CÁC DẠNG BÀI TẬP BÀI ỨNG DỤNG HÌNH HỌC CỦA TÍCH PHÂN

Dạng 1: Ứng dụng tích phân để tính diện tích hình phẳng

Phương pháp:

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi một hàm số, trục hoành và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ Ox \\ x = a; x = b \end{cases} \to S = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = 0$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)\ (a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b)$.

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x)| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} |f(x)| \mathrm{d}x + ... + \int_{x_n}^{b} |f(x)| \mathrm{d}x$

$$= \left| \int_a^{x_1} f(x) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x) \mathrm{d}x \right| + ... + \left| \int_{x_n}^{b} f(x) \mathrm{d}x \right|$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hai hàm số và hai đường thẳng $x = a, x = b$

Diện tích hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases} \to S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$.

Để phá bỏ dấu giá trị tuyệt đối ta thường làm như sau:

Bước 1: Giải $f(x) = g(x)$ tìm nghiệm $x_1, x_2, ..., x_n \in (a;b)\ (a < x_1 < x_2 < ... < x_n < b)$.

Bước 2: Tính $S = \int_a^{x_1} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x + ... + \int_{x_n}^{b} |f(x) - g(x)| \mathrm{d}x$

$$= \left| \int_a^{x_1} (f(x) - g(x)) \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} (f(x) - g(x)) \mathrm{d}x \right| + ... + \left| \int_{x_n}^{b} (f(x) - g(x)) \mathrm{d}x \right|$$

Chú ý: Ngoài cách trên, ta có thể dựa vào đồ thị để bỏ dấu giá trị tuyệt đối.

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường cong $y = x^3 - 6x$ và $y = x^2$ bằng

A. $\frac{125}{12}$. **B.** $\frac{16}{3}$. **C.** $\frac{63}{4}$. **D.** $\frac{253}{12}$.

Lời giải

Ta có $x^3-6x=x^2 \Leftrightarrow x^3-x^2-6x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3 \\ x=0 \\ x=-2 \end{array}\right.$.

Ta có $S=\int_{-2}^{3}\left|x^3-x^2-6x\right|\mathrm{d}x=\frac{253}{12}$.

Câu 2: Tính diện tích S hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$

A. $S=\frac{937}{12}$ **B.** $S=\frac{343}{12}$ **C.** $S=\frac{397}{4}$ **D.** $S=\frac{793}{4}$

Lời giải

Xét phương trình $-x^3+12x=-x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=4 \\ x=-3 \end{array}\right.$.

Diện tích S hình phẳng (H) giới hạn bởi đường cong $y=-x^3+12x$ và $y=-x^2$ bằng

$S=\int_{-3}^{4}\left|-x^3+12x+x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{937}{12}$.

Câu 3: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=|\ln x|, y=1$ được tính bởi công thức:

A. $S=\int_{1}^{e}\left|\left(|\ln x|-1\right)\right|\mathrm{d}x$ **B.** $S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(|\ln x|-1\right)\mathrm{d}x$

C. $S=\int_{1}^{e}\left|\left(1-|\ln x|\right)\right|\mathrm{d}x$ **D.** $S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1-|\ln x|\right)\mathrm{d}x$

Lời giải

Xét phương trình: $|\ln x|=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \ln x=-1 \\ \ln x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{e} \\ x=e \end{array}\right.$

Khi đó: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=|\ln x|, y=1$ được tính bởi công thức: $S=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left|1-|\ln x|\right|\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{e}}^{e}\left(1-|\ln x|\right)\mathrm{d}x$.

Câu 4: Gọi diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\frac{-3x-1}{x-1}$ và hai trục tọa độ là S. Tính S?

A. $S=4\ln\frac{4}{3}-1$ **B.** $S=\ln\frac{4}{3}-1$ **C.** $S=1-\ln\frac{4}{3}$ **D.** $S=4\ln\frac{4}{3}$

Lời giải

Ta có: $\frac{-3x-1}{x-1}=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(C): y=\dfrac{-3x-1}{x-1}$; $y=0; x=0; x=-\dfrac{1}{3}$ là

$$S=\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left|\frac{-3x-1}{x-1}\right|\mathrm{d}x=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\frac{3x+1}{x-1}\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{-\frac{1}{3}}^{0}\left(3+\frac{4}{x-1}\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(3x+4\ln|x-1|\right)\right|_{-\frac{1}{3}}^{0}\Bigg|=4\ln\frac{4}{3}-1$$

Câu 5: Diện tích hình phẳng giớn hạn bởi các đường $y=x^2-4x+3$; $x=0$ và $y=0$ bằng

A. $\dfrac{5}{3}$. **B.** $\dfrac{16}{9}$. **C.** $\dfrac{4}{3}$. **D.** $\dfrac{8}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$

$$S=\int_0^3\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x-\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x$$

$$=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_0^1-\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Bigg|_1^3=\frac{8}{3}$$

Câu 6: Diện tích hình phẳng S giới hạn bởi các đường thẳng $y=x^2-x, y=0, x=0, x=2$ được tính bởi công thức nào sau đây?

