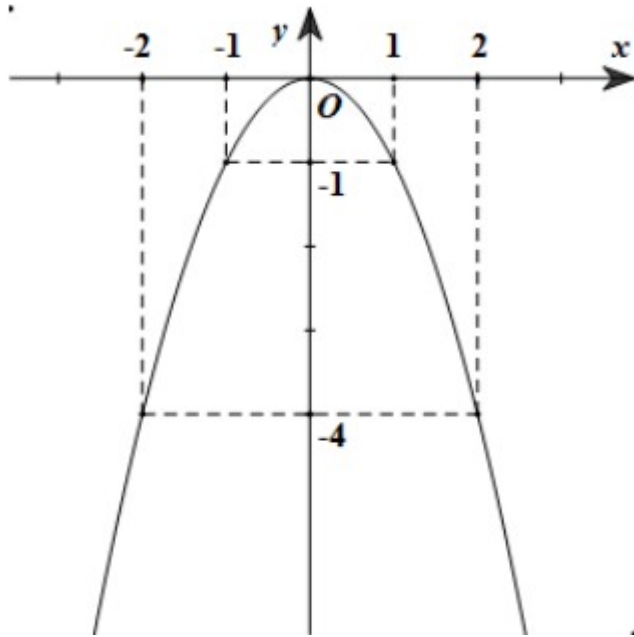
Câu 2

a) Bảng giá trị

x	-2	-1	0	1	2
---	----	----	---	---	---

$y = -x^2$	-4	-1	0	-1	-4
------------	----	----	---	----	----

Đồ thị:



b) Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $-x^2 = 4x - m \Leftrightarrow x^2 + 4x - m = 0$ (1)

(d) và (P) có đúng 1 điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 2^2 - (-m) = 0$

$$\Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$$

Vậy $m = -4$

Câu 3

a) $x^2 - 5x + 3m + 1 = 0$

Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta = 5^2 - 4(3m + 1) > 0 \Leftrightarrow 21 - 12m > 0$

$$\Leftrightarrow m < \frac{21}{12}$$

Với $m < \frac{21}{12}$, ta có hệ thức $\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = 3m + 1 \end{cases}$ (Viết)

$$\Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{5^2 - 4(3m + 1)} = \sqrt{21 - 12m}$$

$$\Rightarrow |x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = 5(x_1 - x_2) = 5|x_1 - x_2| = 5\sqrt{21-12m}$$

Ta có $|x_1^2 - x_2^2| = 15 \Leftrightarrow 5\sqrt{21-12m} = 15 \Leftrightarrow \sqrt{21-12m} = 3 \Leftrightarrow 21-12m = 9 \Leftrightarrow 12m = 12 \Leftrightarrow m = 1$ tm

Vậy $m = 1$ là giá trị cần tìm

b) $(x-1)^4 = x^2 - 2x + 3(1)$

(1) $\Leftrightarrow [(x-1)^2]^2 = x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2x + 1)^2 = x^2 - 2x + 3$ (2)

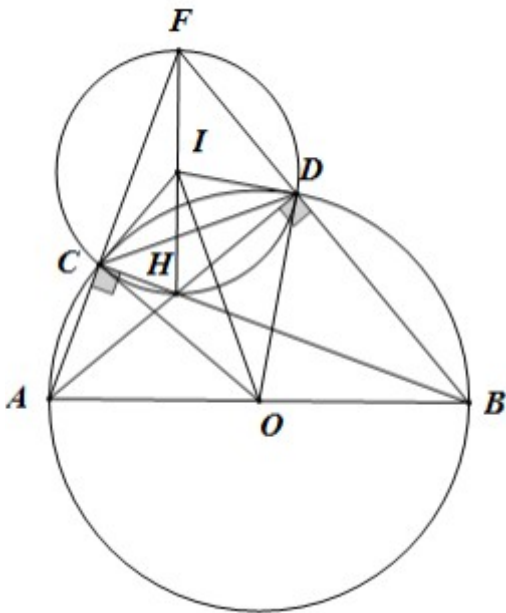
Đặt $t = x^2 - 2x + 1$, $t \geq 0$, phương trình (2) trở thành $t^2 = t + 2 \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0$

