

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG CAO VECTƠ - TÍCH VÔ HƯỚNG

VẤN ĐỀ 1. BIỂU DIỄN VEC TƠ

Câu 1. Cho tam giác ABC biết $AB = 3, BC = 4, AC = 6$, I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC

Gọi x, y, z là các số thực dương thỏa mãn $x\vec{IA} + y\vec{IB} + z\vec{IC} = \vec{0}$. Tính $P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$

A. $P = \frac{3}{4}$

B. $P = \frac{41}{12}$

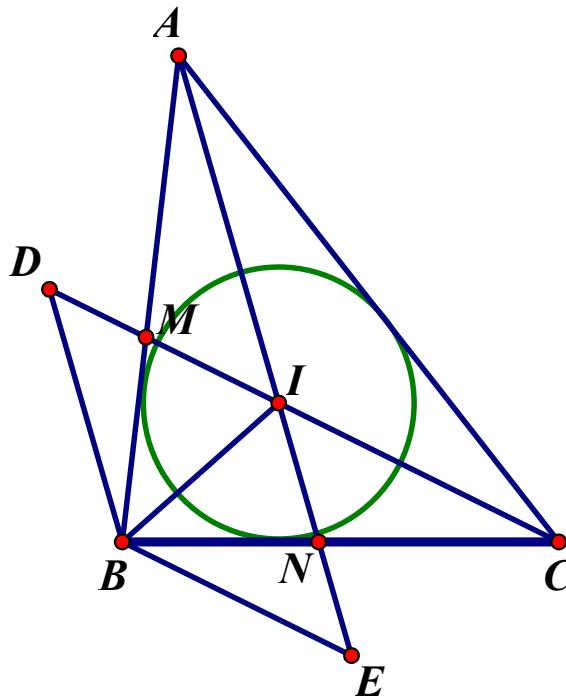
C. $P = \frac{23}{12}$

D. $P = \frac{2}{3}$

Lời giải

Họ và tên tác giả : Vũ Ngọc Thành Tên FB: Vũ Ngọc Thành

Chọn B



Dựng hình bình hành $BDIE$ như hình vẽ. Khi đó $\vec{IB} = \vec{IE} + \vec{ID} = -\frac{IE}{IA}\vec{IA} - \frac{ID}{IC}\vec{IC}$

Theo tính chất đường phân giác trong tam giác : $\frac{IE}{IA} = \frac{MB}{MA} = \frac{BC}{AC}$, $\frac{ID}{IC} = \frac{BN}{NC} = \frac{AB}{AC}$

Suy ra $\vec{IB} = -\frac{BC}{AC}\vec{IA} - \frac{AB}{AC}\vec{IC}$

Từ $x\vec{IA} + y\vec{IB} + z\vec{IC} = \vec{0}$ suy ra $\vec{IB} = -\frac{x}{y}\vec{IA} - \frac{z}{y}\vec{IC}$

Do $\vec{IA}, \vec{IC}$ là hai véc tơ không cùng phương suy ra $x = 4t, y = 6t, z = 3t$ với $t > 0$.

$$P = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} = \frac{41}{12}$$

Vậy

Email: tiethanh.78@gmail.com

Câu 2. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD , G là trọng tâm tam giác BCI . Đặt $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$. Hãy tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

B. $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \vec{b}$

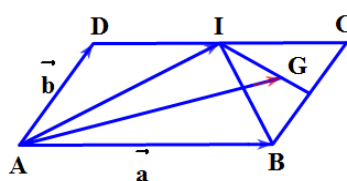
C. $\overrightarrow{AG} = \vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$

D. $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Tiết Hạnh Tên FB: Hanchtiethanh

Chọn A



* I là trung điểm của CD nên:

$$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

* G là trọng tâm tam giác BCI nên:

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$$

thay $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ta được

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

Email: ilovemath.ddt@gmail.com

Câu 3. Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = c, BC = a, CA = b$. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC . Đẳng thức nào sau đây đúng.

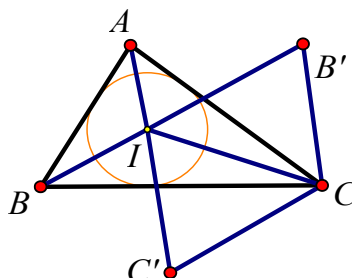
A. $aIA + bIB + cIC = 0$

B. $bIA + cIB + aIC = 0$

C. $cIA + bIB + aIC = 0$

D. $cIA + aIB + bIC = 0$

Lời giải



Họ và tên : Dương Bảo Trâm Facebook: Bảo Trâm

Chọn A

Qua C dựng đường thẳng song song với AI cắt BI tại B'; song song với BI cắt AI tại A'

Ta có $IC = IA' + IB'$ (*)

Theo định lý Talet và tính chất đường phân giác trong ta có :

$$\frac{IB}{IB'} = \frac{BA_1}{CA_1} = \frac{c}{b} \Rightarrow IB' = -\frac{b}{c}IB \quad (1)$$

$$IA' = -\frac{a}{c}IA \quad (2)$$

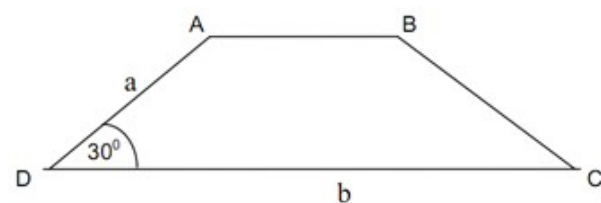
Tương tự :

Từ (1) và (2) thay vào (*) ta có :

$$IC = -\frac{a}{c}IA - \frac{b}{c}IB \Rightarrow aIA + bIB + cIC = 0$$

Đ/c mail: honganh161079@gmail.com

Câu 4. Cho hình thang cân ABCD có CD là đáy lớn, $\angle ADC = 30^\circ$. Biết DA = a, DC = b, hãy biểu diễn $\overrightarrow{DB}$ theo hai vector $\overrightarrow{DA}$ và $\overrightarrow{DC}$.



A. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DC}$.

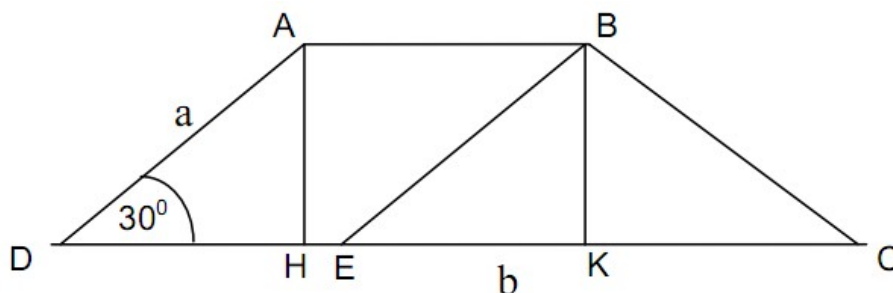
B. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \frac{b-a\sqrt{3}}{b}\overrightarrow{DC}$.

C. $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DA} + \frac{b-a}{b}\overrightarrow{DC}$.

D. $\overrightarrow{DB} = b\overrightarrow{DA} + a\overrightarrow{DC}$.

Lời giải

Họ tên: Đỗ Thị Hồng Anh



Kẻ $BE \parallel AD$, E nằm trên cạnh CD. Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \frac{DE}{DC}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \frac{DE}{DC}\overrightarrow{DC} \\ &= \overrightarrow{DA} + \frac{DC - 2KC}{DC}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA} + \frac{b-a\sqrt{3}}{b}\overrightarrow{DC} \end{aligned}$$

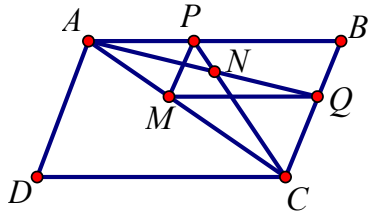
Vậy đáp án đúng là câu **B**.

Email: kimduyenhtk@gmail.com

- Câu 5.** Cho hình bình hành $ABCD$, M là điểm thỏa mãn $\vec{5AM} + \vec{2CA} = \vec{0}$. Trên các cạnh AB , BC lần lượt lấy các điểm P, Q sao cho $MP \parallel BC, MQ \parallel AB$. Gọi N là giao điểm của AQ và CP . Giá trị của tổng $\frac{AN}{AQ} + \frac{CN}{CP}$ bằng:
- A. $\frac{21}{19}$ B. $\frac{24}{19}$ C. $\frac{23}{19}$ D. $\frac{25}{19}$

Lời giải

FB: Kim Duyên Nguyễn.



Đặt $\vec{AN} = x\vec{AQ}$, $\vec{CN} = y\vec{CP}$

Vì $MQ \parallel AB, MP \parallel BC \Rightarrow \frac{BQ}{BC} = \frac{AP}{AB} = \frac{AM}{AC} = \frac{2}{5}$

$$\vec{AQ} = \vec{AB} + \vec{BQ} = \vec{AB} + \frac{2}{5}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{2}{5}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{5}\vec{AC} + \frac{3}{5}\vec{AB}$$

Ta có:

$$\vec{AN} = x\vec{AQ} = \frac{2}{5}x\vec{AC} + \frac{3}{5}x\vec{AB} \quad (1)$$

Nên

Do N, C, P thẳng hàng nên $\frac{2}{5}x + \frac{3}{2}x = 1 \Rightarrow x = \frac{10}{19}$

$$\vec{CN} = y\vec{CP} \Rightarrow \vec{AN} - \vec{AC} = y(\vec{AP} - \vec{AC}) \Rightarrow \vec{AN} = (1-y)\vec{AC} + y\vec{AP} \quad (2)$$

Mặt khác

Từ (1) và (2) suy ra $y = \frac{3}{2}x = \frac{15}{19}$. Do đó $\frac{AN}{AQ} + \frac{CN}{CP} = x + y = \frac{25}{19}$. Đáp án D

Email: thuangiaoyen@gmail.com

- Câu 6.** Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý. K là điểm cố định thỏa mãn đẳng thức $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + 3\vec{MD} = x\vec{MK}$. Tìm x :
- A. 2. B. 6. C. 5. D. 4.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Phạm Thị Ngọc Tên FB: Giang Thao

Chọn B

Vì đẳng thức $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = x\overrightarrow{MK}$ (1) thỏa mãn với mọi M nên nó đúng khi M trùng với K. Khi đó ta có : $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = x\overrightarrow{KK} = \vec{0}$ (2).

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$, ta có $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{KG}$ (3).

Thay (3) vào (2) ta được $3\overrightarrow{KG} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$, suy ra K là trung điểm của GD.

Từ (1) ta có:

$$\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD} = (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD}) + 6\overrightarrow{MK} = 6\overrightarrow{MK}$$

Vậy $6\overrightarrow{MK} = x\overrightarrow{MK}$ suy ra x = 6.

Email: ngthhoai1705@gmail.com

Facebook: <https://www.facebook.com/hoaihappy>

Câu 7. Cho tam giác ABC, trên cạnh AC lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $AM = 3MC$, $NC = 2NB$. Gọi O là giao điểm của AN và BM. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích tam giác OBN bằng 1.

A. 24.

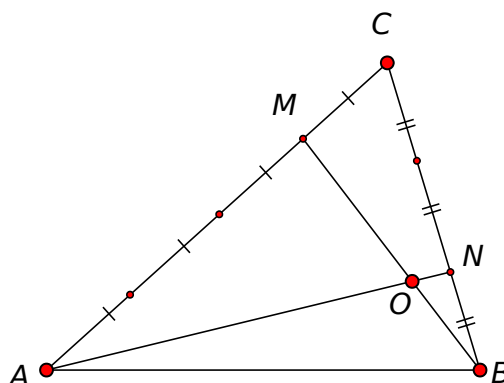
B. 20.

C. 30.

D. 45

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thanh Hoài



Chọn C

Ta có: $\overrightarrow{BO} = x\overrightarrow{BA} + (1-x)\overrightarrow{BN}$ và $\overrightarrow{AO} = y\overrightarrow{AM} + (1-y)\overrightarrow{AB}$.

$$\text{Þ } \overrightarrow{AB} = y\overrightarrow{AM} + (x-y+1)\overrightarrow{AB} + (x-1)\overrightarrow{BN} \text{ ũ } (x-y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AM} + (x-1)\overrightarrow{BN} = \vec{0} \quad (1)$$

Đặt $\overrightarrow{CB} = \vec{a}, \overrightarrow{CA} = \vec{b}$ ta được $\overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}; \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{b}; \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}\vec{a}$

$$\text{Thay vào (1) và thu gọn ta được: } (x-y)\vec{a} - (x-y)\vec{b} = \frac{x-1}{3}\vec{a} + \frac{3}{4}y\vec{b}$$

Suy ra $\begin{cases} x - y = \frac{x-1}{3} \\ y - x = \frac{3}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$. Với $x = \frac{1}{10}$ ta được $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{10}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BN}$

Ô $\overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BN} = \frac{1}{10}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}) \Leftrightarrow \overrightarrow{NO} = \frac{1}{10}\overrightarrow{NA} \Leftrightarrow \frac{NA}{NO} = 10$

Vì $S_{ONB} = 1 \wedge S_{NAB} = 10 \Rightarrow S_{ABC} = 30$.

Email: ngocuyen203@gmail.com

- Câu 8.** Cho tam giác ABC , gọi I là điểm trên BC kéo dài sao cho $IB = 3IC$. Gọi J, K lần lượt là những điểm trên cạnh AC, AB sao cho $JA = 2JC; KB = 3KA$. Khi đó $\overrightarrow{BC} = m.\overrightarrow{AI} + n.\overrightarrow{JK}$. Tính tổng $P = m + n$?
- A.** $P = 34$. **B.** $P = -34$. **C.** $P = -14$. **D.** $P = 14$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Trần Ngọc Uyên Tên FB: Tran Ngoc Uyen

Chọn B

Ta có: $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ (1)

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} \overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\ \overrightarrow{JK} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC} = 6\overrightarrow{AI} + 12\overrightarrow{JK} \\ \overrightarrow{AB} = 16\overrightarrow{AI} + 36\overrightarrow{JK} \end{cases}$$

Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình

Ta có: $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = -10\overrightarrow{AI} - 24\overrightarrow{JK} \Rightarrow m = -10; n = -24 \Rightarrow m + n = -34$. Chọn đáp án **B**.

Email: huanpv@dtdecopark.edu.vn

- Câu 9.** Cho hình bình hành ABCD, lấy M trên cạnh AB và N trên cạnh CD sao cho $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$. Gọi I và J là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BI} = m\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AJ} = n\overrightarrow{AI}$.

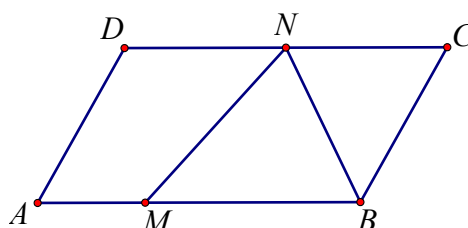
Khi J là trọng tâm tam giác BMN thì tích m.n bằng bao nhiêu?

- A.** $\frac{1}{3}$ **B.** 3 **C.** $\frac{2}{3}$ **D.** 1

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Phạm Văn Huân, Tên FB: Pham Van Huan)

Chọn A



J là trọng tâm tam giác BMN khi và chỉ khi $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = 3\overrightarrow{AJ}$ (9)

Ta có

$$* \quad \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$$

$$* \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - (\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$* \quad \overrightarrow{AJ} = n\overrightarrow{AI} = n(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}) = n(\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{BC}) = n\left[\overrightarrow{AB} + m(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\right] = n(1-m)\overrightarrow{AB} + mn\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = 3n(1-m)\overrightarrow{AB} + 3mn\overrightarrow{AC}$$

Nên thay vào (9) ta có

$$\Leftrightarrow \left[\frac{5}{6} - 3n(1-m) \right] \overrightarrow{AB} + (1-3mn)\overrightarrow{AC} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} \frac{5}{6} - 3n(1-m) = 0 \\ 1-3mn = 0 \end{cases} \Rightarrow mn = \frac{1}{3}$$

Email: namlongkontum@gmail.com

FB: nguyennga

Câu 10. Cho tam giác ABC, trên cạnh AB lấy điểm M, trên cạnh BC lấy điểm N sao cho AM=3MB, NC=2BN. Gọi I là giao điểm của AN với CM. Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích tam giác ICN bằng 2.

A. $\frac{3}{2}$

B. $\frac{33}{2}$

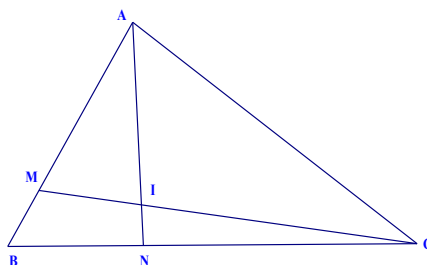
C. 11

D. $\frac{9}{11}$

Lời giải

Họ và tên: Hứa Nguyễn Tường Vy

Chọn đáp án B



Đặt $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$.

Suy ra $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{c}$; $\overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{c}$; $\overrightarrow{CN} = -\frac{2}{3}\vec{a}$

Do A, I, N thẳng hàng nên $\overrightarrow{CI} = x\overrightarrow{CA} + (1-x)\overrightarrow{CN}$

Và M, I, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AI} = y\overrightarrow{AC} + (1-y)\overrightarrow{AM}$

Mặt khác $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{CI} = y\overrightarrow{AC} + (1-y)\overrightarrow{AM} - (x\overrightarrow{CA} + (1-x)\overrightarrow{CN})$

$$\Leftrightarrow \frac{3y+x-1}{3}\vec{a} + \frac{1-y-4x}{4}\vec{c} = \vec{0}$$

Mà $\vec{a}; \vec{c}$ không cùng phương suy ra
$$\begin{cases} \frac{3y+x-1}{3} = 0 \\ \frac{1-y-4x}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{11} \\ y = \frac{3}{11} \end{cases}$$

Với $x = \frac{2}{11} \Rightarrow \vec{CI} = \frac{2}{11}\vec{CA} + \frac{9}{11}\vec{CN} \Rightarrow \vec{NI} = \frac{2}{11}\vec{NA}$

Hay $\frac{NI}{NA} = \frac{2}{11} \Rightarrow \frac{S_{NCI}}{S_{NCA}} = \frac{2}{11} \Rightarrow S_{NCI} = 11$

Mà $\frac{S_{ABC}}{S_{ANC}} = \frac{BC}{NC} = \frac{3}{2} \Rightarrow S_{ABC} = \frac{33}{2}$

congsondienan@gmail.com

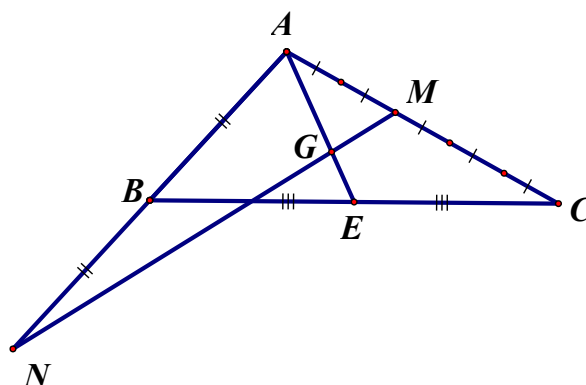
Câu 11. Cho ΔABC có trọng tâm G và hai điểm M, N thỏa mãn: $3\vec{MA} - 2\vec{CM} = \vec{0}$, $\vec{NA} - 2\vec{NB} = \vec{0}$. Chọn mệnh đề đúng.

- A.** $\vec{NG} = 4\vec{GM}$ **B.** $\vec{NG} = 5\vec{GM}$ **C.** $\vec{NG} = 6\vec{GM}$ **D.** $\vec{NG} = 7\vec{GM}$

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Trần Công Sơn, Tên FB: Trần Công Sơn)

Chọn B



Gọi E là trung điểm BC . M, N là các điểm như hình vẽ.

Ta có:
$$\vec{NG} = \vec{AG} - \vec{AN} = \frac{2}{3}\vec{AE} - 2\vec{AB} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) - 2\vec{AB} = -\frac{5}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

$$\vec{GM} = \vec{AM} - \vec{AG} = \frac{2}{5}\vec{AC} - \frac{2}{3}\vec{AE} = \frac{2}{5}\vec{AC} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC}) = -\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{15}\vec{AC}$$

Nên
$$\vec{NG} = -\frac{5}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC} = 5\left(-\frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{1}{15}\vec{AC}\right) = 5\vec{GM}$$

Vậy $\vec{NG} = 5\vec{GM}$

Câu 12. (Đẳng thức vec tơ) Cho tam giác ABC . Gọi A', B', C' là các điểm xác định bởi $2018\vec{A'B} + 2019\vec{A'C} = \vec{0}$, $2018\vec{B'C} + 2019\vec{B'A} = \vec{0}$, $2018\vec{C'A} + 2019\vec{C'B} = \vec{0}$. Khi đó, mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.** ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm.

- B. $\Delta ABC = \Delta A'B'C'$.
 C. $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$.
 D. ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trục tâm.

Lời giải

(Email): tranminhthao2011@gmail.com

Chọn A

Ta có $2018\overrightarrow{A'B} + 2019\overrightarrow{A'C} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 2018(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AB}) + 2019(\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{AC}) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4037\overrightarrow{A'A} + 2018\overrightarrow{AB} + 2019\overrightarrow{AC} = \vec{0} \quad (1)$$

Tương tự ta có $4037\overrightarrow{B'B} + 2018\overrightarrow{BC} + 2019\overrightarrow{BA} = \vec{0}$; $4037\overrightarrow{C'C} + 2018\overrightarrow{CA} + 2019\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

Cộng vế với vế lại ta được

$$4023(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}) + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$$

Vậy ΔABC và $\Delta A'B'C'$ có cùng trọng tâm

Câu 13. (tính độ dài vec tơ) Cho tam giác đều ABC cạnh a . Gọi điểm M là trung điểm BC . Tính độ

dài của vec tơ $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

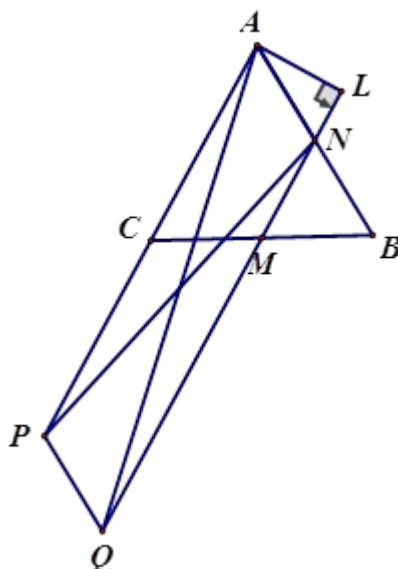
A. $\frac{a\sqrt{21}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{21}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{21}}{4}$.

D. $\frac{a\sqrt{21}}{7}$.

Lời giải



Chọn B

Gọi N là trung điểm AB , Q là điểm đối xứng của A qua C và P là đỉnh của hình bình hành $AQPN$.

Khi đó ta có $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AN}, 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AQ}$ suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có

$$\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AP}$$

Gọi L là hình chiếu của A lên PN

Vì $MN \parallel AC \Rightarrow \angle ANL = \angle MNB = \angle CAB = 60^\circ$

Xét tam giác vuông ANL ta có $\sin \angle ANL = \frac{AL}{AN} \Rightarrow AL = AN \cdot \sin \angle ANL = \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$$\cos \angle ANL = \frac{NL}{AN} \Rightarrow NL = AN \cdot \cos \angle ANL = \frac{a}{2} \cos 60^\circ = \frac{a}{4}$$

Ta lại có $AQ = PN \Rightarrow PL = PN + NL = AQ + NL = 2a + \frac{a}{4} = \frac{9a}{4}$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác ALP ta có

$$AP^2 = AL^2 + PL^2 = \frac{3a^2}{16} + \frac{81a^2}{16} = \frac{21a^2}{4} \Rightarrow AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

$$\text{Vậy } \left| \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \right| = AP = \frac{a\sqrt{21}}{2}$$

Email: tranquocan1980@gmail.com

Câu 14. Cho $\triangle ABC$ có M là trung điểm của BC , H là trực tâm, O là tâm đường tròn ngoại tiếp. Tìm x để $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = x\overrightarrow{HO}$.

A. $x = 2$.

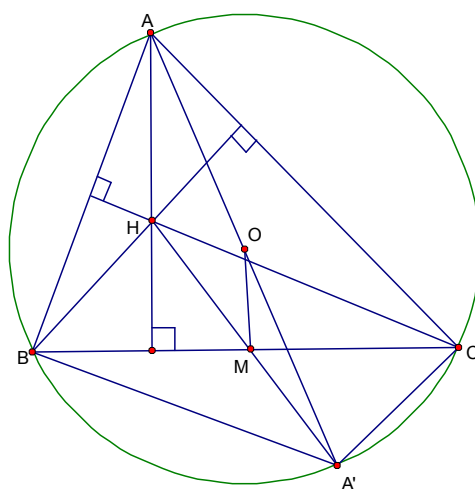
B. $x = -2$.

C. $x = 1$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Họ và tên: **Trần Quốc An** Facebook: **Tran Quoc An**



Chọn A

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua O , ta có :

$$\left. \begin{array}{l} A'B \perp AB \\ CH \perp AB \end{array} \right\} \Rightarrow CH \parallel A'B \quad (1)$$

Tương tự ta chứng minh được $BH \parallel A'C \quad (2)$

Từ (1), (2) suy ra tứ giác BHCA' là hình bình hành.

Do đó M là trung điểm của HA' .

Ta có: $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{HA'}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA'} = 2\overrightarrow{HO} \Rightarrow x = 2.$$

buiduynam1993@gmail.com

Câu 15. Cho tam giác ABC có đường trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AL . Giả sử

ngoài ra còn có $CM = kAL$. Biết $\cos A = \frac{a + bk^2}{c + dk^2}$. Tính $a + b + c + d$

A. 18.

B. 5.

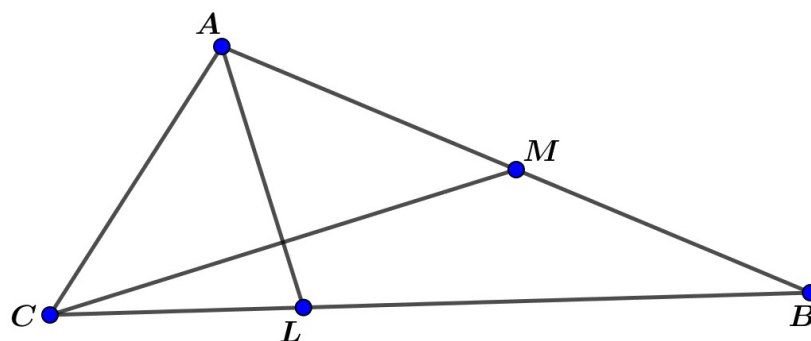
C. 26.

D. 17.

Lời giải

Bùi Duy Nam sưu tầm. FB: Bùi Duy Nam

Chọn A



Ta có $\triangle ACM$ cân tại $A \Rightarrow AC = AM = \frac{1}{2}AB \Rightarrow c = 2b$ với $b = AC$, $c = AB$.

Theo đề bài AL là phân giác trong của góc A nên: $\overrightarrow{AL} = \frac{b}{c+b} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{c+b} \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AC})$

$$\Rightarrow AL^2 = \frac{4}{9}(AM^2 + AC^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC}) = \frac{4}{9}(2b^2 + 2b^2 \cos A) = \frac{8}{9}b^2(1 + \cos A)$$

$$\text{Lại có } 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AM} = AC^2 + AM^2 - CM^2 \Rightarrow 2b^2 \cos A = 2b^2 - CM^2 \Rightarrow CM^2 = 2b^2(1 - \cos A)$$

$$\text{Từ } CM = kAL \Rightarrow 2b^2(1 - \cos A) = k^2 \cdot \frac{8}{9}b^2(1 + \cos A) \Leftrightarrow 9(1 - \cos A) = 4k^2(1 + \cos A)$$

$$\Leftrightarrow \cos A = \frac{9 - 4k^2}{9 + 4k^2}$$

Vậy $a + b + c + d = 18$.

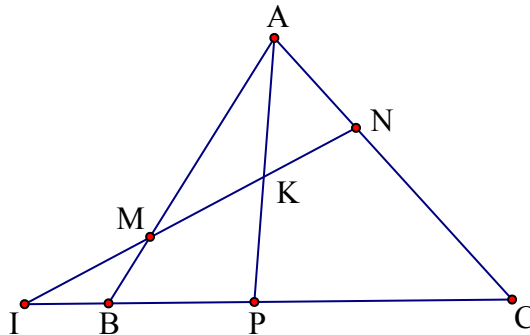
Email: phamthanhmy@gmail.com

- Câu 16.** Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P là các điểm lần lượt thỏa mãn $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0}$. Gọi K là giao điểm của AP và MN . Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?
- A. $4\overrightarrow{KA} + 5\overrightarrow{KP} = \vec{0}$.
 B. $3\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KP} = \vec{0}$.
 C. $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KP} = \vec{0}$.
 D. $\overrightarrow{KA} = \overrightarrow{KP}$.

Lời giải

Họ và tên: *Phạm Thanh My* Facebook: *Phạm Thanh My*

Chọn C



Gọi I là giao điểm của MN và BC .

Áp dụng định lý Menelaus ta có $\frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IC}} \cdot \frac{\overrightarrow{NC}}{\overrightarrow{NA}} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{\overrightarrow{MB}} = 1 \Rightarrow \overrightarrow{IB} = \frac{1}{6}\overrightarrow{IC}$ mà $2\overrightarrow{PB} + 3\overrightarrow{PC} = \vec{0} \Rightarrow P$ là trung điểm IC .

Áp dụng định lý Menelaus ta có $\frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{KP}} \cdot \frac{\overrightarrow{IP}}{\overrightarrow{IB}} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{\overrightarrow{MA}} = 1$
 $\Rightarrow \frac{\overrightarrow{KA}}{\overrightarrow{KP}} = -1 \Rightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KP} = \vec{0}$

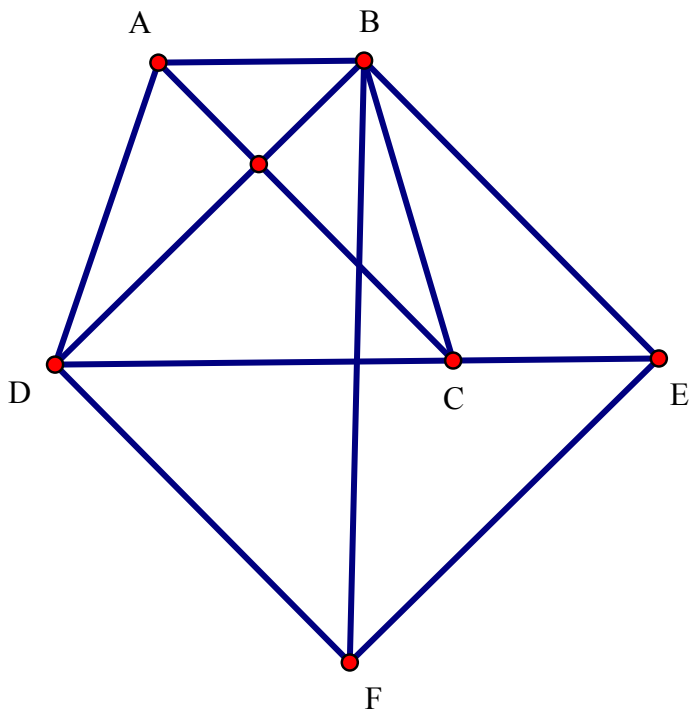
Email: ntyen.c3lqd@gmail.com

- Câu 17.** Cho hình thang $ABCD$ ($AB \parallel CD$) có hai đường chéo vuông góc với nhau. Biết $AB + CD = 20\text{cm}$. Tìm $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$.
- A. 40cm .
 B. 20cm .
 C. 30cm .
 D. 10cm .

Lời giải

Họ và tên tác giả : *Nguyễn Thị Yến* Tên FB: *Nguyễn Yến*

Chọn B



$$|\overline{AC} + \overline{BD}| = |\overline{BE} + \overline{BD}| = |\overline{BF}| = DE = 20\text{cm}.$$

Mail:quyphucvn@gmail.com Fb:Thanh Lâm Lê

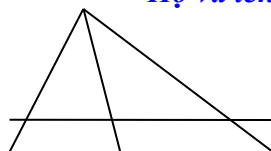
Câu 18. Cho tam giác ABC có $AB=3$; $AC=4$. Gọi AD là đường phân giác trong của góc A . Biết $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. Khi đó tổng $m+n$ có giá trị là:

- A.** 1 **B.** -1 **C.** $\frac{1}{7}$ **D.** $-\frac{1}{7}$

Lời giải

Họ và tên tác giả :Lê Thanh Lâm

Chọn A



Theo tính chất đường phân giác trong của góc A trong tam giác ABC ta có:

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow 3\overline{DC} = -4\overline{DB} \Rightarrow 3(\overline{AC} - \overline{AD}) = -4(\overline{AB} - \overline{AD})$$

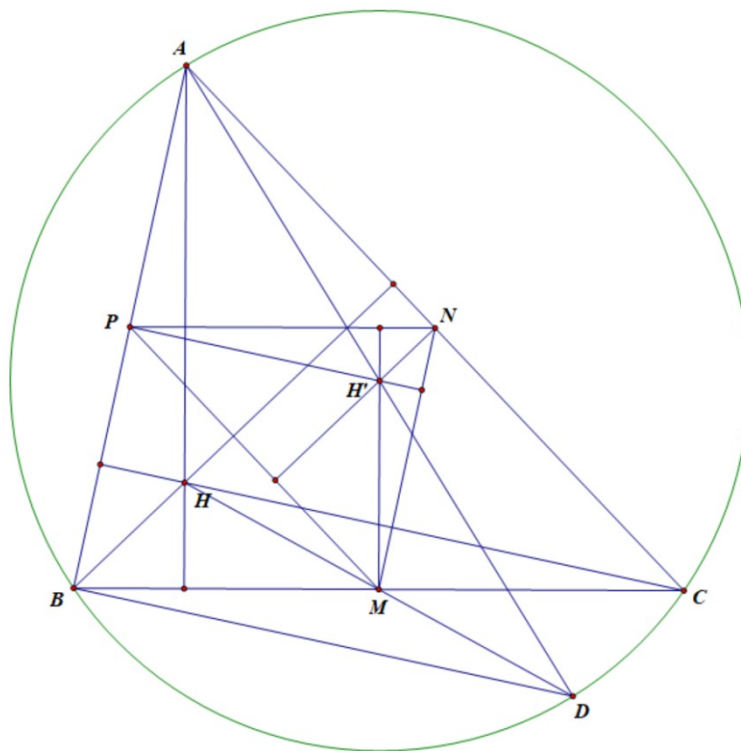
$\Leftrightarrow 7\overline{AD} = 4\overline{AB} + 3\overline{AC} \Leftrightarrow \overline{AD} = \frac{4}{7}\overline{AB} + \frac{3}{7}\overline{AC}$. Ta có $m = \frac{4}{7}; n = \frac{3}{7}$. Vậy tổng $m + n = 1$. Chọn A

Câu 19. Cho tam giác ABC bất kỳ, gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CA . H, H' lần lượt là trực tâm các tam giác ABC, MNP . Khẳng định nào đúng trong các khẳng định sau?

- A.** $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HH'}$ **B.** $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HH'}$
C. $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = \overline{0}$ **D.** $\overline{HM} + \overline{HN} + \overline{HP} = 3\overline{HH'}$

Lời giải

Chọn B



H' là trực tâm tam giác MNP nên H' là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .
Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên $BHCD$ là hình bình hành
suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HH'}$.

Mail : kimlinhlqd@gmail.com

Câu 20. Cho tam giác đều ABC tâm O . M là một điểm bất kì bên trong tam giác. Gọi D, E, F lần lượt là hình chiếu của M lên BC, CA, AB . Với giá trị nào của k ta có hệ thức:

$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = k\overrightarrow{MO}$$

A. $k = \frac{1}{2}$.

B. $k = 1$.

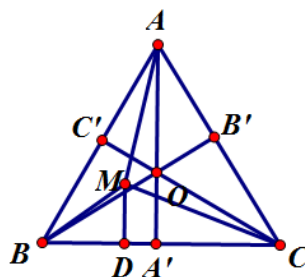
C. $k = \frac{3}{2}$.

D. $k = 2$

Lời giải

Huỳnh Kim Linh GV Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa

Chọn C



Gọi hình chiếu của M lên cạnh BC là D . Ta có

$$\frac{S_a}{S} = \frac{MD}{AA'} \Rightarrow \overrightarrow{MD} = \frac{S_a}{S} \cdot \overrightarrow{AA'} = \frac{3S_a}{2S} \overrightarrow{AO}$$

$$S_a = S_{MBC}$$

Tương tự cho các đánh giá khác.

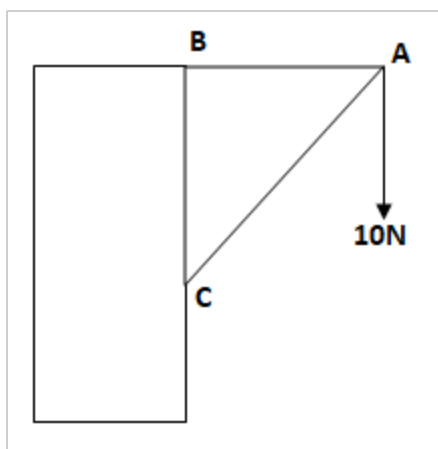
Do đó :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} &= \frac{3}{2S} (S_a \overrightarrow{AO} + S_b \overrightarrow{BO} + S_c \overrightarrow{CO}) = \\ &= \frac{3}{2S} (S_a (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA}) + S_b (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MB}) + S_c (\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MC})) \\ &= \frac{3}{2S} (S_a + S_b + S_c) \overrightarrow{MO} - \frac{3}{2S} (S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}\end{aligned}$$

Cách Khác: Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh BC, CA, AB

Email: thanhdungtoan6@gmail.com

Câu 21. Một giá đỡ hình tam giác được gắn vào tường (như hình vẽ). Tam giác ABC vuông cân tại B. Người ta treo vào điểm A một vật nặng 10N. Tính độ lớn của các lực tác động vào tường tại B và C? (Bỏ qua khối lượng của giá đỡ)

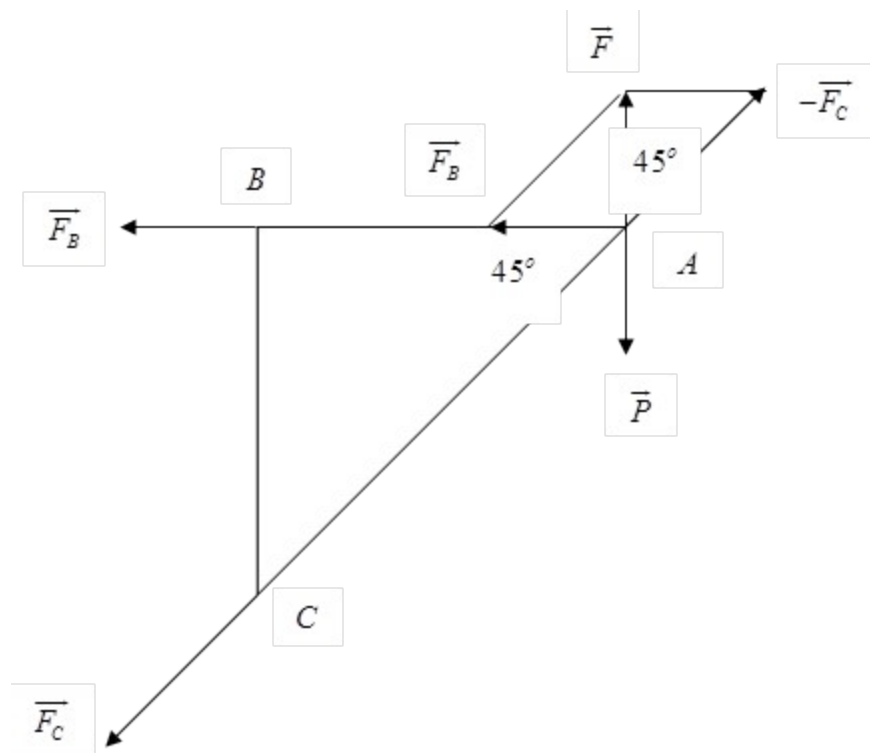


- A. $F_B = 10\sqrt{2}N, F_C = 10N$
- B. $F_B = 10N, F_C = 10\sqrt{2}$
- C. $F_B = F_C = 10N$
- D. $F_B = 10N, F_C = -10\sqrt{2}$

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Thanh Dũng Tên FB: Nguyễn Thanh Dũng

Đáp án: B



Hệ chất điểm cân bằng nên $\vec{F}_B + (-\vec{F}_C) + \vec{P} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{F} = -\vec{P} \Rightarrow |\vec{F}| = |\vec{P}| = 10\text{ N}$

Tam giác ABC vuông cân tại B suy ra
$$\begin{cases} F_B = |\vec{F}_B| = |\vec{F}| = |\vec{P}| = 10\text{ N} \\ F_C = |-\vec{F}_C| = |\vec{F}|\sqrt{2} = |\vec{P}|\sqrt{2} = 10\sqrt{2}\text{ N} \end{cases}$$

Email: giachuan85@gmail.com

Câu 22. Cho ba điểm A, B, C thuộc đường tròn tâm O , thỏa mãn $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{0}$. Tính góc $\angle AOB$?