A. $S=\int_0^2\left(x-x^2\right)\mathrm{d}x.$ **B.** $S=\int_1^2\left(x^2-x\right)-\int_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$

C. $S=\int_0^1\left(x^2-x\right)+\int_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$ **D.** $S=\int_0^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x.$

Lời giải

$$S=\int_0^2\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x+\int_1^2\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=-\int_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x+\int_1^2\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x$$

Ta có:

Câu 7: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=8-x^2$ là

A. 12. **B.** 32. **C.** $\dfrac{3}{64}$. **D.** $\dfrac{64}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm cần tìm là $x^2=8-x^2\Leftrightarrow 2x^2=8\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tìm là

$$S=\int_{-2}^{2}\left|x^2-\left(8-x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\left|2x^2-8\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^{2}\left(-2x^2+8\right)\mathrm{d}x$$ vì $2x^2-8\le 0, \forall x\in[-2;2]$

$$\Rightarrow S=\left(-\frac{2}{3}x^3+8x\right)\Bigg|_{-2}^{2}=-\frac{2}{3}.2^3+8.2-\left(-\frac{2}{3}.(-2)^3+8.(-2)\right)=\frac{64}{3}.$$

Câu 8: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi 2 đường $y=x^2-1$ và $y=x-1$ bằng?

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{13}{6}$. **C.** $\frac{13\pi}{6}$. **D.** $\frac{1}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm hai đồ thị hàm số là: $x^2-1=x-1\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng là: $S=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x=\left|\int_0^1\left(x^2-x\right)\mathrm{d}x\right|=\left|\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1\right|=\frac{1}{6}$.

Câu 9: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của các hàm số $y=x^2$, $y=x$ và các đường thẳng $x=0$, $x=1$ bằng

A. $\int_{-1}^0\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1\left|x^2+x\right|\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{-1}^0\left|x^2+x\right|\mathrm{d}x$. **D.** $\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.\Rightarrow S=\int_0^1\left|x^2-x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 10: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3-3x$ và $y=x$ bằng

A. 0. **B.** 8. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Xét phương trình $x^3-3x=x\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3-3x$ và $y=x$ là

$$S=\int_{-2}^2\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x=\int_{-2}^0\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x+\int_0^2\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x=\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_{-2}^0\right|+\left|\left(\frac{x^4}{4}-2x^2\right)\Big|_0^2\right|=8$$

Câu 11: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1;x=3$.

A. $S=\frac{37}{3}$. **B.** $S=\frac{56}{3}$. **C.** $S=\frac{68}{3}$. **D.** $S=\frac{64}{3}$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x+1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-1;x=3$ là $S=\int_{-1}^3\left|x^2+2x+1\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^3\left(x^2+2x+1\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}+x^2+x\right)\Big|_{-1}^3=\frac{64}{3}$.

Câu 12: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$. Diện tích của hình phẳng (H) bằng

A. 1. **B.** 2π. **C.** 2. **D.** π.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sin x, Ox, x=0, x=\pi$ là

$$S=\int_0^{\pi}|\sin x|dx=\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=2$$

.

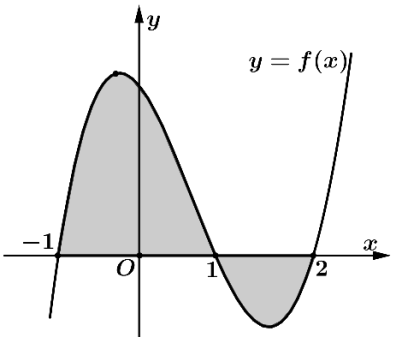
Câu 13: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=(x-2)^2-1$, trục hoành và hai đường thẳng $x=1,x=2$ bằng

A. $\frac{2}{3}$. **B.** $\frac{7}{3}$. **C.** $\frac{1}{3}$. **D.** $\frac{3}{2}$.

Lời giải

Ta có: $S=\int_1^2\left|(x-2)^2-1\right|dx=\frac{2}{3}$.

Câu 14: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên . Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x),y=0,x=-1,x=2$ (như hình vẽ). Mệnh đề nào dưới đây đúng?



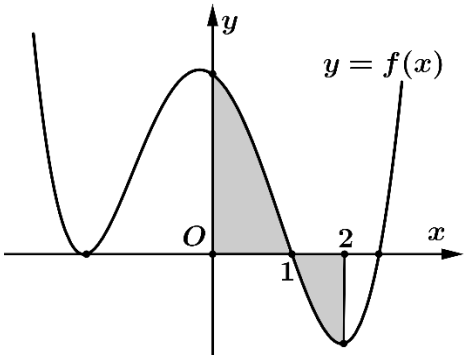
A. $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx$. **B.** $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$.