$\Leftrightarrow t = 2$ (tm) hoặc $t = -1$ (loại)

Với $t = 2$ có $x^2 - 2x + 1 = 2 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{2}$

Vậy tập nghiệm của phương trình (1) là $\{1 - \sqrt{2}; 1 + \sqrt{2}\}$

Câu 4



a) Vì C, D thuộc nửa đường tròn đường kính AB nên

$$\angle ACB = \angle ADB = 90^\circ \Rightarrow \angle FCH = \angle FDH = 90^\circ \Rightarrow \angle FCH + \angle FDH = 180^\circ$$

Suy ra tứ giác CHDF nội tiếp

b) Vì $AH \perp BF$, $BH \perp AF$ nên H là trực tâm $\Delta AFB \Rightarrow FH \perp AB$

$$\Rightarrow CFH = CBA (= 90^\circ - CAB) \Rightarrow \Delta CFH \sim \Delta CBA (g.g) \Rightarrow \frac{CF}{CB} = \frac{CH}{CA} \Rightarrow CF \cdot CA = CH \cdot CB$$

c) Vì $FCH = FDH = 90^\circ$ nên tứ giác CHDF nội tiếp đường tròn tâm I đường kính FH

$$\Rightarrow IC = ID. \text{ Mà } OC = OD \text{ nên } \Delta OCI = \Delta ODI (c.c.c) \Rightarrow COI = DOI$$

$\Rightarrow OI$ là phân giác của góc COD

d) Vì $OC = CD = OD = R$ nên ΔOCD đều $\Rightarrow COD = 60^\circ$

$$\text{C\acute{o}} \quad CAD = \frac{1}{2} COD = 30^\circ \Rightarrow CFD = 90^\circ - CAD = 60^\circ$$

Xét góc nội tiếp và góc ở tâm cùng chắn cung CD của (I), có

$$CID = 2CFD = 120^\circ \Rightarrow OIC = OID = \frac{COD}{2} = 60^\circ$$

$$\text{Mặt khác } COI = DOI = \frac{COD}{2} = 30^\circ \Rightarrow OID + DOI = 90^\circ \Rightarrow \Delta OID \text{ vuông tại D}$$

$$\text{Suy ra } OI = \frac{OD}{\sin 60^\circ} = \frac{2R}{\sqrt{3}}$$

Vậy I luôn thuộc đường tròn $\left(O; \frac{2R}{\sqrt{3}}\right)$

Câu 5

$$\text{Từ điều kiện đề bài ta có } \frac{ab+bc+ca}{abc} = 3 \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 3$$

Áp dụng hai lần bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$a^2 + bc \geq 2\sqrt{a^2 bc} = 2a\sqrt{bc} \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{2}{2a\sqrt{bc}} = \frac{1}{2\sqrt{bc}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \cdot \frac{1}{\sqrt{c}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) \Rightarrow \frac{a}{a^2 + bc} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right)$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b}{b^2 + ca} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} \right); \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right)$$

$$\text{Suy ra } \frac{a}{a^2 + bc} + \frac{b}{b^2 + ca} + \frac{c}{c^2 + ab} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = \frac{3}{2}.$$

Đề số 45. Chuyên Sơn La. Năm học: 2016-2017**Câu I (2.0 điểm).**

$$P = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

Cho biểu thức

1. Rút gọn biểu thức P.

2. Tìm các giá trị của x để $P > \frac{1}{2}$.**Câu II (1.5 điểm).**Cho phương trình: $x^2 - 5x + m = 0$ (1) (m là tham số).1. Giải phương trình khi $m = 6$.2. Tìm m để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn: $|x_1 - x_2| = 3$ **Câu III (2.0 điểm).**

Hai ô tô cùng khởi hành một lúc trên quãng đường từ A đến B dài 120 km. Mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ 2 là 10 km nên đến B trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ. Tính vận tốc mỗi ô tô.

Câu IV (3.5 điểm).