- A.** $\angle AOB = 120^\circ$. **B.** $\angle AOB = 90^\circ$. **C.** $\angle AOB = 150^\circ$. **D.** $\angle AOB = 30^\circ$.

Lời giải

Họ và tên: Trần Gia Chuân

Tên facebook: Trần Gia Chuân

Chọn A

Do $\vec{OA} + \vec{OC} + \vec{OB} = \vec{0}$ nên O là trọng tâm tam giác ABC .

Mà O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác nên tam giác ABC đều. Vậy góc $\angle AOB = 120^\circ$

Email: giachuan85@gmail.com

Câu 23. Cho tam giác ABC . Điểm M trên cạnh BC thỏa mãn $\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{AC}$, khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

- A.** $\vec{MB} = 2\vec{MC}$. **B.** $MB = 2MC$. **C.** $MC = 2MB$. **D.** $\vec{MC} = -3\vec{MB}$.

Lời giải

Họ và tên: Trần Gia Chuân

Tên facebook: Trần Gia Chuân

Chọn B

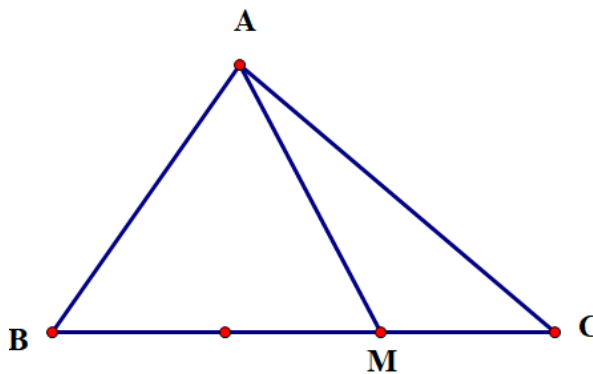
Cách 1: Giả sử $\overrightarrow{BM} = k \cdot \overrightarrow{BC}$ khi đó

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \\ &= \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + k \cdot (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= (1-k) \cdot \overrightarrow{AB} + k \cdot \overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

Mà $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$ suy ra

$$3 \cdot \overrightarrow{BM} = 2 \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow MB = 2MC$$



Cách 2:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{AM} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{MC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{2}{3} \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + 2 \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow MB = 2MC$$

Email: cvtung.lg2@bacgiang.edu.vn

Câu 24. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , M là một điểm tùy ý nằm bên trong tam giác đã cho; gọi $A'; B'; C'$ theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của M lên các cạnh $BC; CA$ và

AB . Khi đó ta có đẳng thức vector $k(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'}) = l \cdot \overrightarrow{MO}$, $k, l \neq 0$, $\frac{k}{l}$ là phân số tối giản. Tính $2k^2 - l^2$.

A. $2k^2 - l^2 = 1$.

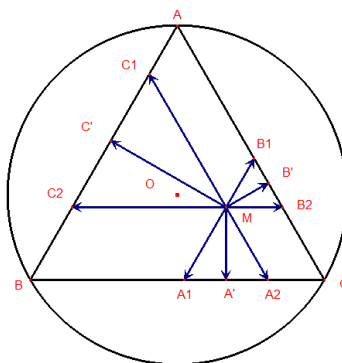
B. $2k^2 - l^2 = -1$.

C. $2k^2 - l^2 = 14$.

D. $2k^2 - l^2 = -5$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Cao Văn Tùng Tên FB: Cao Tung

Chọn B

Từ M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh $BC; CA; AB$ và các đường thẳng này cắt các cạnh của tam giác ABC tại các điểm $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ như hình trên.

Xét tam giác MA_1A_2 do tam giác ABC đều và tính chất của góc đồng vị nên góc $\angle MA_1A_2 = \angle MA_2A_1 = 60^\circ$ suy ra tam giác MA_1A_2 đều và A' là trung điểm của A_1A_2 từ đó ta có:

$$\overrightarrow{MA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MA_2})$$

$$\overrightarrow{MB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MB_2}); \overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MC_1} + \overrightarrow{MC_2})$$

Chứng minh tương tự ta có

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{MC_2} + \overrightarrow{MA_2} + \overrightarrow{MB_2} + \overrightarrow{MB_1} + \overrightarrow{MC_1})$$

Suy ra , mặt khác các tứ giác $AB_1MC_1; BA_1MC_2; CA_2MB_2$

là hình bình hành nên

$$\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'}) = 3\overrightarrow{MO}$$

$$k = 2; l = 3 \Rightarrow 2k^2 - l^2 = -1$$

Vậy

Email: trang145@gmail.com

Câu 25. Cho hình vuông ABCD, E, F thỏa mãn $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CF} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}; AE \cap BF = I$

Ta có $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AD}$. Khi đó tỉ số k, l thỏa mãn cặp nào sau:

A. $k = \frac{3}{5}; l = \frac{2}{5}$

B. $k = \frac{6}{5}; l = \frac{2}{5}$

C. $k = \frac{5}{6}; l = \frac{3}{6}$

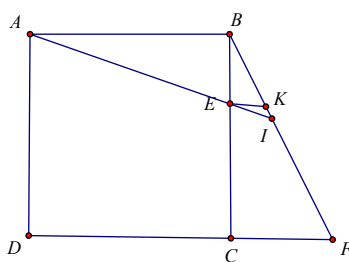
D. $k = -\frac{6}{5}; l = \frac{1}{3}$

Lời giải

Họ tên: Nguyễn Thị Trang

Fb: Trang Nguyen

Chọn B



$$\text{Kẻ } EK \parallel AB \Rightarrow \frac{EK}{CF} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{EI}{AI} = \frac{EK}{AB} = \frac{1}{6}$$

$$\overrightarrow{AI} = \frac{6}{5}\overrightarrow{AE} = \frac{6}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}) = \frac{6}{5}(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) = \frac{6}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$$

Ta có:

Câu 26. Cho tam giác ABC , trên cạnh AC lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm N sao cho: $AM = 3MC$, $NC = 2NB$, gọi O là giao điểm của AN và BM . Tính diện tích ΔABC biết diện tích ΔOBN bằng 1.

A. 10.

B. 20.

C. 25.

D. 30.

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Chọn D

Vì A, O, N thẳng hàng nên:

$$\overrightarrow{BO} = x\overrightarrow{BA} + (1-x)\overrightarrow{BN}$$

Tương tự: $\overrightarrow{AO} = y\overrightarrow{AM} + (1-y)\overrightarrow{AN}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} = y\overrightarrow{AM} + (x-y+1)\overrightarrow{AB} + (x-1)\overrightarrow{BN}$$

$$\text{hay } (x-y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AM} + (x-1)\overrightarrow{BN} = \vec{0} \quad (1)$$

Đặt $\overrightarrow{CB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CA} = \vec{b}$.

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{AB} = \vec{a} - \vec{b}; \overrightarrow{AM} = -\frac{3}{4}\vec{b}; \overrightarrow{BN} = -\frac{1}{3}\vec{a}$$

$$\text{Thay vào (1) ta có: } (x-y)(\vec{a} - \vec{b}) - \frac{3}{4}y\vec{b} + (x-y)\left(-\frac{1}{3}\vec{a}\right) = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow (x-y)\vec{a} - (x-y)\vec{b} = \frac{x-1}{3}\vec{a} - \frac{3y}{4}\vec{b}$$

$$\text{Từ đó ta có: } \begin{cases} x-y = \frac{x-1}{3} \\ y-x = \frac{3}{4}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{10} \\ y = \frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{Với } x = \frac{1}{10} \Rightarrow \overrightarrow{BO} = \frac{1}{10}\overrightarrow{BA} + \left(1 - \frac{1}{10}\right)\overrightarrow{BN}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BO} - \overrightarrow{BN} = \frac{1}{10}(\overrightarrow{BA} - \overrightarrow{BN}) \quad \text{hay} \quad \overrightarrow{NO} = \frac{1}{10}\overrightarrow{NA} \Rightarrow \frac{NA}{NO} = 10$$

$$\text{Vì } S_{ONB} = 1 \Rightarrow S_{NAB} = 10 \Rightarrow S_{ABC} = 30$$

Email: Quanvan09@gmail.com

Câu 27. Cho tam giác ABC có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chọn khẳng định đúng?

A. $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 4\overline{HO}$

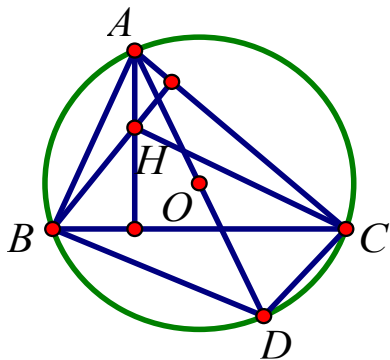
B. $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 2\overline{HO}$

C. $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = \frac{2}{3}\overline{HO}$

D. $\overline{HA} + \overline{HB} + \overline{HC} = 3\overline{HO}$

Lời giải

Họ và tên : Nguyễn Văn Quân Tên FB: Quân Nguyễn



Dễ thấy: $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$ nếu tam giác ABC vuông.

Nếu tam giác ABC không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O . Khi đó:

$BH \parallel DC$ (vì cùng vuông góc với AC).

$BD \parallel CH$ (vì cùng vuông góc với AB).

Suy ra $BDCH$ là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$ (1).

Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$.

Tên facebook: NT AG

Câu 28. Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC , O là một điểm trên đoạn AD sao cho $AO = 4OD$. Gọi $\{E\} = CO \cap AB$, $\{F\} = BO \cap AC$, $\{M\} = AD \cap EF$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{7} \overrightarrow{AD}$

B. $\overrightarrow{MO} = \frac{2}{15} \overrightarrow{AD}$

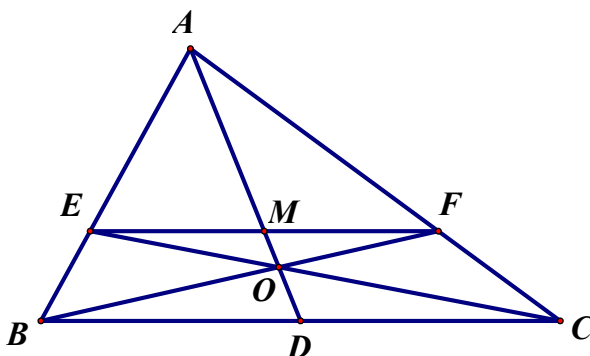
C. $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{8} \overrightarrow{AD}$

D. $\overrightarrow{EM} = \frac{2}{7} \overrightarrow{BC}$

Lời giải

Họ và tên tác giả: Nguyễn Đặng

Chọn B



Đặt: $\overrightarrow{AB} = x \overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} = y \overrightarrow{AF}$, $(x, y \in \mathbb{R})$.

Theo bài ra ta có $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{5} \overrightarrow{AD} = \frac{2}{5} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{5} x \overrightarrow{AE} + \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5} y \overrightarrow{AF}$

Do O, B, F thẳng hàng nên $\frac{2}{5} + \frac{2}{5} y = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Do C, O, E thẳng hàng nên $\frac{2}{5} x + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

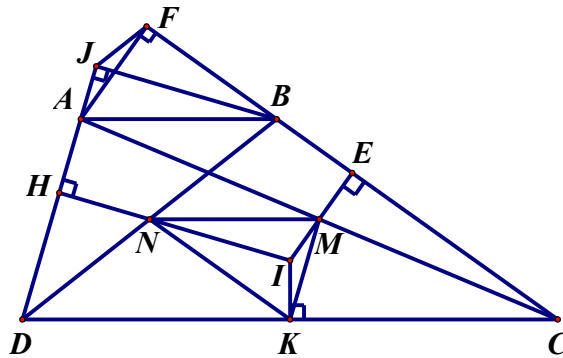
Từ đó: $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{3}{2} = \frac{AD}{AM}$, lại có $AO = \frac{4}{5} AD \Rightarrow \overrightarrow{MO} = \frac{2}{15} \overrightarrow{AD}$

Câu 29. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD . Kẻ $NH \perp AD$ ($H \in AD$) và $ME \perp BC$ ($E \in BC$). Gọi $\{I\} = ME \cap NH$, kẻ $IK \perp DC$ ($K \in DC$). Khi đó trong tam giác MNK hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{IK} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{IN} \cdot \tan N + \overrightarrow{IM} \cdot \tan M + \overrightarrow{IK} \cdot \tan K = \vec{0}$
C. $\overrightarrow{IN} \cdot \cot N + \overrightarrow{IM} \cdot \cot M + \overrightarrow{IK} \cdot \cot K = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IK} = \vec{0}$

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh $ID = IC$

$$\Rightarrow \angle ABF + \angle AJF = 180^\circ$$

Kẻ $AF \perp BC, BJ \perp AD$. Tứ giác $ABFJ$ nội tiếp $\Rightarrow \angle DCB + \angle AJF = 180^\circ$

Khi đó $\Rightarrow DCFJ$ là tứ giác nội tiếp.

NH, ME là các đường trung bình của các tam giác DBJ, CAF

IH, IE là các đường trung trực của DJ, CF nên $IJ = IF = ID = IC$. Vậy

$$ID = IC \Rightarrow KD = KC \Rightarrow \begin{cases} NH \parallel BC \\ MK \parallel AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NK \perp ME \\ MK \perp HN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NK \perp MI \\ MK \perp NI \end{cases}$$

Từ đó suy ra I là trực tâm tam giác MNK . Nên đáp án đúng là B

Email: nguyenvantoannbk@gmail.com

Câu 30. Cho $\triangle ABC$, điểm M thuộc cạnh BC sao cho $2018.S_{\triangle BM} = 2019.S_{\triangle CM}$. Đẳng thức nào sau đây sai?

- A. $2018.S_{\triangle ABC} = 4037.S_{\triangle ACM}$ B. $2018.\overrightarrow{BM} + 2019.\overrightarrow{CM} = \vec{0}$

C. $\overline{BC} = \frac{4037}{2018} \cdot \overline{BM}$

D. $S_{\Delta ABM} = \frac{2019}{4037} \cdot S_{\Delta ABC}$

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Văn Toàn Tên FB: Dấu Vết Hát

Chọn C

Kẻ đường cao AH của ΔABC .

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABM} + S_{\Delta ACM} = \frac{2019}{2018} S_{\Delta ACM} + S_{\Delta ACM} = \frac{4037}{2018} S_{\Delta ACM}$$

Ta có , suy ra **A** đúng.

Tương tự **D** cũng đúng.

$$\frac{S_{\Delta ABM}}{S_{\Delta ACM}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot BM}{\frac{1}{2} \cdot AH \cdot CM} = \frac{BM}{CM} = \frac{2019}{2018} \Rightarrow \overline{BM} = -\frac{2019}{2018} \overline{CM}$$

Từ giả thiết ta có , suy ra **B** đúng.

$$\overline{BC} = \frac{4037}{2019} \cdot \overline{BM}$$

(**C** sai vì).

(Tác giả: Nguyễn Văn Phùng ,Gmail: nvpmaster0808@gmail.com)

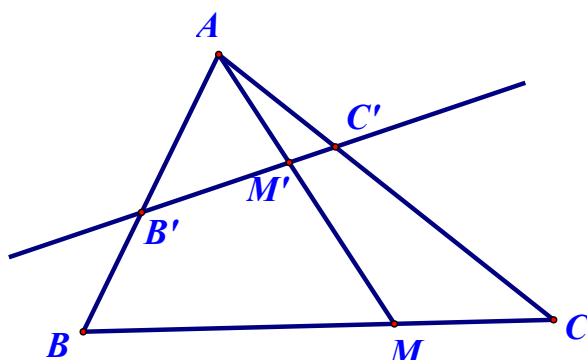
Câu 31. Cho tam giác ABC . M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{AMC}$. Một đường thẳng cắt các cạnh AB, AM, AC lần lượt tại B', M', C' phân biệt. Biết rằng $\frac{AB}{AB'} + 2 \frac{AC}{AC'} = k \cdot \frac{AM}{AM'}$. Tìm số k .

- A.** $k = 1$. **B.** $k = 2$. **C.** $k = 3$. **D.** $\frac{2}{3}$.

Lời giải

(Tác giả: Nguyễn Văn Phùng ,Gmail: nvpmaster0808@gmail.com)

Chọn C



Ta có $S_{ABC} = 3S_{AMC} \Rightarrow BC = 3MC \Rightarrow \overline{BM} = \frac{2}{3} \overline{BC}$

Đặt $\overline{AB'} = x \overline{AB}$; $\overline{AC'} = y \overline{AC}$; $\overline{AM'} = z \overline{AM}$

Ta có $\overline{B'M'} = \overline{AM'} - \overline{AB'} = z \overline{AM} - x \overline{AB}$

$$= z(\overline{AB} + \overline{BM}) - x\overline{AB} = (z-x)\overline{AB} + \frac{2z}{3}\overline{BC}$$

$$= (z-x)\overline{AB} + \frac{2z}{3}(\overline{AC} - \overline{AB}) = \left(\frac{z}{3} - x\right)\overline{AB} + \frac{2z}{3}\overline{AC}$$

Lại có: $\overline{B'C'} = \overline{AC'} - \overline{AB'} = y\overline{AC} - x\overline{AB}$

Mặt khác $\overline{B'M'}$, $\overline{B'C'}$ cùng phương nên

$$\frac{\frac{z}{3} - x}{-x} = \frac{\frac{2z}{3}}{y} \Leftrightarrow \frac{3}{z} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$$

Hay $\frac{AB}{AB'} + 2\frac{AC}{AC'} = 3\frac{AM}{AM'}$.

Từ đó suy ra $k = 3$.

nguyenchitruong12@gmail.com

Câu 32. Cho n điểm phân biệt trên mặt phẳng. Bạn An kí hiệu chúng là $A_1, A_2, \dots, A_n$. Bạn Bình kí hiệu chúng là $B_1, B_2, \dots, B_n$ ($A_i \neq B_n$). Vector tổng $\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \dots + \overline{A_nB_n}$ bằng

- A.** $\vec{0}$. **B.** $\overline{A_1A_n}$. **C.** $\overline{B_1B_n}$. **D.** $\overline{A_1B_n}$.

Lời giải

(Sưu tầm, Tên FB: Trung Nguyễn Chí)

Chọn A

Lấy điểm O bất kì. Khi đó

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \dots + \overline{A_nB_n} = (\overline{A_1O} + \overline{A_2O} + \dots + \overline{A_nO}) + (\overline{OB_1} + \overline{OB_2} + \dots + \overline{OB_n})$$

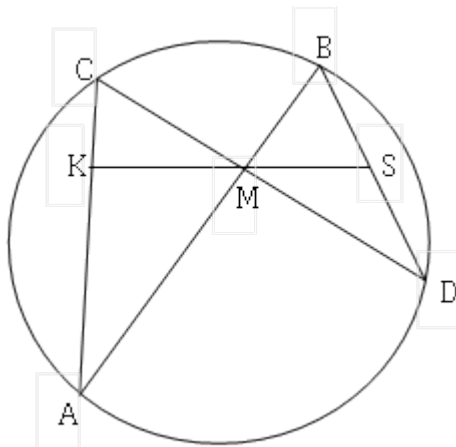
Vì $\{B_1, B_2, \dots, B_n\} = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ nên

$$\overline{OB_1} + \overline{OB_2} + \dots + \overline{OB_n} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \dots + \overline{OA_n}$$

Do đó $\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + \dots + \overline{A_nB_n} = (\overline{A_1O} + \overline{OA_1}) + (\overline{A_2O} + \overline{OA_2}) + \dots + (\overline{A_nO} + \overline{OA_n}) = \vec{0}$.

Câu 33. Trong đường tròn (O) với hai dây cung AB và CD cắt nhau tại M. Qua trung điểm S của BD kẻ

SM cắt AC tại K sao cho $\frac{AK}{CK} = a$. Tính: $\frac{AM^2}{CM^2}$



- A. $2a$ B. a^2 C. $\frac{1}{a^2}$ D. a

Lời giải

$$\frac{AK}{CK} = a > 0$$

Ta có:
$$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{1+a} \overrightarrow{MA} + \frac{a}{1+a} \overrightarrow{MC} \quad (1)$$

Do $\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{MS}$ cùng phương nên:
$$\overrightarrow{MK} = l \overrightarrow{MS} = \frac{l}{2} (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD})$$

Mặt khác

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD = b > 0 \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{MB} = -\frac{b}{MA^2} \overrightarrow{MA} \\ \overrightarrow{MD} = -\frac{b}{MC^2} \overrightarrow{MC} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MK} = -\frac{bl}{2MA^2} \overrightarrow{MA} - \frac{bl}{2MC^2} \overrightarrow{MC} \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{1+a} = -\frac{bl}{2MA^2} \\ \frac{a}{1+a} = -\frac{bl}{2MC^2} \end{cases} \Rightarrow a = \frac{MA^2}{MC^2}$$

Từ (1) và (2) suy ra

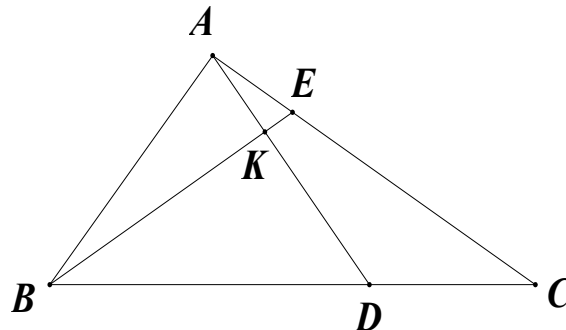
$$\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$$

Câu 34. Cho tam giác ABC. Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn:

Điểm K trên AD sao cho 3 điểm B, K, E thẳng hàng. Xác định tỷ số $\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{AD}}$

A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{1}{3}$ C. $\frac{1}{4}$ D. $\frac{1}{5}$

Lời giải



Ba điểm K, B, E thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại α sao cho:

$$\overrightarrow{AK} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1-\alpha) \overrightarrow{AE} \quad (1)$$

$$\overrightarrow{AK} = x \overrightarrow{AD} = x \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} \right)$$

Đặt

$$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = x\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{x}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2x}{3}\overrightarrow{AC} \quad (2)$$

Áp dụng hệ quả 5 thì từ (1) và (2) ta có:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{x}{3} \\ \frac{1}{4}(1-\alpha) = \frac{2x}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \alpha = \frac{1}{9} \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{AD}} = \frac{1}{3}$$

Vậy

Email: lethithuy@thpthv.vn

Câu 35. Cho tam giác ABC vuông tại C, có $AC = b, BC = a$, D là chân đường cao kẻ từ C. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$

B. $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA} - \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$

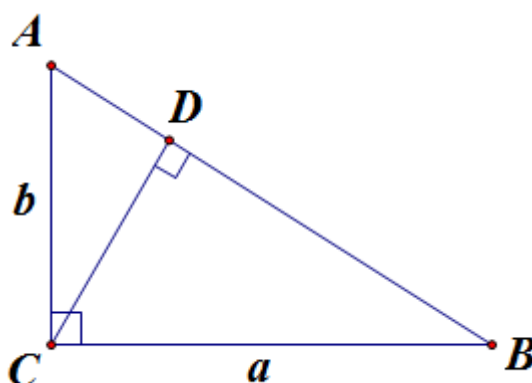
C. $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AC} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{BC}$

D. $\overrightarrow{CD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{AC} - \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Facebook: Lê Văn Kỳ

Chọn A



Ta có $BC^2 = BD \cdot BA \Rightarrow BD = \frac{CB^2}{BA} \Rightarrow \frac{BD}{BA} = \frac{CB^2}{BA^2} = \frac{a^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{BA}$

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{a^2}{a^2+b^2}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB})$$

Lại có:

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CB} + \frac{a^2}{a^2+b^2}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB}) = \frac{a^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CA} + \frac{b^2}{a^2+b^2}\overrightarrow{CB}$$

Vậy

Email: huyenbla81@gmail.com

Câu 36. Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm xác định bởi $5\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Gọi E là

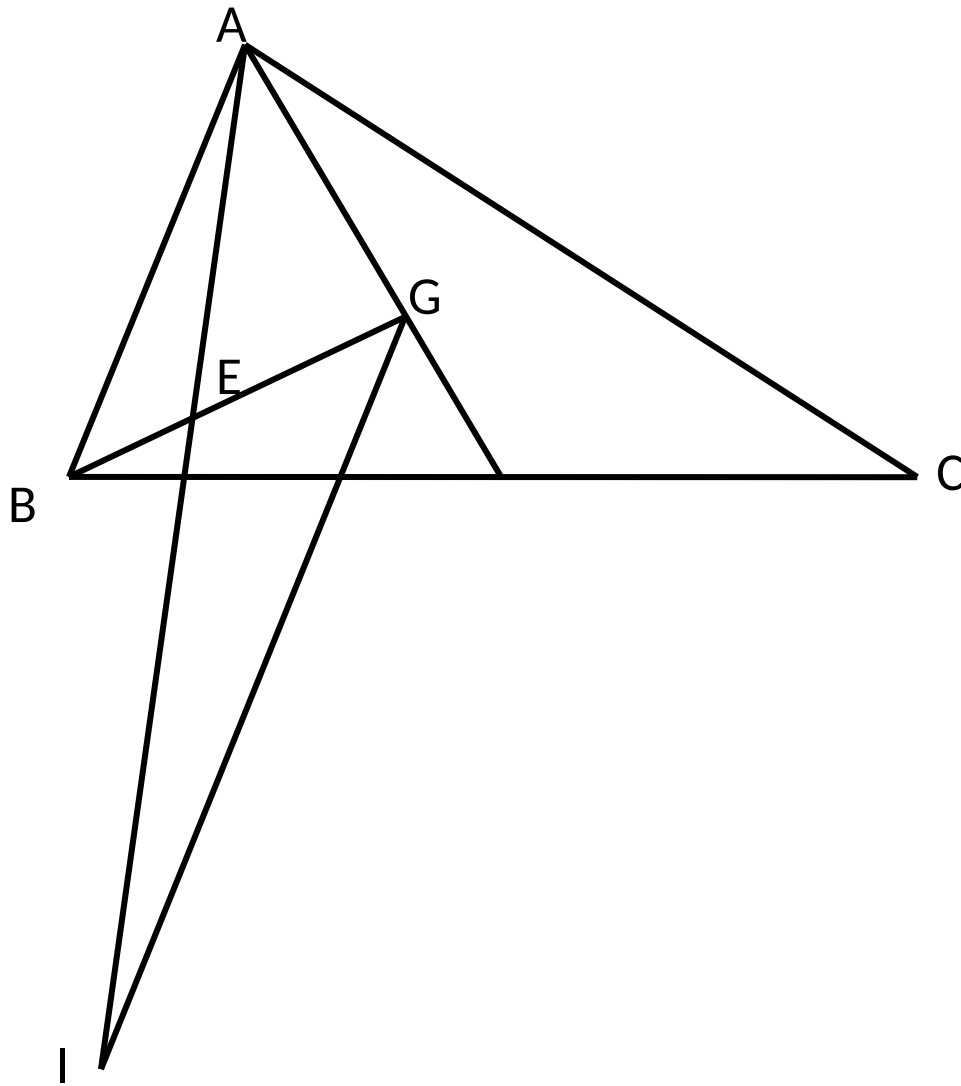
giao điểm của AI và BG. Tính tỷ số $\frac{EA}{EI}$.

- A. 2. B. $\frac{1}{2}$. C. 3. D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

(Họ tên tác giả: Nguyễn Thị Thu Huyền. Tên FB: Thu Huyen Nguyen)

Chọn B



Vì G là trọng tâm của tam giác ABC nên ta có:

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}.$$

Mà: $5\overrightarrow{IA} - 7\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} = \vec{0}.$

Vậy ta có: $\overline{6IA} - \overline{6IB} = 3\overline{IG}$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{IG}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} IG \parallel AB \\ IG = 2AB \end{cases} \quad (\text{hình vẽ})$$

$$\Rightarrow \frac{EA}{EI} = \frac{AB}{IG} = \frac{1}{2}.$$

Email: nghiepbtt3@gmail.com

Câu 37. Cho 2 tia Ox, Oy vuông góc. Trên tia Ox lấy các điểm A, B sao cho $OA = OB = 1$. C là điểm thuộc đoạn OA, N là một điểm thuộc đoạn OB và dựng hình vuông OCMN. Trên đoạn CM lấy điểm Q và dựng hình vuông ACQP. Gọi S là giao điểm của AM và PN. Giả sử $\vec{OC} = k\vec{OA}$,

$$\overrightarrow{AS} = x \overrightarrow{AM}, \quad \overrightarrow{NS} = y \overrightarrow{NP}, \quad k \in \left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

Khi $x + y = \frac{13}{10}$ thì $k = \frac{a}{b}$, với $a, b \in N$ và a, b nguyên tố cùng nhau thì $a.b$ bằng

A. 7 B. 4 C. 5 D. 12

Lời giải

FB: Ngô Quang Nghiệp

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \vec{OS} &= \vec{OA} + \vec{AS} = \vec{OA} + x \vec{AM} = \vec{OA} + x (\vec{OM} - \vec{OA}) = (1-x) \vec{OA} + x \vec{OM} \\ &= (1-x) \vec{OA} + x (\vec{OC} + \vec{ON}) = (1-x) \vec{OA} + xk \vec{OA} + xk \vec{OB} \\ &= (1-x+xk) \vec{OA} + xk \vec{OB} \quad , (1). \end{aligned}$$

Mặt khác: $\vec{OS} = \vec{ON} + \vec{NS} = k\vec{OB} + y\vec{NP} = k\vec{OB} + y(\vec{OP} - \vec{ON}) = k\vec{OB} + y\vec{OA} + y\vec{AP} - yk\vec{OB}$
 $= k(1-y)\vec{OB} + y\vec{OA} + y(1-k)\vec{OB}$, (vì $AP = CA = 1 - k$ nên $\vec{AP} = (1-k)\vec{OB}$)
 $= y\vec{OA} + (k+y-2ky)\vec{OB}$, (2).

Từ (1) và (2), ta có
$$\begin{cases} 1-x+kx=y \\ 1-x+kx=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1-k}{2k^2-2k+1} \end{cases}$$

$$x+y=\frac{13}{10} \Leftrightarrow \frac{1-k}{2k^2-2k+1} + \frac{k^2}{2k^2-2k+1} = \frac{13}{10} \Leftrightarrow \begin{matrix} [k=\frac{3}{4} \\ [k=\frac{1}{4} \end{matrix}$$

Ta có:

Đối chiếu điều kiện, ta chọn $k = \frac{3}{4}$. ĐÁP ÁN **D**.

Email: Duyleag@gmail.com

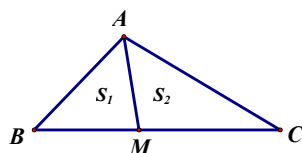
Câu 38. Cho tam giác ABC . Giả sử điểm M nằm trên cạnh BC thỏa các tam giác MAB, MAC lần lượt có diện tích là S_1, S_2 . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $(S_1 + S_2) \overrightarrow{AM} = S_2 \overrightarrow{AB} + S_1 \overrightarrow{AC}$.
 B. $(S_1 + S_2) \overrightarrow{AM} = S_1 \overrightarrow{AB} + S_2 \overrightarrow{AC}$.
 C. $(S_2 - S_1) \overrightarrow{AM} = S_2 \overrightarrow{AB} - S_1 \overrightarrow{AC}$.
 D. $(S_2 - S_1) \overrightarrow{AM} = S_1 \overrightarrow{AB} - S_2 \overrightarrow{AC}$.

Lời giải

Họ Tên: Lê Duy Tên FB: Duy Lê

Chọn A



Gọi $h = d(A, BC)$.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{1}{2} d(A, BC) \cdot BM}{\frac{1}{2} d(A, BC) \cdot CM} = \frac{BM}{CM}$$

Ta có

$$\Rightarrow \overrightarrow{BM} = \frac{S_1}{S_2} \overrightarrow{MC} \Leftrightarrow S_2 (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}) = S_1 (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC})$$

$$\Leftrightarrow (S_2 + S_1) \overrightarrow{AM} = S_2 \overrightarrow{AB} + S_1 \overrightarrow{AC}$$

Email: Duanquy@gmail.com

Câu 39. Cho tam giác ABC có M là trung điểm của BC, $\overrightarrow{AI} = \frac{-1}{2} \overrightarrow{MI}$. Điểm K thuộc cạnh AC sao

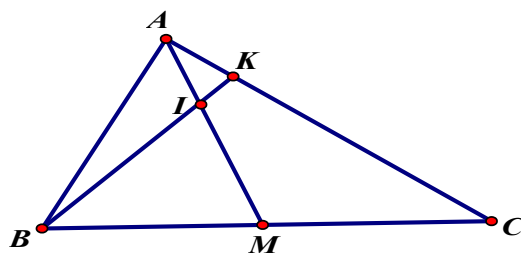
cho B, I, K thẳng hàng. Khi đó $\overrightarrow{KA} = \frac{m}{n} \overrightarrow{CK}$. Tính $S = 25m + 6n + 2019$

- A. $S = 2019$. B. $S = 2068$. C. $S = 2018$. D. $S = 2020$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Đức Duẩn Tên FB: Duan Nguyen Duc

Chọn B



$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

Ta có

Gọi điểm K thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{AK} = x \overrightarrow{AC}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{BK} = -\overrightarrow{AB} + x \overrightarrow{AC} \text{ và } \overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3} \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC} = \frac{-5}{6} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{6} \overrightarrow{AC}$$

$$\frac{-1}{-5} = \frac{x}{6} \Leftrightarrow x = \frac{1}{5} \Rightarrow \overrightarrow{KA} = \frac{1}{4} \overrightarrow{CK} \Rightarrow \begin{cases} m = 1 \\ n = 4 \end{cases}$$

Đề B,I,K thẳng hàng thì

$$\text{Vậy } S = 25.1 + 6.4 + 2019 = 2068$$

Email : boigiabao98@gmail.com

Câu 40. Cho tam giác ABC có trọng tâm G, lấy các điểm I, J sao cho $\overrightarrow{IA} = 2\overrightarrow{IB}$ và $3\overrightarrow{JA} + 2\overrightarrow{JC} = \vec{0}$ và thỏa mãn đẳng thức $\overrightarrow{IJ} = k\overrightarrow{IG}$. Giá trị của biểu thức $P = (25k^2 - 36)(k^2 + k + 1)^{500}$ là:

- A. $P = 1235$ B. $P = 0$ C. $P = \frac{5}{6}$ D. $P = \frac{6}{5}$

Lời giải

Họ và tên : Nguyễn Quang Huy Fb: Nguyễn Quang Huy

Thật vậy nếu ta gọi M là trung điểm của BC ta có:

$$\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AM} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{2} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - 2\overrightarrow{AB} = \frac{1}{5} \overrightarrow{AC} - \frac{5}{3} \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AJ} - \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5} \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AB} = \frac{6}{5} \left(\frac{1}{3} \overrightarrow{AC} - \frac{5}{3} \overrightarrow{AB} \right) = \frac{6}{5} \overrightarrow{IG}$$

Mặt khác ta lại có

$$\text{Do đó } k = \frac{6}{5}$$

Nhận thấy $25k^2 - 36 = 25 \cdot \frac{36}{25} - 36 = 36 - 36 = 0$ do đó $P = 0$.vậy chọn B

(Email): nguyenmy181@gmail.com

Câu 41. Cho tam giác ABC. M là điểm nằm trên cạnh BC sao cho $S_{ABC} = 3S_{AMC}$. Một đường thẳng

cắt các cạnh AB, AM, AC lần lượt tại B', M', C' phân biệt. Biết $\frac{AB}{AB'} + m \frac{AC}{AC'} = n \frac{AM}{AM'}$.
Tính $m + n$.

- A.2. B.5. C.3. D.4.

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Trà My, Tên FB: Nguyễn My)

$$\text{Ta có } S_{ABC} = 3S_{AMC} \Rightarrow BC = 3MC \Rightarrow BM = \frac{2}{3}BC$$

$$\text{Đặt } \overrightarrow{AB'} = x\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC'} = y\overrightarrow{AC}; \overrightarrow{AM'} = z\overrightarrow{AM}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{B'M'} = \overrightarrow{AM'} - \overrightarrow{AB'} = z\overrightarrow{AM} - x\overrightarrow{AB}$$

$$= z \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} \right) - x\overrightarrow{AB} = (z - x)\overrightarrow{AB} + \frac{2z}{3}\overrightarrow{BC}$$

$$= (z - x)\overrightarrow{AB} + \frac{2z}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{z}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{z}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2z}{3}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'} = y\overrightarrow{AC} - x\overrightarrow{AB}$$

Mặt khác $\frac{z}{3} - x = \frac{2z}{3} - x$ cùng phương nên $\frac{z}{3} - x = \frac{2z}{3} - x \Rightarrow \frac{3}{z} = \frac{1}{x} + \frac{2}{y}$

Hay $\frac{AB}{AB'} + 2\frac{AC}{AC'} = 3\frac{AM}{AM'}$

Tên facebook: NTAG

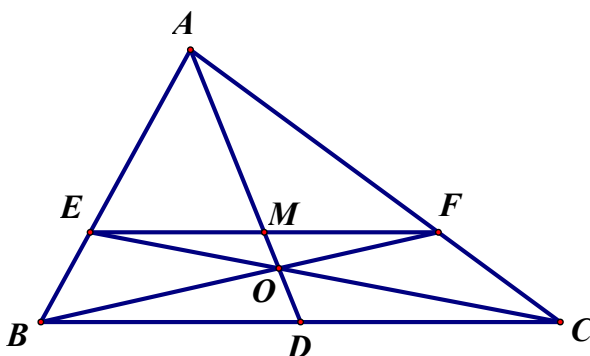
Câu 42. Cho tam giác ABC có D là trung điểm của BC , O là một điểm trên đoạn AD sao cho $AO = 4OD$. Gọi $\{E\} = CO \cap AB$, $\{F\} = BO \cap AC$, $\{M\} = AD \cap EF$. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{7}\overrightarrow{AD}$ B. $\overrightarrow{MO} = \frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$ C. $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ D. $\overrightarrow{EM} = \frac{2}{7}\overrightarrow{BC}$

Lời giải

Họ và tên tác giả: Nguyễn Đặng

Chọn B



Đặt: $\overrightarrow{AB} = x\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AC} = y\overrightarrow{AF}$, ($x, y \in \mathbb{R}$).

Theo bài ra ta có $\overrightarrow{AO} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{2}{5}x\overrightarrow{AE} + \frac{2}{5}y\overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}y\overrightarrow{AF}$

Do O, B, F thẳng hàng nên $\frac{2}{5} + \frac{2}{5}y = 1 \Rightarrow y = \frac{3}{2}$

Do C, O, E thẳng hàng nên $\frac{2}{5}x + \frac{2}{5} = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

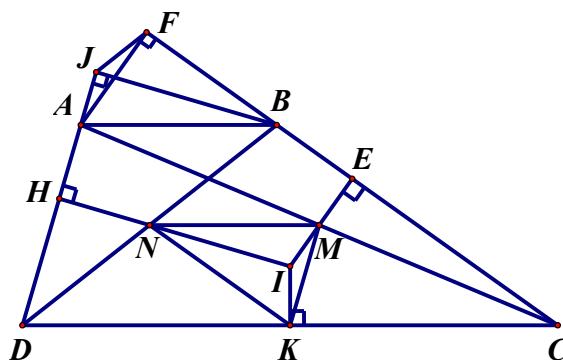
Từ đó: $\frac{AB}{AE} = \frac{AC}{AF} = \frac{3}{2} = \frac{AD}{AM}$, lại có $AO = \frac{4}{5}AD \Rightarrow \overrightarrow{MO} = \frac{2}{15}\overrightarrow{AD}$

Câu 43. Cho hình thang $ABCD$ có $AB \parallel CD$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, BD . Kẻ $NH \perp AD$ ($H \in AD$) và $ME \perp BC$ ($E \in BC$). Gọi $\{I\} = ME \cap NH$, kẻ $IK \perp DC$ ($K \in DC$). Khi đó trong tam giác MNK hệ thức nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{MK} \cdot \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{NK} \cdot \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{IK} = \vec{0}$ B. $\overrightarrow{IN} \cdot \tan N + \overrightarrow{IM} \cdot \tan M + \overrightarrow{IK} \cdot \tan K = \vec{0}$
C. $\overrightarrow{IN} \cdot \cot N + \overrightarrow{IM} \cdot \cot M + \overrightarrow{IK} \cdot \cot K = \vec{0}$ D. $\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IK} = \vec{0}$

Lời giải

Chọn B



Ta chứng minh $ID = IC$

$$\Rightarrow \angle ABF + \angle AJF = 180^\circ$$

Kẻ $AF \perp BC, BJ \perp AD$. Tứ giác $ABFJ$ nội tiếp $\Rightarrow \angle DCB + \angle AJF = 180^\circ$

Khi đó $\Rightarrow DCFJ$ là tứ giác nội tiếp.

NH, ME là các đường trung bình của các tam giác DBJ, CAF

IH, IE là các đường trung trực của DJ, CF nên $IJ = IF = ID = IC$. Vậy

$$ID = IC \Rightarrow KD = KC \Rightarrow \begin{cases} NH \parallel BC \\ MK \parallel AD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NK \perp ME \\ MK \perp HN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} NK \perp MI \\ MK \perp NI \end{cases}$$

Từ đó suy ra I là trực tâm tam giác MNK . Nên đáp án đúng là B

Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Tiết Hạnh Tên FB: Hanchtiethanh

Email: tiethanh.78@gmail.com

Câu 44. Cho hình bình hành $ABCD$. Gọi I là trung điểm của CD , G là trọng tâm tam giác BCI . Đặt $\vec{a} = \vec{AB}, \vec{b} = \vec{AD}$. Hãy tìm đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau?

A. $\vec{AG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

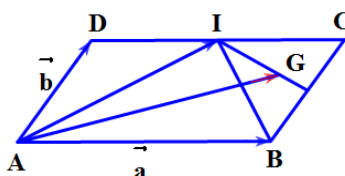
B. $\vec{AG} = \frac{5}{6}\vec{a} + \vec{b}$

C. $\vec{AG} = \vec{a} + \frac{5}{6}\vec{b}$

D. $\vec{AG} = \frac{4}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

Lời giải

Chọn A



* I là trung điểm của CD nên: $\vec{AI} = \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{2}\vec{AD} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AD}$

* G là trọng tâm tam giác BCI nên: $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AI}$, thay $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ và $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ ta được $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}\right) = \frac{5}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$.

(Email): locleduc10@gmail.com

Câu 45. Một đường thẳng cắt các cạnh DA , DC và đường chéo DB của hình bình hành $ABCD$ lần lượt tại các điểm E , F và M . Biết $\overrightarrow{DE} = m\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DF} = n\overrightarrow{DC}$ ($m, n > 0$). Khẳng định đúng là:

A. $\overrightarrow{DM} = \frac{m+n}{m \cdot n}\overrightarrow{DB}$

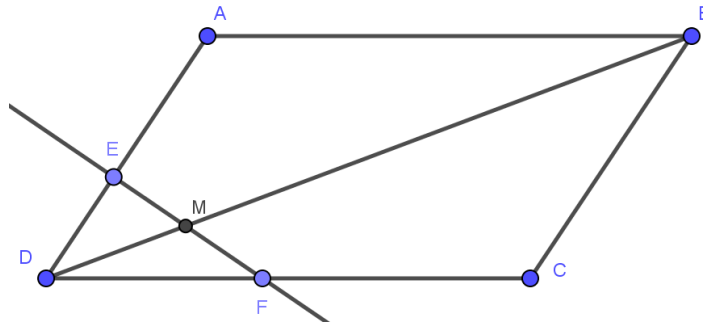
B. $\overrightarrow{DM} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{DB}$

C. $\overrightarrow{DM} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

D. $\overrightarrow{DM} = \frac{m \cdot n}{m+n}\overrightarrow{DB}$

Lời giải

Chọn D



Đặt $\overrightarrow{DM} = x\overrightarrow{DB}$; $\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM}$.

Khi đó:

$$\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DE} = (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC}$$

$$\overrightarrow{FM} = \overrightarrow{DM} - \overrightarrow{DF} = x\overrightarrow{DA} + (x-n)\overrightarrow{DC}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{EM} = y\overrightarrow{FM} \Leftrightarrow (x-m)\overrightarrow{DA} + x\overrightarrow{DC} = xy\overrightarrow{DA} + y(x-n)\overrightarrow{DC}.$$

Do $\overrightarrow{DA}$; $\overrightarrow{DC}$ không cùng phương nên
$$\begin{cases} x-m = xy \\ x = y(x-n) \end{cases}$$

Giải hệ được $y = -\frac{m}{n}$ và $x = \frac{mn}{m+n}$.

Vậy
$$\overrightarrow{DM} = \frac{m \cdot n}{m+n}\overrightarrow{DB}$$

(Họ và tên tác giả : Lê Đức Lộc, Tên FB: Lê Đức Lộc)

Email: phuogthu081980@gmail.com

Câu 46. Hình thang cân ABCD có độ dài đường cao $AH = a$; $AB \parallel CD$, $AB = a\sqrt{3}$; $AD = a\sqrt{2}$; $AB < DC$

AC cắt BH tại I. Biết $\overrightarrow{AI} = \frac{x+y\sqrt{z}}{m} \overrightarrow{AC}$; $x, y, z, m \in \mathbb{N}$

Tính tổng $T = x + y + z + m$

A. 20

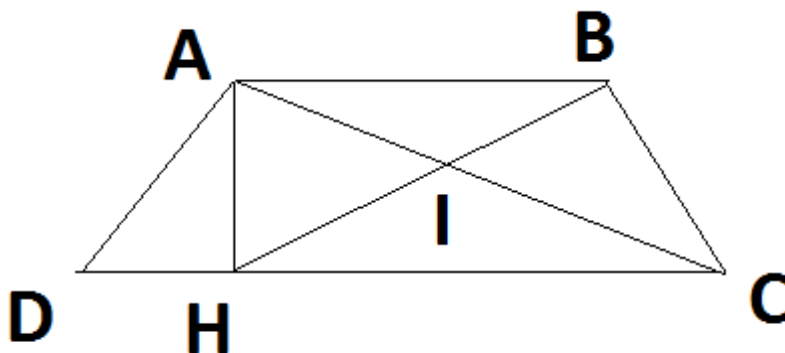
B. 18

C. 17

D. 21

Lời giải

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Phương Thu FB: Buisonca Bui



$$+) \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{AB} + k \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{AB} + k (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AH}) = (1+k) \overrightarrow{AB} - k \overrightarrow{AH}$$

$$+) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{AH} + \frac{HC}{AB} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AH} + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \overrightarrow{AB}.$$

$$+) I \in AC \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = m \overrightarrow{AC}$$

Mà $\overrightarrow{AH}; \overrightarrow{AB}$ không cùng phương

$$\Rightarrow \begin{cases} k+1 = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} m \\ k = -m \end{cases} \Rightarrow m = \frac{6+\sqrt{3}}{11} \Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{6+\sqrt{3}}{11} \overrightarrow{AC}$$

$$\Rightarrow T = 6 + 1 + 3 + 11 = 21$$

tambc3vl@gmail.com

Câu 47. Cho hình thang ABCD với O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Qua O vẽ đường thẳng song song với đáy hình thang, đường thẳng này cắt các cạnh bên AD và BC theo thứ tự tại M và N. Với $AB = a$, $CD = b$, khi đó $\overrightarrow{MN}$ bằng:

A. $\frac{a \overrightarrow{AB} + b \overrightarrow{DC}}{a+b}$

B. $\frac{b \overrightarrow{AB} + a \overrightarrow{DC}}{a+b}$

C. $\frac{a \overrightarrow{AB} - b \overrightarrow{DC}}{a+b}$

D. $\frac{b \overrightarrow{AB} - a \overrightarrow{DC}}{a+b}$

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thanh Tâm Tên FB: Tâm Nguyễn

Chọn B

Do $MN \parallel AB \parallel CD$ nên: $\frac{MA}{MD} = \frac{NB}{NC} = \frac{OA}{OC} = \frac{OB}{OD} = \frac{AB}{DC} = \frac{a}{b}$

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{a}{b} \overrightarrow{MD}$$

Do đó ;

$$\overrightarrow{NB} = -\frac{a}{b} \overrightarrow{NC}$$

, nên:

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \frac{a}{b} \overrightarrow{OD}}{1 + \frac{a}{b}} ; \quad \overrightarrow{ON} = \frac{\overrightarrow{OB} + \frac{a}{b} \overrightarrow{OC}}{1 + \frac{a}{b}}$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \frac{a}{b} (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD})}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{a}{b} \overrightarrow{DC}}{1 + \frac{a}{b}} = \frac{b \overrightarrow{AB} + a \overrightarrow{DC}}{a + b}$$

Có:

Câu 48. Cho tam giác ABC đều tâm O ; điểm M thuộc miền trong tam giác OBC ; D, E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của M trên BC, CA, AB . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2} \overrightarrow{MO}$

B. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MO}$

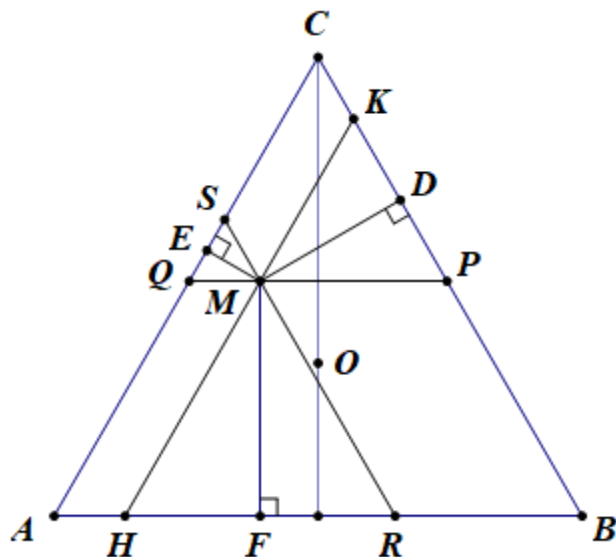
C. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = 3 \overrightarrow{MO}$

D. $\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2} \overrightarrow{MO}$

Lời giải.

Phan Minh Tâm

Chọn D



Từ M kẻ đường thẳng $Mx \perp AC$ cắt AB, BC tại H, K ;

Từ M kẻ đường thẳng $My \perp AB$ cắt BC, CA tại P, Q ;

Từ M kẻ đường thẳng $Mz \perp BC$ cắt AB, AC tại R, S ;

Suy ra $\triangle HMR, \triangle PMK, \triangle QMS$ là các tam giác đều nên MD, ME, MF là các đường cao đồng thời cũng là đường trung tuyến. Khi đó

$$\overrightarrow{MD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MK});$$

$$\overrightarrow{ME} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MQ});$$

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MR});$$

Ta được
$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MR} + \overrightarrow{MS} + \overrightarrow{MK})$$

Hay
$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})$$

Mặt khác ta có tam giác ABC đều nên tâm O cũng là trọng tâm tam giác ABC nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$;

Vậy
$$\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{MO}$$

VẤN ĐỀ 2. BA ĐIỂM THẲNG HÀNG

Email: phunghang10ph5s@gmail.com

Câu 1. Cho hình bình hành $ABCD$ có các điểm M, I, N lần lượt thuộc các cạnh AB, BC, CD sao cho $AM = \frac{1}{3}AB$, $BI = kBC$, $CN = \frac{1}{2}CD$. Gọi G là trọng tâm tam giác BMN . Xác định k để AI đi qua G .

A. $\frac{1}{3}$.

B. $\frac{9}{13}$.

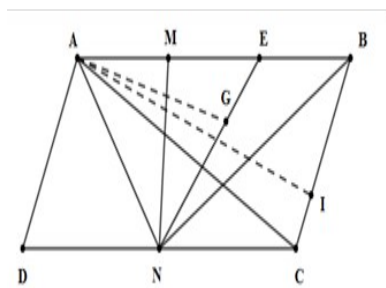
C. $\frac{6}{11}$.

D. $\frac{12}{13}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Phùng Hằng Tên FB: Phùng Hằng

Chọn C



Gọi E là trung điểm của MB . Khi đó:

$$AM = ME = EB$$

$$\overrightarrow{EG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{EN}$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN})$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN}) = \frac{4}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) = \frac{5}{18}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Do $BI = kBC$ và điểm I nằm trên đoạn BC nên $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BC}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI} = k(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = (1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-k}{\frac{5}{18}} = \frac{k}{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \frac{18}{5}(1-k) = 3k \Leftrightarrow k = \frac{6}{11}$$

Do AI đi qua G nên A, I, G thẳng hàng.

Câu 2. Cho tam giác ABC . Gọi M là điểm thuộc cạnh AB , N là điểm thuộc cạnh AC sao cho

$$AM = \frac{1}{3}AB, AN = \frac{3}{4}AC$$

Gọi O là giao điểm của CM và BN . Trên đường thẳng BC lấy E . Đặt $BE = xBC$.

Tìm x để A, O, E thẳng hàng.

Chọn C

A. $\frac{2}{3}$

B. $\frac{8}{9}$

C. $\frac{9}{13}$

D. $\frac{8}{11}$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AE} = (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC}$$

A, E, O thẳng hàng $\hat{U} \overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AO}$

$$\hat{U} (1-x)\overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AC} = \frac{k}{9}\overrightarrow{AB} + \frac{k}{4}\overrightarrow{AC} \hat{U} k = \frac{36}{13}; x = \frac{9}{13}$$

Vậy $x = \frac{9}{13}$ là giá trị cần tìm.

Họ và tên tác giả : Nguyễn Thanh Dũng Tên FB: Nguyễn Thanh Dũng

Email: thanhchungtoan6@gmail.com



Ý tưởng: Cho tam giác ABC , I là trung điểm của BC . Gọi P, Q, R là các điểm xác định bởi:

$$\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AQ} = q\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AR} = r\overrightarrow{AC} \text{ với } pqr \neq 0.$$

Chứng minh rằng: P, Q, R thẳng hàng khi và chỉ khi $\frac{2}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$.

Chứng minh

Ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = q\overrightarrow{AI} - p\overrightarrow{AB} = q\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - p\overrightarrow{AB} = \frac{q-2p}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{q}{2}\overrightarrow{AC} \\ \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = r\overrightarrow{AC} - p\overrightarrow{AB} \end{cases}$$

Do đó, P, Q, R thẳng hàng khi và chỉ khi tồn tại số thực m sao cho $\overrightarrow{PQ} = m\overrightarrow{PR}$

$$\Leftrightarrow \frac{q-2p}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{q}{2}\overrightarrow{AC} = m(r\overrightarrow{AC} - p\overrightarrow{AB}) \Leftrightarrow \frac{q-2p+2mp}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{q-2mr}{2}\overrightarrow{AC} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{q-2p+2mp}{2} = 0 \\ \frac{q-2mr}{2} = 0 \end{cases} \quad (\text{vì } \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 - \frac{q}{2p} \\ m = \frac{q}{2r} \end{cases} \Leftrightarrow 1 - \frac{q}{2p} = \frac{q}{2r} \Leftrightarrow \frac{2}{q} = \frac{1}{p} + \frac{1}{r}$$

Câu 3. Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm BC ; P là điểm đối xứng với A qua B ; R là điểm trên cạnh AC sao cho $AR = \frac{2}{5}AC$. Khi đó đường thẳng AR đi qua điểm nào trong các điểm sau đây?

A. Trọng tâm tam giác ABC .

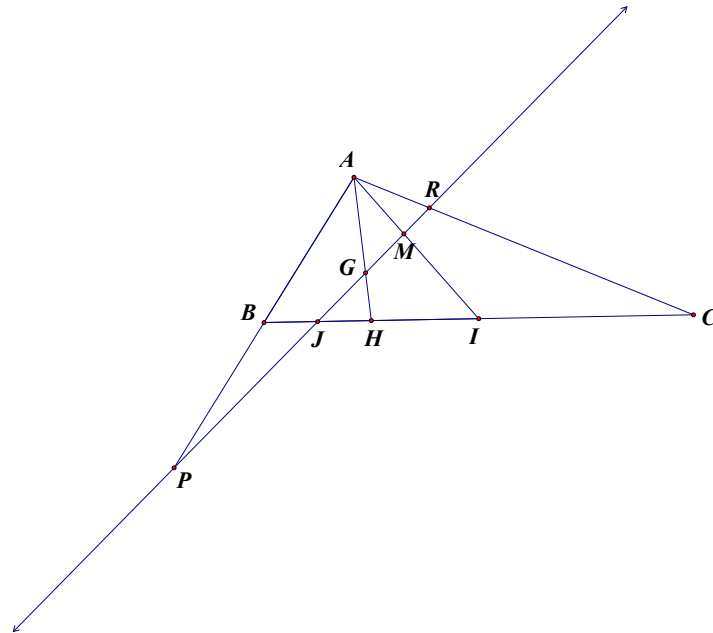
B. Trọng tâm tam giác ABI .

C. Trung điểm AI .

D. Trung điểm BI .

Lời giải

Đáp án: B



$$\begin{cases} \overrightarrow{AP} = 2\overrightarrow{AB} \quad (p = 2) \\ \overrightarrow{AR} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \quad \left(r = \frac{2}{5}\right) \end{cases}$$

Theo đề bài,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3} \overrightarrow{AH} \left(q = \frac{2}{3} \right)$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABI , ta được

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\frac{5}{2}} = 3 = \frac{2}{q}$$

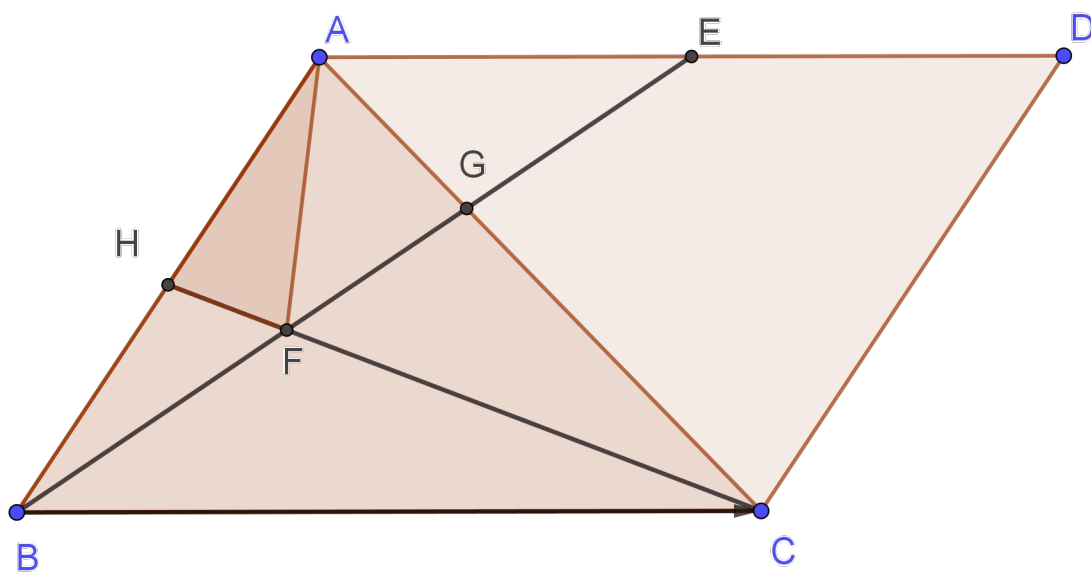
Ta có suy ra P, G, R thẳng hàng.



(có thể phát triển P, J, G, M, R thẳng hàng với J – có lẽ là trung điểm BH , còn M chia AI theo tỷ số tính được)

- Câu 4.** Cho $\triangle ABC$ có H là trung điểm của AB và $G \in AC : GC = 2AG$. Gọi F là giao điểm của CH và BG . Tìm điểm I trên BC sao cho I, F, A thẳng hàng
- A.** $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$. **B.** $\overrightarrow{IB} = -2\overrightarrow{IC}$. **C.** $\overrightarrow{IB} = \overrightarrow{IC}$. **D.** $\overrightarrow{IC} = -3\overrightarrow{IB}$.

Lời giải



Gọi D là đỉnh thứ tư của hình bình hành $ABCD$ và E là trung điểm của AD . Khi đó, ta có:

$$\overrightarrow{FH} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{FC}$$

Vận dụng định lý Menelaus trong $\triangle HBC$ có A, F, I thẳng hàng

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AH}}{\overrightarrow{AB}} \cdot \frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IC}} \cdot \frac{\overrightarrow{FC}}{\overrightarrow{FH}} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IC}} \cdot (-4) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{IB}}{\overrightarrow{IC}} = -\frac{1}{2}$$

Vậy $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$.

Họ và tên tác giả: Hoàng Thị Trà FB: Hoàng Trà

- Câu 5.** Cho tam giác ABC . I là trung điểm của BC . Gọi M, N, P lần lượt là các điểm xác định bởi $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$; $\overrightarrow{AN} = n\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}$, với $mnp \neq 0$. Tìm điều kiện của m, n, p để M, N, P thẳng hàng.
- A.** $mp = mn + np$ **B.** $2mp = mn + np$ **C.** $2np = mn + mp$ **D.** $2mn = mp + np$

Lời giải

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AM} = p\overrightarrow{AC} - m\overrightarrow{AB}$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = n\overrightarrow{AI} - m\overrightarrow{AB} \quad \text{Mà } \overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{n}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) - m\overrightarrow{AB} = \left(\frac{n}{2} - m\right)\overrightarrow{AB} + \frac{n}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$\text{Do } mnp \neq 0 \text{ nên M, N, Q thẳng hàng khi và chỉ khi } \frac{\frac{n}{2} - m}{-m} = \frac{\frac{n}{2}}{p} \Leftrightarrow 2mp = mn + np$$

Chọn đáp án **B**.

Nhận xét: Với bài toán trên thì việc cụ thể hóa bộ ba số m,n,p sao cho thỏa mãn điều kiện trên ta đều ra được bài toán chứng minh ba điểm thẳng hàng. Kết quả trên chúng ta có thể vận dụng vào để giải nhanh bài toán sau:

Câu 6. Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác, I là trung điểm của BC, M và N là các

điểm được xác định bởi
$$\begin{cases} \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\ 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0} \end{cases}$$
. Gọi P là giao điểm của AC và MN. Tính tỉ số diện tích tam giác ANP và tam giác CNP.

A. 3 **B.** $\frac{7}{2}$ **C.** 4 **D.** 2

Lời giải.

$$\text{Ta có } \frac{S_{ANP}}{S_{CNP}} = \frac{PA}{PC} \quad \text{Yêu cầu bài toán dẫn đến tìm tỉ số } \frac{PA}{PC}.$$

Ta dễ dàng chứng minh được M, N, G thẳng hàng.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} &\Rightarrow 2\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} \Leftrightarrow 2(\overrightarrow{GN} - \overrightarrow{GN}) = \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN} = 3\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GB} = -3\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} \\ &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN} = -3\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} \quad (\text{vì } 3\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}) \end{aligned}$$

$$\text{Ta có } \Leftrightarrow 2\overrightarrow{GN} = 7\overrightarrow{GM}$$

Vậy G, M, N thẳng hàng. Mặt khác MN cắt AC tại P, nên M, G, P thẳng hàng.

$$\begin{aligned} \text{Áp dụng kết quả G, M, P thẳng hàng theo câu 1 vào ta có } \overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB} &\Rightarrow m = \frac{4}{7} \\ \overrightarrow{AG} = n\overrightarrow{AI} \Rightarrow n = \frac{2}{3}, \overrightarrow{AP} = p\overrightarrow{AC}. &\text{ Khi đó } 2mp = mn + np \Leftrightarrow 2 \cdot \frac{4}{7} \cdot p = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot p \Leftrightarrow p = \frac{4}{5}, \text{ khi} \\ \frac{PA}{PB} = 4, \frac{S_{ANP}}{S_{CNP}} = 4 &\text{ . Vậy} \end{aligned}$$

Câu 7. Cho tam giác ABC . Gọi D, E lần lượt là các điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$. Điểm K trên AD thỏa mãn $\overrightarrow{AK} = \frac{a}{b} \overrightarrow{AD}$ (với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản) sao cho 3 điểm B, K, E thẳng

hàng. Tính $P = a^2 + b^2$.

A. $P = 10$.

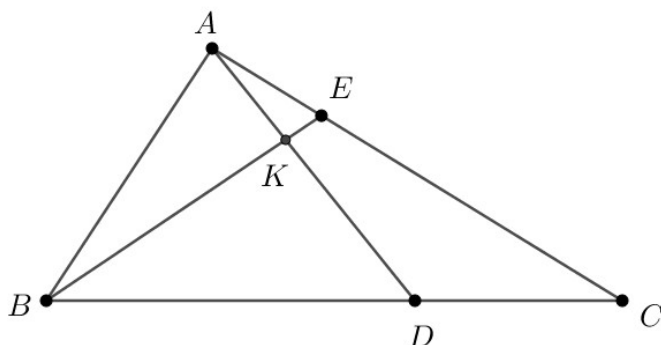
B. $P = 13$.

C. $P = 29$.

D. $P = 5$.

Lời giải

Chọn A



Vì $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4} \overrightarrow{BA}$ (1)

Giả sử $\overrightarrow{AK} = x \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = x \overrightarrow{BD} + (1-x) \overrightarrow{BA}$

Mà $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$ nên $\overrightarrow{AK} = x \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{2x}{3} \overrightarrow{BD} + (1-x) \overrightarrow{BA}$

Vì B, K, E thẳng hàng ($B \neq E$) nên có m sao cho $\overrightarrow{BK} = m \overrightarrow{BE}$

Do đó có: $\frac{m}{4} \overrightarrow{BC} + \frac{3m}{4} \overrightarrow{BA} = \frac{2x}{3} \overrightarrow{BC} + (1-x) \overrightarrow{BA}$

Hay $\left(\frac{m}{4} - \frac{2x}{3} \right) \overrightarrow{BC} + \left(1-x - \frac{3m}{4} \right) \overrightarrow{BA} = \vec{0}$

Do $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}$ không cùng phương nên

$\frac{m}{4} - \frac{2x}{3} = 0; 1-x - \frac{3m}{4} = 0$ Từ đó suy ra $x = \frac{1}{3}; m = \frac{8}{9}$

Vậy $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}$

Email: themhaitotoanyp1@gmail.com

Câu 8. Cho tam giác ABC , I là điểm thỏa mãn: $2\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

K là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{KA} + 2\overrightarrow{KB} + 3\overrightarrow{KC} = \vec{0}$

P là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{PA} + m\overrightarrow{PB} + n\overrightarrow{PC} = \vec{0}$

Có bao nhiêu cặp (m, n) , $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \in [-10; 10]$ sao cho I, K, P thẳng hàng.

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Lời giải

Ta có $\vec{PA} = -m\vec{PB} - n\vec{PC}$

Có: $2\vec{IA} - \vec{IB} + 4\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2(\vec{PA} - \vec{PI}) - (\vec{PB} - \vec{PI}) + 4(\vec{PC} - \vec{PI}) = \vec{0} \Leftrightarrow 5\vec{PI} = 2\vec{PA} - \vec{PB} + 4\vec{PC}$

$$\Leftrightarrow 5\vec{PI} = (-2m-1)\vec{PB} + (-2n+4)\vec{PC}$$

Có:

$$\vec{KA} + 2\vec{KB} + 3\vec{KC} = \vec{0} \Leftrightarrow (\vec{PA} - \vec{PK}) + 2(\vec{PB} - \vec{PK}) + 3(\vec{PC} - \vec{PK}) = \vec{0} \Leftrightarrow 6\vec{PK} = \vec{PA} + 2\vec{PB} + 3\vec{PC}$$

$$\Leftrightarrow 6\vec{PK} = (-m+2)\vec{PB} + (-n+3)\vec{PC}$$

I, K, P thẳng hàng khi và chỉ khi $5\vec{PI}, 6\vec{PK}$ cùng phương

$$\Leftrightarrow (2m+1)(n-3) = (m+2)(2n-4) \Leftrightarrow 2m-5n=11$$

Do (m, n) , $m, n \in \mathbb{Z}$, $m, n \in [-10; 10]$ nên $(m, n) \in \{(-8; -1), (-3; -1), (2; 3), (5; 7)\}$

(Fb: Lưu Thêm)

Email : boyhanam@gmail.com

Bài em sưu tầm ạ !

Câu 9. Cho tam giác ABC , M và N là hai điểm thỏa mãn: $\vec{BM} = \vec{BC} - 2\vec{AB}$, $\vec{CN} = x\vec{AC} - \vec{BC}$. Xác định x để A, M, N thẳng hàng.

A. 3.

B. $-\frac{1}{3}$.

C. 2.

D. $-\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có

$$\vec{BM} = \vec{BC} - 2\vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} = \vec{BC} - \vec{AB} \Leftrightarrow \vec{AM} = -\vec{AC} + 2\vec{BC}$$

$$\vec{CN} = x\vec{AC} - \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{CA} + \vec{AN} = x\vec{AC} - \vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AN} = (x+1)\vec{AC} - \vec{BC}$$

Để A, M, N thẳng hàng thì $\exists k \neq 0$ sao cho $\vec{AM} = k\vec{AN}$

$$(x+1)\vec{AC} - \vec{BC} = k(-\vec{AC} + 2\vec{BC}) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = -k \\ -1 = 2k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{-1}{2} \\ x = \frac{-1}{2} \end{cases}$$

Hay

Huonghung3@gmail.com

Câu 10. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm, I là trung điểm AG , lấy K thuộc cạnh AC sao cho $\vec{AK} = k\vec{AC}$. Nếu B, I, K thẳng hàng thì giá trị của k nằm trong khoảng?

A. $\left[0; \frac{1}{6}\right]$

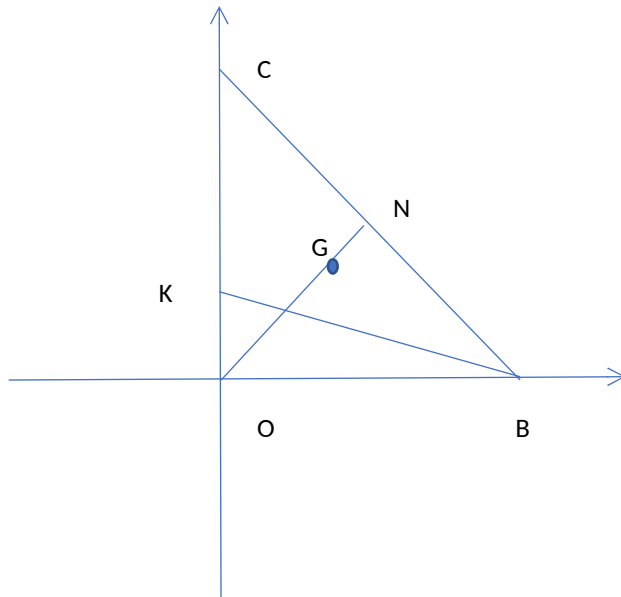
B. $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

C. $\left(\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right)$

D. $\left(\frac{1}{5}; 1\right)$

Lời giải

(Họ tên: Nguyễn Thu Hương. Tên FB: Thu Hương)



Chọn **B**

Không giảm tính tổng quát: giả sử tam giác ABC có: $A(0;0); B(6;0); C(0;6)$ thì $G(2;2); I(1;1)$

Gọi $K(0;m)$ Khi đó: $I(5;-1); K(6;-m)$. Để B, I, K thẳng hàng: $5m = 6 \Rightarrow m = \frac{6}{5}$

suy ra $k = \frac{1}{5}$

Họ và tên: Trần Văn Luật

Email: Tvluatc3tt@gmail.com

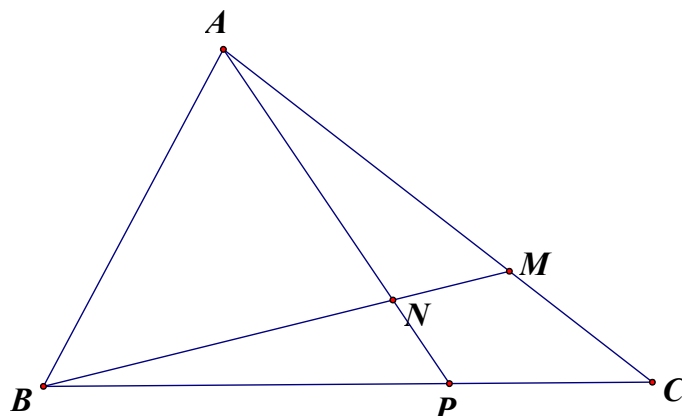
FB: Trần Luật

Câu 11. Cho tam giác ABC , M là điểm thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MC}$, N thuộc BM sao cho $\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NM}$, P là điểm thuộc BC . Biết rằng ba điểm A, N, P thẳng hàng khi $\overrightarrow{PB} = k\overrightarrow{PC}$. Khẳng định nào sau đây là **đúng**?

- A.** $k \in \left(-3; -\frac{5}{2}\right)$. **B.** $k \in \left(-\frac{5}{2}; -1\right)$. **C.** $\left(-1; -\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$.

Lời giải

Chọn **B**



Ta có

$$\overrightarrow{NB} = -3\overrightarrow{NM} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN} = -3(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AM} = 4\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

Do P là điểm thuộc BC nên $\overrightarrow{PB} = k\overrightarrow{PC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AP} = k(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AP})$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC} = (1-k)\overrightarrow{AP} \Leftrightarrow \overrightarrow{AP} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AP} = h\overrightarrow{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-k} = \frac{h}{4} \\ -\frac{k}{1-k} = \frac{h}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = -2 \\ h = \frac{4}{3} \end{cases}$$

Ba điểm A, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi

Vậy $k = -2$.

Họ và tên: Hoàng Thị Kim Liên

Email: lientiencl@gmail.com

Facebook: Kim Liên

Câu 12. Cho tam giác ABC . Gọi M, N, P lần lượt nằm trên đường thẳng BC, CA, AB sao cho $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{NC} = n\overrightarrow{NA}$, $\overrightarrow{PA} = k\overrightarrow{PB}$. Tính tích mnk để M, N, P thẳng hàng?

A. 1.

B. -1.

C. 2.

D. -2.

Lời giải

Chọn A

Ta có :

$$\overrightarrow{MB} = \frac{m}{1+m}\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BP} = \frac{1}{k+1}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{BC} = (1+m)\overrightarrow{MC}; \overrightarrow{CN} = \frac{n}{1+n}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MN} = \frac{-1}{1+m}\overrightarrow{AB} + \left(\frac{1}{1+m} + \frac{n}{1+n}\right)\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{MP} = \left(\frac{-m}{1+m} - \frac{1}{k+1}\right)\overrightarrow{AB} + \frac{m}{1+m}\overrightarrow{AC}$$

Để M, N, P thẳng hàng thì ta có :

$$\frac{\frac{-m}{1-m} - \frac{1}{1-k}}{\frac{-1}{1-m}} = \frac{\frac{m}{1-m}}{\frac{1}{1-m} + \frac{n}{1-n}} \Leftrightarrow mnk = 1$$

Câu 13.

(Email): thuhangnvx@gmail.com

Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$ gọi M là trung điểm của cạnh CD , N là điểm thuộc cạnh AD sao cho

$$AN = \frac{1}{3}AD$$

. Gọi G là trọng tâm của tam giác BMN , đường thẳng AG cắt BC tại K . Khi đó

$$\overrightarrow{BK} = \frac{m}{n} \overrightarrow{BC} \quad \left(\frac{m}{n} \text{ là tối giản} \right) . \text{ Tính } S = m + n$$

A. $S = 16$.

B. $S = 17$.

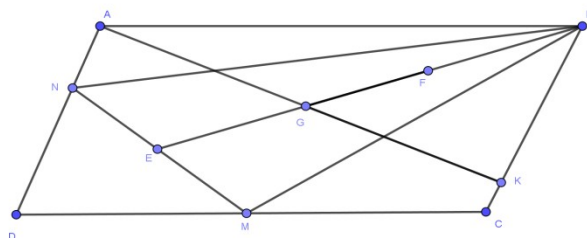
C. $S = 18$.

D. $S = 19$.

Lời giải

(Tên FB: Phùng Hằng)

Chọn B



Ta có

$$2\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM}) + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB})$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$$

$$= \frac{5}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) + \overrightarrow{AB} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{Đặt } \overrightarrow{BK} = x.\overrightarrow{BC} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} .$$

$$\overrightarrow{AK} = k\overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} + x\overrightarrow{AD} = \frac{k}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{4k}{9}\overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 2 \\ x = \frac{8}{9} \end{cases}$$

Do A, G, K thẳng hàng thì

$$\text{Suy ra } \frac{m}{n} = \frac{8}{9}$$

$$\text{Vậy } S = 17$$

Email: builoiyka@gmail.com

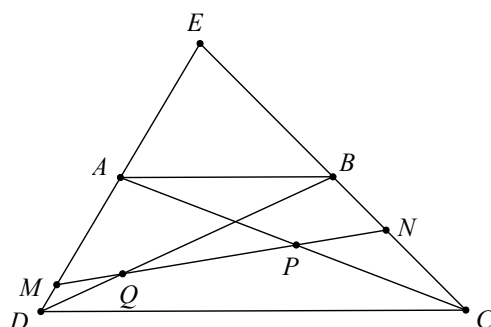
Câu 15. Cho hình thang $ABCD$ có đáy AB , CD , $CD = 2AB$. M , N lần lượt là các điểm thuộc cạnh AD và BC sao cho $AM = 5MD$, $3BN = 2NC$. Gọi P là giao điểm của AC và MN ; Q là giao điểm của BD và MN ; Khi đó $\frac{PM}{PN} + \frac{QN}{QM} = \frac{a}{b}$, với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng

- A.** 386. **B.** 385. **C.** 287. **D.** 288.

Lời giải

Họ tên: Bùi Thị Lợi Facebook: LoiBui

Chọn A



Gọi E là giao điểm của AD và BC . Ta có A , lần lượt là trung điểm của EC , ED .

Giả sử $\overrightarrow{PM} = x\overrightarrow{PN}$; $\overrightarrow{QN} = y\overrightarrow{QM}$.

$$\text{Ta có } \overrightarrow{EP} = \frac{\overrightarrow{EM} - x\overrightarrow{EN}}{1-x} = \frac{\frac{11}{6}\overrightarrow{EA} - \frac{7x}{10}\overrightarrow{EC}}{1-x} = \frac{11}{6(1-x)}\overrightarrow{EA} - \frac{7x}{10(1-x)}\overrightarrow{EC}$$

$$\text{Do } P, A, C \text{ thẳng hàng nên } \frac{11}{6(1-x)} - \frac{7x}{10(1-x)} = 1 \Leftrightarrow 55 - 21x = 30 - 30x \Leftrightarrow x = -\frac{25}{9}.$$

$$\text{Vậy } \frac{PM}{PN} = \frac{25}{9}.$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{EQ} = \frac{\overrightarrow{EN} - y\overrightarrow{EM}}{1-y} = \frac{\frac{7}{5}\overrightarrow{EB} - \frac{11y}{12}\overrightarrow{ED}}{1-y} = \frac{7}{5(1-y)}\overrightarrow{EB} - \frac{11y}{12(1-y)}\overrightarrow{ED}$$

$$\text{Do } Q, B, D \text{ thẳng hàng nên } \frac{7}{5(1-y)} - \frac{11y}{12(1-y)} = 1 \Leftrightarrow 84 - 55y = 60 - 60y \Leftrightarrow y = -\frac{24}{5}.$$

$$\text{Vậy } \frac{QN}{QM} = \frac{24}{5}.$$

$$\text{Suy ra } \frac{PM}{PN} + \frac{QN}{QM} = \frac{341}{45} \Rightarrow a = 341; b = 45 \Rightarrow a + b = 386.$$

Cách 2:

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác AMN với ba điểm thẳng hàng là A, P, C , ta có

$$\frac{PM}{PN} \cdot \frac{CN}{CE} \cdot \frac{AE}{AM} = 1 \Leftrightarrow \frac{PM}{PN} \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{6}{5} = 1 \Leftrightarrow \frac{PM}{PN} = \frac{25}{9}$$

Áp dụng định lý Menelaus cho tam giác EMN với ba điểm thẳng hàng là B, Q, D , ta có

$$\frac{QN}{QM} \cdot \frac{DM}{DE} \cdot \frac{BE}{BN} = 1 \Leftrightarrow \frac{QN}{QM} \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{5}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{QN}{QM} = \frac{24}{5}$$

$$\frac{PM}{PN} + \frac{QN}{QM} = \frac{341}{45} \Rightarrow a = 341; b = 45 \Rightarrow a + b = 386$$

Vậy

Email: datltt09@gmail.com

Câu 16. Cho tam giác ABC , trên cạnh AC lấy điểm M , trên cạnh BC lấy điểm N sao cho $AM = 3MC$, $NC = 2BN$. Gọi I là giao điểm của AN và BM . Tính diện tích tam giác ABC biết diện tích tam giác ABN bằng 4.

A. $S_{ABC} = 110$

B. $S_{ABC} = 115$

C. $S_{ABC} = 125$

D. $S_{ABC} = 120$

Lời giải

Họ và tên tác giả : Vũ Thị Hằng Tên FB: Đạt Lâm Huy

Chọn D

Giả sử $\overrightarrow{AI} = k \overrightarrow{AN}$ ta có

$$\overrightarrow{BI} - \overrightarrow{BA} = k \overrightarrow{BN} - k \overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{BI} = (1-k) \overrightarrow{BA} + \frac{k}{3} \overrightarrow{BC} \quad (1)$$

$$4 \overrightarrow{AM} = 3 \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + 3 \overrightarrow{BC} \quad (2)$$

Tương tự

$$\frac{1-k}{1} = \frac{\frac{k}{3}}{3} \Leftrightarrow k = \frac{9}{10}$$

Vì B, I, M thẳng hàng nên từ (1) và (2) ta có

$$S_{ABN} = 10 S_{BNI} = 40$$

Suy ra

$$S_{ABC} = 3 S_{ABN} = 120$$

(Có thể dùng định lý Menelaus để tính tỷ số)

Email: samnk.thptnhurthanh@gmail.com

Câu 17. Cho tam giác ABC M thuộc cạnh AC sao cho $\overrightarrow{MA} = -2 \cdot \overrightarrow{MC}$, N thuộc BM sao cho $\overrightarrow{NB} = -3 \cdot \overrightarrow{NM}$, P thuộc BC sao cho $\overrightarrow{PB} = k \cdot \overrightarrow{PC}$. Tìm giá trị k để ba điểm A, N, P thẳng hàng.