Cho đường tròn (O;R); AB và CD là hai đường kính khác nhau của đường tròn. Tiếp tuyến tại B của đường tròn (O;R) cắt các đường thẳng AC, AD thứ tự tại E và F.

a) Chứng minh tứ giác ACBD là hình chữ nhật.

b) Chứng minh $\triangle ACD \sim \triangle CBE$

c) Chứng minh tứ giác CDFE nội tiếp được đường tròn.

d) Gọi S, S₁, S₂ thứ tự là diện tích của $\triangle AEF$, $\triangle BCE$ và $\triangle BDF$. Chứng minh: $\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = \sqrt{S}$ **Câu V (1.0 điểm).**

Cho hai số dương a, b thỏa mãn: $a + b \leq 2\sqrt{2}$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}$

----- HẾT -----

(Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm)

HƯỚNG DẪN GIẢI
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 TRƯỜNG THPT CHUYÊN SƠN LA VÀ PTDT NỘI
TRÚ TỈNH SƠN LA NĂM HỌC 2016-2017

Câu I(2đ):

a) Rút gọn biểu thức:

$$P = \left(\frac{1}{x - \sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right) : \frac{\sqrt{x}}{x - 2\sqrt{x} + 1} \quad (x > 0; x \neq 1)$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \right) \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}}$$

$$= \frac{1 + \sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{\sqrt{x}} = \frac{(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{x - 1}{x}$$

b) Tìm các giá trị của x để $P > \frac{1}{2}$

Với $x > 0, x \neq 1$ thì $\frac{x-1}{x} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x-1) > x \Leftrightarrow x > 2$

Vậy với $x > 2$ thì $P > \frac{1}{2}$

Câu II(1,5đ):

a) Với $m = 6$ phương trình trở thành: $x^2 - 5x + 6 = 0$
 $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 25 - 24 = 1 > 0$

$\Rightarrow$ phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-(-5) + \sqrt{1}}{2} = 3; x_2 = \frac{-(-5) - \sqrt{1}}{2} = 2$

b) Để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ ta phải có $\Delta \geq 0$

$\Leftrightarrow (-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot m \geq 0 \Leftrightarrow 25 - 4m \geq 0 \Leftrightarrow m \leq \frac{25}{4} \quad (1)$

Áp dụng hệ thức Vi-ét cho phương trình bậc hai đã cho ta được.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5 \\ x_1 x_2 = m \end{cases} \quad (2)$$

Mặt khác theo yêu cầu bài toán phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện: $|x_1 - x_2| = 3$ hai vế đẳng thức đều dương, bình phương hai vế ta được:

$$(|x_1 - x_2|)^2 = 3^2$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 9 \quad (3)$$

Thay (2) vào (3) ta được:

$$5^2 - 4m = 9$$

$$\Leftrightarrow m = 4$$

Thỏa mãn (1) vậy với $m = 4$ là giá trị cần tìm để phương trình có 2 nghiệm $x_1; x_2$ thỏa mãn điều kiện: $|x_1 - x_2| = 3$

Câu III(2đ):

Gọi vận tốc của xe thứ nhất và xe thứ hai theo thứ tự là: v_1 và v_2 ($v_1 > 0; v_2 > 0$, km/giờ)

Vì mỗi giờ ô tô thứ nhất chạy nhanh hơn ô tô thứ hai là 10km nên ta có phương trình thứ nhất: $v_1 - v_2 = 10(1)$

$$t_1 = \frac{120}{v_1}(h)$$

Thời gian ô tô thứ nhất đi hết quãng đường AB là:

$$t_2 = \frac{120}{v_2}(h)$$

Thời gian ô tô thứ hai đi hết quãng đường AB là:

Vì Ô tô thứ nhất đến trước ô tô thứ hai là 0,4 giờ nên ta có phương trình thứ hai:

$$t_2 - t_1 = 0,4 \Leftrightarrow \frac{120}{v_2} - \frac{120}{v_1} = 0,4 \Leftrightarrow \frac{120(v_1 - v_2)}{v_1 v_2} = 0,4(2)$$