A. $k = \frac{1}{2}$

B. $k = -2$

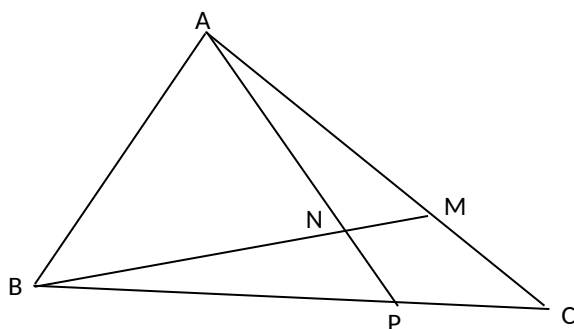
C. $k = -\frac{1}{2}$

D. $k = 2$

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Khắc Sâm Facebook: Nguyễn Khắc Sâm

Chọn B



Ta có:

$$\begin{aligned}\vec{NB} &= -3 \cdot \vec{NM} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AN} = -3 \cdot (\vec{AM} - \vec{AN}) \Leftrightarrow \vec{AB} + 3 \cdot \vec{AM} = 4 \cdot \vec{AN} \\ \Leftrightarrow \vec{AN} &= \frac{1}{4} \vec{AB} + \frac{3}{4} \vec{AC} \quad (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{PB} &= k \cdot \vec{PC} \Leftrightarrow \vec{AB} - \vec{AP} = k(\vec{AC} - \vec{AP}) \Leftrightarrow \vec{AB} - k \cdot \vec{AC} = (1-k) \vec{AP} \quad (k \neq 1) \\ \Leftrightarrow \vec{AP} &= \frac{1}{1-k} \vec{AB} - \frac{k}{1-k} \vec{AC} \quad (2)\end{aligned}$$

Ba điểm A, N, P thẳng hàng khi và chỉ khi:

$$\vec{AP} = h \cdot \vec{AN} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{1-k} = \frac{h}{4} \\ -\frac{k}{1-k} = \frac{3h}{4} \end{cases} \Rightarrow k = -2$$

VẤN ĐỀ 3. QUỸ TÍCH

Nguyễn Văn Dũng **Fb: Nguyễn Văn Dũng**

Email: dungtoanc3hbt@gmail.com

- Câu 1.** Cho tam giác ABC với J là điểm thỏa mãn $2\vec{A} + 5\vec{B} + 3\vec{C} = \vec{0}$, gọi E là điểm thuộc AB và thỏa mãn $\vec{AE} = k\vec{AB}$. Xác định k để C, E, J thẳng hàng.
- A.** $k \in (-2; -1)$ **B.** $k \in (-1; 0)$ **C.** $k \in (0; 1)$ **D.** $k \in (1; 2)$

Lời giải

Ta có

$$\begin{aligned}2\vec{A} + 5\vec{B} + 3\vec{C} = \vec{0} &\Leftrightarrow 2\vec{E} + 2\vec{A} + 5\vec{E} + 5\vec{B} + 3\vec{C} = \vec{0} \Leftrightarrow 7\vec{E} + 3\vec{C} + 2\vec{A} + 5\vec{B} = \vec{0} \\ \text{Để } C, E, J &\text{ thẳng hàng thì } 2\vec{A} + 5\vec{B} = \vec{0} \Leftrightarrow 7\vec{E} + 5\vec{A} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{AE} = \frac{5}{7}\vec{AB} \Rightarrow k = \frac{5}{7}\end{aligned}$$

Chọn C

Leminh0310@gmail.com

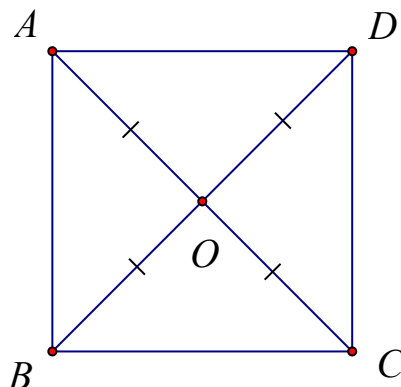
- Câu 2.** Cho hình vuông $ABCD$ tâm O cạnh 1. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn $2MA^2 + MB^2 + 2MC^2 + MD^2 = 9$ là một đường tròn có bán kính R . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $R \in (0;1)$. B. $R \in (1;2)$. C. $R \in \left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$. D. $R \in \left(\frac{3}{2};2\right)$.

Lời giải

(Sưu tầm: Lê Hồ Quang Minh – FB: Lê Minh)

Chọn C



Vì $ABCD$ là hình vuông tâm O nên ta có:
$$\begin{cases} \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \vec{0} \\ \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} = \vec{0} \end{cases}$$

Theo giả thiết: $2MA^2 + MB^2 + 2MC^2 + MD^2 = 9$

$$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 + 2(\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 + (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OD})^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow 6MO^2 + 2OA^2 + OB^2 + 2OC^2 + OD^2 + 2\overrightarrow{MO} \underbrace{(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD})}_{\vec{0}} = 9$$

$$\Leftrightarrow 6MO^2 + 3 = 9 \Leftrightarrow MO = 1.$$

Vậy tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính $R = 1$.

Email: thuyhung8587@gmail.com

Câu 3. Cho tam giác ABC . Tập hợp những điểm M thỏa mãn :

$$|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \text{ là :}$$

A. Đường thẳng đi qua A

B. Đường thẳng qua B và C

C. Đường tròn

D. Một điểm duy nhất.

Lời giải

$$|4\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$$

$$\Leftrightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MA}| = |2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MI}|, (I : \text{là trung điểm } BC)$$

$$\Leftrightarrow |3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{MA})| = 2|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}|, (G : \text{trọng tâm } \triangle ABC)$$

$$\Leftrightarrow 6|\overrightarrow{MJ}| = 2|\overrightarrow{IA}| \Leftrightarrow MJ = \frac{1}{3}IA, (J \text{ là trung điểm của } AG)$$

$\Leftrightarrow JM = \frac{1}{2} AG$ (không đổi). Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm J , bán kính $R = \frac{AG}{2}$.
 Chọn đáp án **C**.

(Họ và tên tác giả : **Cần Việt Hưng**, Tên FB: **Viet Hung**)

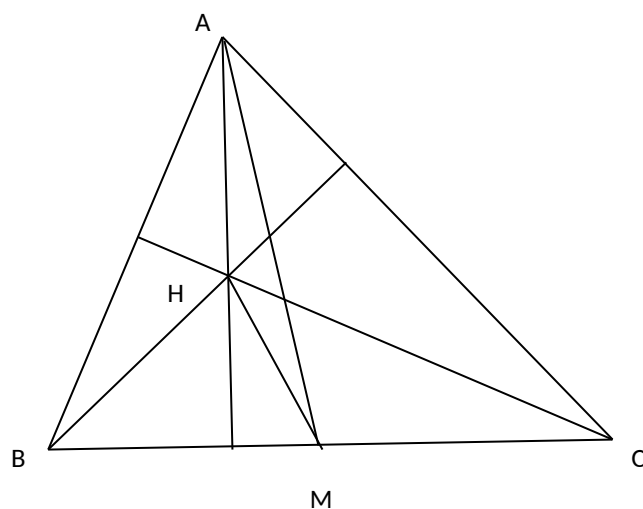
ngoletao@gmail.com

- Câu 4.** Cho tam giác ABC có hai đỉnh B, C cố định với $BC = 2a$. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC và M là trung điểm của đoạn BC. Nếu đỉnh A thay đổi nhưng luôn thỏa $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} + MA^2 = 4a^2$ thì điểm A luôn thuộc một đường tròn cố định có bán kính bằng
- A.** $2a$. **B.** $a\sqrt{3}$. **C.** $a\sqrt{2}$. **D.** a .

Lời giải

(Họ và tên tác giả : **Ngô Lê Tạo**, Tên FB: **Ngô Lê Tạo**)

Chọn B



Ta có

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}) (\overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CH}) \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}) \quad (\text{do } BA \perp CH, CA \perp BH) \\ &= \frac{1}{4} (\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CH}) \quad (\text{định lý chiếu vector}) \\ &= \frac{1}{4} BC^2 \end{aligned}$$

Suy ra

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MH} + MA^2 = 4a^2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot 4a^2 + MA^2 = 4a^2 \Leftrightarrow AM = a\sqrt{3}$$

- Câu 5.** Cho hai điểm A và B cố định. Tìm giá trị $k > 0$ để tập hợp điểm M thỏa mãn điều kiện $MA^2 + MB^2 = k$ là một đường tròn.

- A.** $k < \frac{2}{3}AB^2$. **B.** $k = \frac{2}{3}AB^2$. **C.** $k \leq \frac{2}{3}AB^2$. **D.** $k > \frac{2}{3}AB^2$.

Lời giải

Chọn D

Gọi E là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$ ta có

$\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} = \vec{0}$ ta có:

$$MA^2 + MB^2 = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 = k \Leftrightarrow 3ME^2 = k - EA^2 - 2EB^2 \quad (*)$$

Mà $EA + 2EB = 0 \Rightarrow EA = \frac{2}{3}AB$; $EB = \frac{1}{3}AB$ nên $(*) \Leftrightarrow 3ME^2 = k - \frac{2}{3}AB^2$

$$\Leftrightarrow ME^2 = \frac{1}{3} \left(k - \frac{2}{3}AB^2 \right)$$

Nếu $k < \frac{2}{3}AB^2$: Quỹ tích điểm M là rỗng.

Nếu $k = \frac{2}{3}AB^2$: Quỹ tích điểm M là điểm E .

Nếu $k > \frac{2}{3}AB^2$: Quỹ tích điểm M là đường tròn tâm E bán kính $R = \sqrt{\frac{1}{3} \left(k - \frac{2}{3}AB^2 \right)}$.

PHẠM THANH LIÊM FB: Liêm Phạm

Email: Phamthanhliem1@gmail.com

- Câu 6.** Cho tam giác vuông ABC tại A . Tìm tập hợp M sao cho $MB^2 + MC^2 = MA^2$.
A. Đường thẳng. **B.** Đường tròn. **C.** Đoạn thẳng. **D.** Một điểm.

Lời giải

Chọn D

$MB^2 + MC^2 = MA^2 \Leftrightarrow MB^2 + MC^2 - MA^2 = 0$. Gọi E là điểm được xác định bởi $\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC} - \overrightarrow{EA} = \vec{0}$. (E là điểm thứ tư của hình bình hành $ABEC$) .

Ta có: $MB^2 + MC^2 - MA^2 = (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EB})^2 + (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EC})^2 - (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA})^2$
 $= ME^2 + EB^2 + EC^2 - EA^2$
 $= ME^2 + EB^2 + EC^2 - (\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{EC})^2 = ME^2 - 2\overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{EC} = ME^2 - 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = ME^2$. Vậy $ME^2 = 0$.

Nên tập hợp điểm M là điểm E .

(Cách chứng minh trên phục vụ cho cả tam giác ABC là tam giác thường và khi đó các tập hợp điểm là khác nhau)

Email: thachtv.tc3@nghean.edu.vn

- Câu 7.** Cho tam giác ABC vuông cân tại A có $AB = 5cm$. Gọi (S) là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng thỏa mãn hệ thức: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 25$. Gọi I là trung điểm của BC . Kết luận nào sau đây **đúng**?

A. (S) là đường thẳng trung trực của đoạn thẳng AI .

B. (S) là đoạn thẳng AI .

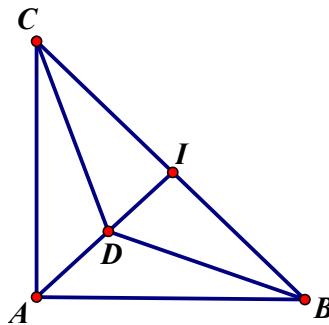
C. (S) là đường tròn có định bán kính $R = \frac{5\sqrt{10}}{4}$.

D. (S) là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{5\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

(Họ và tên tác giả: Trịnh Văn Thạch, FB: www.facebook.com/thachtv.tc3)

Chọn C



Từ giả thiết: $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(MA^2 + MB^2 - AB^2) + \frac{1}{2}(MA^2 + MC^2 - AC^2) = 25$

$$\Leftrightarrow 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 50 + 50 \Leftrightarrow 2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 100$$

Gọi D là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{DI} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DI} = \vec{0}$

$\Rightarrow D$ là trung điểm của đoạn thẳng AI

Ta có $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MD^2 + 2DA^2 + DB^2 + DC^2$

Và $DA = \frac{1}{2}AI = \frac{1}{4}BC = \frac{5\sqrt{2}}{4}$, $DB = DC = \sqrt{IB^2 + ID^2} = \sqrt{\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{125}{8}}$.

Suy ra

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 4MD^2 + 2DA^2 + DB^2 + DC^2 = 4MD^2 + 2 \cdot \left(\frac{5\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{125}{8}}\right)^2 = 4MD^2 + \frac{75}{2}$$

Ta có kết quả: $4MD^2 + \frac{75}{2} = 100 \Rightarrow MD^2 = \frac{125}{8}$

Như vậy (S) là đường tròn tâm D bán kính $R = \frac{5\sqrt{10}}{4}$.

Câu 8. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính là:

A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$.

B. $\frac{a}{4}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M lần lượt là trung điểm của BC .

Gọi I là điểm thỏa mãn điều kiện: $4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

Khi đó, ta có: $4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IM} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AM}$$

Suy ra : $IA = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $IB = IC = \sqrt{IM^2 + BM^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Ta lại có: $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (4\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

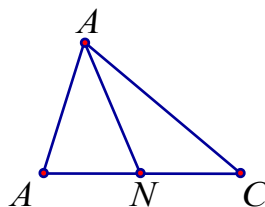
Câu 9.

Cho $\triangle ABC$. Tìm tập hợp các điểm M sao cho: $|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$.

- A.** Tập hợp các điểm M là một đường tròn.
- B.** Tập hợp của các điểm M là một đường thẳng.
- C.** Tập hợp các điểm M là tập rỗng.
- D.** Tập hợp các điểm M chỉ là một điểm trùng với A .

Lời giải

Chọn A



Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

$$|\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| \Leftrightarrow |2\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 2\overrightarrow{IC}| = |\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}| \quad (1)$$

Gọi N là trung điểm BC . Ta được: $(1) \Leftrightarrow 2|\overline{MI}| = 2|\overline{AN}| \Leftrightarrow IM = AN$.

I, A, N cố định nên tập hợp các điểm M là đường tròn tâm I , bán kính AN .

Câu 10. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức

$4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$ nằm trên một đường tròn (C) có bán kính là:

- A. $\frac{a}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{a}{4}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. D. $\frac{a}{\sqrt{6}}$.

Lời giải

Chọn D

Gọi M lần lượt là trung điểm của BC .

Gọi I là điểm thỏa mãn điều kiện: $4\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = \vec{0}$

Khi đó, ta có: $4\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC} = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow 4\overline{IA} + 2\overline{IM} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overline{IA} + \overline{AM} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{AI} = \frac{1}{3}\overline{AM}$$

Suy ra : $IA = \frac{a\sqrt{3}}{6}$; $IB = IC = \sqrt{IM^2 + BM^2} = \frac{a\sqrt{21}}{6}$.

Ta lại có: $4MA^2 + MB^2 + MC^2 = \frac{5a^2}{2}$

$$\Leftrightarrow 4\overline{MA}^2 + \overline{MB}^2 + \overline{MC}^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2 + (\overline{MI} + \overline{IC})^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6MI^2 + 2\overline{MI}(4\overline{IA} + \overline{IB} + \overline{IC}) + 4IA^2 + IB^2 + IC^2 = \frac{5a^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow MI = \frac{a}{\sqrt{6}}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính $R = \frac{a}{\sqrt{6}}$.

Họ và tên tác giả : Vũ Thị Nga Tên FB: Linh Nga

Email: linhnga.tvb@gmail.com

Câu 11. Cho $\square ABC$ đều, có cạnh bằng a . Khi đó tập hợp những điểm M sao cho

$$\overline{MA}.\overline{MB} + \overline{MB}.\overline{MC} + \overline{MC}.\overline{MA} = \frac{a^2}{6}$$
 là:

A. Đường tròn có bán kính $R = \frac{a}{3}$.

B. Đường tròn có bán kính $R = \frac{a}{2}$.

C. Đường tròn có bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

D. Đường tròn có bán kính $R = \frac{a\sqrt{3}}{9}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi G là trọng tâm $\triangle ABC$. Suy ra G là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$ và G cố định.

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG}$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = 9(\overrightarrow{MG})^2$$

$$\Rightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9MG^2$$

Mà $MA^2 + MB^2 + MC^2 = \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$

$$= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC})$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0}$$

$$= 3MG^2 + 3GA^2$$

$$= 3MG^2 + 3\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$$

$$= 3MG^2 + a^2$$

$$3MG^2 + a^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 9MG^2$$

Ta có

$$\Rightarrow (\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) = 3MG^2 - \frac{a^2}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{2} = 3MG^2$$

$$\Rightarrow MG^2 = \frac{2a^2}{9}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm G bán kính $R = \frac{a\sqrt{2}}{3}$.

Họ và tên tác giả : Tô Quốc An Tên FB: Tô Quốc An

Email: antq4949@gmail.com

Câu 12. Cho $\triangle ABC$ tìm tập hợp điểm $M : \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = AM^2$

Lời giải

Gọi I là trung điểm của BC , ta có: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = AM^2 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) \cdot (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC}) = MA^2$

$$\Leftrightarrow MI^2 + \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IB}) = MA^2 \Leftrightarrow MI^2 - MA^2 = -\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IB} = \frac{BC^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{MA})(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MA}) = \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI}(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MA}) = \frac{BC^2}{4} \quad (*)$$

Gọi O là trung điểm của AI , suy ra: $\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MO}$

Suy ra: $(*) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{MO} = \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{MO} = \frac{BC^2}{4} \Leftrightarrow \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OM} = -\frac{BC^2}{16}$

Trên tia đối của tia OI lấy điểm H sao cho $OI \cdot OH = \frac{BC^2}{16}$ hay $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH} = -\frac{BC^2}{16}$, suy ra điểm H xác định duy nhất.

Dựng đường thẳng Δ đi qua H và vuông góc với OI , khi đó với mọi điểm M nằm trên Δ ta có:

$$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} \cdot (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}) = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{OH} = -\frac{BC^2}{16}$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng Δ

Email: Bichhai1975@gmail.com

Câu 13. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng 3. Biết rằng tập hợp các điểm M thỏa mãn đẳng thức $\left| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \right|$ là đường tròn cố định có bán kính bằng:

- A. 1. B. $\frac{1}{3}$. C. $\frac{3}{2}$. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải

Họ tên: Lê Thị Bích Hải. Tên face: Bich Hai Le

Chọn B

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC .

Ta có $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}) + 4(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})$.

Chọn điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \vec{0}$.

Mà G là trọng tâm của tam giác $ABC \Rightarrow \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$.

Khi đó $9\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 9\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{CA} \quad (*)$.

Do đó $\left| 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} \right| = \left| \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA} \right| \Leftrightarrow \left| 9\overrightarrow{MI} + 2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} + 4\overrightarrow{IC} \right| = \left| \overrightarrow{AB} \right| \Leftrightarrow 9MI = AB$.

Vì I là điểm cố định thỏa mãn $(*)$ nên tập hợp các điểm M cần tìm là đường tròn tâm I , bán kính $r = \frac{AB}{9} = \frac{1}{3}$.

thongqna@gmail.com

Câu 14. Cho tam giác ABC có là trọng tâm G . Tìm tập hợp điểm M thỏa mãn $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MG})^2 = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC})^2$.

A. Đường tròn đường kính AB .

B. Đường trung trực đoạn thẳng AB .

C. Đường tròn đường kính AC .

D. Đường trung trực đoạn thẳng AC .

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Trần Văn Thông, Tên FB: Trần Thông)

Chọn A

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MA}$.

Gọi điểm I là trung điểm cạnh AC .

Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MG} = 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MG} = 2(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BI}) - 3(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BG})$
 $= -\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{BI} - 3 \cdot \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{MB}$.

Do đó $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{BC})^2 + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} - 3\overrightarrow{MG})^2 = (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC})^2$
 $\Leftrightarrow \overrightarrow{MA}^2 + (-\overrightarrow{MB})^2 = AB^2 \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 = AB^2$.

Từ đó suy ra tam giác MAB vuông tại M hay tập hợp các điểm M là đường tròn đường kính AB .

Câu 15. Cho đoạn thẳng $AB = \sqrt{5}$. Biết rằng tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ là một đường tròn có bán kính R . Tìm giá trị của R .

A. $R = \frac{5}{2}$.

B. $R = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

C. $R = \frac{3}{2}$.

D. $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Trần Văn Thông, Tên FB: Trần Thông)

Chọn A

Ta có $MA^2 + MB^2 = 3\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$
 $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB})^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow AB^2 = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$.

Gọi điểm I là trung điểm cạnh AB .

$$\begin{aligned} \text{Ta có } AB^2 &= \overline{MA} \cdot \overline{MB} \Leftrightarrow AB^2 = (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IB}) \Leftrightarrow AB^2 = (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} - \overline{IA}) \\ &\Leftrightarrow AB^2 = MI^2 - IB^2 \Leftrightarrow MI^2 = AB^2 + IB^2 \Leftrightarrow MI^2 = \frac{5}{4} AB^2 \\ &\Leftrightarrow MI = \frac{\sqrt{5}}{2} AB = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Vậy tập hợp điểm M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = 3\overline{MA} \cdot \overline{MB}$ là đường tròn tâm I có bán kính $R = \frac{5}{2}$.

Họ và tên: Võ Khánh Huyền Vân Fb: Vân Võ

Email: huyenvanqt050185@gmail.com

- Câu 16.** Cho tam giác ABC , có bao nhiêu điểm M thỏa $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 5$?
- A. 1. B. 2.
C. vô số. D. Không có điểm nào.

Lời giải.

Chọn C

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC , ta có $\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC} = 3\overline{MG}$.

Thay vào ta được: $|\overline{MA} + \overline{MB} + \overline{MC}| = 5 \Leftrightarrow |3\overline{MG}| = 5 \Leftrightarrow MG = \frac{5}{3}$, hay tập hợp các điểm M là đường tròn có tâm là trọng tâm của tam giác ABC và bán kính bằng $\frac{5}{3}$.

Vấn đề 4. TỈ LỆ

Họ và Tên: Trần Quốc Đại

Email: quocdai1987@gmail.com

Facebook: <https://www.facebook.com/tqd1671987>

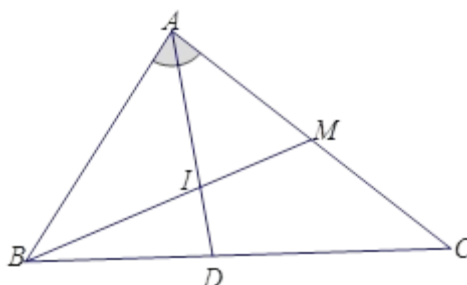
- Câu 1.** Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$; $AC = 4$. Phân giác trong AD của góc $\angle BAC$ cắt trung tuyến BM tại I

Tính $\frac{AD}{AI}$.

- A. $\frac{AD}{AI} = \frac{3}{2}$. B. $\frac{AD}{AI} = \frac{10}{7}$. C. $\frac{AD}{AI} = \frac{29}{20}$. D. $\frac{AD}{AI} = \frac{7}{5}$

Lời giải

Chọn B



* Phân tích $\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AI}$ theo các vector $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$.

Ta có: $\frac{IB}{IM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IM} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AI} \quad (1)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 7\overrightarrow{AD} \quad (2)$$

Lấy $(2) - 2 \cdot (1) \Rightarrow$ suy ra: $3\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AM} = 7\overrightarrow{AD} - 10\overrightarrow{AI} \Rightarrow 7\overrightarrow{AD} - 10\overrightarrow{AI} = \vec{0} \Rightarrow 7\overrightarrow{AD} = 10\overrightarrow{AI}$
 $\Rightarrow \frac{AD}{AI} = \frac{10}{7}$

Câu 2. [Đề thi olympic 30/4 TPHCM khối không chuyên lần 2] Cho $\triangle ABC$ gọi điểm D nằm trên cạnh BC sao cho $BD = 2BC$, E là trung điểm của AD . Một đường thẳng bất kì qua E và

cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Tính tỉ số $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AC}{AN}$

A. $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AC}{AN} = 6$

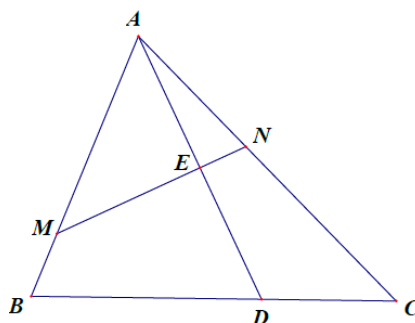
B. $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AC}{AN} = 5$

C. $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AC}{AN} = \frac{28}{5}$

D. $\frac{AB}{AM} + 2\frac{AC}{AN} = \frac{29}{5}$

Lời giải

Chọn A



Do M nằm trên cạnh AB nên ta có $\overrightarrow{AB} = k \cdot \overrightarrow{AM} \quad (k > 1)$

Do N nằm trên cạnh AC nên ta có $\overrightarrow{AC} = l \cdot \overrightarrow{AN} \quad (l > 1)$

Ta có $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{DC} \Rightarrow \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = -2(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AD}$

Suy ra $k \cdot \overrightarrow{AM} + 2l \cdot \overrightarrow{AN} = 6 \cdot \overrightarrow{AE} \Rightarrow k(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ME}) + 2l(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EN}) = 6\overrightarrow{AE}$

Suy ra $(k + 2l - 6)\overrightarrow{AE} = -k\overrightarrow{EM} - 2l\overrightarrow{EN}$

Do hai vecto $\overrightarrow{AE}$ và $\overrightarrow{MN}$ không cùng phương nên suy ra

$$k + 2l - 6 = 0 \Leftrightarrow k + 2l = 6 \Leftrightarrow \frac{AB}{AM} + 2\frac{AC}{AN} = 6$$

Họ và tên tác giả : Đỗ Văn Đức Tên FB: Đỗ Văn Đức

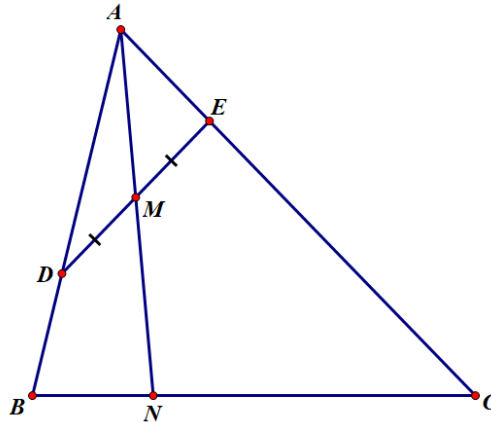
Email: hoctoancunganhduc@gmail.com

Câu 3. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D sao cho $AD = 2DB$. Trên cạnh AC lấy điểm E sao cho $CE = 3EA$. Gọi M là trung điểm của DE . Tia AM cắt BC tại N . Tỉ số $\frac{BN}{CN}$ có giá trị là:

- A. $\frac{1}{4}$. B. $\frac{3}{8}$. C. $\frac{1}{2}$. D. $\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn B



Giả sử N chia BC theo tỉ số x . Ta có:

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AB} - x\overrightarrow{AC}}{1-x} = \frac{1}{1-x}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x-1}\overrightarrow{AC} \quad (1).$$

Lại có:

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{8}\overrightarrow{AC} \quad (2).$$

Vì $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$ là 2 vector cùng phương nên

$$\frac{3}{1-x} = \frac{8x}{x-1} \Leftrightarrow x = -\frac{3}{8}.$$

$$\overrightarrow{NB} = -\frac{3}{8}\overrightarrow{NC} \Rightarrow \frac{NB}{NC} = \frac{3}{8}.$$

Do đó

Câu 4. (Bài toán tổng quát của bài toán 1). Cho tam giác ABC . Gọi I là điểm chia BC theo tỉ số k .

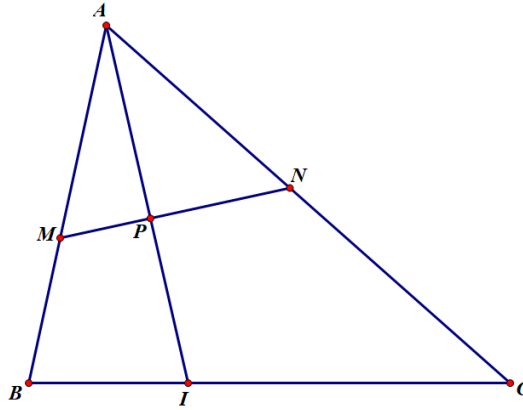
Trên các tia AB và AC lấy các điểm M, N . AI cắt MN tại P . Đặt $\frac{AB}{AM} = b$, $\frac{AC}{AN} = c$. Tỷ

số $\frac{AI}{AP}$ có giá trị bằng

- A. $\frac{b+kc}{1+k}$. B. $\frac{b-kc}{1-k}$. C. $\frac{c+kb}{1+k}$. D. $\frac{c-kb}{1-k}$.

Lời giải

Chọn B



$$\overrightarrow{AP} = \frac{\overrightarrow{AM} - x\overrightarrow{AN}}{1-x} = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{b} + \frac{x}{x-1} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{c}$$

Giả sử P chia MN theo tỉ số x . Ta có

$$\overrightarrow{AI} = \frac{\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC}}{1-k} = \frac{\overrightarrow{AB}}{1-k} + \frac{k}{k-1} \overrightarrow{AC}$$

Lại có: (1).

Vì $\overrightarrow{AP}$ và $\overrightarrow{AI}$ đồng phương nên

$$\frac{1-k}{b(1-x)} = \frac{x(k-1)}{kc(x-1)} \Leftrightarrow \frac{1}{b} = \frac{x}{kc} \Leftrightarrow x = k \frac{c}{b}$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{b-kc} \overrightarrow{AB} - \frac{k}{b-kc} \overrightarrow{AC}$$

Do đó (2).

Từ (1) và (2), ta có

$$\frac{AI}{AP} = \frac{b-kc}{1-k}$$

Câu 5. (Hệ quả hay dùng của bài toán 2). Cho tam giác ABC . Gọi I là trung điểm của BC . Trên các tia AB và AC lấy các điểm M, N . AI cắt MN tại P . Đặt $\frac{AB}{AM} = b$, $\frac{AC}{AN} = c$. Tỷ số $\frac{AI}{AP}$ có giá trị bằng

A. $\sqrt{bc}$. B. $\frac{b+c}{2}$. C. $\sqrt{\frac{b^2+c^2}{2}}$. D. $\frac{2bc}{b+c}$.

Lời giải

Chọn B

I là trung điểm của BC nên I chia BC theo tỷ số $k = -1$. Áp dụng kết quả ở bài 2, ta có:

$$\frac{AI}{AP} = \frac{b - (-1)c}{1 - (-1)} = \frac{b+c}{2}$$

Tên: Nam Phương Tên FB: Nam Phương

Email: nguyentrietphuong@gmail.com

Câu 6. Cho tam giác ABC . Gọi D, E lần lượt là các các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$.

Điểm K trên đoạn thẳng AD sao cho ba điểm B, K, E thẳng hàng. Tìm tỉ số $\frac{AD}{AK}$.

A. $\frac{AD}{AK} = \frac{1}{3}$.

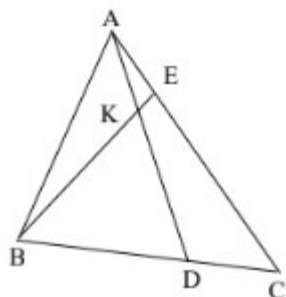
B. $\frac{AD}{AK} = 3$.

C. $\frac{AD}{AK} = \frac{2}{3}$.

D. $\frac{AD}{AK} = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B



Vì $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AC}$ nên $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{4} \overrightarrow{BC} + \frac{3}{4} \overrightarrow{BA}$

Giả sử $\begin{cases} \overrightarrow{AK} = x \overrightarrow{AD} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = x \overrightarrow{BD} + (1-x) \overrightarrow{BA} \\ \overrightarrow{BD} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{BK} = \frac{2x}{3} \overrightarrow{BC} + (1-x) \overrightarrow{BA}$

$$m \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{BE} \Rightarrow \begin{cases} \frac{m}{4} - \frac{2x}{3} = 0 \\ 1-x - \frac{3m}{4} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{8}{9} \\ x = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Do B, K, E thẳng hàng ta có:

Vậy $\frac{AD}{AK} = 3$

Email: haivanxinh99@gmail.com Face **Hải Vân**

Câu 7. Cho tứ giác $ABCD$ có hai đường chéo cắt nhau tại O thỏa mãn $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = -4\overrightarrow{OB}$.

Qua trung điểm M của AB dựng đường thẳng MO cắt CD tại N . Tính tỉ số $\frac{CN}{ND}$.

A. $\frac{3}{4}$.

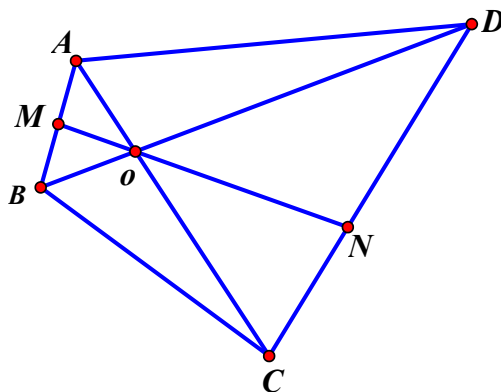
B. $\frac{1}{4}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{OC} = -3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OD} = -4\overrightarrow{OB}$

Đặt $\frac{CN}{ND} = k, k > 0$, ta có $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{ND} \Rightarrow \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{ON} = k(\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{OD})$

$$\Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{-1}{1+k}\overrightarrow{CO} - \frac{k}{k+1}\overrightarrow{OD} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = -\frac{3}{1+k}\overrightarrow{OA} - \frac{4k}{k+1}\overrightarrow{OB}$$

Vì $\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ cùng phương nên có số thực k sao cho $\overrightarrow{ON} = k\overrightarrow{OM} \Rightarrow \overrightarrow{ON} = \frac{k}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

$$-\frac{6}{k(1+k)} = -\frac{8k}{k(k+1)} \Rightarrow \begin{cases} k = \frac{3}{4} \\ k = -1 \end{cases} \Rightarrow k = \frac{3}{4}$$

Suy ra

(Email): hatoanlgm@gmail.com

Câu 8. Cho tam giác ABC và điểm I thỏa mãn $23\overrightarrow{IA} + 8\overrightarrow{IB} + 2018\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Đường thẳng AI cắt đường

thẳng BC tại J . Giá trị của tỉ số $\frac{JB}{JC}$ là:

- A. $\frac{23}{8}$ B. $\frac{2018}{23}$ C. $\frac{2018}{8}$ D. $\frac{8}{23}$

Lời giải

Chọn C

(Họ và tên tác giả : Ngô Ngọc Hà, Tên FB: Ngô Ngọc Hà)

Giả sử $\overrightarrow{JB} = k\overrightarrow{JC} (k \neq 1) \Rightarrow \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AB} - \frac{k}{1-k}\overrightarrow{AC}$

Từ giả thiết suy ra:

$$-23\overrightarrow{AI} + 8(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) + 2018(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{8}{2049}\overrightarrow{AB} + \frac{2018}{2049}\overrightarrow{AC}$$

Do A, I, J thẳng hàng nên $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}$ cùng phương

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{1-k}}{\frac{8}{2049}} = \frac{-\frac{k}{1-k}}{\frac{2018}{2049}} \Leftrightarrow k = -\frac{2018}{8}$$

Gmail: Binh.thpthauloc2@gmail.com

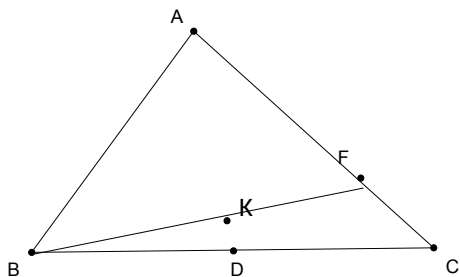
Câu 9. Cho tam giác ABC . Điểm K chia trung tuyến AD theo tỷ số $3:1$ kể từ đỉnh.

Đường thẳng BK chia diện tích tam giác ABC theo tỷ số $k = \frac{S_{ABF}}{S_{BCF}}$, giá trị của k bằng?

- A. $k = \frac{5}{8}$ B. $k = \frac{3}{8}$ C. $k = \frac{3}{5}$ D. $k = \frac{3}{2}$

Lời giải

Đáp án D



Do D là trung điểm của BC thiết: $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ (1)

Gọi F là giao điểm của BK và AC .

Mà A, F, C thẳng hàng: $\overrightarrow{AF} = m \overrightarrow{AC}$ (2) B, K, F thẳng hàng:

$$\overrightarrow{AK} = n \overrightarrow{AF} + (1-n) \overrightarrow{AB} \quad (3)$$

$$A, K, D \text{ thẳng hàng và } \frac{KD}{KA} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AD} \quad (4)$$

$$(2); (3) \Rightarrow \overrightarrow{AK} = n.m. \overrightarrow{AC} + (1-n) \overrightarrow{AB} \quad (5)$$

Từ suy ra:

$$(1); (4) \Rightarrow \overrightarrow{AK} = \frac{3}{8} \overrightarrow{AC} + \frac{3}{8} \overrightarrow{AB} \quad (6)$$

Từ suy ra:

$$\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC} \text{ không cùng phương nên từ } (5); (6) \text{ ta có: } \begin{cases} m.n = \frac{3}{8} \\ 1-n = \frac{3}{8} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n = \frac{5}{8} \\ m = \frac{3}{5} \end{cases}$$

Do hai véctor

$$\overrightarrow{AF} = \frac{3}{5} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{FA}{FC} = \frac{3}{2}$$

Do đó:

$$k = \frac{S_{ABF}}{S_{BCF}} = \frac{FA}{FC} = \frac{3}{2}$$

Vậy

(Họ tên : Phạm Văn Bình, tên FB: Phạm văn Bình)

Họ và tên: Tăng Lâm Tường Vinh

Email: tanglamtuongvinh@gmail.com

Facebook: [tanglamtuong.vinh](https://www.facebook.com/tanglamtuong.vinh)

Câu 10. Cho tam giác ABC với K là trung điểm BC . Lấy các điểm M, N thỏa mãn $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$. Gọi I là giao điểm của MN và AK . Đặt $\overrightarrow{MI} = x \overrightarrow{MN}$, $\overrightarrow{AI} = y \overrightarrow{AK}$. Hỏi $\frac{x}{y}$

A. $\frac{3}{2}$.

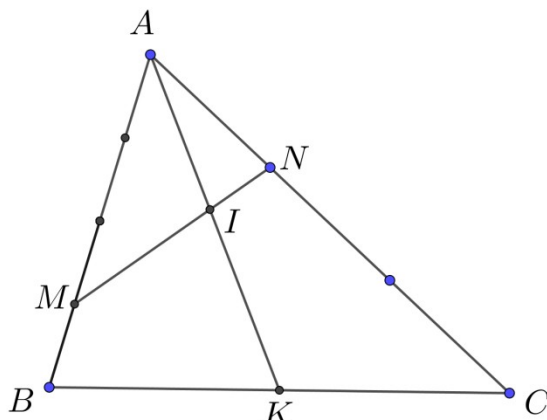
B. $\frac{4}{3}$.

C. 1.

D. $\frac{5}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MI} = x\overrightarrow{MN} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AM} = x\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{x}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{3x}{4}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} = \frac{x}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{3-3x}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AI} = y\overrightarrow{AK} = y\left(\frac{\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}}{2}\right) = \frac{y}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{y}{2}\overrightarrow{AC}$

Mà $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}$ là 2 vector không cùng phương nên ta có
$$\begin{cases} \frac{3-3x}{4} = \frac{y}{2} \\ \frac{x}{3} = \frac{y}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{13} \\ y = \frac{6}{13} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{3}{2}$$

Gmail: Binh.thpthauloc2@gmail.com

Câu 11. Cho tam giác ABC . Trên cạnh AB lấy điểm D, trên cạnh BC lấy E, F sao cho $\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2}$; $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{3}$, $\frac{BF}{FC} = \frac{4}{1}$. Đường thẳng AE chia đoạn DF theo tỷ số $\frac{KD}{KF} = k$. Giá trị của k bằng?

A. $k = \frac{3}{11}$

B. $k = \frac{11}{3}$

C. $k = \frac{3}{14}$

D. $k = \frac{11}{14}$

Lời giải

Đáp án A

$\frac{AD}{DB} = \frac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$ (1) $\frac{BE}{EC} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ (2)

Theo giả thiết:

$\frac{BF}{FC} = \frac{4}{1} \Rightarrow \overrightarrow{AF} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AC}$ (3)

$A; K; E$ thẳng hàng : $\overrightarrow{AK} = m \overrightarrow{AE}$ (4) $D; K; F$ thẳng hàng :
 Mà $\overrightarrow{AK} = n \overrightarrow{AF} + (1-n) \overrightarrow{AD}$ (5)

(2);(4) suy ra : $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{4} m \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4} m \overrightarrow{AC}$ (6)
 Từ

(1);(3);(5) suy ra : $\overrightarrow{AK} = n \left[\frac{1}{5} \overrightarrow{AB} + \frac{4}{5} \overrightarrow{AC} \right] + (1-n) \frac{3}{5} \overrightarrow{AB}$
 Từ

$\Rightarrow \overrightarrow{AK} = \left(\frac{3}{5} - \frac{2n}{5} \right) \overrightarrow{AB} + \frac{4n}{5} \overrightarrow{AC}$ (7)

Do hai vectơ $\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}$ không cùng phương nên từ (6);(7) ta có:
$$\begin{cases} \frac{3m}{4} = \frac{3}{5} - \frac{2n}{5} \\ \frac{m}{4} = \frac{4n}{5} \end{cases}$$

 $\Rightarrow \frac{1}{5} - \frac{2n}{15} = \frac{4n}{5} \Leftrightarrow n = \frac{3}{14}$
 $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{14} \overrightarrow{AB} + \frac{11}{14} \overrightarrow{AC} \Rightarrow \frac{KD}{KF} = k = \frac{3}{11}$
 Vậy

(Họ tên : Phạm Văn Bình, tên FB: Phạm văn Bình)

Họ và tên: Hoàng Ngọc Lâm

Email: hoangngoclammath1112@gmail.com

Facebook: Hoàng Ngọc Lâm

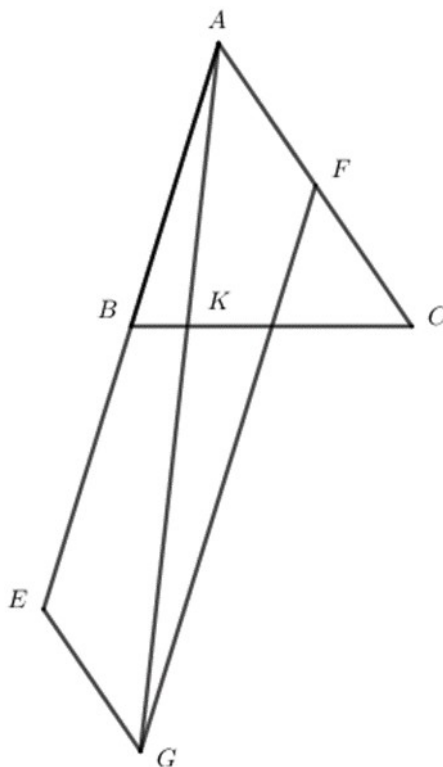
Câu 12. Cho tam giác ABC . Kéo dài AB một đoạn $BE = AB$, gọi F là trung điểm của AC . Vẽ hình

bình hành $EAFG$. Đường thẳng AG cắt BC tại K . Tính tỉ số $\frac{KB}{KC}$?

- A.** $\frac{1}{4}$. **B.** $\frac{3}{8}$. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $\frac{2}{7}$.

Lời giải

Chọn A



Để xác định giao điểm K của AG và BC , ta tính $\overrightarrow{AG}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Ta có:
$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

AG cắt BC tại điểm K mà
$$2\overrightarrow{KB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{KC} = \vec{0}$$

Suy ra
$$\frac{KB}{KC} = \frac{1}{4}$$

Câu 13. Cho tam giác ABC có $AB = 3$, $AC = 4$. Phân giác trong AD của góc BAC cắt trung tuyến

BM tại I . Tính tỉ số $\frac{AD}{AI}$.

A. $\frac{13}{8}$.

B. $\frac{11}{6}$.

C. $\frac{10}{7}$.

D. $\frac{10}{5}$.

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Chọn C

Theo tính chất đường phân giác ta có
$$\frac{IB}{IM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IM} = \vec{0}$$

Và
$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0}$$

Vậy ta có
$$\begin{cases} 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IM} = \vec{0} \\ 4\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AI} \\ 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 7\overrightarrow{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AM} = 10\overrightarrow{AI} \\ 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 7\overrightarrow{AD} \end{cases}$$

Suy ra $3\overrightarrow{AC} - 6\overrightarrow{AM} = 7\overrightarrow{AD} - 10\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow 7\overrightarrow{AD} - 10\overrightarrow{AI} = \vec{0} \Rightarrow \frac{AD}{AI} = \frac{10}{7}$.

Hoặc ta có thể giải như sau:

Ta có $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow BD = \frac{3}{4}DC = \frac{3}{4}(BC - BD) \Leftrightarrow \frac{7}{4}BD = \frac{3}{4}BC \Rightarrow \overrightarrow{BD} = \frac{3}{7}\overrightarrow{BC}$

Ta lại có $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$

Theo tính chất phân giác, ta lại có $\frac{BI}{IM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{2} \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{BI} = 3\overrightarrow{IM}$

$\Leftrightarrow 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AI}) = 3(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow 5\overrightarrow{AI} = 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{10}\overrightarrow{AC} = \frac{7}{10}\left(\frac{4}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{7}\overrightarrow{AC}\right) = \frac{7}{10}\overrightarrow{AD}$

Vậy $\frac{AD}{AI} = \frac{10}{7}$.

Họ và tên tác giả : Nguyễn Văn Toàn Tên FB: Dấu Vết Hát

Email: nguyenvantoannbk@gmail.com Nhờ thầy cô góp ý!

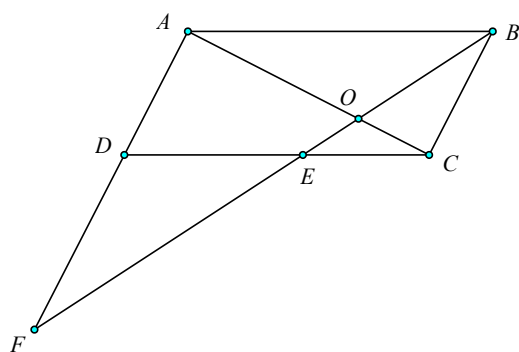
Câu 14. Cho hình bình hành $ABCD$, O là điểm bất kì trên đoạn AC , đường thẳng BO cắt cạnh CD

tại E và đường thẳng AD tại F sao cho $EF = 2BO$. Tỷ số $\frac{AF}{AD}$ bằng

- A. $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. B. 2. C. $1+\sqrt{2}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Đặt: $\overrightarrow{AF} = x\overrightarrow{AD}$ ($x > 1$) và $\overrightarrow{AO} = y\overrightarrow{AC}$ ($0 < y < 1$)

$$\frac{DE}{CE} = \frac{DF}{BC} \longrightarrow \frac{DE}{DC} = \frac{DF}{AF} = \frac{x-1}{x} \longrightarrow \overrightarrow{DE} = \frac{x-1}{x}\overrightarrow{AB}$$

Theo định lý talet:

Ta có: $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BA} + y\overrightarrow{AC} = (y-1)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD}$ $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DF} - \overrightarrow{DE} = (x-1)\overrightarrow{AD} - \frac{x-1}{x}\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{BO} \longrightarrow \begin{cases} x-1=2y \\ \frac{1-x}{x} = 2(y-1) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Theo đề bài:

Họ và Tên : Nguyễn Văn Mạnh FB : Nguyễn Văn Mạnh

Email : manhluongh4@gmail.com

Câu 15. Cho hai tam giác ABC và $A_1B_1C_1$; gọi A_2, B_2, C_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1 . Gọi G, G_1, G_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác $ABC, A_1B_1C_1$,

$A_2B_2C_2$. Tính tỉ số $\frac{GG_1}{GG_2}$ ta được kết quả :

- A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{1}{2}$ C. 3 D. 2

Lời giải

Chọn C

Vì G, G_1 là trọng tâm tam giác $ABC, A_1B_1C_1$ suy ra $\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{GB_1} + \overrightarrow{GC_1}$
 $\hat{=} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1} \hat{=} \overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$

Tương tự G, G_2 là trọng tâm tam giác $ABC, A_2B_2C_2$ suy ra $\overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{GA_2} + \overrightarrow{GB_2} + \overrightarrow{GC_2}$
 $\hat{=} \overrightarrow{GG_2} = \overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2}$

Mặt khác $\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2} = (\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) + (\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2})$

Mà A_2, B_2, C_2 lần lượt là trọng tâm các tam giác BCA_1, CAB_1, ABC_1

Suy ra $3(\overrightarrow{A_1A_2} + \overrightarrow{B_1B_2} + \overrightarrow{C_1C_2}) = \overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1C} + \overrightarrow{B_1C} + \overrightarrow{B_1A} + \overrightarrow{C_1A} + \overrightarrow{C_1B}$
 $= \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{B_1B} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{C_1C} + \overrightarrow{CB}$
 $= -2(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1})$

$$\overrightarrow{AA_2} + \overrightarrow{BB_2} + \overrightarrow{CC_2} = \frac{-2}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) + \overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}$$

Do đó

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{AA_1} + \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{CC_1}) \quad \text{Vậy} \quad \overrightarrow{GG_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GG_1} \Rightarrow \frac{GG_1}{GG_2} = 3$$

VẤN ĐỀ 5. MIN,MAX

Email: phunghang10ph5s@gmail.com

Câu 1. Cho $\triangle ABC$ đều cạnh bằng 3, M là điểm thuộc đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Đặt $P = MA^2 - MB^2 - MC^2$. Gọi a, b lần lượt là giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của P . Khi đó, giá trị biểu thức $T = 4a + b$ là:

A. 3.

B. 6.

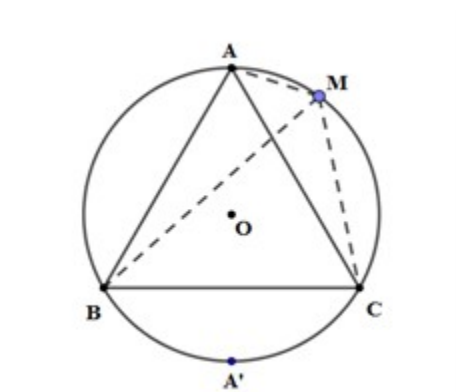
C. 9.

D. 12.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Phùng Hằng Tên FB: Phùng Hằng

Chọn B.



Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ABC$. Ta có:

$$\begin{aligned} P &= MA^2 - MB^2 - MC^2 \\ &= (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB})^2 - (\overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC})^2 \\ &= -MO^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}) + OA^2 - OB^2 - OC^2 \\ &= -2R^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OA'}) = -2R^2 + 2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{AA'} \\ &= -2R^2 - 4\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OA} = -2R^2 - 4R^2 \cos(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) \end{aligned}$$

$$P_{\min} = -6R^2 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \cos(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) = 1 \quad \hat{=} \quad M \text{ trùng } A$$

$$P_{\max} = 2R^2 \quad \text{khi và chỉ khi} \quad \cos(\overrightarrow{OM}; \overrightarrow{OA}) = -1 \quad \hat{=} \quad M \text{ trùng } A' \text{ là điểm đối xứng của } A \text{ qua } O$$

$$\triangleright T = 4a + b = 4 \cdot 2R^2 + (-6R^2) = 2R^2$$

$$\triangle ABC \text{ đều cạnh bằng } 3 \quad \triangleright R = \sqrt{3} \quad \triangleright T = 2R^2 = 6$$

Họ và tên tác giả : Trần Văn Ngờ Tên FB: Tran Van Ngo Tth

Email: vanngodhqn@gmail.com

Câu 2. Cho $\triangle ABC$ và 3 số dương x, y, z thay đổi có tổng bình phương: $x^2 + y^2 + z^2 = k^2, k \in \mathbb{R}$. Giá trị lớn nhất của $P = xy \cos C + yz \cos A + zx \cos B$ là:

A. $\frac{k}{2}$.

B. $\frac{k^2}{2}$.

C. $\frac{k}{3}$.

D. $\frac{k^2}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Đặt 3 vectơ $\overrightarrow{BX}, \overrightarrow{CY}, \overrightarrow{AZ}$ tương ứng là $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ như hình vẽ.

$$(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z})^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2\bar{x}\bar{y} + 2\bar{y}\bar{z} + 2\bar{x}\bar{z} \geq 0$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow k^2 + 2xy \cos(180^\circ - C) + 2yz \cos(180^\circ - A) + 2xz \cos(180^\circ - B) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2xy \cos C - 2yz \cos A - 2xz \cos B \geq 0 \Leftrightarrow xy \cos C + yz \cos A + zx \cos B \leq \frac{k^2}{2}$$

$$P = \frac{k^2}{2}$$

Vậy Max

Câu 3. Cho hai điểm $A, B \in (I; 6)$ và $M \in (I; 3)$, thỏa mãn: $\angle AIB = 60^\circ$. Khi A, B, M thay đổi tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA + 2MB$?

- A.** 9. **B.** $3 + 2\sqrt{6}$. **C.** $3\sqrt{13}$. **D.** $6 - \sqrt{3}$.

Lời giải

Bổ đề: Cho hai véc tơ $\vec{u}$ và $\vec{v}$ khác véc tơ $\vec{0}$, ta luôn có: $|\vec{u} - \vec{v}| = \left| \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \vec{u} - \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v} \right|$

Chứng minh: Bình phương vô hướng về phải ta được:

$$\left(\left| \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \vec{u} - \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v} \right| \right)^2 = \left(\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \vec{u} \right)^2 + \left(\frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v} \right)^2 - 2 \cdot \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \vec{u} \cdot \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v} = (\vec{v})^2 + (\vec{u})^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{u} - \vec{v})^2$$

Từ đó suy ra: $\left| \frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} \vec{u} - \frac{|\vec{u}|}{|\vec{v}|} \vec{v} \right| = |\vec{u} - \vec{v}|$ (đpcm).

Áp dụng vào bài toán cân bằng hệ số: Chúng ta có thể ghi nhớ công thức để áp dụng nhanh vào các bài toán cân bằng hệ số đối với đường tròn và mặt cầu như sau:

Ta có: $P = MA + 2MB = |\vec{IA} - \vec{IM}| + 2|\vec{IB} - \vec{IM}|$ và $IA = IB = 6, IM = 3$

$$\text{Trong đó: } |\vec{IA} - \vec{IM}| = \left| \frac{IA}{IM} \vec{IM} - \frac{IM}{IA} \vec{IA} \right| = \left| 2\vec{IM} - \frac{1}{2}\vec{IA} \right| = 2 \left| \vec{IM} - \frac{1}{4}\vec{IA} \right|$$

$$\text{Suy ra: } P = 2 \left| \vec{IM} - \frac{1}{4}\vec{IA} \right| + 2|\vec{IB} - \vec{IM}| \geq 2 \left| \vec{IM} - \frac{1}{4}\vec{IA} + \vec{IB} - \vec{IM} \right| = \left| 2\vec{IB} - \frac{1}{2}\vec{IA} \right|$$

Có:

$$\left(\left| 2\vec{IB} - \frac{1}{2}\vec{IA} \right| \right)^2 = 4IB^2 + \frac{1}{4}IA^2 - 2IA \cdot IB \cdot \cos 60^\circ = 4 \cdot 6^2 + \frac{1}{4} \cdot 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 117 \rightarrow \left| 2\vec{IB} - \frac{1}{2}\vec{IA} \right| = 3\sqrt{13}$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là $P_{\min} = 3\sqrt{13} \rightarrow$ **chọn đáp án C.**

Câu 4. Cho tứ giác $ABCD$, M là điểm tùy ý và các điểm I, J, K cố định sao cho đẳng thức thỏa mãn với mọi điểm M : $\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + 3\vec{MD} = k\vec{MK}$. Giá trị của k là

- A.** $k = 3$ **B.** $k = 4$ **C.** $k = 5$ **D.** $k = 6$

Lời giải

Chọn D

Vì $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} = k\overrightarrow{MK}$ thỏa mãn với mọi M.

Do đó, đẳng thức cũng đúng với $M \equiv K$

Tức là: $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD} = k\overrightarrow{KK} = \vec{0}$

Gọi G là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} = 3\overrightarrow{KG}$

$\Rightarrow 3\overrightarrow{KG} + 3\overrightarrow{KD} = \vec{0} \Rightarrow K$ là trung điểm GD .

Mặt khác:

$$\begin{aligned} & \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD} \\ &= (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KA}) + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KB}) + (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KC}) + 3(\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KD}) \\ &= (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + 3\overrightarrow{KD}) + 6\overrightarrow{MK} \\ &= 6\overrightarrow{MK} \\ &\Rightarrow k = 6 \end{aligned}$$

Câu 5. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi α là góc giữa hai đường trung tuyến BD và CK . Giá trị nhỏ nhất của $\cos \alpha$ bằng

- A.** $\frac{4}{5}$ **B.** $\frac{5}{4}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CK}|}{BD \cdot CK} = \frac{\left| \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) \cdot \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) \right|}{BD \cdot CK} \\ &= \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CB}|}{4 \cdot BD \cdot CK} = \frac{|\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}(\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BA}) - \overrightarrow{BC}^2|}{4 \cdot BD \cdot CK} \\ &= \frac{|-2\overrightarrow{BC}^2|}{4 \cdot BD \cdot CK} = \frac{BC^2}{2 \cdot BD \cdot CK} \quad (\text{Vì tam giác } ABC \text{ vuông tại } A \text{ nên } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 0) \end{aligned}$$

Mặt khác,

$$\begin{aligned} 2 \cdot BD \cdot CK &\stackrel{Cauchy}{\leq} BD^2 + CK^2 = \left(\frac{AB^2 + BC^2}{2} - \frac{AC^2}{4} \right) + \left(\frac{AC^2 + BC^2}{2} - \frac{AB^2}{4} \right) \\ &= BC^2 + \frac{AB^2 + AC^2}{4} = BC^2 + \frac{BC^2}{4} = \frac{5BC^2}{4} \\ \cos \alpha &\geq \frac{BC^2}{\frac{5BC^2}{4}} = \frac{4}{5} \end{aligned}$$

Suy ra,

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $BD = CK$ hay ΔABC vuông cân tại A

Câu 6. Cho hai điểm cố định G và G' là trọng tâm của tam giác ABC và tam giác $A'B'C'$. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = AA' + BB' + CC'$ bằng

- A. GG' B. $3GG'$ C. $2GG'$ D. $\frac{1}{3}GG'$

Lời giải

Chọn B

Do G và G' là trọng tâm $\Delta ABC, \Delta A'B'C'$ nên $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'} = \vec{0}$.

Ta có:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} &= (\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'}) + (\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'}) + (\overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'}) \\ &= 3\overrightarrow{GG'} + (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{G'C'}) \\ &= 3\overrightarrow{GG'} \end{aligned}$$

Mặt khác, $P = AA' + BB' + CC' = |\overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{BB'}| + |\overrightarrow{CC'}| \geq |\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}|$

$$= 3|\overrightarrow{GG'}| = 3GG'$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ cùng hướng

Họ và tên: Nguyễn Đức Hoạch – email: nguyenhoach95@gmail.com

Mail: nguyennnga82nvc@gmail.com

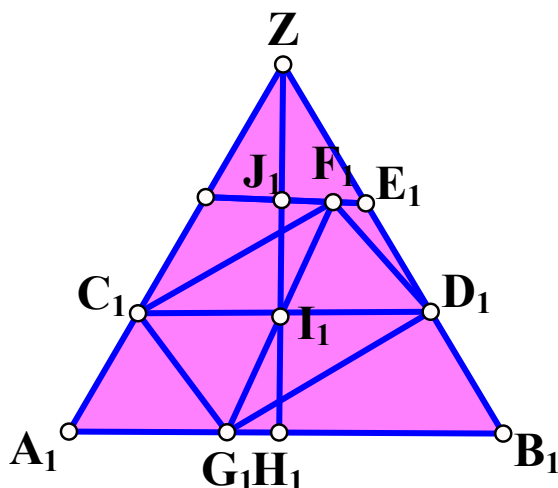
FB: Nguyễn Nga Nvc

Câu 7. Cho hình thang $A_1B_1C_1D_1$ có $A_1B_1 \parallel C_1D_1, A_1B_1 = 3a, C_1D_1 = 2a, D_1A_1B_1 = C_1B_1A_1 = 60^\circ$. Với mỗi điểm G_1 di động trên cạnh A_1B_1 ta xác định điểm F_1 sao cho $\overrightarrow{G_1F_1} = \overrightarrow{G_1C_1} + \overrightarrow{G_1D_1}$. Tìm độ dài nhỏ nhất của $\overrightarrow{G_1F_1}$.

- A. $2a$ B. $a\sqrt{3}$ C. $\frac{3a\sqrt{3}}{2}$ D. $\frac{3a}{2}$

Lời giải

Chọn B



Gọi $Z = A_1B_1C_1D_1$, từ giả thiết suy ra tam giác ZA_1B_1 đều cạnh $3a$. Gọi H_1, I_1 lần lượt là trung điểm của A_1B_1, C_1D_1 , suy ra H_1, I_1 cố định và $H_1I_1 = \frac{1}{3}ZH_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Từ giả thiết ta có tứ giác $G_1D_1F_1C_1$ là hình bình hành, nên $G_1F_1 = 2G_1I_1$ và $2H_1I_1 = a\sqrt{3}$.

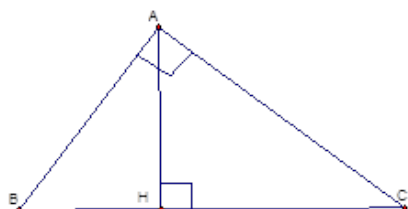
Vậy độ dài nhỏ nhất của $\overline{G_1F_1}$ bằng $a\sqrt{3}$.

Nguyễn Văn Công- Trường THPT Kinh Môn II

Gmail: nguyencongkm2@gmail.com

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông ở A; BC = 2 ; CA = b; AB = c và điểm M di động

Biểu thức $F = -8MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất bằng



A. 4

B. 12

C. 16

D. 24

Lời giải

Xét điểm I thỏa mãn: $-8\overrightarrow{IA} + b^2\overrightarrow{IB} + c^2\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ (1)

(Dựng đường cao AH, dựng I sao cho A là trung điểm IH ; I thỏa (1))

Bình phương hai vế của (1) chú ý rằng

$$2\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} = IA^2 + IB^2 - AB^2;$$

$$2\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} = IB^2 + IC^2 - BC^2$$

$$2\overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA} = IC^2 + IA^2 - AC^2$$

rồi biến đổi ta được kết quả $-8.IA^2 + b^2.IB^2 + c^2.IC^2 = 3b^2c^2$.

$$\begin{aligned}
 F &= -8MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 = -8\overline{MA}^2 + b^2\overline{MB}^2 + c^2\overline{MC}^2 \\
 &= -8(\overline{MI} + \overline{IA})^2 + b^2(\overline{MI} + \overline{IB})^2 + c^2(\overline{MI} + \overline{IC})^2 \\
 &= -4MI^2 - 8IA^2 + b^2IB^2 + c^2IC^2 = -4MI^2 + 3b^2c^2 \\
 &\leq 3b^2c^2 \leq 3\left(\frac{b^2 + c^2}{2}\right)^2 = 12
 \end{aligned}$$

Họ và tên tác giả : **Vũ Viên Tên FB: Vũ Viên**

Email: **tieplen@gmail.com**

Câu 9. Cho $\triangle ABC$ đều có cạnh bằng $2a$. Gọi d là đường thẳng qua A và song song BC , điểm M di động trên d . Tìm giá trị nhỏ nhất của $|\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC}|$.

- A. $2a\sqrt{3}$. B. $a\sqrt{3}$. C. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$. D. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

M

A

I

K

B

C

Chọn B.

$$\begin{aligned}
 \text{Xét điểm } I \text{ sao cho: } \overline{IA} + 2\overline{IB} - \overline{IC} &= \vec{0} \Leftrightarrow \overline{IA} + 2(\overline{IA} + \overline{AB}) - \overline{IC} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow 2\overline{IA} + 2\overline{AB} - \overline{AC} &= \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{IA} + \overline{AB} + \overline{CB} = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow \overline{IA} &= \frac{\overline{BA} + \overline{BC}}{2} = \overline{BK} \quad (\text{với } K \text{ là trung điểm } AC).
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow I$ là điểm thứ 4 của hình bình hành $AIBK$.

$$\begin{aligned}
 \text{Ta có: } |\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC}| &= |(\overline{MI} + \overline{IA}) + 2(\overline{MI} + \overline{IB}) - (\overline{MI} + \overline{IC})| \\
 |\overline{MA} + 2\overline{MB} - \overline{MC}| &= |2\overline{MI} + (\overline{IA} + 2\overline{IB} - \overline{IC})| = |2\overline{MI}| = 2MI
 \end{aligned}$$

$M \in d \Rightarrow$ Min đạt được khi $LM \perp d$. Khi đó:

$$\angle MAI = \angle MAB - \angle IAB = 60^\circ - \angle ABK = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ$$

$$2IM = 2IA \cdot \sin 30^\circ = 2BK \cdot \sin 30^\circ = 2 \sin 30^\circ \cdot \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

Họ và tên tác giả: **Phạm Khắc Thành**

Email: **phamkhacthanhkt@gmail.com**

Câu 10. Trong mặt phẳng cho tam giác ABC và một điểm M bất kỳ. Đặt $a = BC, b = CA, c = AB$. Tìm

giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = \frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c}$.

- A. $3\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

Chọn B.

Theo công thức độ dài đường trung tuyến ta có:

$$4m_a^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \Rightarrow 2(b^2 + c^2 + a^2) = 4m_a^2 + 3a^2 \geq 4\sqrt{3}am_a \Rightarrow am_a \leq \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2\sqrt{3}}$$

Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC khi đó:

$$\frac{MA}{a} = \frac{MA \cdot GA}{a \cdot GA} \geq \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{GA}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{b^2 + c^2 + a^2}{2\sqrt{3}}} = \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2} (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot \overrightarrow{GA} = \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2} (\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + GA^2)$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2} \left[\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + GA^2 + GB^2 + GC^2 \right]$$

Lại có $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ và $GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$

$$\frac{MA}{a} + \frac{MB}{b} + \frac{MC}{c} \geq \frac{3\sqrt{3}}{b^2 + c^2 + a^2} \left[0 + \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2) \right] = \sqrt{3}$$

Do đó $\sqrt{3}$ là giá trị nhỏ nhất của biểu thức. Đẳng thức xảy ra khi tam giác ABC đều đồng thời M trùng với trọng tâm của tam giác ABC.

Mail: thuytrangmn@gmail.com

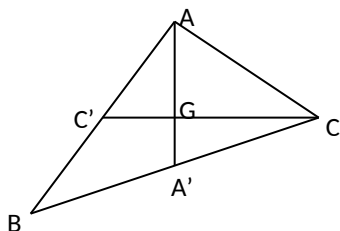
Chủ đề: Vector.

Câu 11. Cho tam giác ABC có trung tuyến $AA' \perp CC'$ ($A' \in BC, C' \in AB$). Tìm giá trị nhỏ nhất của $\cos B$.

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{2}{5}$. C. 1. D. $\frac{1}{2}$.

Lời giải:

Chọn. **A.**



Đặt $\overrightarrow{BC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BA} = \vec{c}$ ta có:

$$\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c} \quad \text{và} \quad \overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}$$

Do $AA' \perp CC'$ nên $\left(\frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{c} - \vec{a}\right) = 0$

$$\Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{2}{5}(\vec{a}^2 + \vec{c}^2) = \frac{2}{5}(|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2) \geq \frac{4}{5}|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|$$

+ Nếu $\vec{a} \cdot \vec{c} = 0$ thì $\cos B = 1$

+ Nếu $\vec{a} \cdot \vec{c} \neq 0$ thì $\cos B = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{c}|} \geq \frac{4}{5}$. Dấu đẳng thức xảy ra khi $|\vec{a}| = |\vec{c}|$

Vậy giá trị nhỏ nhất của $\cos B$ là $\frac{4}{5}$, đạt được khi tam giác ABC cân tại B.

Họ và tên tác giả : Vũ Thị Hồng Lê Tên FB: Hồng Lê

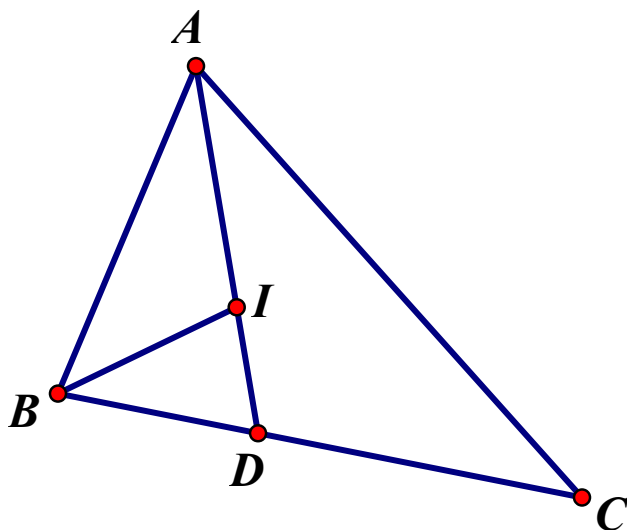
Email: hongle.ad@gmail.com

Câu 12. Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Tìm điểm M để vectơ $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất

- A.** M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.
- B.** M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.
- C.** M trùng với trực tâm H của tam giác ABC.
- D.** M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

Lời giải

Chọn B.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

Theo tính chất phân giác trong: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow DB = \frac{c}{b} \cdot DC$, mà hai vecto $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$ ngược hướng nên ta có

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b} \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow b(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}) + c(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}) = \vec{0}$$

hay (*)

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{c}{b+c} \Leftrightarrow DB = \frac{ac}{b+c}$$

Mặt khác

$$\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{c(b+c)}{ac} = \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow aIA = (b+c)ID$$

$$\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID} \text{ ngược hướng nên } a\overrightarrow{IA} = -(b+c)\overrightarrow{ID}$$

$$\text{Thay vào (*) ta có } b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} + a\overrightarrow{IA} = \vec{0}$$

Vậy độ dài của $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng I

Họ và tên: Ngô Gia Khánh

Địa chỉ mail: ngkhanh4283@gmail.com

Câu 13. Cho tam giác ABC là tam giác đều cạnh bằng a , M là điểm di động trên đường thẳng AC .

Khi đó, giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ là:

A. $MinT = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$. **B.** $MinT = 2a\sqrt{3}$. **C.** $MinT = a\sqrt{3}$. **D.** $MinT = \frac{5a\sqrt{3}}{2}$.

Lời giải

+, Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có: $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG}$.

+, Dựng hình bình hành $ABCD$, ta được:

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$$

$$T = |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| + 3|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 3(MG + MD) \geq 3GD$$

+, Khi đó

(Vì G, D nằm khác phía với đường thẳng AC)

Dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của GD và đường thẳng AC hay M là trung điểm của AC

$$GD = \frac{4}{3}BM = \frac{4}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

+ Nhận xét

$$\text{Vậy } MinT = 2a\sqrt{3}.$$

Email: vntip3@gmail.com

Câu 14. Cho $\triangle ABC$ và $\triangle A'B'C'$ có các trọng tâm G và G' cố định và $GG' = a$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của $T = AA' + BB' + CC'$ là:

- A. $T = a$. B. $T = 2a$. C. $T = 3a$. D. $T = 4a$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} \\ &= \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A'} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B'} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'C'} \\ &= 3\overrightarrow{GG'} \end{aligned}$$

Vậy

$$\begin{aligned} T &= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} \\ &= |\overrightarrow{AA'}| + |\overrightarrow{BB'}| + |\overrightarrow{CC'}| \geq |\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}| = 3|\overrightarrow{GG'}| = 3GG' = 3a \end{aligned}$$

Giá trị nhỏ nhất của T là 3a khi $\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}$ cùng phương.

(Họ và tên tác giả : Phạm văn Tài, Tên FB: TaiPhamVan)

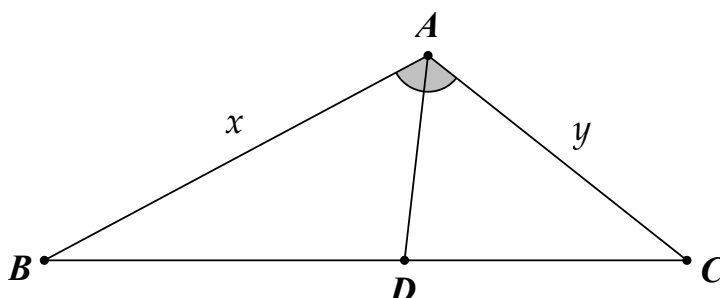
Mail: thongbui1987@gmail.com

Câu 15. Cho tam giác ABC với các cạnh $AB = x, AC = y$; ($x > y > 0$). Gọi AD là đường phân giác trong của góc A . Biết biểu thị vectơ $\overrightarrow{AD} = m\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AC}$. Tính $S = m + n$.

- A. $S = -2$. B. $S = 0$. C. $S = 1$. D. $S = 2$.

Lời giải

Chọn C.



Theo tính chất đường phân giác trong của tam giác ta có

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{x}{y} \rightarrow \frac{\overrightarrow{DB}}{\overrightarrow{DC}} = -\frac{x}{y} \rightarrow \text{điểm } D \text{ chia đoạn thẳng } BC \text{ theo tỉ số } k = -\frac{x}{y}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AB} + \frac{x}{y}\overrightarrow{AC}}{1 + \frac{x}{y}} = \frac{y}{x+y}\overrightarrow{AB} + \frac{x}{x+y}\overrightarrow{AC} \rightarrow m + n = \frac{y+x}{x+y} = 1$$

Nên ta có:

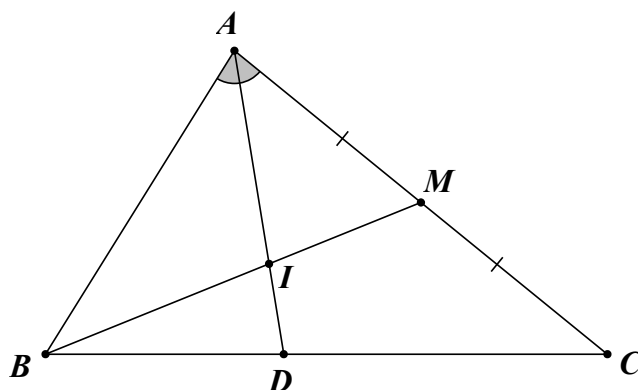
Câu 16. Cho $\triangle ABC$ có $AB = 3$; $AC = 4$. Phân giác trong AD của góc $\widehat{BAC}$ cắt trung tuyến BM tại I

. Biết $\frac{AD}{AI} = \frac{a}{b}$, với $a, b \in \mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $S = a + 2b$.

- A. $S = 10$. B. $S = 14$. C. $S = 24$. D. $S = 27$.

Lời giải:

Chọn C.



Ta có: $\frac{IB}{IM} = \frac{AB}{AM} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IM} = \vec{0} \Rightarrow 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AI} \quad (1)$

$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4} \Rightarrow 4\overrightarrow{DB} + 3\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Rightarrow 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 7\overrightarrow{AD} \quad (2)$

Từ (1) và (2) ta có hệ
$$\begin{cases} 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AM} = 5\overrightarrow{AI} \\ 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 7\overrightarrow{AD} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AM} = 10\overrightarrow{AI} \\ 4\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = 7\overrightarrow{AD} \end{cases}$$

$\rightarrow 6\overrightarrow{AM} - 3\overrightarrow{AC} = 10\overrightarrow{AI} - 7\overrightarrow{AD} \Rightarrow 7\overrightarrow{AD} = 10\overrightarrow{AI} \Rightarrow 7AD = 10AI \Rightarrow \frac{AD}{AI} = \frac{10}{7}$
 $\rightarrow a = 10, b = 7 \rightarrow S = 10 + 2 \cdot 7 = 24$

Họ và tên tác giả : Lê Hồng Phi Tên FB: Lê Hồng Phi

Email: lehongphivts@gmail.com

Câu 17. Cho tứ giác $ABCD$ có AD và BC cùng vuông góc với AB , $AB = 8$, $AD = a$, $BC = b$. Gọi

E là một điểm thuộc cạnh CD . Biết $\angle AEB = 90^\circ$, giá trị lớn nhất của $T = ab$ là

A. 4. **B.** 16. **C.** 8. **D.** 64.

Lời giải

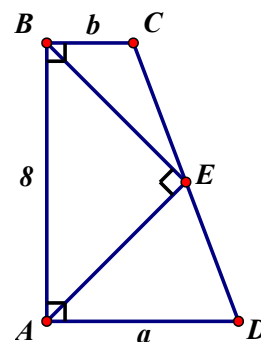
Chọn B.

Vì E là một điểm thuộc cạnh CD nên tồn tại $k \in (0;1)$ sao cho

$$k\overrightarrow{EC} + (1-k)\overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

Khi đó, $k\overrightarrow{BC} + (1-k)\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE}$ và $k\overrightarrow{AC} + (1-k)\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$

Suy ra



$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AE} &= k^2 \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + k(1-k) \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + k(1-k) \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} + (1-k)^2 \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} \\
 &= k^2 \overrightarrow{BC} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + k(1-k) ab + k(1-k) (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (1-k)^2 (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \overrightarrow{AD} \\
 &= k^2 b^2 + k(1-k) ab + k(1-k) (-h^2 + ab) + (1-k)^2 a^2 \\
 &= (kb + (1-k)a)^2 - 64k(1-k).
 \end{aligned}$$

$$\angle AEB = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \Leftrightarrow kb + (1-k)a = 8\sqrt{k(1-k)} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{1-k}}b + \sqrt{\frac{1-k}{k}}a = 8$$

Do

$$8 = \sqrt{\frac{k}{1-k}}b + \sqrt{\frac{1-k}{k}}a \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow ab \leq 16$$

Theo bất đẳng thức Cô-si ta có

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn khi $a = b = 4$ và $k = 0,5$.

Vậy $\max T = 16$.

Câu 18. Cho tứ giác $ABCD$ có AD và BC cùng vuông góc với AB , $AB = h$, $AD = a$, $BC = b$. Cho k là số thực dương thuộc $(0;1)$ và điểm E thỏa mãn $k\overrightarrow{EC} + (1-k)\overrightarrow{ED} = \vec{0}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a , b , h , k để góc $\angle AEB = 90^\circ$?

A. $(1-k)b + ka = h\sqrt{k(1-k)}$

B. $kb + (1-k)a = hk(1-k)$

C. $kb + (1-k)a = h\sqrt{k(1-k)}$

D. $(1-k)b + ka = hk(1-k)$

Lời giải

Chọn C.

$$k\overrightarrow{EC} + (1-k)\overrightarrow{ED} = \vec{0}$$

Từ suy ra

$$k\overrightarrow{BC} + (1-k)\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} \quad k\overrightarrow{AC} + (1-k)\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE}$$

và

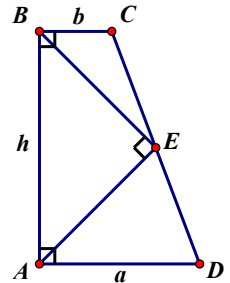
Khi đó,

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AE} &= k^2 \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AC} + k(1-k) \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} + k(1-k) \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AC} + (1-k)^2 \overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{AD} \\
 &= k^2 \overrightarrow{BC} (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + k(1-k) ab + k(1-k) (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) + (1-k)^2 (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) \overrightarrow{AD} \\
 &= k^2 b^2 + k(1-k) ab + k(1-k) (-h^2 + ab) + (1-k)^2 a^2 \\
 &= (kb + (1-k)a)^2 - k(1-k)h^2.
 \end{aligned}$$

$$\angle AEB = 90^\circ \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AE} = 0 \Leftrightarrow kb + (1-k)a = h\sqrt{k(1-k)}$$

Do nên

Vậy hệ thức liên hệ giữa a , b , h , k để góc $\angle AEB = 90^\circ$ là $kb + (1-k)a = h\sqrt{k(1-k)}$.



Câu 19. Cho tam giác có trọng tâm G , qua G dựng đường thẳng d cắt các cạnh AB , AC lần lượt tại M , N . Đặt $\frac{AM}{AB} = x$, $\frac{AN}{AC} = y$, gọi m , M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của $T = x + y$. Tính $m + M$.