Thay (1) vào (2) ta được:

$$\frac{120 \cdot 10}{v_1 v_2} = 0,4 \Rightarrow v_1 v_2 = 3000(3)$$

Từ (1) $\Rightarrow v_1 = v_2 + 10$ thay vào (3) ta được:

$$(3) \Leftrightarrow v_2(v_2 + 10) = 3000$$

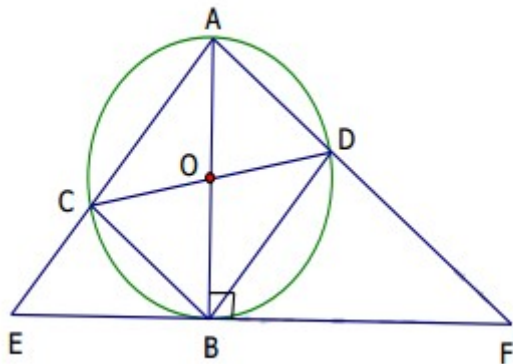
$$\Leftrightarrow v_2^2 + 10v_2 - 3000 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = 50(TM) \\ v_2 = -55(L) \end{cases}$$

Khi $v_2 = 50 \Rightarrow v_1 = 50 + 10 = 60$

Vậy vận tốc của xe thứ nhất là 60 km/giờ; vận tốc của xe thứ hai là 50 km/giờ

Câu IV(3,5đ):



a) Xét tứ giác ABCD có :

$$\begin{cases} AB = CD \\ OA = OB = OC = OD \end{cases} \text{ (Đường kính của đường tròn và bán kính của đường tròn).}$$

Tứ giác ACBD có hai đường chéo AB và CD bằng nhau và cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường, suy ra ACBD là hình chữ nhật

b) Tứ giác ACBD là hình chữ nhật nên:

$$\angle CAD = \angle BCE = 90^\circ (1). \text{ Lại có } \angle CBE = \frac{1}{2} \text{ số BC (góc tạo bởi tiếp tuyến và dây cung);}$$

$\angle ACD = \frac{1}{2} \text{ số AD (góc nội tiếp), mà BC = AD (do BC = AD cạnh của hình chữ nhật)} \Rightarrow \angle CBE = \angle ACD (2). \text{ Từ (1) và (2) suy ra } \triangle ACD \sim \triangle CBE .$

c) Vì ACBD là hình chữ nhật nên CB song song với AF, suy ra: CBE = DFE (3). Từ (2) và (3) suy ra ACD = DFE do đó tứ giác CDFE nội tiếp được đường tròn.

$$\frac{S_1}{S} = \frac{EB^2}{EF^2}$$

d) Do CB // AF nên $\Delta CBE \sim \Delta AFE$, suy ra:

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{S_1}{S}} = \frac{EB}{EF}$$

$$\text{Tương tự ta có } \sqrt{\frac{S_2}{S}} = \frac{BF}{EF}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} = 1 \Rightarrow \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} = S$$

Câu V(1d):

Cách 1: Với mọi a, b ta luôn có: $(a - b)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab \geq 4ab \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab (*)$$

Vì a, b đều dương nên ab và a + b cũng dương bất đẳng thức (*) trở thành:

$$\Leftrightarrow \frac{a+b}{ab} \geq \frac{4}{a+b} \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow P \geq \frac{4}{a+b} \text{ mà } a+b \leq 2\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{a+b} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} \Rightarrow P \geq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-b)^2 = 0 \\ a+b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra

$$\text{Vậy min } P = \sqrt{2}$$

Cách 2: Ta có $(a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2 \geq 0 \Rightarrow (a + b)^2 \geq 4ab \Rightarrow (*)$ giải tiếp ta được.

$$P = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \stackrel{CS-SL}{\geq} \frac{2}{\sqrt{ab}} \stackrel{CS-SL}{\geq} \frac{2 \cdot 2}{a+b} = \frac{4}{a+b} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Cách 3: Với hai số a > 0, b > 0 ta có

$$\text{Dấu "=" xảy ra } a = b = \sqrt{2}$$

$$\text{Vậy min } P = \sqrt{2}$$

Cách 4: Ta chứng minh bài toán sau: Cho a, b là các số dương.

$$\text{Chứng minh rằng: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} (*)$$

Thật vậy áp dụng bất đẳng thức cô sinh cho hai số dương a và b, $\frac{1}{a}; \frac{1}{b}$ ta được:

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} (1)$$

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}} (2)$$

Do các vế của (1) và (2) trên đều dương nên nhân vế với vế hai BĐT dương cùng chiều, ta được:

$$(a + b) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi a=b.

$$\text{Áp dụng (*)} \Rightarrow P \geq \frac{4}{a+b} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{a+b} \geq \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{4}{a+b} \geq \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2} \quad (3)$$

$\Rightarrow P \geq \sqrt{2}$ dấu "=" xảy ra khi (1), (2) và (3) đồng thời xảy ra dấu "=" và kết hợp với điều kiện bài ra ta có:

$$\begin{cases} a = b \\ \frac{1}{a} = \frac{1}{b} \\ a + b = 2\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow a = b = \sqrt{2}$$

Khi đó: $\text{Vậy min} P = \sqrt{2}$ khi $a=b=\sqrt{2}$

Cách 5: Bằng phương pháp tương đương ta chứng minh bài toán sau: Cho a, b là các số dương. Chứng minh

$$\text{rằng: } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \Rightarrow \text{các bạn giải tiếp.}$$

Cách 6: Cho hai số x, y dương và a, b là hai số bất kì ta có:

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \text{ hay } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y} \quad (1)$$

(Bất đẳng thức Svac – xơ)

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

Thật vậy áp dụng bất đẳng thức Bun nhiacopxki cho

$$\left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right) (x+y) = \left(\left(\frac{a}{\sqrt{x}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{y}} \right)^2 \right) \left((\sqrt{x})^2 + (\sqrt{y})^2 \right)$$

$$\geq (a+b)^2 \Rightarrow \left(\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \right) (x+y) \geq (a+b)^2 \text{ hay } \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$$

Áp dụng (1) ta có:

$$\left(\frac{1^2}{x} + \frac{1^2}{y} \right) \geq \frac{(1+1)^2}{x+y} \text{ hay } P \geq \frac{(1+1)^2}{x+y} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Dấu "=" xảy ra khi và khi khi $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$ hay $a=b$ kết hợp với điều kiện bài ra ta có: $\text{Vậy min} P = \sqrt{2}$ khi $a=b=\sqrt{2}$

----- Hết -----

Đề số 46. Chuyên SPHN. Năm học: 2016-2017

Câu 1 (2 điểm). Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a} - \sqrt{1-a}} + \frac{1-a}{\sqrt{1-a^2} - 1+a} \right) \left(\sqrt{\frac{1}{a^2}} - 1 - \frac{1}{a} \right)$ với $0 < a < 1$. Chứng minh rằng $P = -1$

Câu 2 (2,5 điểm). Cho parabol (P): $y = -x^2$ và đường thẳng d: $y = 2mx - 1$ với m là tham số.

a) Tìm tọa độ giao điểm của d và (P) khi $m = 1$

b) Chứng minh rằng với mỗi giá trị của m, d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B. Gọi y_1, y_2 là tung độ của A, B. Tìm m sao cho $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5}$

Câu 3 (1,5 điểm). Một người đi xe máy từ địa điểm A đến địa điểm B cách nhau 120 km. Vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu không đổi, vận tốc trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau bằng $\frac{1}{2}$ vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu. Khi đến B, người đó nghỉ 30 phút và trở lại A với vận tốc lớn hơn vận tốc trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu tiên lúc đi là 10 km/h. Thời gian kể từ lúc xuất phát tại A đến khi xe trở về A là 8,5 giờ. Tính vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A?

Câu 4 (3,0 điểm). Cho ba điểm A, M, B phân biệt, thẳng hàng và M nằm giữa A, B. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng AB, dựng hai tam giác đều AMC và BMD. Gọi P là giao điểm của AD và BC.

a) Chứng minh AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp

b) Chứng minh $\sqrt{CP.CB} + \sqrt{DP.DA} = AB$

c) Đường thẳng nối tâm của hai đường tròn ngoại tiếp hai tứ giác AMPC và BMPD cắt PA, PB tương ứng tại E, F. Chứng minh CDFE là hình thang.

Câu 5 (1,0 điểm). Cho a, b, c là ba số thực không âm và thỏa mãn: $a + b + c = 1$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq 7$$

—————Hết—————

ĐÁP ÁN

Câu 1

Với $0 < a < 1$ ta có:

$$\begin{aligned}
P &= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{(1-a)(1+a)} - (\sqrt{1-a})^2} \right] \left(\sqrt{\frac{1-a^2}{a^2}} - \frac{1}{a} \right) \\
&= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a}(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})} \right] \left[\sqrt{\frac{(1-a)(1+a)}{a^2}} - \frac{1}{a} \right] \\
&= \left[\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} + \frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \right] \left(\frac{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}}{a^2} - \frac{1}{a} \right) \\
&= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{2\sqrt{1-a}\sqrt{1+a} - (1-a) - (1+a)}{2a} \\
&= \frac{\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}} \cdot \frac{-(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})^2}{2a} \\
&= - \frac{(\sqrt{1+a} + \sqrt{1-a})(\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a})}{2a} \\
&= - \frac{1+a-1+a}{2a} = - \frac{2a}{2a} = -1
\end{aligned}$$

Câu 2

a) Khi $m = 1$ ta có $d: y = 2x - 1$ và $(P): y = -x^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là:

Với $x = -1 + \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 + 2\sqrt{2}$

Với $x = -1 - \sqrt{2} \Rightarrow y = -3 - 2\sqrt{2}$

Vậy các giao điểm là $(-1 + \sqrt{2}; -3 + 2\sqrt{2}); (-1 - \sqrt{2}; -3 - 2\sqrt{2})$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của d và $(P): -x^2 = 2mx - 1 \Leftrightarrow x^2 + 2mx - 1 = 0$ (*)

Phương trình (*) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0 \Rightarrow (*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2 \forall m$ hay d luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Áp dụng Viét ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 x_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow |x_1 - x_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2} = \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{4m^2 + 4} = 2\sqrt{m^2 + 1}$

Khi đó ta có $\begin{cases} y_1 = 2mx_1 - 1 \\ y_2 = 2mx_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow |y_1 - y_2| = |(2mx_1 - 1) - (2mx_2 - 1)|$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |y_1^2 - y_2^2| &= |(2mx_1 - 1 - 2mx_2 + 1)(2mx_1 - 1 + 2mx_2 - 1)| = |4m(x_1 - x_2)[m(x_1 + x_2) - 1]| \\ &= |4m(2m^2 + 1)(x_1 - x_2)| = 4|m(2m^2 + 1)| |x_1 - x_2| = 4|m|(2m^2 + 1)2\sqrt{m^2 + 1} \end{aligned}$$

Ta có $|y_1^2 - y_2^2| = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 64m^2(2m^2 + 1)^2(m^2 + 1) = 45 \Leftrightarrow 64(4m^4 + 4m^2 + 1)(m^4 + m^2) = 45$

Đặt $m^4 + m^2 = t \geq 0$ có phương trình $64t(4t + 1) = 45 \Leftrightarrow 256t^2 + 64t - 45 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{5}{16}$ (vì $t \geq 0$)

Suy ra $m^4 + m^2 = \frac{5}{16} \Leftrightarrow 16m^4 + 16m^2 - 5 = 0 \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}$

Vậy $m = \pm \frac{1}{2}$

Câu 3

Gọi vận tốc của người đi xe máy trên $\frac{3}{4}$ quãng đường AB đầu (90 km) là x (km/h) ($x > 0$)

Vận tốc của người đi xe máy trên $\frac{1}{4}$ quãng đường AB sau là $0,5x$ (km/h)

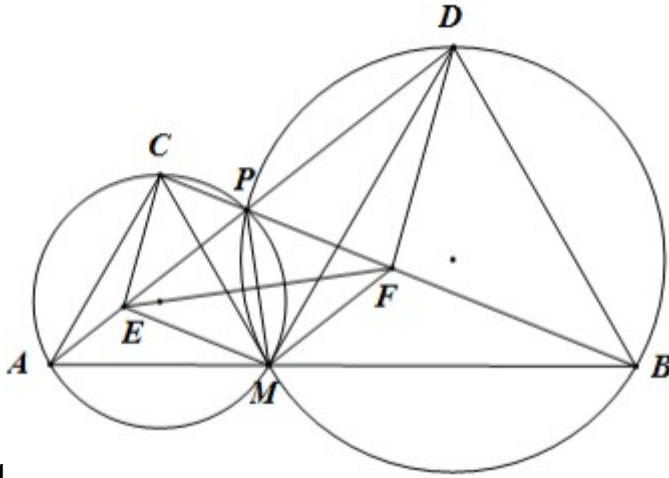
Vận tốc của người đi xe máy khi quay trở lại A là $x + 10$ (km/h)