A. $\frac{10}{3}$.

B. $\frac{17}{6}$.

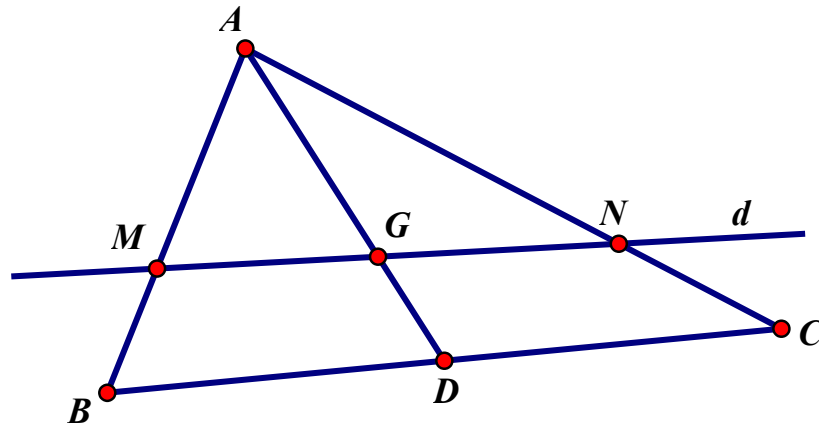
C. $\frac{11}{6}$.

D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

(Họ và tên tác giả: Hoàng Thị Thanh Nhân, Tên FB: Hoàng Nhân)

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN} = y\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = -x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{MG} = \left(\frac{1}{3} - x\right)\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.

Do M , N , G thẳng hàng nên $\overrightarrow{MG} = k\overrightarrow{MN} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} - x = -kx \\ \frac{1}{3} = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} = (1-k)x \\ \frac{1}{3} = ky \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3x} = 1-k \\ \frac{1}{3y} = k \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 3$.

$\Rightarrow y = \frac{x}{3x-1}$.

Do M , N lần lượt nằm trên các cạnh AB , AC nên $\frac{1}{2} \leq x, y \leq 1$.

$3 = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \Rightarrow xy \geq \frac{4}{9} \Rightarrow T = x + y = 3xy \geq \frac{4}{3}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x = y = \frac{2}{3}$.

$\Rightarrow$ giá trị nhỏ nhất $m = \frac{4}{3}$.

Ta có $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \Leftrightarrow (2x-1)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 - 3x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow 2x^2 \leq 3x - 1 \Leftrightarrow \frac{2x^2}{3x-1} \leq 1$
 $\Leftrightarrow \frac{3x^2}{3x-1} \leq \frac{3}{2}$.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = 1 \end{cases}$

Ta có $T = x + y = 3xy = \frac{3x^2}{3x-1} \leq \frac{3}{2}$

$\Rightarrow$ giá trị lớn nhất là $M = \frac{3}{2}$.

Vậy $m + M = \frac{4}{3} + \frac{3}{2} = \frac{17}{6}$.

Họ và tên: Nguyễn Thị Thu

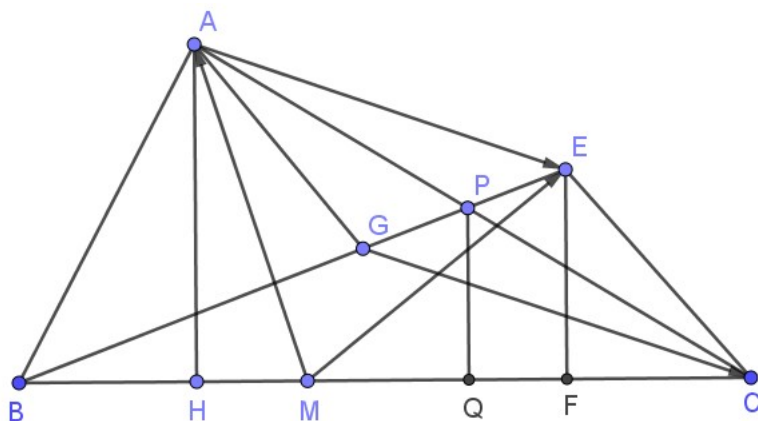
Email: thutoan83@gmail.com

Facebook: Nguyễn Thị Thu

- Câu 20.** Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overline{BH} = \frac{1}{3}\overline{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overline{BM} = x\overline{BC}$. Tìm x sao cho $|\overline{MA} + \overline{GC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{5}{4}$. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{6}{5}$.

Lời giải

Chọn B.



Dựng hình bình hành AGCE. Ta có $|\overline{MA} + \overline{GC}| = |\overline{MA} + \overline{AE}| = |\overline{ME}| = ME \geq FE$.

Do đó $|\overline{MA} + \overline{GC}|$ nhỏ nhất khi $M \equiv F$.

Gọi P là trung điểm của AC; Q, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của P, E trên BC.

Ta có $\triangle BPQ$ và $\triangle BEF$ đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4}$ hay $\overline{BF} = \frac{4}{3}\overline{BQ}$.

Có PQ là đường trung bình của $\triangle AHC$ nên Q là trung điểm của HC hay $\overline{HQ} = \frac{1}{2}\overline{HC}$.

$$\overline{BQ} = \overline{BH} + \overline{HQ} = \frac{1}{3}\overline{HC} + \frac{1}{2}\overline{HC} = \frac{5}{6}\overline{HC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}\overline{BC} = \frac{5}{8}\overline{BC}$$

Do đó $\overline{BF} = \frac{4}{3}\overline{BQ} = \frac{5}{6}\overline{BC}$. Vậy $x = \frac{5}{6}$.

gmail: hoangthuyvinhuni@gmail.com

Câu 21. Cho tam giác ABC đều cạnh $2\sqrt{3}$, d là đường thẳng qua B và tạo với AB một góc 60° ($C \notin d$). Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |\overline{MA} + \overline{MB} + 3\overline{MC}|$?

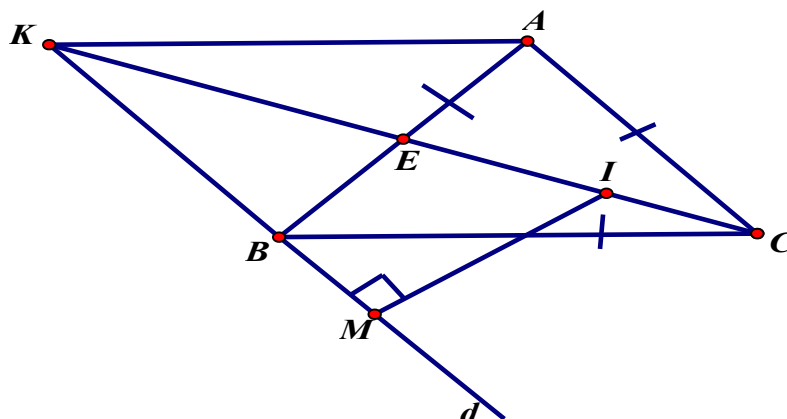
A. $\frac{3}{5}$

B. $\frac{12}{5}$

C. $\frac{4}{5}$

D. 2

Lời giải



Gọi E là trung điểm AB.

Gọi I là điểm thỏa mãn: $\overline{IA} + \overline{IB} + 3\overline{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overline{IE} + 3\overline{IC} = \vec{0}$

$\Rightarrow I$ nằm giữa đoạn EC và $EI = \frac{3}{5}EC$

Ta có: $\overline{MA} + \overline{MB} + 3\overline{MC} = 2\overline{MI} + \overline{IA} + \overline{IB} + 3\overline{MI} + 3\overline{IC} = 5\overline{MI}$

Vậy $A = |5\overline{MI}|_{\min} \Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I trên đường thẳng d.

Đường thẳng d qua B và tạo với AB 1 góc 60° nên d song song AC và cắt EC tại K.

$\Rightarrow \triangle KEB = \triangle CEA$ (g.c.g) nên E là trung điểm KC

$$EC = a \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3 \Rightarrow EI = \frac{3}{5} \cdot 3 = \frac{9}{5}$$

$$KI = \frac{9}{5} + 3 = \frac{24}{5}$$

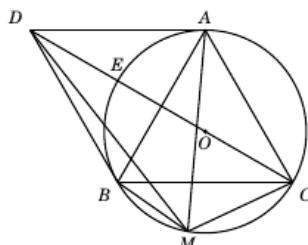
$$\triangle EKB \sim \triangle MKI \Rightarrow \frac{EB}{MI} = \frac{KB}{KI} \Rightarrow MI = \frac{EB \cdot KI}{KB} = \frac{12}{5}$$

(Tác giả: Hoàng Thị Thúy- Facebook: Cỏ ba lá)

Câu 22. Cho tam giác ABC đều cạnh 1 nội tiếp đường tròn (O) và điểm M thay đổi trên O . Gọi s, i lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}|$. Tính $s+i$.

- A. $s+i = \sqrt{3}$. B. $s+i = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. C. $s+i = \frac{5\sqrt{3}}{3}$. D. $s+i = 2\sqrt{3}$.

Lời giải



Dựng hình bình hành $DBCA$. Ta có

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB} - \overrightarrow{MD} - \overrightarrow{DC}| = |\overrightarrow{MD}| = MD.$$

Gọi E là giao điểm khác C của DC với (O) . Áp dụng bất đẳng thức tam giác ta có $MD \geq DO - OM = DO - OE = DE$ và $MD \leq DO + OM = DO + OC = DC$

Dấu bằng xảy ra lần lượt khi M trùng E và M trùng C .

$$s+i = DE + DC = DC - CE + DC = 2DC - 2OC = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy

buiduynam1993@gmail.com

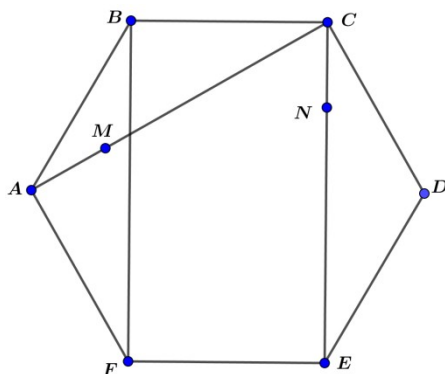
Câu 23. Cho lục giác đều $ABCDEF$ cạnh a . Trên đường chéo AC , CE lấy hai điểm M, N sao cho $\frac{AM}{AC} = \frac{CN}{CE} = k$ ($0 < k < 1$). Độ dài $BM^2 + BN^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi k bằng bao nhiêu?

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{1}{4}$. C. $\frac{2}{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

(Bùi Duy Nam sưu tầm. FB: Bùi Duy Nam)

Chọn B.



Ta có $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}$ mà $\frac{AM}{AC} = k \Rightarrow \overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AC} = k(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA})$.

Vậy $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + k(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) \Rightarrow \overrightarrow{BM} = k\overrightarrow{BC} + (1-k)\overrightarrow{BA}$.

Lại có $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ mà $\frac{CN}{CE} = k \Rightarrow \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{CE} = k(\overrightarrow{CF} + \overrightarrow{FE}) = k(2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$.

Vậy $\overrightarrow{BN} = (k+1)\overrightarrow{BC} + 2k\overrightarrow{BA}$.

Khi đó $BM^2 + BN^2 = [k\overrightarrow{BC} + (1-k)\overrightarrow{BA}]^2 + [(k+1)\overrightarrow{BC} + 2k\overrightarrow{BA}]^2$
 $= k^2 BC^2 + (1-k)^2 BA^2 + 2k(1-k)\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} + (k+1)^2 BC^2 + 4k^2 BA^2 + 4k(k+1)\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

Mà $BC^2 = BA^2 = a^2$ và $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \frac{BC^2 + BA^2 - AC^2}{2} = -\frac{a^2}{2}$.

Vậy $BM^2 + BN^2 = a^2(6k^2 - 3k + 2) \quad (0 < k < 1)$.

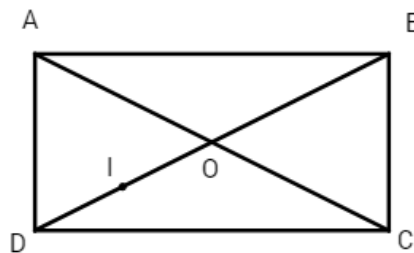
$\Rightarrow \min(BM^2 + BN^2) = a^2 \min_{0 < k < 1} (6k^2 - 3k + 2)$

Xét $f(k) = 6k^2 - 3k + 2 \quad (0 < k < 1)$, ta có $\min_{0 < k < 1} f(k) = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{13}{8}$.

Vậy $\min(BM^2 + BN^2) = \frac{13a^2}{8}$ khi $k = \frac{1}{4}$.

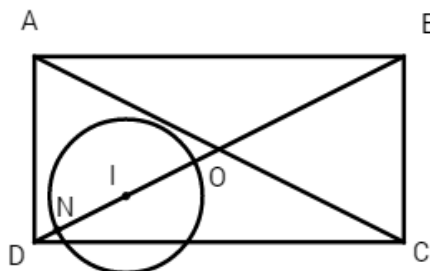
Câu 24. Cho hình chữ nhật $ABCD$ có $AD = a$, $AB = b$. O và I lần lượt là trung điểm DB và DO .

N là điểm thỏa mãn $|2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}| = |2\overrightarrow{AD}|$ và NB lớn nhất. Tính NB .



- A. $\frac{2a + 3\sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ B. $\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$ C. $\frac{2a + 3\sqrt{a^2 + b^2}}{4}$ D. $\frac{2a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4}$.

Lời giải



$$2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 4\overrightarrow{NO} + \overrightarrow{BD} = 4\overrightarrow{NO} + 4\overrightarrow{OI} = 4\overrightarrow{NI}$$

$$NI = \frac{AD}{2} = \frac{a}{2}$$

Suy ra

Để NB lớn nhất thì N là giao điểm của đường tròn tâm I bán kính $\frac{a}{2}$ với BD (N và B khác phía so với I).

$$NB = NI + IB = \frac{a}{2} + \frac{3}{4}\sqrt{a^2 + b^2} = \frac{2a + 3\sqrt{a^2 + b^2}}{4}$$

Do đó

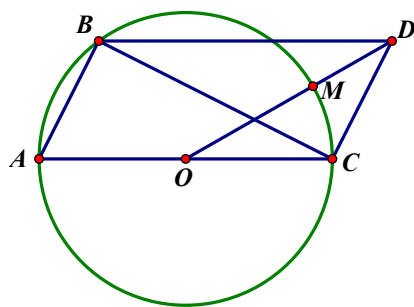
Họ tên tác giả : Đoàn Phú Như Tên fb : Như Đoàn

Email : doanphunhu@gmail.com

Câu 25. Cho tam giác ABC, $AB = 3(\text{cm})$, $BC = 4(\text{cm})$, $CA = 5(\text{cm})$. Điểm M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MB^2 + MC^2 - MA^2$ là

- A. 0. B. $5 - \frac{5\sqrt{97}}{2}$ C. $5 + \frac{5\sqrt{97}}{2}$ D. $5 - \frac{5\sqrt{97}}{4}$

Lời giải :



Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC thì O là trung điểm AC.

Gọi D đỉnh thứ tư của hình bình hành ABDC thì $\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \vec{0}$

Ta có
$$P = MB^2 + MC^2 - MA^2 = \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 - \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DB})^2 + (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DC})^2 - (\overrightarrow{MD} + \overrightarrow{DA})^2$$

$$P = MD^2 + DB^2 + DC^2 - DA^2 + 2\overrightarrow{MD}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}) = MD^2 + DB^2 + DC^2 - DA^2 = MD^2 - 18$$

Do đó P nhỏ nhất khi và chỉ khi DM nhỏ nhất.

Vì M thuộc đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên DM nhỏ nhất khi và chỉ khi O, M, D theo thứ tự thẳng hàng.

Ta có
$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow OD^2 = \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)^2 = \frac{1}{4}AC^2 + AB^2 + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$OD^2 = \frac{25}{4} + 9 + 5 \cdot 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{97}{4} \Rightarrow MD = OD - OM = \frac{\sqrt{97}}{2} - \frac{5}{2}$$

$$\text{Min}P = \left(\frac{\sqrt{97}}{2} - \frac{5}{2}\right)^2 - 18 = 5 - \frac{5\sqrt{97}}{2}$$

Vậy

Chọn đáp án B

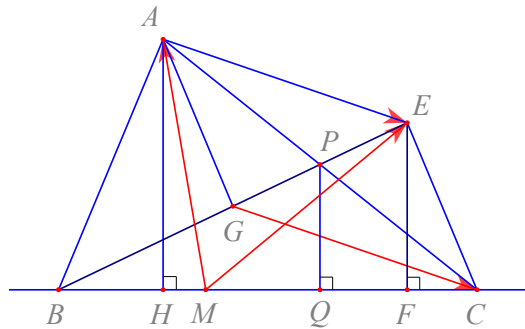
Câu 26. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x \overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{6}{5}$. D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Chọn B.



Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$.

Kẻ $EF \perp BC$ ($F \in BC$). Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{ME}| = ME \geq EF$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất khi $M \equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC , Q là hình chiếu vuông góc của P lên BC ($Q \in BC$).

Khi đó P là trung điểm GE nên $BP = \frac{3}{4} BE$.

Ta có $\triangle BPQ$ và $\triangle BEF$ đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4}$ hay $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3} \overrightarrow{BQ}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HC}$.

PQ là đường trung bình $\triangle AHC$ nên Q là trung điểm HC hay $\overrightarrow{HQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HC}$.

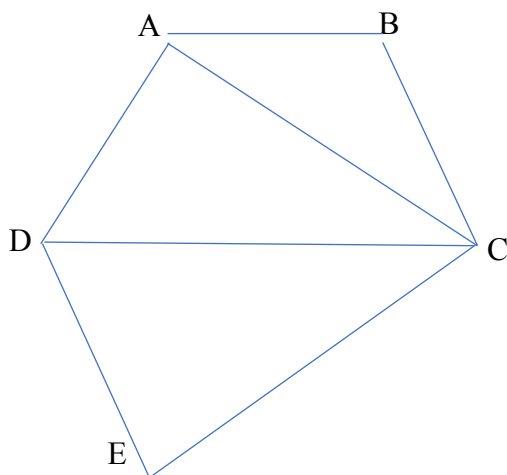
Suy ra $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HC} = \frac{5}{6} \overrightarrow{HC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \overrightarrow{BC} = \frac{5}{8} \overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3} \overrightarrow{BQ} = \frac{5}{6} \overrightarrow{BC}$.

Câu 27. Cho hình thang $ABCD$ có đáy CD gấp đôi đáy AB . Lấy một điểm E sao cho $3\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{DE}$ và đồng thời thỏa mãn $CA = CE$. Giá trị nhỏ nhất của góc $\angle ABC$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

- A. $(95^\circ; 100^\circ)$. B. $(100^\circ; 106^\circ)$. C. $(106^\circ; 115^\circ)$. D. $(115^\circ; 120^\circ)$.

Lời giải:



Gọi $\alpha = \angle ABC$. Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \rightarrow AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos \alpha$ (1)

Lại có: $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} = -2\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} \rightarrow CE^2 = AC^2 = 4AB^2 + \frac{9}{4}BC^2 + 6AB \cdot BC \cdot \cos \alpha$
(2)

Lấy (2) – (1) về theo về ta được :

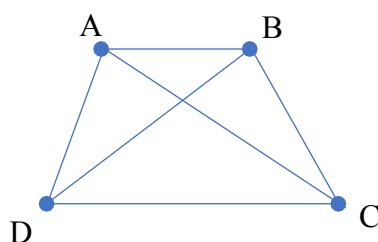
$$0 = 3AB^2 + \frac{5}{4}BC^2 + 8AB \cdot BC \cdot \cos \alpha \rightarrow \cos \alpha = -\left(\frac{3AB}{8BC} + \frac{5BC}{32AB}\right) \leq -2 \cdot \sqrt{\frac{3AB}{8BC} \cdot \frac{5BC}{32AB}} = -\frac{\sqrt{15}}{8}$$

Suy ra: $\alpha \geq 118,96^\circ \rightarrow GTNN$ của α nằm trong khoảng $(115^\circ; 120^\circ) \rightarrow$ **chọn đáp án D.**

Câu 28. Cho hình thang ABCD có $2\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, $AC = 8, BD = 6$, góc tạo bởi hai véc tơ $\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{BD}$ bằng 120° . Khi đó giá trị của $(AD + BC)$ bằng:

- A. $\frac{13+2\sqrt{5}}{2}$. B. $\frac{14+4\sqrt{7}}{3}$. C. $\frac{15+2\sqrt{10}}{4}$. D. $6+4\sqrt{3}$.

Lời giải:



Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$. Suy ra: $2\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}) + 3\overrightarrow{BC} = 3\overrightarrow{BC}$

Bình phương vô hướng hai vế ta được:

$$9BC^2 = 4AC^2 + BD^2 + 4AC \cdot BD \cdot \cos 120^\circ = 4 \cdot 8^2 + 6^2 + 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ \rightarrow BC = \frac{14}{3}$$

Tương tự ta có:

Ta có: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}$. Suy ra: $\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{BD} = (2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + 3\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AD}$

Bình phương vô hướng hai vế ta được:

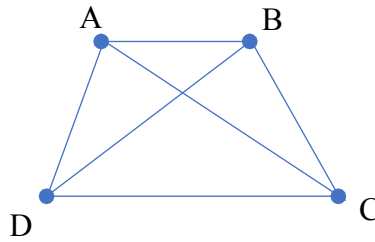
$$9AD^2 = AC^2 + 4BD^2 + 4AC \cdot BD \cdot \cos 120^\circ = 8^2 + 4 \cdot 6^2 + 4 \cdot 8 \cdot 6 \cdot \cos 120^\circ \rightarrow AD = \frac{4\sqrt{7}}{3}$$

Suy ra: $(AD + BC) = \frac{14 + 4\sqrt{7}}{3} \rightarrow$ **chọn đáp án B.**

Câu 29. Cho hình thang ABCD có $2\overline{AB} = \overline{DC}$, $AC = 9, BD = 6$. Giá trị của biểu thức $(BC^2 - AD^2)$ bằng:

- A.** 15. **B.** $\frac{80}{3}$. **C.** 12. **D.** 14.

Lời giải:



Ta có: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$ và $\overline{BD} = \overline{BC} + \overline{CD}$. Suy ra: $2\overline{AC} + \overline{BD} = (2\overline{AB} + \overline{CD}) + 3\overline{BC} = 3\overline{BC}$

Bình phương vô hướng hai vế ta được:

$$9BC^2 = 4AC^2 + BD^2 + 4\overline{AC} \cdot \overline{BD} \quad (1)$$

Tương tự ta có:

Ta có: $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC}$ và $\overline{BD} = \overline{BA} + \overline{AD}$. Suy ra: $\overline{AC} + 2\overline{BD} = (2\overline{BA} + \overline{BC}) + 3\overline{AD} = 3\overline{AD}$

Bình phương vô hướng hai vế ta được:

$$9AD^2 = AC^2 + 4BD^2 + 4\overline{AC} \cdot \overline{BD} \quad (2)$$

Lấy (1) trừ đi (2) vế theo vế, ta được : $BC^2 - AD^2 = \frac{AC^2 - BD^2}{3} = \frac{9^2 - 6^2}{3} = 15 \rightarrow$ **Chọn đáp án A.**

Suy ra: $(AD + BC) = \frac{14 + 4\sqrt{7}}{3} \rightarrow$ **chọn đáp án B.**

Câu 30. Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 60^\circ$ và AB, AC đã biết. Biểu thức $P = k \cdot MA + MB + MC$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng $(AB + AC)$ với mọi giá trị thực $k \geq k_0$. Giá trị của k_0 nằm trong khoảng nào dưới đây ?

- A.** $(0; 1)$. **B.** $(\frac{3}{2}; 2)$. **C.** $(1; \frac{3}{2})$. **D.** $(2; 3)$.

Lời giải:

Ta có: $|\overline{u}| \cdot |\overline{v}| \geq \overline{u} \cdot \overline{v} \Leftrightarrow |\overline{u}| \geq \overline{u} \cdot \frac{\overline{v}}{|\overline{v}|}$ và: $\overline{u} \cdot \overline{v} \geq -|\overline{u}| \cdot |\overline{v}|$. Áp dụng vào bài này, ta có :

$$P = k \cdot MA + MB + MC \geq k \cdot MA + \overrightarrow{MB} \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \overrightarrow{MC} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = k \cdot MA + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{AC}$$

$$\Leftrightarrow P \geq k \cdot MA + AB + AC + \overrightarrow{MA} \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right) \geq k \cdot MA + AB + AC - MA \cdot \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right|$$

$$\Leftrightarrow P \geq MA \left(k - \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| \right) + AB + AC$$

Giả thiết cho biết:

$$P \geq MA \left(k - \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| \right) + AB + AC \geq AB + AC$$

$$\text{Suy ra: } \left(k - \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| \right) \geq 0 \rightarrow k \geq \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right|$$

Sử dụng bình phương vô hướng để tính:

$$\left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right|^2 = \left(\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \right)^2 + \left(\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right)^2 + 2 \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} \cdot \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = 1 + 1 + 2 \cdot \cos 60^\circ = 3$$

$$\text{Suy ra: } k \geq \left| \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} + \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} \right| = \sqrt{3} = k_0. \text{ Vậy ta chọn đáp án B.}$$

Email: hongle.ad@gmail.com

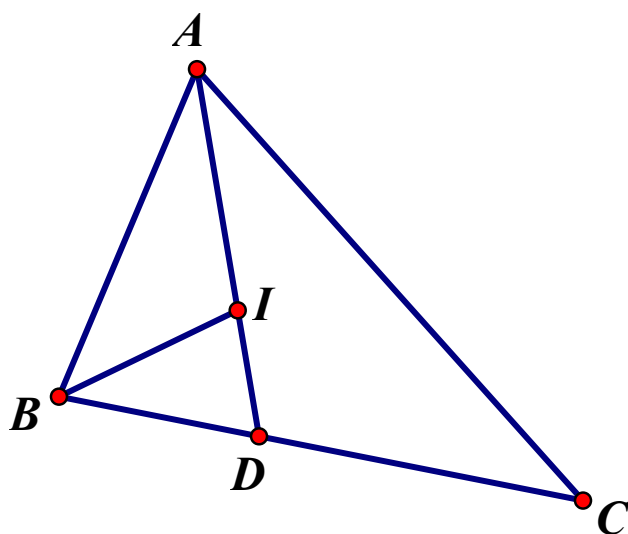
Câu 31. Cho tam giác ABC có các cạnh $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$. Tìm điểm M để vecto $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ có độ dài nhỏ nhất

- A.** M trùng với trọng tâm G của tam giác ABC.
- B.** M trùng với tâm đường tròn nội tiếp I của tam giác ABC.
- C.** M trùng với trực tâm H của tam giác ABC.
- D.** M trùng với tâm đường tròn ngoại tiếp I của tam giác ABC.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Vũ Thị Hồng Lê Tên FB: Hồng Lê

Chọn B.



Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC

Theo tính chất phân giác trong: $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow DB = \frac{c}{b} \cdot DC$, mà hai vectơ $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{DB}$ ngược hướng nên ta có

$$\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b} \overrightarrow{DC} \Leftrightarrow b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0} \Leftrightarrow b(\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{ID}) + c(\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}) = \vec{0}$$

hay (*)

$$\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b} \Leftrightarrow \frac{DB}{BC} = \frac{c}{b+c} \Leftrightarrow DB = \frac{ac}{b+c}$$

Mặt khác

$$\frac{IA}{ID} = \frac{BA}{BD} = \frac{c(b+c)}{ac} = \frac{b+c}{a} \Leftrightarrow aIA = (b+c)ID$$

Mà $\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{ID}$ ngược hướng nên $a\overrightarrow{IA} = -(b+c)\overrightarrow{ID}$

$$\text{Thay vào (*) ta có } b\overrightarrow{IB} + c\overrightarrow{IC} + a\overrightarrow{IA} = \vec{0}$$

Vậy độ dài của $a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC}$ nhỏ nhất bằng 0 khi M trùng I

Email: nguyentuyetle77@gmail.com

Câu 32. Cho tam giác ABC đều cạnh a và điểm M thay đổi. Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = 2MA^2 + 3MB^2 - 4MC^2$ là:

- A. $14a^2$ B. $-14a^2$ C. $-\frac{26a^2}{3}$ D. $\frac{26a^2}{3}$

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thị Tuyết Lê FB: Nguyen Tuyet Le

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Ta có: $P = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 - 4(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC})^2$

$$= MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 4\overrightarrow{GC})$$

$$= MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} - 6\overrightarrow{GC})$$

$$= MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC}) + GC^2$$

$$= MG^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC})^2 - 42GC^2$$

$$(\overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC})^2 = CB^2 - 10\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{GC} + 25GC^2 = 43 \cdot \frac{a^2}{3} = 43GC^2$$

(Vì $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{GC} = \frac{1}{2}CB \cdot GC \cdot \cos 120^\circ = -\frac{1}{4}CB \cdot GC = -\frac{1}{4}a \cdot \frac{a}{3} = -\frac{a^2}{12}$)

$$P = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{CB} - 5\overrightarrow{GC})^2 - 42GC^2 \geq -42GC^2 = -14a^2$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = 5\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{CB}$$

Vậy min $P = -14a^2$ khi M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{MG} = 5\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{CB}$

Họ và tên tác giả : Đặng Văn Tâm Tên FB: Đặng Văn Tâm

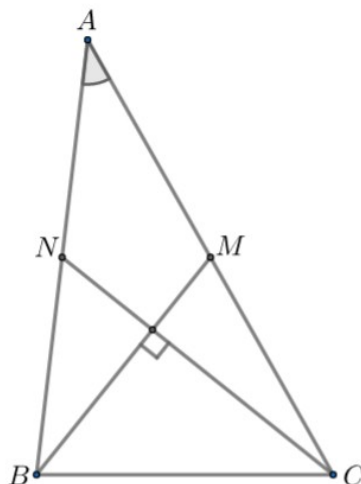
Email: dvtam0189@gmail.com

Câu 33. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của $\cos A$.

- A. $\frac{1}{2}$. B. $\frac{2}{3}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{4}{5}$.

Lời giải

Chọn D



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC, AB . Ta có:

$$\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}.$$

Theo giả thiết $BM \perp CN$ nên ta có $\overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$ hay

$$(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{AB}.$$

Mà $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ nên suy ra

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{2}{5}(AB^2 + AC^2).$$

Áp dụng định nghĩa tích vô hướng, kết hợp Bất đẳng thức Cosi ta có

$$\cos A = \cos(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{AB \cdot AC} = \frac{2}{5} \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} \geq \frac{2}{5} \cdot \frac{2\sqrt{AB^2 \cdot AC^2}}{AB \cdot AC} = \frac{4}{5}.$$

Dấu "=" xảy ra khi $AB = AC$ hay tam giác ABC cân tại A . Vậy $\min(\cos A) = \frac{4}{5}$.

Họ và tên : Cán Việt Hưng

Email: thuyhung8587@gmail.com

FB: Viet Hung

Câu 34. Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a . Một điểm M di động sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB . Tính độ dài lớn nhất của MH ?

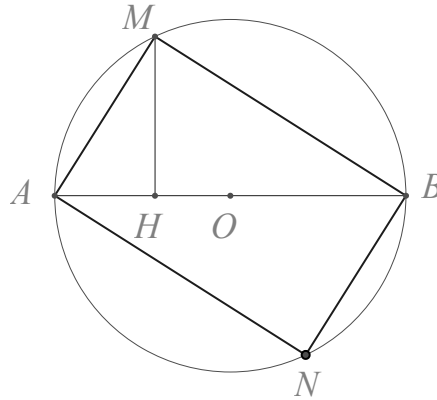
A. $\frac{a}{2}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. a .

D. $2a$.

Lời giải:



Chọn A.

Gọi N là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MN}$.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow |\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{BA}|$ hay $MN = AB$.

Suy ra $MANB$ là hình chữ nhật nên $\angle AMB = 90^\circ$.

Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB .

MH lớn nhất khi H trùng với tâm O hay $\max MH = MO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Họ và tên tác giả : **Phương Xuân Trịnh Tên FB: : Phương Xuân Trịnh**

Email: **phuongtrinhlt1@gmail.com**

Câu 35. Cho tam giác ABC vuông tại A . Gọi α là góc giữa hai trung tuyến BD và CK . Giá trị nhỏ nhất của $\cos \alpha$ là:.

A. $\frac{1}{2}$.

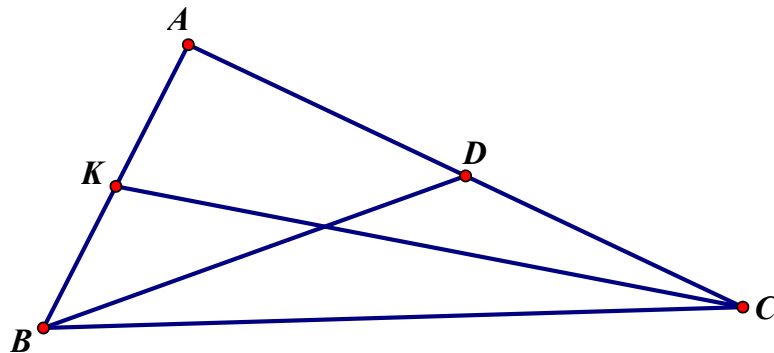
B. $\frac{4}{5}$.

C. $\frac{2}{3}$.

D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B.



Ta có:

$$\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CK} = (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) (\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AC}) = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AK} \cdot \overrightarrow{AB} \quad (\text{do } AB \perp AC)$$

$$= -\frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) = -\frac{1}{2}BC^2$$

Mặt khác:

$$2BD \cdot CK \leq BD^2 + CK^2 = \frac{(2BA^2 + 2BC^2 - AC^2) + (2CA^2 + 2CB^2 - AB^2)}{4}$$

$$= \frac{AB^2 + AC^2 + 4BC^2}{4} = \frac{5BC^2}{4}$$

Do đó:

$$\cos \alpha = \frac{|\overrightarrow{BD} \cdot \overrightarrow{CK}|}{BD \cdot CK} = \frac{BC^2}{2BD \cdot CK} \geq \frac{4BC^2}{5BC^2} = \frac{4}{5}$$

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} \Leftrightarrow BD = CK \Leftrightarrow \Delta ABC$$

vuông cân tại A .

$$\min(\cos \alpha) = \frac{4}{5}$$

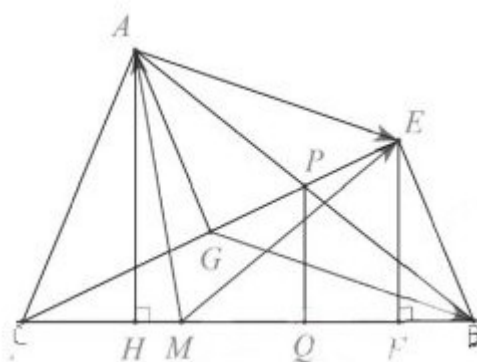
Vậy

vanphu.mc@gmail.com

- Câu 36.** Cho ΔABC có trọng tâm G . Gọi H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{CM} = x \cdot \overrightarrow{CB}$. Tìm x sao cho độ dài vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GB}$ đạt giá trị nhỏ nhất.
- A.** $\frac{8}{5}$. **B.** $\frac{5}{6}$. **C.** $\frac{6}{5}$. **D.** $\frac{5}{8}$.

Lời giải

Chọn B.



Dựng hình bình hành $AGBE$. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$
 $\Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GB}| = |\overrightarrow{ME}| = ME \geq EF \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GB}|_{\min} = EF \Leftrightarrow M \equiv F$

Gọi P là trung điểm của AB . Khi đó P cũng là trung điểm của GE và $CP = \frac{3}{4}CE$

Gọi Q là hình chiếu vuông góc của P trên BC .

Ta có $\triangle CPQ$ và $\triangle CEF$ đồng dạng nên $\frac{CQ}{CF} = \frac{CP}{CE} = \frac{3}{4} \Rightarrow \overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CQ}$.

Mặt khác PQ là đường trung bình của $\triangle AHB$ nên $\overrightarrow{HQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$. Theo giả thiết $\overrightarrow{CH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$

Suy ra $\overrightarrow{CQ} = \overrightarrow{CH} + \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{HB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{HB}$

Từ giả thiết $\overrightarrow{HB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB}$. Do đó $\overrightarrow{CQ} = \frac{5}{6}\overrightarrow{HB} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} = \frac{5}{8}\overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{CF} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CQ} = \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{8}\overrightarrow{CB} = \frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$

(Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Phú, Tên FB Nguyễn Văn Phú)

Họ và tên tác giả: Trần Tuyết Mai Tên FB: Mai Mai

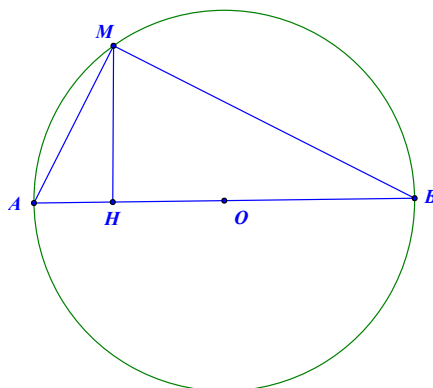
Email: maimai1.hn@gmail.com

Câu 37. Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a . Một điểm M di động sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB . Tính độ dài lớn nhất của MH ?

- A.** $\frac{a}{2}$. **B.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **C.** a . **D.** $2a$.

Lời giải

Chọn A



Gọi O là trung điểm của AB . Khi đó $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MO}$.

Ta có $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}| = |\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}| \Leftrightarrow 2|\overrightarrow{MO}| = |\overrightarrow{BA}|$ hay $MO = \frac{1}{2}AB$. Suy ra $\triangle MAB$ vuông tại M nên $\angle AMB = 90^\circ$. Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB .

MH lớn nhất khi H trùng với tâm O hay $\max MH = MO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}$.

Họ và tên tác giả: Nguyễn Thị Thanh Thảo Tên FB: Nguyễn Thanh Thảo

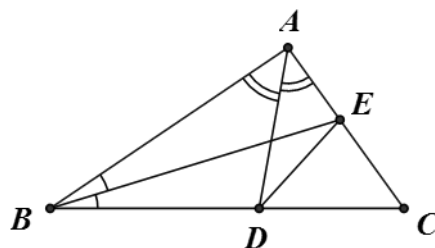
Email: nghianguyennhan78@gmail.com

Câu 38. Cho AD và BE là hai phân giác trong của tam giác ABC . Biết $AB = 4$, $BC = 5$ và $CA = 6$. Khi đó $\overrightarrow{DE}$ bằng:

- A.** $\frac{5}{9}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **B.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{5}{9}\overrightarrow{CB}$. **C.** $\frac{9}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{3}{5}\overrightarrow{CB}$. **D.** $\frac{3}{5}\overrightarrow{CA} - \frac{9}{5}\overrightarrow{CB}$.

Lời giải

Chọn A.



$$AD \text{ là phân giác trong của tam giác } ABC \text{ nên } \frac{CD}{DB} = \frac{AC}{AB} = \frac{6}{4} \Rightarrow \frac{CD}{CD+DB} = \frac{6}{6+4}$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{CB} = \frac{6}{10} \Rightarrow \overline{CD} = \frac{3}{5} \overline{CB}$$

$$\text{Tương tự: } \frac{CE}{CA} = \frac{5}{9} \Rightarrow \overline{CE} = \frac{5}{9} \overline{CA}$$

$$\overline{DE} = \overline{CE} - \overline{CD} = \frac{5}{9} \overline{CA} - \frac{3}{5} \overline{CB}$$

Vậy

Câu 39. : Cho đoạn thẳng AB có độ dài bằng a . Một điểm M di động sao cho $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} - \overline{MB}|$. Gọi H là hình chiếu của M lên AB . Tính độ dài lớn nhất của MH ?

A. $\frac{a}{2}$.

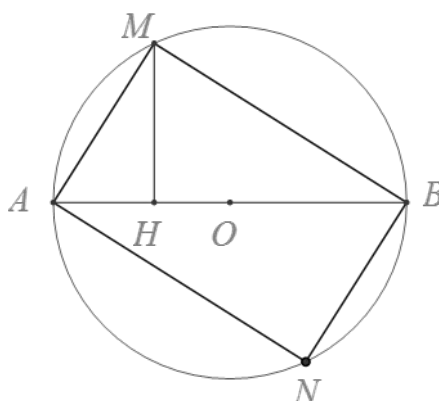
B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. a .

D. $2a$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi N là đỉnh thứ 4 của hình bình hành $MANB$. Khi đó $\overline{MA} + \overline{MB} = \overline{MN}$.

Ta có $|\overline{MA} + \overline{MB}| = |\overline{MA} - \overline{MB}| \Leftrightarrow |\overline{MN}| = |\overline{BA}|$ hay $MN = AB$.

Suy ra $MANB$ là hình chữ nhật nên $\angle AMB = 90^\circ$.

Do đó M nằm trên đường tròn tâm O đường kính AB .

$$MH \text{ lớn nhất khi } H \text{ trùng với tâm } O \text{ hay } \max MH = MO = \frac{AB}{2} = \frac{a}{2}.$$

Họ và tên tác giả : Hoàng Tiến Đông Tên FB: tiendongpt

Email: dongpt@c3phuctho.edu.vn

Câu 40. Một miếng gỗ có hình tam giác có diện tích là S điểm I , O lần lượt thỏa mãn $\overline{IB} + \overline{IC} = \vec{0}$; $\overline{OA} + \overline{OI} = \vec{0}$. Cắt miếng gỗ theo một đường thẳng qua O , đường thẳng này đi qua M, N lần lượt trên các cạnh AB, AC . Khi đó diện tích miếng gỗ chứa điểm A thuộc đoạn:

A. $\left[\frac{S}{4}; \frac{S}{3}\right]$

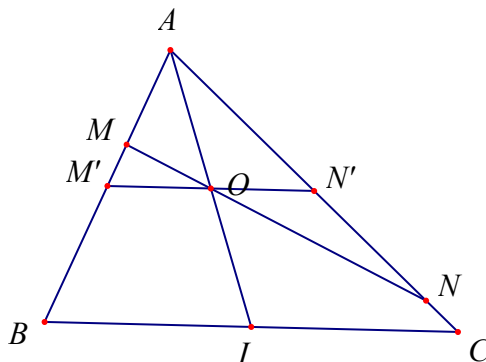
B. $\left[\frac{S}{3}; \frac{S}{2}\right]$

C. $\left[\frac{3S}{8}; \frac{S}{2}\right]$

D. $\left[\frac{S}{4}; \frac{3S}{8}\right]$

Lời giải

Chọn A



Từ O kẻ $M'N' \parallel BC$, suy ra: O là trung điểm $M'N'$.