Tổng thời gian của chuyến đi là $\frac{90}{x} + \frac{30}{0,5x} + \frac{120}{x+10} + \frac{1}{2} = 8,5$

$$\Leftrightarrow \frac{90}{x} + \frac{60}{x} + \frac{120}{x+10} = 8 \Leftrightarrow \frac{150}{x} + \frac{120}{x+10} = 8 \Leftrightarrow 75(x+10) + 60x = 4x(x+10)$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 95x - 750 = 0 \Leftrightarrow x = 30 \text{ (do } x > 0)$$

Vậy vận tốc của xe máy trên quãng đường người đó đi từ B về A là $30 + 10 = 40$ (km/h)



Câu 4

a) Vì $\angle CMA = \angle DMB = 60^\circ \Rightarrow \angle CMB = \angle DMA = 120^\circ$. Xét $\triangle CMB$ và $\triangle AMD$ có

$$\begin{cases} CM = AM \\ \angle CMB = \angle DMA \Rightarrow \triangle CMB = \triangle AMD (c.g.c) \Rightarrow \begin{cases} \angle MCB = \angle MAD \\ \angle MBC = \angle MDA \end{cases} \\ MB = MD \end{cases}$$

Suy ra AMPC và BMPD là các tứ giác nội tiếp

b) Vì AMPC là tứ giác nội tiếp nên

$$\angle CPM = 180^\circ - \angle CAM = 120^\circ = \angle CMB \Rightarrow \triangle CPM \sim \triangle CMB (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{CM} = \frac{CM}{CB}$$

$$\Rightarrow CP \cdot CB = CM^2 \Rightarrow \sqrt{CP \cdot CB} = CM. \text{ Tương tự } \sqrt{DP \cdot DA} = DM$$

$$\text{Vậy } \sqrt{CP \cdot CB} + \sqrt{DP \cdot DA} = CM + DM = AM + BM = AB$$

c) Ta có EF là đường trung trực của PM $\Rightarrow EP = EM \Rightarrow \triangle EPM$ cân tại E

Mặt khác $\angle EPM = \angle ACM = 60^\circ$ (do AMPC là tứ giác nội tiếp) nên $\triangle EPM$ đều

$$\Rightarrow PE = PM. \text{ Tương tự } PF = PM$$

Ta có $CM \parallel DB$ nên $\angle PCM = \angle PBD$

Mà BMPD là tứ giác nội tiếp nên $\angle PBD = \angle PMD$. Suy ra $\angle PCM = \angle PMD$

$$\text{Ta lại có } \angle CPM = \angle DPM = 120^\circ \Rightarrow \triangle CPM \sim \triangle PMD (g.g) \Rightarrow \frac{CP}{MP} = \frac{PM}{PD} \Rightarrow \frac{CP}{PF} = \frac{PE}{PD}$$

Theo định lý Talét đảo ta có $CE \parallel DF \Rightarrow CDFE$ là hình thang.

Câu 5

$$0 \leq a, b, c \leq 1 \Rightarrow \begin{cases} a(1-a) \geq 0 \\ b(1-b) \geq 0 \\ c(1-c) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq a^2 \\ b \geq b^2 \\ c \geq c^2 \end{cases}$$

Vì a, b, c không âm và có tổng bằng 1 nên

Suy ra $\sqrt{5a+4} \geq \sqrt{a^2+4a+4} = \sqrt{(a+2)^2} = a+2$

Tương tự $\sqrt{5b+4} \geq b+2; \sqrt{5c+4} \geq c+2$

Do đó $\sqrt{5a+4} + \sqrt{5b+4} + \sqrt{5c+4} \geq (a+b+c) + 6 = 7$ (đpcm)