Ta có: $\frac{NN'}{NA} \cdot \frac{MA}{MM'} \cdot \frac{OM'}{ON'} = 1 \Rightarrow \frac{NN'}{NA} = \frac{MM'}{MA} = x, \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2}\right)$

$NN' = xNA \Leftrightarrow AN - AN' = xNA \Rightarrow NA = \frac{1}{1-x} AN'$

$MM' = xMA \Leftrightarrow M'A - MA = xMA \Rightarrow MA = \frac{1}{1+x} M'A$

Ta có: $\frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AC} = \frac{AM \cdot AN}{4 \cdot AM' \cdot AN'} = \frac{1}{4(1-x^2)}$

Xét hàm số: $f(x) = 4(1-x^2)$ trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, suy ra: $3 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow \frac{S}{4} \leq S_{AMN} \leq \frac{S}{3}$

Đỗ Công Dũng

Email: congdung812@gmail.com

Câu 41. Cho tam giác ABC có bán kính đường tròn ngoại tiếp $R=2$. Tìm giá trị lớn nhất của $BC^2 - AB^2 - AC^2$.

A. 1.

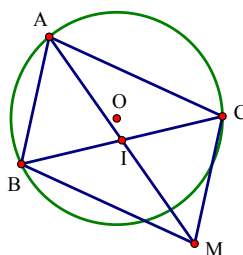
B. 2.

C. 3.

D. 4

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Dựng hình bình hành $ABMC$

Ta có $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA} \Rightarrow OA^2 = OM^2 + MA^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} \quad (1)$

Tương tự ta có: $OB^2 = OM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MB} \quad (2)$

$$OC^2 = OM^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{OM}\overrightarrow{MC} \quad (3)$$

Lấy (2)+(3)-(1) từng vế ta có:

$$R^2 = OM^2 + MB^2 + MC^2 - MA^2 + 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - \overrightarrow{MA}) \quad (\text{do tứ giác } ABMC \text{ là hình bình hành nên } \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA})$$

$$\text{Khi đó } R^2 = OM^2 + MB^2 + MC^2 - MA^2 = OM^2 + MB^2 + MC^2 - 4MI^2$$

$$= OM^2 + MB^2 + MC^2 - 4\left(\frac{AB^2 + AC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}\right)$$

$$= OM^2 + MB^2 + MC^2 - 2(AB^2 + AC^2 - BC^2) \quad \text{mà } MB = AC, MC = AB$$

$$\text{nên } R^2 = OM^2 - AB^2 - AC^2 + BC^2 \Leftrightarrow BC^2 - AB^2 - AC^2 = R^2 - OM^2 \leq R^2 = 4$$

Vậy giá trị lớn nhất của $BC^2 - AB^2 - AC^2$ là 4.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow M \equiv O \Rightarrow AB = AC = R \Rightarrow BC^2 = 3R^2$. Áp dụng định lý cosin trong tam giác ABC có $\widehat{BAC} = 120^\circ$. Hay là tam giác ABC cân tại A và có $\widehat{BAC} = 120^\circ$.

Họ và tên tác giả : Nguyễn Tân Quang Tên FB: Nguyễn Tân Quang

Email: quangmath@gmail.com

Câu 42. Cho tam giác đều ABC cạnh a. Gọi M là điểm nằm trên cạnh AB. Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ theo a.

A. $\frac{a\sqrt{3}}{4}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{a\sqrt{3}}{8}$.

D. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

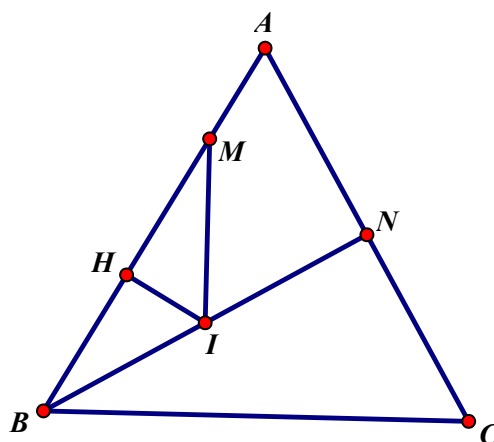
Lời giải

Chọn B.

$$|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + 2\overrightarrow{MB}| = |2\overrightarrow{MN} + 2\overrightarrow{MB}| = 4|\overrightarrow{MI}| = 4MI,$$

Ta có

trong đó N, I lần lượt là trung điểm của AC, BN . Do đó I cố định.



Kẻ IH vuông góc với AB . Ta có $MI \geq HI$.

$$BN = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow IH = BI \cdot \sin 30^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{8}.$$

Tính được

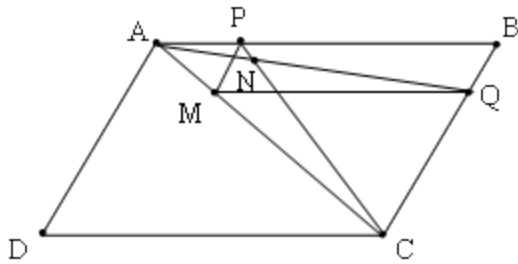
Email: themhaitotoanyp1@gmail.com

Câu 43. Cho hình bình hành ABCD, M thuộc đường chéo AC, (M không trùng với các đỉnh A, C)

Trên các đường thẳng AB, BC, lấy các điểm P và Q sao cho $MP \parallel BC$, $MQ \parallel AB$. Gọi N là giao hai đường thẳng AQ và CP. Giả sử $\vec{DN} = m\vec{DA} + n\vec{DC}$. Tìm giá trị lớn nhất của $m + n$

- A. $\frac{4}{3}$ B. $\frac{3}{4}$ C. $\frac{1}{2}$ D. 2

Lời giải



Đặt $\frac{AM}{AC} = k \Rightarrow \frac{BQ}{BC} = k$ và $\frac{BP}{AB} = 1 - k$, $k \in (0; 1)$

Có $\vec{DN} = \vec{DA} + \vec{AN} = \vec{DA} + x\vec{AQ} = \vec{DA} + x(\vec{AB} + \vec{BQ})$
 $= \vec{DA} + x\vec{DC} - kx\vec{DA} = (1 - kx)\vec{DA} + x\vec{DC}$, (1)

Mặt khác $\vec{DN} = \vec{DC} + \vec{CN} = \vec{DC} + y\vec{CP} = \vec{DC} + y(\vec{CB} + \vec{BP})$
 $= \vec{DC} + y\vec{DA} + y(k - 1)\vec{DC} = y\vec{DA} + (1 + yk - y)\vec{DC}$, (2)

$$\begin{cases} y = 1 - kx \end{cases}$$

Từ (1) và (2), ta có

Do đó $\vec{DN} = \frac{1 - k}{k^2 - k + 1}\vec{DA} + \frac{k}{k^2 - k + 1}\vec{DC}$

$$\Rightarrow m + n = \frac{1}{k^2 - k + 1} = \frac{1}{\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} \leq \frac{4}{3}, \forall k \in (0; 1)$$

$$\Rightarrow \max(m + n) = \frac{4}{3}, \text{ đạt được khi } k = \frac{1}{2} \text{ hay M là trung điểm AC.}$$

(Fb: Lưu Thêm)

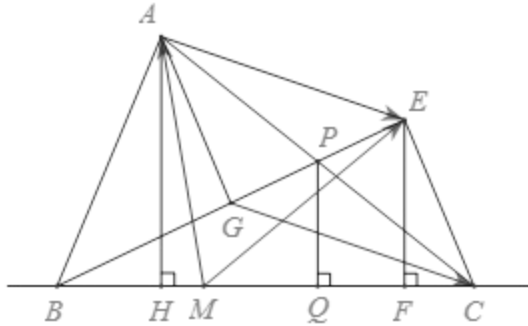
Họ và tên: Lê Thị Lan FB: Lê Lan

Email: lelanqx2@gmail.com

Câu 44. : Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Gọi H là chân đường cao hạ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HC}$. Điểm M di động nằm trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x \overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho độ dài của vectơ $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $\frac{4}{5}$. B. $\frac{5}{6}$. C. $\frac{6}{5}$. D. $\frac{5}{4}$.

Lời giải



Chọn B.

Dựng hình bình hành $AGCE$. Ta có $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{ME}$.

Kẻ $EF \perp BC$ ($F \in BC$). Khi đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{ME}| = ME \geq EF$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất khi $M \equiv F$.

Gọi P là trung điểm AC , Q là hình chiếu vuông góc của P lên BC ($Q \in BC$).

Khi đó P là trung điểm GE nên $BP = \frac{3}{4} BE$.

Ta có $\triangle BPQ$ và $\triangle BEF$ đồng dạng nên $\frac{BQ}{BF} = \frac{BP}{BE} = \frac{3}{4}$ hay $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3} \overrightarrow{BQ}$.

Mặt khác, $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HC}$.

PQ là đường trung bình $\triangle AHC$ nên Q là trung điểm HC hay $\overrightarrow{HQ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{HC}$.

Suy ra $\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{HQ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{HC} = \frac{5}{6} \overrightarrow{HC} = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{4} \overrightarrow{BC} = \frac{5}{8} \overrightarrow{BC}$.

Do đó $\overrightarrow{BF} = \frac{4}{3} \overrightarrow{BQ} = \frac{5}{6} \overrightarrow{BC}$.

Tác giả: Nguyễn Văn Hưng Facebook: Nguyễn Hưng

Câu 45. Cho tam giác ABC có $BC = a, AC = b, AB = c$ nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R . M là điểm thuộc đường tròn (O) . Gọi N, n lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = MA^2 + MB^2 + MC^2$. Khi đó giá trị của $N - n$ bằng

- A. $12R^2$. B. $4R\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$.
C. $2R\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$. D. $8R\sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có:

$$\begin{aligned}
P &= (\overline{MO} + \overline{OA})^2 + (\overline{MO} + \overline{OB})^2 + (\overline{MO} + \overline{OC})^2 \\
&= 6R^2 + 2\overline{MO} \cdot (\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) = 6R^2 + 2|\overline{MO}| \cdot |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| \cdot \cos \alpha \\
&= 6R^2 + 2R \cdot |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| \cdot \cos \alpha
\end{aligned}$$

Vậy :

$$6R^2 - 2R \cdot |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}| \leq P \leq 6R^2 + 2R \cdot |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}|$$

$$\Rightarrow N - n = 4R \cdot |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}|$$

$$\begin{aligned}
\text{Mà : } |\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}|^2 &= 3R^2 + 2(\overline{OA}\overline{OB} + \overline{OB}\overline{OC} + \overline{OA}\overline{OC}) \\
&= 3R^2 + 2 \cdot \sum \frac{OA^2 + OB^2 - (\overline{OA} - \overline{OB})^2}{2} = 9R^2 - a^2 - b^2 - c^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow N - n = 4R \cdot \sqrt{9R^2 - a^2 - b^2 - c^2}$$

Họ và tên tác giả : Nguyễn Xuân Giao Tên FB: giaonguyen**Email: giaohh2@gmail.com**

Câu 46. Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O , bán kính R , M là một điểm bất kì trên đường tròn. Giá trị lớn nhất của biểu thức $S = MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2$ là

- A.** $R^2\sqrt{21}$ **B.** $-R^2\sqrt{21}$ **C.** $2R^2\sqrt{21}$ **D.** $-2R^2\sqrt{21}$

Lời giải**Chọn C.**

$$S = \overline{MA}^2 + 2\overline{MB}^2 - 3\overline{MC}^2 = (\overline{MO} + \overline{OA})^2 + 2(\overline{MO} + \overline{OB})^2 - 3(\overline{MO} + \overline{OC})^2$$

Ta có

$$S = 2\overline{MO}(\overline{OA} + 2\overline{OB} - 3\overline{OC}) = 2|\overline{MO}| |\overline{OA} + 2\overline{OB} - 3\overline{OC}| \cdot \cos \alpha$$

$$S = 2R |\overline{CA} + 2\overline{CB}| \cdot \cos \alpha$$

$$\alpha = (\overline{MO}, \overline{CA} + 2\overline{CB})$$

Trong đó

Do tam giác ABC đều nội tiếp đường tròn bán kính R nên có cạnh là $R\sqrt{3}$

$$(\overline{CA} + 2\overline{CB})^2 = \overline{CA}^2 + 4\overline{CA}\overline{CB} + 4\overline{CB}^2 = 15R^2 + 4 \cdot CA \cdot CB \cdot \cos 60^\circ = 21R^2 \Rightarrow |\overline{CA} + 2\overline{CB}| = R\sqrt{21}$$

$$S = 2R^2\sqrt{21} \cdot \cos \alpha \Rightarrow S \leq 2R^2\sqrt{21}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\cos \alpha = 1 \Leftrightarrow \overline{MO}, \overline{CA} + 2\overline{CB}$ cùng chiều.

Vậy $MaxS = 2R^2\sqrt{21}$

Email: anhthu82t@gmail.com

Câu 47. Cho tam giác ABC . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \sqrt{3} \cos 2A + 2 \cos 2B + 2\sqrt{3} \cos 2C$

A. $P_{min} = -4$. **B.** $P_{min} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$. **C.** $P_{min} = -2-3\sqrt{3}$. **D.** $P_{min} = -5$.

Lời giải

Họ và tên: Đồng Anh Tú Facebook: Anh Tú

Chọn A

Gọi O, R lần lượt là tâm và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

Ta có: $(2\overrightarrow{OA} + \sqrt{3}\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow 4OA^2 + 3OB^2 + OC^2 + 4\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 4\sqrt{3}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2\sqrt{3}\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8R^2 + 4OA \cdot OC \cdot \cos 2B + 4\sqrt{3}OA \cdot OB \cdot \cos 2C + 2\sqrt{3}OB \cdot OC \cdot \cos 2A \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 8R^2 + 4R^2 \cos 2B + 4\sqrt{3}R^2 \cos 2C + 2\sqrt{3}R^2 \cos 2A \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \cos 2A + 2 \cos 2B + 2\sqrt{3} \cos 2C \geq -4. \text{ Dấu bằng xảy ra khi } \begin{cases} A = 45^\circ, \\ B = 60^\circ, \\ C = 75^\circ \end{cases}$$

Vậy $P_{min} = -4$.

VẤN ĐỀ 6 TÍCH VÔ HƯỚNG

Email: ngvnho93@gmail.com

Câu 1. Cho tam giác đều ABC cạnh a . Tính $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB}$

A. $-\frac{3a^2}{2}$ **B.** $\frac{3a^2}{2}$ **C.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Văn Nho Facebook: Nguyễn Văn Nho

Chọn A

Cách 1

Nhận xét: Với mọi điểm M bất kỳ, ta luôn có $AB^2 = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})^2 = AM^2 + MB^2 + 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{1}{2}(AB^2 - AM^2 - MB^2)$$

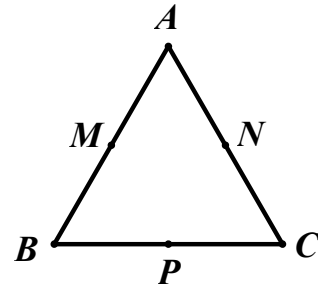
$$\text{Do đó } \begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(AC^2 - AB^2 - BC^2) = -\frac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{1}{2}(BA^2 - BC^2 - CA^2) = -\frac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(CB^2 - CA^2 - AB^2) = -\frac{a^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3a^2}{2}$$

Cách 2

Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, AC, BC . Do tam giác ABC đều nên $\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{CP}, \overrightarrow{AN}$ lần lượt là các hình chiếu của $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ lên các cạnh BA, CB, AB .

Áp dụng công thức chiếu, ta có

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{MB} = -AB \cdot MB = -a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CP} = -\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{PC} = -BC \cdot PC = -a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{NA} = -CA \cdot NA = -a \cdot \frac{a}{2} = -\frac{a^2}{2} \end{cases}$$



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3a^2}{2}$$

Cộng vế theo vế ta được

Cách 3. Vì tam giác ABC đều nên $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 120^\circ$

$$\begin{cases} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \cdot BC \cdot \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} = BC \cdot CA \cdot \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} \\ \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = CA \cdot AB \cdot \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = a \cdot a \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{a^2}{2} \end{cases}$$

Do đó

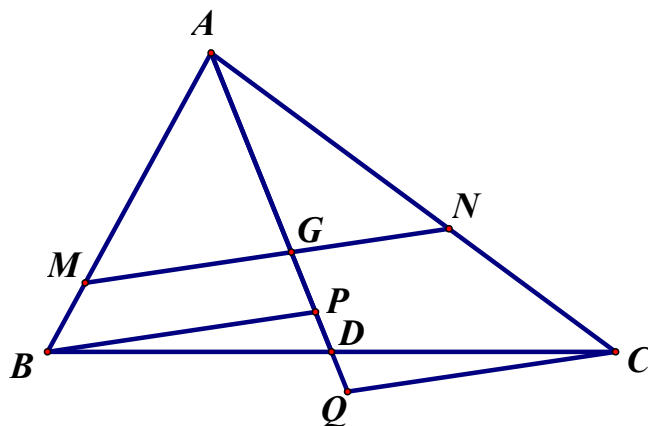
$$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AB} = -\frac{3a^2}{2}$$

Câu 2. Cho tam giác ABC có AD là trung tuyến, G là trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NC}$
- B. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NC}$
- C. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{2}{3} (\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NC})$
- D. $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \frac{3}{2} (\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NC})$

Lời giải

Chọn B



Trước hết ta chứng minh $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1$ (1)

Thật vậy, kẻ $\begin{cases} BP \parallel MN \\ CQ \parallel MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BM}{AM} = \frac{PG}{AG} \\ \frac{CN}{AN} = \frac{QG}{AG} \end{cases}$

Do đó $(1) \Leftrightarrow \frac{PG}{AG} + \frac{QG}{AG} = 1 \Leftrightarrow PG + QG = AG \Leftrightarrow (GD - PD) + (GD + DQ) = AG$
 $\Leftrightarrow 2GD = AG$ (luôn đúng)

Vậy ta có $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1$

$BM \cdot AN + CN \cdot AM = AM \cdot AN$
 $\Leftrightarrow \frac{AN \cdot MB}{\cos A} + \frac{AM \cdot NC}{\cos A} = \frac{AM \cdot AN}{\cos A}$
 $\Leftrightarrow \overline{AM \cdot AN} = \overline{AN \cdot MB} + \overline{AM \cdot NC}$ (Do $\cos A \neq 0$)

Câu 3. Cho các véc tơ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ thỏa mãn $|\vec{a}| = a, |\vec{b}| = b, |\vec{c}| = c$ và $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0}$. Tính $A = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a}$.

A. $\frac{3c^2 - a^2 - b^2}{2}$

B. $\frac{3a^2 - c^2 + b^2}{2}$

C. $\frac{3b^2 - a^2 - c^2}{2}$

D. $\frac{3c^2 - a^2 + b^2}{2}$

Lời giải

Tác giả : Quang Phi

Chọn A

Ta có $\vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} + \vec{b} = -3\vec{c} \Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b})^2 = 9\vec{c}^2$

$\Leftrightarrow \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} = 9\vec{c}^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{9c^2 - a^2 - b^2}{2}$

Tương tự ta có $\vec{b} + 3\vec{c} = -\vec{a} \Leftrightarrow (\vec{b} + 3\vec{c})^2 = \vec{a}^2 \Leftrightarrow \vec{b}^2 + 9\vec{c}^2 + 6\vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{a}^2 \Leftrightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{a^2 - b^2 - 9c^2}{6}$

Và ta lại có $\vec{a} + 3\vec{c} = -\vec{b} \Leftrightarrow (\vec{a} + 3\vec{c})^2 = \vec{b}^2 \Leftrightarrow \vec{a}^2 + 9\vec{c}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b}^2 \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{c} = \frac{b^2 - a^2 - 9c^2}{6}$

Suy ra $A = \frac{9c^2 - a^2 - b^2}{2} + \frac{a^2 - b^2 - 9c^2}{6} + \frac{b^2 - a^2 - 9c^2}{6} = \frac{3c^2 - a^2 - b^2}{2}$

Họ và tên: Đoàn Thị Hường

Email: ngochuongdoan.6@gmail.com Fb: Đoàn Thị Hường

Câu 4. Cho tam giác ABC vuông tại A có BC = 2a, M là điểm trên đoạn BC sao cho MB = 2MC. Biết rằng $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = a^2$. Độ dài cạnh AC là:

- A.** $AC = \frac{a\sqrt{33}}{3}$ **B.** $AC = a\sqrt{3}$ **C.** $AC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ **D.** $AC = a\sqrt{5}$

Lời giải

Từ giả thiết M là điểm trên đoạn BC sao cho MB = 2MC nên ta có $\vec{BM} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

Đặt AB = x; AC = y ta có $x^2 + y^2 = 4a^2$ (1) (Tam giác ABC vuông tại A)

Mặt khác từ $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{AC} - \vec{AB}) = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$

Nên có $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = a^2 \Leftrightarrow (\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC})(\vec{AC} - \vec{AB}) = a^2$

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}\vec{AC}^2 - \frac{2}{3}\vec{AB}^2 = a^2$ (Do $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0$)

$\Leftrightarrow \frac{1}{3}y^2 - \frac{2}{3}x^2 = a^2$ (2)

Từ (1) và (2) ta có $y = \frac{a\sqrt{33}}{3}$ Chọn đáp án A

Họ tên: Đào Hữu Nguyên FB: Đào Hữu Nguyên

Mail: huongnguyen1979@gmail.com

Câu 5. Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 90^\circ$, AB = 1, AC = 2. Đặt điểm M sao cho $\vec{AM} \perp \vec{BC}$, AM = 3

. Đặt $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC}$. Tính $T = x^2 + y^2$?

- A.** $T = \frac{153}{20}$ **B.** $T = \frac{151}{20}$ **C.** $T = \frac{157}{20}$ **D.** $x = \frac{159}{20}$

Lời giải

Chọn A

Từ $\vec{AM} = x\vec{AB} + y\vec{AC} \Rightarrow AM^2 = x^2 AB^2 + y^2 AC^2 \Rightarrow 9 = x^2 + 4y^2$

Và $\vec{AM} \cdot \vec{BC} = x\vec{AB} \cdot \vec{BC} + y\vec{AC} \cdot \vec{BC} \Rightarrow 0 = x\vec{AB}(\vec{AC} - \vec{AB}) + y\vec{AC}(\vec{AC} - \vec{AB}) \Rightarrow 9 = -x + 4y$

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 9 \\ -x + 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \frac{144}{20} \\ x = 4y \end{cases} \quad T = x^2 + y^2 = \frac{153}{20}$$

Ta có hệ: . Suy ra

Email: truongthanhha9083@gmail.com

- Câu 6.** Cho tam giác ABC vuông tại A. Quỹ tích điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + MA^2$ là
- A.** Đường thẳng AC. **B.** Đường thẳng AB.
- C.** Đường thẳng BC. **D.** Đường trung trực cạnh BC.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Bá Trường Tên FB: thanhphobuon

Chọn B

Yêu cầu bài toán trở thành

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + MA^2 \\ \Leftrightarrow MA^2 + \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} + MA^2 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) &= \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) (*) \end{aligned}$$

Gọi E là đỉnh thứ tư của hình chữ nhật ABEC. Hệ thức (*) trở thành

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AE} &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA}(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{CE} &= 0 \Leftrightarrow MA \perp AC \end{aligned}$$

Vậy điểm M thuộc đường thẳng AB.

- Câu 7.** Cho tam giác đều ABC cạnh $3a$, ($a > 0$). Lấy các điểm M, N, P lần lượt trên các cạnh

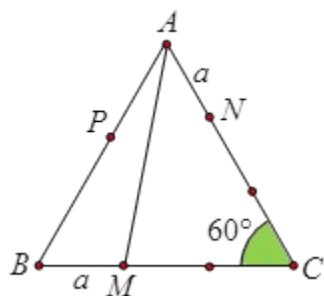
BC, CA, AB sao cho $BM = a$, $CN = 2a$, $AP = x$ ($0 < x < 3a$). Tìm x để $AM \perp PN$.

- A.** $x = \frac{3a}{5}$. **B.** $x = \frac{4a}{5}$.
- C.** $x = \frac{a}{5}$. **D.** $x = \frac{2a}{5}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Bá Trường Tên FB: thanhphobuon

Chọn B



Ta có $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

Ta có $\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}$

Để $AM \perp PN$ thì $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{x}{3a}\overrightarrow{AB}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2x}{9a}\overrightarrow{AB}^2 + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC}^2 - \frac{x}{9a}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9}AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ - \frac{2x}{9a}(3a)^2 + \frac{1}{9}(3a)^2 - \frac{x}{9a}AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9} \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} - \frac{2x}{9a} \cdot 9a^2 + \frac{1}{9}9a^2 - \frac{x}{9a} \cdot 3a \cdot 3a \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - \frac{5}{2}ax = 0 \Leftrightarrow x = \frac{4a}{5}. \text{ Vậy } x = \frac{4a}{5} \text{ thì } AM \perp PN.$$

Nguyenducloi qv2@gmail.com

Câu 8. Cho tam giác ABC vuông cân tại B . Gọi M là trung điểm AB và I là điểm di động trên đường thẳng MC . Khi $|2\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất, hãy tính tỉ số $\frac{AC}{AI}$.

A. $\frac{AC}{AI} = 1$

B. $\frac{AC}{AI} = \sqrt{2}$

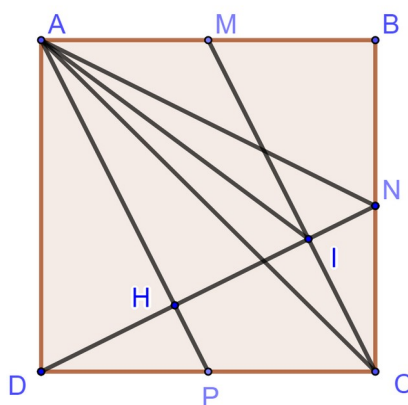
C. $\frac{AC}{AI} = 2$

D. $\frac{AC}{AI} = \frac{3}{2}$

(Họ và tên tác giả : Nguyễn Đức Lợi, Tên FB: Nguyễn Đức Lợi)

Lời giải

Chọn B



Gọi N là trung điểm BC .

Có $|2\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA}| = |\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}| = 2IN.$

Do đó $|2\overrightarrow{IM} + \overrightarrow{AC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi I là hình chiếu vuông góc của N trên MC .

Dựng hình vuông $ABCD$. Gọi P là trung điểm CD và H là giao điểm của AP với DN .

Dễ dàng chứng minh được $DN \perp CM \Rightarrow I \in DN$.

Lại có tứ giác $AMCP$ là hình bình hành, suy ra $AP \parallel CM$.

Do đó $AP \perp DI$ và H là trung điểm DI . Suy ra tam giác AID cân tại A .

$$\frac{AC}{AI} = \frac{AC}{AD} = \sqrt{2}.$$

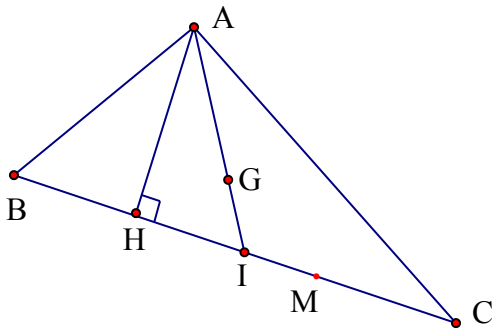
Email: buivuongphung@gmail.com

- Câu 9.** Cho $\triangle ABC$ có trọng tâm G , H là chân đường cao kẻ từ A sao cho $\overrightarrow{BH} = \frac{1}{3} \overrightarrow{HC}$. Điểm M di động trên BC sao cho $\overrightarrow{BM} = x \overrightarrow{BC}$. Tìm x sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|$ nhỏ nhất.
- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{4}{5}$ D. $\frac{5}{6}$

Lời giải

Họ tên: *Vũ Thị Chuyên* FB: *Vũ Thị Chuyên*

Chọn **D**



Gọi I là trung điểm cạnh BC .

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{MC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{IA}$$

$$= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BM} + \frac{2}{3} (\overrightarrow{IH} + \overrightarrow{HA})$$

$$= \overrightarrow{BC} - x \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{HA}$$

$$= \left(\frac{5}{6} - x \right) \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3} \overrightarrow{HA}$$

$$\text{Suy ra } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{GC}|^2 = \left(\frac{5}{6} - x \right)^2 BC^2 + \frac{4}{9} HA^2 \geq \frac{4}{9} HA^2$$

Dấu “=” xảy ra khi $x = \frac{5}{6}$.

Email: nguyenthitrangtnh@gmail.com

- Câu 10.** Cho tam giác ABC , nhọn, không cân và nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Gọi G và M lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và trung điểm cạnh BC . Cho đường thẳng OG vuông góc với đường thẳng OM tính giá trị biểu thức $AC^2 + AB^2 + 2BC^2$ theo R .
- A. $8R^2$. B. $10R^2$. C. $12R^2$. D. $14R^2$.

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thị Trăng Fb: Trăng Nguyễn

Áp dụng quy tắc trọng tâm và quy tắc trung điểm ta có:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{3}, \overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}}{2}.$$

. Khi đó

$$OG \perp OM \Rightarrow \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{OM} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} + 2\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2R^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(2R^2 - AB^2) + \frac{1}{2}(2R^2 - AC^2) + 2R^2 - BC^2 + 2R^2 = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{\vec{a}^2 + \vec{b}^2 - (\vec{a} - \vec{b})^2}{2}$$

(chú ý)

$$\Leftrightarrow AB^2 + AC^2 + 2BC^2 = 12R^2$$

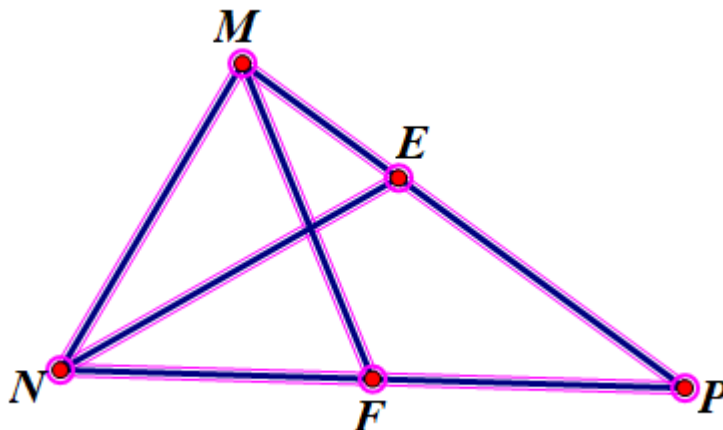
Email: phamhongquangltv@gmail.com

- Câu 11.** Cho tam giác MNP có $MN=4, MP=8, \angle M = 60^\circ$ Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP}$. Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP .
- A. $k = \frac{2}{3}$. B. $k = \frac{2}{5}$. C. $k = \frac{1}{3}$. D. $k = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Phạm Hồng Quang Tên FB: Quang Phạm

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})$$

$$NE \perp MF \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}) \cdot (k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})}{\overrightarrow{MP} \cdot (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})} = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}^2}{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP}^2} = \frac{16 + 16}{64 + 16} = \frac{2}{5}$$

(Email): Khueninhbinh2004@gmail.com

Câu 12. Đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC}$ đúng với mọi điểm M. Khi đó tứ giác ABCD là hình gì.

A. Hình thang vuông.

B. Hình chữ nhật.

C. Hình thoi.

D. Tứ giác có hai đường chéo vuông góc.

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Phạm Trung Khuê, Tên FB: Khoi Pham)

Chọn B

Đẳng thức $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{BC}$ đúng với mọi điểm M

$$\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} AB \perp BC \\ AB \perp AD \end{array} \right.$$

Cho M trùng với A, B ta được

Cho M trùng với C ta được

$$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} \Rightarrow (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}) \cdot \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BC} \quad (\text{vì } \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0)$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}) = 0 \Rightarrow \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \Rightarrow CB \perp CD$$

Vậy tứ giác ABCD là hình chữ nhật.

Email: dacgiap@gmail.com

Câu 13. Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi M, N lần lượt thuộc các đoạn thẳng BC và AC sao cho

$$\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MC}, \quad \overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AN} \quad \text{và} \quad AM \perp DN. \quad \text{Khi đó } k \text{ thuộc khoảng nào dưới đây?}$$

A. (3; 5)

B. (-5; -3)

C. (-4; -2)

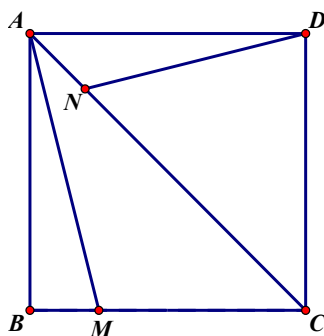
D. (2; 4)

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Đắc Giáp

Facebook: dacgiap

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$;

Từ $\overrightarrow{CN} = k\overrightarrow{AN}$ và N nằm giữa hai điểm A, C nên suy ra $k < 0$ và $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{1-k}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$

$$\overrightarrow{DN} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DA} + \frac{1}{1-k}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$

$$AM \perp DN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{DN} = 0 \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}\right) \cdot \left(\overrightarrow{DA} + \frac{1}{1-k}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{1}{1-k}(\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}) + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{DA} + \frac{1}{4(1-k)}(\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5a^2}{4(1-k)} - \frac{a^2}{4} = 0 \Leftrightarrow k = -4$$

Email: nnqman235@gmail.com

Câu 14. Cho hai vector $\vec{a}, \vec{b}$ thỏa mãn đồng thời các điều kiện $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{7}, |\vec{a} + \vec{b}| = 2$, vector $(3\vec{a} + \vec{b})$ vuông góc với $(\vec{a} - \vec{b})$. Tính $\cos$ của góc tạo bởi hai vector $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

- A. $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Ngô Nguyễn Quốc Mẫn Tên FB: Ngonguyen Quocman

Chọn B

$$\begin{cases} |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{7} \\ |\vec{a} + \vec{b}| = 2 \\ (3\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}^2 + 4\vec{b}^2 - 4\vec{a}\vec{b} = 7 \\ \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b} = 4 \\ 3\vec{a}^2 - \vec{b}^2 - 2\vec{a}\vec{b} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{a}^2 = 1 \\ \vec{b}^2 = 2 \\ \vec{a}\vec{b} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Ta có

$$\cos(\vec{a}; \vec{b}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Suy ra

Câu 15. Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh $BC = a; CA = b; AB = c$. Tìm

giá trị biểu thức: $K = \frac{OA^2}{b.c} + \frac{OB^2}{c.a} + \frac{OC^2}{a.b}$

A. $K = \frac{1}{2}$

B. $K = \frac{1}{3}$

C. $K = 1$

D. $K = \frac{1}{4}$

Lời giải

Áp dụng tính chất đường phân giác vào các phân giác OA, OB, OC ta luôn có:

$$a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} = \vec{0} \quad . \text{ Từ đó}$$

$$\left(a \cdot \overrightarrow{OA} + b \cdot \overrightarrow{OB} + c \cdot \overrightarrow{OC} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 OA^2 + b^2 OB^2 + c^2 OC^2 + 2ab \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2bc \cdot \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2ca \cdot \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \right)^2 = c^2 \Rightarrow 2 \cdot \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA^2 + OB^2 - c^2$$

Tương tự ta có:

$$a^2 OA^2 + b^2 OB^2 + c^2 OC^2 + ab(OA^2 + OB^2 - c^2) + bc(OB^2 + OC^2 - a^2) + ca(OC^2 + OA^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(aOA^2 + bOB^2 + cOC^2) = abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ac} + \frac{OC^2}{ab} = 1$$

Chọn đáp án **C.** $K = 1$

Họ và tên: Lê Thái Bình

Email: lebinhle80@gmail.com

Facebook: Lê Thái Bình

Câu 16. Cho hình vuông $ABCD$. M, N lần lượt nằm trên hai cạnh BC và CD sao cho $\frac{CM}{CB} = \frac{CN}{CD} = \frac{1}{3}$.

Gọi E là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AN}$. Khi $BE \perp AM$. Tính giá trị biểu thức $T = k^2 - k + 1$.

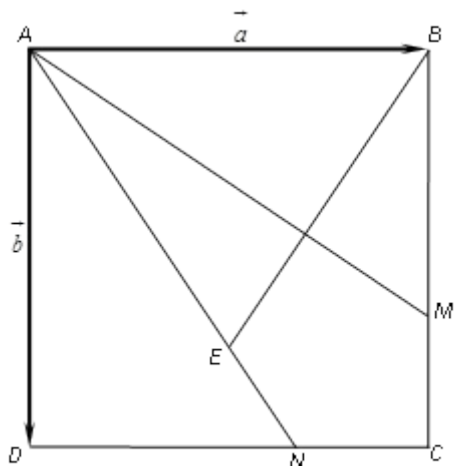
A. $\frac{13}{16}$

B. $\frac{7}{9}$

C. $\frac{8}{9}$

D. $\frac{5}{16}$

Lời giải.



Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}; \overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

Ta có

$$\begin{aligned}\overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BA} + k\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{BA} + k(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}) \\ &= -\vec{a} + k\left(\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a}\right) = \frac{2k-3}{3}\vec{a} + k\vec{b}\end{aligned}$$

và $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM} = \vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$

Khi đó $BE \perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{BE} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 \Leftrightarrow \frac{2k-3}{3} + \frac{2}{3}k = 0 \Leftrightarrow k = \frac{3}{4}$.

Câu 17. Cho hình vuông ABCD, điểm M nằm trên đoạn thẳng AC sao cho $AM = \frac{AC}{4}$. Gọi N là trung điểm CD. Tam giác BMN là

A. Tam giác đều.

B. Tam giác cân.

C. Tam giác Vuông.

D. Tam giác vuông cân

Lời giải

Huỳnh Kim Linh GV Trường THPT Chuyên Lê Quý Đôn Khánh Hòa

Chọn D

Đặt $\overrightarrow{AD} = \vec{a}, \overrightarrow{AB} = \vec{b}$.

Khi đó: $\overrightarrow{MB} = \frac{1}{4}(-\vec{a} + 3\vec{b})$

$$\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(\vec{a} + \vec{b}); \quad \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \vec{a} + \frac{\vec{b}}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}(3\vec{a} + \vec{b})$$

Ta có: $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MN} = \frac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})(3\vec{a} + \vec{b})$

$$= \frac{1}{16}(-3\vec{a}^2 + 3\vec{b}^2 + 8\vec{a} \cdot \vec{b}) = 0 \Rightarrow MB \perp MN \quad (1)$$

$$\overrightarrow{MB}^2 = \frac{1}{16}(-\vec{a} + 3\vec{b})^2 = \frac{1}{16}(\vec{a}^2 + 9\vec{b}^2 - 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{5}{8}\vec{a}^2$$

$$\overrightarrow{MN}^2 = \frac{1}{16}(3\vec{a} + \vec{b})^2 = \frac{1}{16}(9\vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b}) = \frac{5}{8}\vec{a}^2$$

$$\text{Suy ra } MB = MN \quad (2)$$

Vậy MB vuông góc với MN và MB = MN, tam giác BMN vuông cân tại đỉnh M

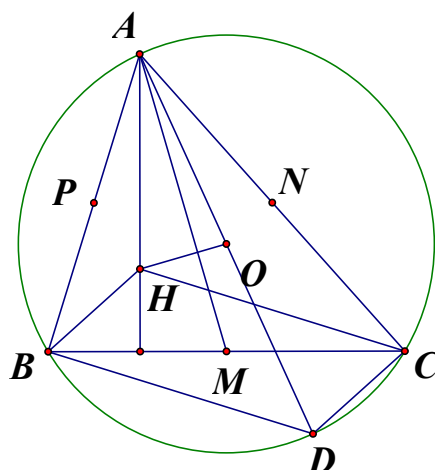
(Email): luongthanh80tm@gmail.com

Câu 18. Cho tam giác ABC . Gọi H là trực tâm và O là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC . Đặt $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. Tìm hệ thức liên hệ giữa a , b , c sao cho OH vuông góc với trung tuyến vẽ từ đỉnh A của tam giác ABC .

A. $2a^2 = b^2 + c^2$. **B.** $2b^2 = a^2 + c^2$. **C.** $2c^2 = a^2 + b^2$. **D.** $b^2 = 2a^2 + 2c^2$.

Lời giải

Chọn A



Gọi AD là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC .

Chứng minh được tứ giác $BHCD$ là hình bình hành.

Nên $\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{HD}$

Ta có O là trung điểm của đoạn AD nên $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HD} = 2\overrightarrow{HO}$

Suy ra $\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB} + \overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{HO}$

Ta có: $\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AH}$; tương tự $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BH}$; $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CH}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$$

Gọi M , N , P lần lượt là trung điểm của các cạnh BC , CA và AB .

$$OH \perp AM \Leftrightarrow \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (3\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}).(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA}.(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -3\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AP} - 3\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3c^2}{2} - \frac{3b^2}{2} + c^2 + 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} + b^2 = 0$$

$$a^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = b^2 + c^2 - 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$$

Lại có:

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = b^2 + c^2 - a^2$$

Suy ra: $2a^2 = b^2 + c^2$.

(Sưu tầm, Họ và tên: Nguyễn Lương Thành, Tên FB: luongthanh.nguyen.7)

Câu 19. Cho tam giác ABC có AD là trung tuyến, G là trọng tâm. Một đường thẳng qua G cắt các cạnh AB, AC lần lượt tại M, N . Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

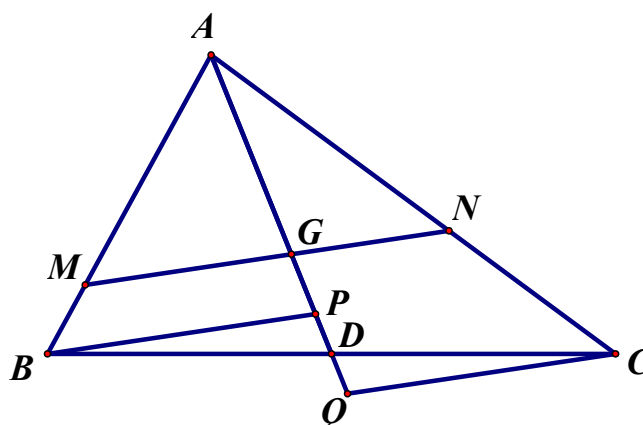
B. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC}$

C. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

D. $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AN} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{NC})$

Lời giải

Chọn B



Trước hết ta chứng minh $\frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1$ (1)

Thật vậy, kẻ $\begin{cases} BP \parallel MN \\ CQ \parallel MN \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{BM}{AM} = \frac{PG}{AG} \\ \frac{CN}{AN} = \frac{QG}{AG} \end{cases}$

$$\text{Do đó } (1) \Leftrightarrow \frac{PG}{AG} + \frac{QG}{AG} = 1 \Leftrightarrow PG + QG = AG \Leftrightarrow (GD - PD) + (GD + DQ) = AG \\ \Leftrightarrow 2GD = AG \text{ (luôn đúng)}$$

$$\text{Vậy ta có } \frac{BM}{AM} + \frac{CN}{AN} = 1$$

$$BM \cdot AN + CN \cdot AM = AM \cdot AN \\ \Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MB}}{\cos A} + \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NC}}{\cos A} = \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}}{\cos A} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{NC} \text{ (Do } \cos A \neq 0 \text{)}$$

Họ và tên: Phan Thông

Email: quocthong1182@gmail.com

Facebook: Quocthongphan

Câu 20. Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB=2 và AD=4. Gọi M là trung điểm của cạnh AB và N là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AD}$, CM vuông góc với BN. Khi đó k thuộc vào khoảng nào sau đây

A. $\left(0; \frac{1}{16}\right)$ B. $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{20}\right)$ C. $\left(\frac{1}{20}; \frac{1}{9}\right)$ D. $\left(\frac{1}{9}; \frac{1}{6}\right)$

Giải: Đặt $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AD} = -\vec{a} + k\vec{b}$$

$$\text{Theo giả thiết ta có } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Leftrightarrow \left(-\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}\right) \cdot (-\vec{a} + k\vec{b}) = 0 \Leftrightarrow -16k + \frac{1}{2} \cdot 4 = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{8}$$

Họ và tên tác giả : Phạm Hồng Quang Tên FB: Quang Phạm

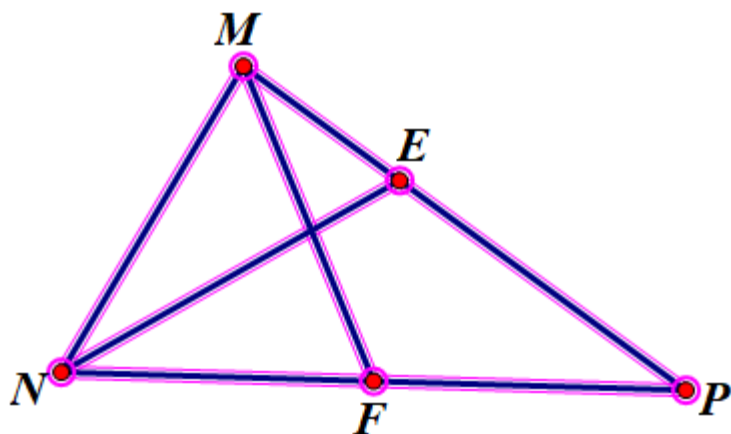
Email: phamhongquangltv@gmail.com

Câu 21. Cho tam giác MNP có MN=4, MP=8, $\widehat{M} = 60^\circ$. Lấy điểm E trên tia MP và đặt $\overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP}$. Tìm k để NE vuông góc với trung tuyến MF của tam giác MNP.

A. $k = \frac{2}{3}$ B. $k = \frac{2}{5}$ C. $k = \frac{1}{3}$ D. $k = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn B



Ta có: $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{NM} + \overrightarrow{ME} = k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}$

$$\overrightarrow{MF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})$$

$$NE \perp MF \Leftrightarrow (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}) \cdot (k\overrightarrow{MP} - \overrightarrow{MN}) = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})}{\overrightarrow{MP} \cdot (\overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN})} = \frac{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MN}^2}{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{MP}^2} = \frac{16 + 16}{64 + 16} = \frac{2}{5}$$

Câu 22. Cho tam giác ABC có $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$. M là trung điểm của BC , D là chân đường phân giác trong góc A . Tính $\overrightarrow{AD}^2$

A. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4c}{(b+c)^2} p(p-a)$

B. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} (p-a)$

C. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b-c)^2} p(p-a)$

D. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Phương Thảo, Tên FB: Nguyễn Thị Phương Thảo)

Chọn D

Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

Suy ra $\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$

Ta lại có $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$ nên

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4} \left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + b^2 \right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

$$\text{Suy ra } \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} = \frac{BD}{DC} = \frac{b}{c} \quad (*)$$

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{b}{c} (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow (b+c) \overrightarrow{AD} = b \overrightarrow{AB} + c \overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = (b \overrightarrow{AB})^2 + 2bc \overrightarrow{AB} \overrightarrow{AC} + (c \overrightarrow{AC})^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = b^2 c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2} (c^2 + b^2 - a^2) + c^2 b^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2} (b+c-a)(b+c+a)$$

$$\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$$

Hay

Họ và tên tác giả : Nguyễn Văn Toàn Tên FB: Dấu Vết Hát

Email: nguyenvantoannbk@gmail.com Bài ở mức độ VD, nhờ thầy cô góp ý!

Câu 23. Cho tam giác ABC có $AB = c$, $AC = b$ và $\angle BAC = 60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

A. $6c^2 - 4b^2 - 5bc = 0$

B. $4c^2 - 5b^2 - 6bc = 0$

C. $6c^2 - 5b^2 - 4bc = 0$

D. $4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$

Lời giải

Chọn D

$$\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \hat{=} \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \hat{=} 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

Ta có:

$$\text{Tương tự ta cũng có: } 3\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

Vậy:

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{CN} \hat{=} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0$$

$$\hat{=} (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = 0 \hat{=} 2\overrightarrow{AB}^2 - 3\overrightarrow{AC}^2 - 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2c^2 - 3b^2 - \frac{5bc}{2} = 0 \hat{=} 4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$$

$\Leftrightarrow$

Họ tên: Trần Ngọc Tên FB: Ngọc Trần

Email: soantailieutoanhoc2018@gmail.com

Câu 24. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O . Gọi I là trung điểm của AC và M là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = 2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}$. Biết rằng OM vuông góc với BI và $AC^2 = 3BC \cdot BA$. Tính góc $\angle ABC$.

A. 30° .

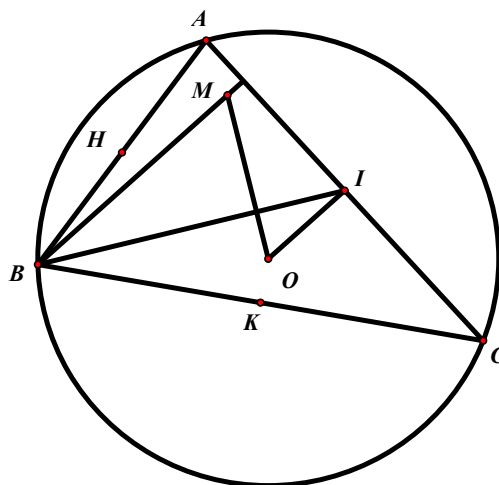
B. 45°

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải

Chọn C



Ta có $OM \perp BI \Leftrightarrow 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{BI} = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC}) \cdot (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) = 0$

$$\Leftrightarrow (5\overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC}) \cdot \overrightarrow{BA} = 0 \Leftrightarrow 5\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = 0$$

Gọi H, K tương ứng là trung điểm của đoạn AB, BC

Khi đó $5\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BA} + 5\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{BC} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = 0 \Leftrightarrow$

$$5(\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HB}) \cdot \overrightarrow{BA} + 5(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KB}) \cdot \overrightarrow{BC} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}BC^2 - \frac{5}{2}BC^2 + 2BA^2 + 2BC^2 + 2.2\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}BA^2 - \frac{1}{2}BC^2 + (AB^2 + BC^2 - AC^2) = 0 \Leftrightarrow AC^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2).$$

$$\cos \angle ABC = \frac{BA^2 + BC^2 - AC^2}{2BA \cdot BC} = \frac{\frac{4}{3}AC^2 - AC^2}{\frac{2}{3}AC^2}$$

Do đó $\angle ABC = 60^\circ$. Suy ra $\angle ABC = 60^\circ$.

Họ và tên tác giả : Đào Trung Kiên (st) Tên FB: kienyenthe

Email: kienyenthe@gmail.com

Câu 25. Cho hình thang vuông ABCD, đường cao AD = h, đáy AB = a, đáy CD = b. Gọi M là trung điểm của BC. Hệ thức giữa a, b, h để $AM \perp BD$ là

A. $a^2 - h^2 - ab = 0$.

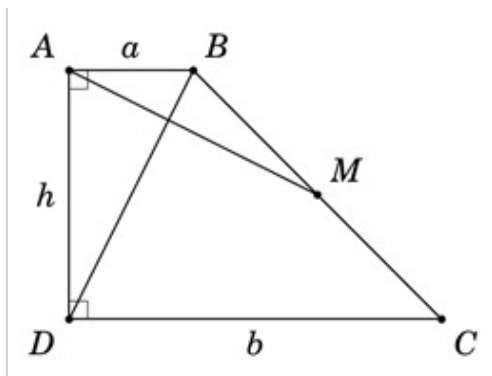
B. $h^2 - a^2 - ab = 0$

C. $h^2 - b^2 - ab = 0$.

D. $b^2 - h^2 - ab = 0$.

Lời giải

Chọn B



Ta có

$$\begin{aligned} AM \perp BD &\Leftrightarrow 2\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \\ &\Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = 0 \\ &\Leftrightarrow -AB^2 + AD^2 - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ &\Leftrightarrow h^2 - a^2 - ab = 0 \end{aligned}$$

Họ và tên: Vũ Huỳnh Đức

Email: vutoanpvd@gmail.com

Facebook: vuhuynhduc2017

Câu 26. Cho tam giác đều ABC cạnh bằng a. Gọi M, N là các điểm thỏa mãn $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Gọi I là giao điểm của AM và CN. Tính diện tích của tam giác IBC theo a?

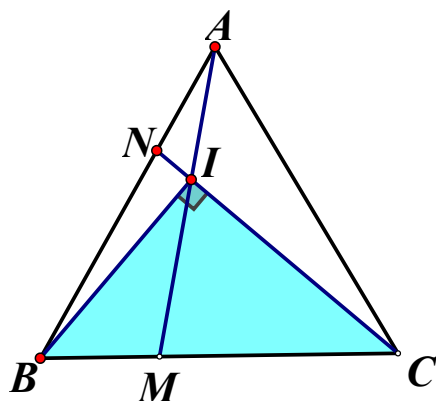
A. $S_{IBC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{7}$. **B.** $S_{IBC} = \frac{a^2\sqrt{7}}{7}$. **C.** $S_{IBC} = \frac{2a^2\sqrt{7}}{7}$. **D.** $S_{IBC} = \frac{2a^2\sqrt{3}}{7}$.

Lời giải

Chọn A

$$I \in CN \Rightarrow \exists x, y \in \mathbb{R} : \overrightarrow{BI} = x\overrightarrow{BN} + y\overrightarrow{BC}, x+y=1 \Rightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BN} + 3y\overrightarrow{BC}, x+y=1$$

$$\text{và do } I \in AM \text{ nên từ } \overrightarrow{BI} = \frac{2x}{3}\overrightarrow{BA} + 3y\overrightarrow{BC} \text{ ta cũng có } \frac{2x}{3} + 3y = 1.$$



$$g \begin{cases} x+y=1 \\ \frac{2x}{3} + 3y = 1 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{6}{7}, y = \frac{1}{7} \Rightarrow \vec{BI} = \frac{4}{7}\vec{BA} + \frac{1}{7}\vec{BC}$$

$$\vec{CN} = \frac{2}{3}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{CB}$$

Từ giả thiết ta có

$$\begin{aligned} g \vec{CN} \cdot \vec{BI} &= \left(\frac{2}{3}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{CB} \right) \cdot \left(\frac{4}{7}\vec{BA} + \frac{1}{7}\vec{BC} \right) \\ &= \frac{8}{21}\vec{BA} \cdot \vec{CA} + \frac{4}{21}\vec{BA} \cdot \vec{CB} + \frac{2}{21}\vec{BC} \cdot \vec{CA} + \frac{1}{21}\vec{BC} \cdot \vec{CB} = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow \triangle BIC$ vuông tại I.

$$g \vec{BI} = \frac{4}{7}\vec{BA} + \frac{1}{7}\vec{BC} \Rightarrow BI^2 = \left(\frac{4}{7}\vec{BA} + \frac{1}{7}\vec{BC} \right)^2 = \frac{21}{49}a^2$$

$$g \vec{C}^2 = BC^2 - BI^2 = a^2 - \frac{21}{49}a^2 = \frac{28}{49}a^2 \Rightarrow IC = \frac{2\sqrt{7}}{7}a$$

$$\text{Vậy } S_{IBC} = \frac{1}{2}BI \cdot IC = \frac{a^2\sqrt{3}}{7}$$

Họ và tên tác giả : Huỳnh Thanh Tịnh Tên FB: huynhthanhtinh

Email: huynhthanhtinhsp@gmail.com

Câu 27. Cho tam giác đều ABC và các điểm M, N, P thỏa mãn $\vec{BM} = k\vec{BC}$, $\vec{CN} = \frac{2}{3}\vec{CA}$, $\vec{AP} = \frac{4}{15}\vec{AB}$. Tìm k để AM vuông góc với PN .

A. $k = \frac{1}{3}$

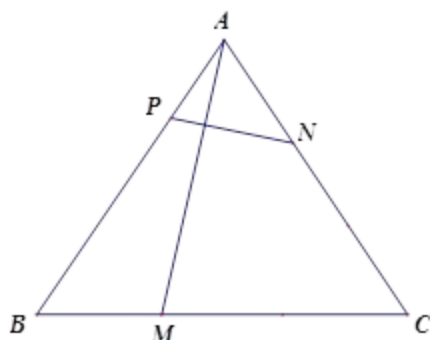
B. $k = \frac{1}{2}$

C.

D. $k = \frac{3}{4}$

Lời giải

Chọn A



$$\vec{BM} = k\vec{BC} \Leftrightarrow \vec{AM} - \vec{AB} = k(\vec{AC} - \vec{AB}) \Leftrightarrow \vec{AM} = (1-k)\vec{AB} + k\vec{AC}$$

$$+) \vec{PN} = \vec{AN} - \vec{AP} = -\frac{4}{15}\vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{AC}$$

Để AM vuông góc với PN thì $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{PN} = 0$

$$\Leftrightarrow \left[(1-k)\overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AC} \right] \left(-\frac{4}{15}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15}AB^2 + \frac{k}{3}AC^2 + \left(\frac{1-k}{3} - \frac{4k}{15} \right) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4(1-k)}{15} + \frac{k}{3} + \left(\frac{1-k}{3} - \frac{4k}{15} \right) \cos 60^\circ = 0$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{1}{3}$$

Email: duyhung2501@gmail.com

Câu 28. : Giả sử O là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh $BC = a; CA = b; AB = c$. Tìm

giá trị biểu thức: $K = \frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ca} + \frac{OC^2}{ab}$

A. $K = \frac{1}{2}$

B. $K = \frac{1}{3}$

C. $K = 1$

D. $K = \frac{1}{4}$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng tính chất đường phân giác vào các phân giác OA, OB, OC ta luôn có:

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} = \vec{0} \text{ . Từ đó}$$

$$\left(a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} + c\overrightarrow{OC} \right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2OA^2 + b^2OB^2 + c^2OC^2 + 2ab\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + 2bc\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} + 2ca\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OA} = 0$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA} \Rightarrow \left(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} \right)^2 = c^2 \Rightarrow 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA^2 + OB^2 - c^2$$

Tương tự ta có:

$$a^2OA^2 + b^2OB^2 + c^2OC^2 + ab(OA^2 + OB^2 - c^2) + bc(OB^2 + OC^2 - a^2) + ca(OC^2 + OA^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a+b+c)(aOA^2 + bOB^2 + cOC^2) = abc(a+b+c)$$

$$\Leftrightarrow \frac{OA^2}{bc} + \frac{OB^2}{ac} + \frac{OC^2}{ab} = 1$$

Chọn đáp án **C.** $K = 1$

Người sưu tầm: Tăng Duy Hùng. FB: Hùng Tăng

Họ và tên: Nguyễn Thị Huệ FB: Nguyễn Thị Huệ

Gmail: nguyenthihue1611@gmail.com

Câu 29. Cho hai véc tơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ thỏa mãn các điều kiện $|\vec{a}| = \frac{1}{2}|\vec{b}| = 1, |\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15}$. Đặt $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$ và $\vec{v} = 2k\vec{a} - \vec{b}, k \in \mathbb{R}$. Tìm tất cả các giá trị của k sao cho $(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ$.

A. $k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

B. $k = 4 \pm \frac{3\sqrt{5}}{2}$.

C. $k = 5 + \frac{\sqrt{17}}{2}$.

D. $k = 5 \pm \frac{\sqrt{17}}{2}$.

Lời giải. Chọn A

Từ giả thiết $|\vec{a} - 2\vec{b}| = \sqrt{15} \Leftrightarrow (\vec{a} - 2\vec{b})^2 = 15 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}$.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (2k\vec{a} - \vec{b}) = 3k - \frac{9}{2}, \quad |\vec{u}| = \sqrt{u^2} = \sqrt{6}, |\vec{v}| = \sqrt{v^2} = \sqrt{4k^2 - 2k + 4}$$

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 60^\circ \Leftrightarrow \frac{3k - \frac{9}{2}}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{4k^2 - 2k + 4}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow k = 4 + \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$

Họ và tên tác giả : Lê Thị Nguyệt Tên FB: NguyệtLê

Email: Lenguety150682@gmail.com

Câu 30. Cho tứ giác $ABCD$, hai điểm M, N thỏa mãn $2\vec{MB} + \vec{MA} = \vec{0}; 2\vec{NC} + \vec{ND} = \vec{0}$ và $\frac{AD}{BC} = x$. Tính $\frac{\cos \angle DBC}{\cos \angle ADB}$ theo x để $MN \perp BD$.

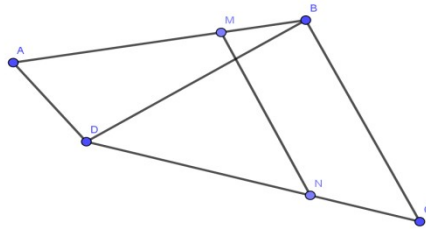
A. $\frac{x}{2}$.

B. $-\frac{x}{2}$.

C. $\frac{x}{\sqrt{3}}$.

D. $x\sqrt{3}$.

Lời giải



$$MN \perp BD \Leftrightarrow \vec{MN} \cdot \vec{BD} = 0;$$

Phân tích: Ta thấy $\angle DBC = (\vec{BD}; \vec{BC}); \angle ADC = (\vec{AD}; \vec{BD})$ nên cần phân tích $\vec{MN}$ theo $\vec{AD}$ và $\vec{BC}$.

Giải. Ta có biểu diễn

$$\begin{aligned} \vec{MN} &= \vec{MA} + \vec{AN} = \frac{2}{3} \vec{BA} + \vec{AN} = \frac{2}{3} (\vec{BN} + \vec{NA}) + \vec{AN} = \frac{2}{3} \vec{BN} + \frac{1}{3} \vec{AN} \\ &= \frac{2}{3} (\vec{BC} + \vec{CN}) + \frac{1}{3} (\vec{AD} + \vec{DN}) = \frac{2}{3} \vec{BC} + \frac{1}{3} \vec{AD} \end{aligned}$$

Vậy $\vec{MN} = \frac{2}{3} \vec{BC} + \frac{1}{3} \vec{AD}$. Do đó

$$MN \perp BD \Leftrightarrow (2\vec{BC} + \vec{AD}) \cdot \vec{BD} = 0 \Leftrightarrow 2BC \cdot \cos \angle DBC + AD \cdot \cos \angle ADB = 0$$

$$\frac{\cos \angle DBC}{\cos \angle ADB} = -\frac{AD}{2BC} = -\frac{x}{2}.$$

Suy ra **Đáp án B.**

Họ và tên tác giả : Trần Thanh Hà **Tên FB:** Hatran

Email: tranthanhha484@gmail.com

Câu 31. Cho tam giác ABC có $AB = 6; BC = 7; CA = 5$. Gọi M là điểm thuộc cạnh AB sao cho

$$AM = 2MB \text{ và } N \text{ là điểm thuộc } AC \text{ sao cho } \overrightarrow{AN} = k\overrightarrow{AC} \text{ } (k \in \mathbb{R}). \text{ Biết } k = -\frac{a}{b}$$

($\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, a, b là các số nguyên) sao cho đường thẳng CM vuông góc với đường thẳng BN .

Tính giá trị biểu thức $T = 2018a - 2019b + 5$.

A. $T = 2017$.

B. $T = -2020$.

C. $T = 2030$.

D. $T = -2030$.

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$$

$$\text{Suy ra: } \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})(k\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = \frac{2k}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}^2 - k\overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2 = \overrightarrow{CB}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = 6$$

$$BN \perp CM \Leftrightarrow k = -\frac{6}{7}$$

Theo giả thiết, ta có : $a = 6; b = 7 \Rightarrow T = 2018.6 - 2019.7 + 5 = -2020$.

Họ và tên tác giả: Đỗ Thế Nhất **Tên FB:** Đỗ Thế Nhất

Email: nhatks@gmail.com

Câu 32. Cho tam giác ABC có $AB = c, AC = b$ và $\angle BAC = 60^\circ$. Các điểm M, N được xác định bởi $\overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB}$ và $\overrightarrow{NB} = -2\overrightarrow{NA}$. Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c để AM và CN vuông góc với nhau.

A. $6c^2 - 5b^2 - 4bc = 0$

B. $c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$

C. $4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$

D. $4c^2 + 6b^2 - 5bc = 0$

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MC} = -2\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = -2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AM} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } 3\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$$

Vậy: $AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = 0$
 $\Leftrightarrow (2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow 2AB^2 - 3AC^2 - 5\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$
 $\Leftrightarrow 2c^2 - 3b^2 - \frac{5bc}{2} = 0 \Leftrightarrow 4c^2 - 6b^2 - 5bc = 0$

- Câu 33.** Cho hình chữ nhật ABCD có AB= a, AD=2a. Gọi M là trung điểm AB, N là điểm trên cạnh AD sao cho $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AN}$. Tìm k để CM $\perp$ BN.
A. k=7,9 **B.** k=8 **C.** k=8,1 **D.** k=7.8

Lời giải

Chọn B

$$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BM} = -\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$$

giải: Ta có

$$\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AN} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k}\overrightarrow{AD}$$

Để CM $\perp$ BN thì $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} &= \left(-\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \cdot \left(-\overrightarrow{AB} + \frac{1}{k}\overrightarrow{AD}\right) \\ &= \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{k}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 - \frac{1}{2k}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} \\ &= -\frac{1}{k}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2 = -\frac{1}{k}(2a)^2 + \frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

Mà

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{BN} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{k}(2a)^2 + \frac{1}{2}a^2 = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{4}{k} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = 8$$

Vậy $k = 8$ thì CM $\perp$ BN

Họ và tên tác giả : Nguyễn Ngọc Duy Tên FB: Ngọc Duy

Email: nguyennngocduyakgl@gmail.com

- Câu 34.** Cho hình bình hành ABCD có đường chéo lớn là AC. Gọi E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB, AD. Biểu thức nào sau đây là đúng.

A. $AB \cdot AH + AD \cdot AF = AC^2$

B. $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$

C. $AB \cdot AE + AD \cdot AH = AC^2$

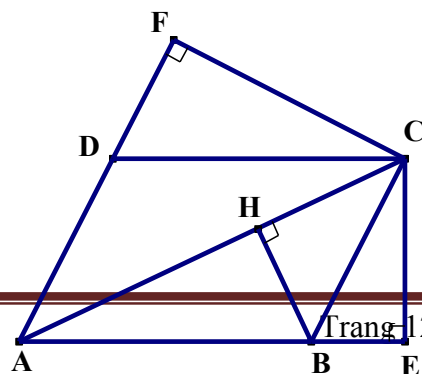
D. $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC \cdot AH$

Lời giải

Chọn B

Vì E, F lần lượt là hình chiếu vuông góc của C trên AB, AD nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$$



$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}$$

Suy ra: $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AC} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AC}^2$ (*)

Do $\overrightarrow{AC}$ là đường chéo lớn nên $\angle ABC \geq 90^\circ$ và B nằm giữa hai điểm A, E . Suy ra $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE} = AB \cdot AE$

Tương tự ta có: D nằm giữa hai điểm A, F . Suy ra $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AF} = AD \cdot AF$

Vậy đẳng thức (*) trở thành: $AB \cdot AE + AD \cdot AF = AC^2$.

Email: thuy.tranthithanhdb@gmail.com

Câu 35. Cho hình thang vuông $ABCD$, đường cao $AD = h$, cạnh đáy $AB = a, CD = b$. Tìm hệ thức giữa a, b, h để BD vuông góc trung tuyến AM của tam giác ABC .

A. $h^2 = a(a+b)$

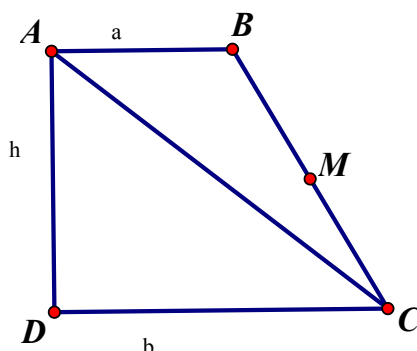
B. $h^2 = a(b-a)$

C. $h(h+b) = a(a+b+h)$

D. $2h^2 = a(a+b)$

Lời giải

Chọn A



Thay $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, ta có:

$$\overrightarrow{AM} \perp \overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \quad (1)$$

mà $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = -\overrightarrow{AB}^2 = -a^2$

và $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}) \cdot (\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{AD}^2 - \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB} = h^2 - ab$

nên: $(1) \Leftrightarrow h^2 = a(a+b)$.

Họ và tên tác giả : Nguyễn Quang Nam Tên FB: Quang Nam

Email: quangnam68@gmail.com

Câu 36. Cho tam giác ABC vuông tại A nội tiếp đường tròn (O, R) , M là điểm chính giữa cung BC (cung BC không chứa điểm A). Chọn đẳng thức đúng trong các đẳng thức sau :

A. $MA = MB \cdot \sin C + MC \cdot \sin B$

B. $MA = MB \cdot \cos C + MC \cdot \cos B$

C. $MA = MB \cdot \sin B + MC \cdot \sin C$

D. $MA = MB \cdot \cos B + MC \cdot \cos C$

Lời giải

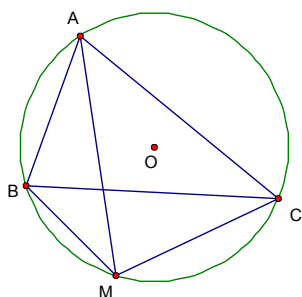
Chọn C

Ta có $2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{MA} = MA^2 \Rightarrow 2\overrightarrow{MO} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = MA \Rightarrow 2 \sin A \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = \sin A \cdot MA \quad (1)$

Tương tự $2 \sin B \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} = \sin B \cdot MB \quad (2) \quad 2 \sin C \cdot \overrightarrow{MO} \cdot \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = \sin C \cdot MC \quad (3)$

Từ (1), (2) và (3) :

$$\begin{aligned} & -\sin A \cdot MA + \sin B \cdot MB + \sin C \cdot MC = \\ & = 2\overrightarrow{MO} \left(-\sin A \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \sin B \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \sin C \cdot \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} \right) = \\ & = 2\overrightarrow{MO} \cdot \vec{0} = 0 \end{aligned}$$



Ta sẽ chứng minh $-\sin A \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \sin B \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \sin C \cdot \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = \vec{0} \quad (*)$

Thật vậy , $(*) \Leftrightarrow -\frac{1}{2} MB \cdot MC \cdot \sin A \cdot \overrightarrow{MA} + \frac{1}{2} MA \cdot MC \cdot \sin B \cdot \overrightarrow{MB} + \frac{1}{2} MB \cdot MA \cdot \sin C \cdot \overrightarrow{MC} = \vec{0}$
 $\Leftrightarrow -S_a \overrightarrow{MA} + S_b \overrightarrow{MB} + S_c \overrightarrow{MC} = \vec{0} \quad (\text{đúng})$

(với S_a, S_b, S_c lần lượt là diện tích các tam giác MBC, MAC, MAB)

Vậy $-MA \cdot \sin A + MB \cdot \sin B + MC \cdot \sin C = 0 \Leftrightarrow MA \cdot \sin A = MB \cdot \sin B + MC \cdot \sin C \quad (*)$

Theo bài ra: $\sin A = \sin 90^\circ = 1$ thay vào (*) : $MA = MB \cdot \sin B + MC \cdot \sin C$

Họ Tên: Lương Thị Hương Liễu Tên FB: Hương Liễu Lương

Email: lieuluong.290983@gmail.com

Câu 37. Cho tam giác ABC có $BC = a, CA = b, AB = c$. M là trung điểm của BC , D là chân đường phân giác trong góc $\widehat{A}$. Tính $\overrightarrow{AD}^2$

A. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4c}{(b+c)^2} p(p-a)$

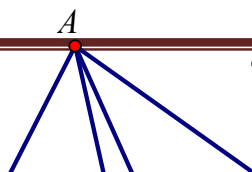
B. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} (p-a)$

C. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b-c)^2} p(p-a)$

D. $\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2} p(p-a)$

Lời giải

Chọn D



* Vì M là trung điểm của BC nên $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AB}^2 + 2\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC}^2)$$

Suy ra

$$\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}[\overrightarrow{AB}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC})^2]$$

Ta có

$$= \frac{1}{2}[AB^2 + AC^2 - CB^2] = \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) \quad \text{nên}$$

$$\overrightarrow{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + b^2\right) = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}$$

* Theo tính chất đường phân giác thì $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

$$\text{Suy ra } \overrightarrow{BD} = \frac{BD}{DC} \overrightarrow{DC} = \frac{c}{b} \overrightarrow{DC} \quad (*)$$

Mặt khác $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$ thay vào (*) ta được

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \frac{c}{b}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) \Leftrightarrow (b+c)\overrightarrow{AD} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = (b\overrightarrow{AB})^2 + 2bc\overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC} + (c\overrightarrow{AC})^2$$

$$\Leftrightarrow (b+c)^2 \overrightarrow{AD}^2 = b^2c^2 + 2bc \cdot \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2) + c^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AD}^2 = \frac{bc}{(b+c)^2}(b+c-a)(b+c+a)$$

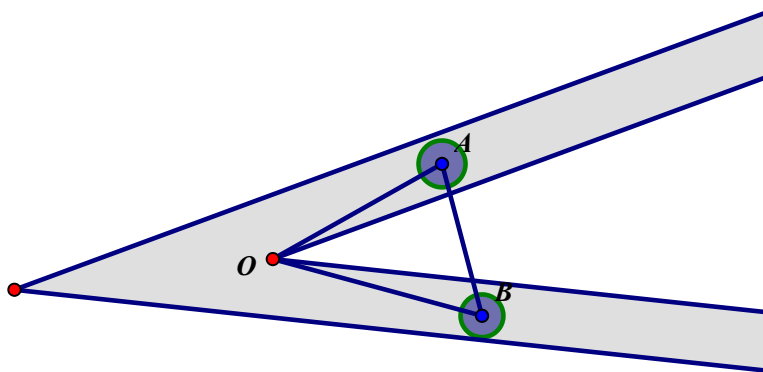
$$\overrightarrow{AD}^2 = \frac{4bc}{(b+c)^2}p(p-a)$$

Hay

Họ và tên tác giả : Phạm Thành Trung Tên FB: Phạm Thành Trung

Email: trungthuong2009@gmail.com

Câu 38. Trong cuộc thi giải trí toán học tổ chức nhân dịp hoạt động chào mừng Ngày nhà giáo Việt Nam có một trò chơi như sau: Người ta thiết kế hai đường ray tạo với nhau một góc 30° như hình vẽ dưới đây. Trên các đường thẳng Ox và Oy người ta để hai vật nặng cùng trọng lượng. Buộc hai vật thể với nhau bằng một thanh cứng $AB = 1m$ sao cho mỗi vật đều có thể chuyển động được trên hai đường ray. Nối hai vật bằng một sợi giây vòng qua một cột có gốc tại O . Người tham dự cuộc thi sẽ đứng tại vị trí điểm B để kéo vật thể chuyển động trên Oy . Người thắng cuộc sẽ là người kéo được vật thể ra xa nhất so với điểm gốc O . Hãy dùng kiến thức toán học để tính toán vị trí xa nhất mà người tham dự cuộc thi có thể đạt được.



- A. $1m$. B. $2m$. C. $\sqrt{3}m$. D. $\sqrt{2}m$.

Lời giải

Chọn B

+ Đặt $OB = x; OA = y (x, y > 0)$. Khi đó theo định lý cosin ta có:

$$AB^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos 30^\circ = x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy$$

Do đó ta có hệ thức:

$$x^2 + y^2 - \sqrt{3}xy = 1$$

Xét phương trình bậc hai:

$$y^2 - \sqrt{3}xy + x^2 - 1 = 0$$

Phương trình có nghiệm y khi $\Delta = 3x^2 - 4(x^2 - 1) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 2$

Vậy học vị trí xa nhất mà học sinh có thể đạt được cách O một khoảng là $2m$

Câu 39. Cho tam giác ABC có $AB = c, BC = a, CA = b$. Trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong

$\frac{CM}{AL} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Tính $\cos A$.

- A. $\cos A = \frac{\sqrt{2}}{2}$ B. $\cos A = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ C. $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ D. $\cos A = \frac{1}{2}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\overrightarrow{AL} = \frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{2}$$

Theo giả thiết: $AL \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{b}{b+c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c} \overrightarrow{AC} \right) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{2} \right) = 0 \Leftrightarrow bc^2 + bc^2 \cos A - 2cb^2 \cos A - 2cb^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 2b)(1 + \cos A) = 0 \Rightarrow c = 2b \text{ (do } \cos A > -1)$$

$$\text{Khi đó: } CM^2 = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4} = \frac{a^2 - b^2}{2}$$

$$AL^2 = \frac{1}{9}(\overline{AB} + \overline{AC})^2 = \frac{1}{9}(AB^2 + AC^2 + 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}) = \frac{2}{9}(9b^2 - a^2)$$

$$\frac{CM}{AL} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{CM^2}{AL^2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{a^2 - b^2}{9b^2 - a^2} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow a^2 = 3b^2$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5b^2 - a^2}{4b^2} = \frac{1}{2}$$

doantv.toan@gmail.com

Câu 40. Cho hình chữ nhật ABCD có $AB = 1; CD = 3$. Điểm M thuộc cạnh AD và N là trung điểm BC

sao cho $MN \perp BD$. Phân số tối giản $\frac{m}{n} = \frac{BN}{NC}$ có $m+n$ bằng bao nhiêu

A. 29.

B. 18.

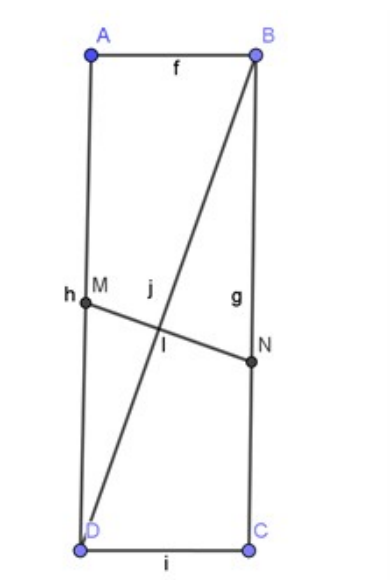
C. 16.

D. 27.

Lời giải

(Họ và tên tác giả : Trần Văn Đoàn, Tên FB: Trần Văn Đoàn)

Chọn B



$$\overline{BD} = (\overline{BA} + \overline{BC})$$

Ta có

$$\frac{m}{n} = \frac{BN}{NC} \Leftrightarrow \frac{BN}{BC} = \frac{m}{m+n} \Leftrightarrow \overline{BN} = \frac{m}{m+n} \overline{BC} = k \overline{BC}$$

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AB} + \overline{BN} = \left(k - \frac{1}{2}\right) \overline{BC} + \overline{AB}$$

$$\overline{BD} \cdot \overline{MN} = 0 \text{ nên } -1 + 9 \left(k - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{11}{18} = \frac{11}{11+7} \Leftrightarrow m = 11, n = 7$$

Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Thỏa Tên FB: Nguyễn Thị Thỏa

Email: phamquynhanhbaby56@gmail.com

Câu 41. Cho tam giác ABC có $AB = c$; $BC = a$, $CA = b$. Gọi M là trung điểm của AB và D là chân đường phân giác trong góc A của tam giác ABC . Biết rằng trung tuyến CM vuông góc với phân giác trong AD . Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $b = 2c$.

B. $c = 2b$.

C. $a = b + c$.

D. $c = a + b$.

Lời giải

Chọn B

Ta có D là chân đường phân giác trong góc A nên $\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$

và $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng suy ra $\overrightarrow{DB} = -\frac{c}{b}\overrightarrow{DC}$ và $b\overrightarrow{DB} + c\overrightarrow{DC} = \vec{0}$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{b}{b+c}\overrightarrow{AB} + \frac{c}{b+c}\overrightarrow{AC}$$

Ta có:

$$\overrightarrow{CM} = \frac{\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}}{2}$$

Vì CM là trung tuyến nên

Theo giả thiết: $AL \perp CM \Leftrightarrow \overrightarrow{AL} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$

$$\Leftrightarrow (b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}) \cdot (\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}) = 0 \Leftrightarrow bc^2 + bc^2 \cos A - 2cb^2 \cos A - 2cb^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (c - 2b)(1 + \cos A) = 0 \Rightarrow c = 2b \text{ (do } \cos A > -1)$$

Vậy $c = 2b$.

Câu 42. Cho tam giác ABC đều nội tiếp (O;R). M là điểm bất kì trên cung nhỏ $\widehat{BC}$. Khi đó

A. $MA = MB + MC$

B. $MA > MB + MC$

C. $MA < MB + MC$

D. $MA = 2MB + MC$

Lời giải

Chọn A

$$R^2 = OA^2 = (\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MA})^2 = R^2 + MA^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA}$$

$$\Rightarrow MA^2 + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} = 0 \Rightarrow MA + 2\overrightarrow{OM} \cdot \frac{\overrightarrow{MA}}{MA} = 0$$

Ta có

Tương tự

$$MB + 2\overrightarrow{OM} \cdot \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} = 0$$

$$MC + 2\overrightarrow{OM} \cdot \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = 0$$

$$\text{Suy ra } -MA + MB + MC + 2\overrightarrow{OM} \left(-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} \right) = 0$$

$$\text{Vì } -\frac{\overrightarrow{MA}}{MA}, \frac{\overrightarrow{MB}}{MB}, \frac{\overrightarrow{MC}}{MC}$$

là các véc tơ đơn vị và đôi một tạo với nhau một góc 120° nên

$$-\frac{\overrightarrow{MA}}{MA} + \frac{\overrightarrow{MB}}{MB} + \frac{\overrightarrow{MC}}{MC} = \vec{0}, \text{ do đó } -MA + MB + MC = 0$$