C. $S=-\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx$. **D.** $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx+\int_1^2 f(x)\,dx$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị, ta có $S=\int_{-1}^{1}f(x)\,dx-\int_1^2 f(x)\,dx$.

Câu 15: Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $\mathbf{R}$ và có đồ thị (C) là đường cong như hình bên.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số (C), trục hoành và hai đường thẳng $x=0;$ $x=2$ là

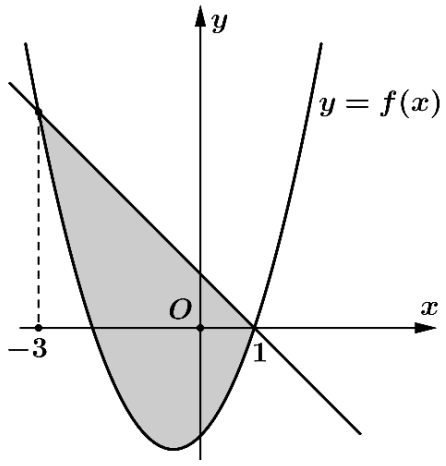
A. $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x + \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

C. $\left|\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hàm số ta có diện tích hình phẳng cần tính là $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 16: Diện tích phần sạch sọc trong hình vẽ bằng



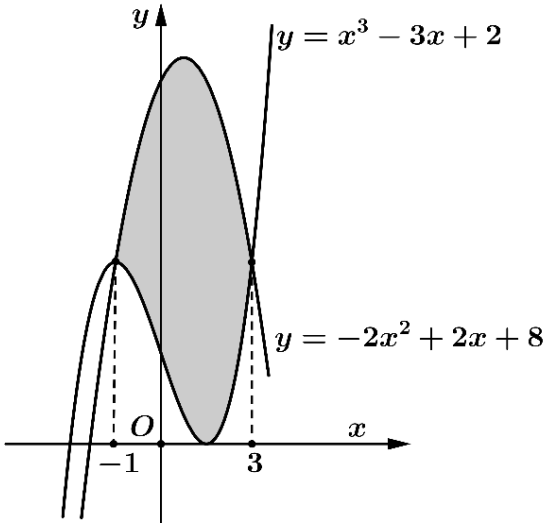
A. $\int_{-3}^1 \left|-x^2-2x-3\right|\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{-3}^1 \left(x^2-2x-3\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{-3}^1 \left(x^2+2x-3\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{-3}^1 \left(-x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị hai hàm số $y=x^2+x-2$ và $y=-x+1$.

Ta có diện tích hình phẳng là $S=\int_{-3}^1 \left(-x+1-\left(x^2+x-2\right)\right)\mathrm{d}x = \int_{-3}^1 \left(-x^2-2x+3\right)\mathrm{d}x$.

Câu 17: Diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ bên được tính theo công thức nào sau đây?



A. $S=\int_{-1}^2 \left(x^3+2x^2-5x-6\right)\mathrm{d}x$. **B.** $S=\int_{-1}^2 \left(x^3+2x^2-x-10\right)\mathrm{d}x$.

C. $S=\int_{-1}^{2}\left(x^3-2x^2-x+10\right)\mathrm{d}x$. **D.** $S=\int_{-1}^{2}\left(-x^3-2x^2+5x+6\right)\mathrm{d}x$.

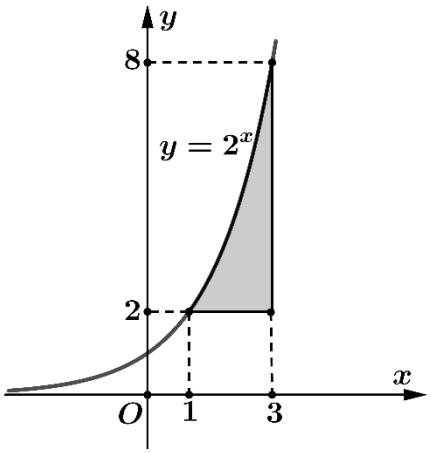
Lời giải

Ta có: $S=\int_{-1}^{2}\left|\left(x^3-3x+2\right)-\left(-2x^2+2x+8\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{2}\left[\left(-2x^2+2x+8\right)-\left(x^3-3x+2\right)\right]\mathrm{d}x$

Do $-2x^2+2x+8\geq x^3-3x+2,\forall x\in[-1;2]$ nên $S=\int_{-1}^{2}\left(-x^3-2x^2+5x+6\right)\mathrm{d}x$.

Vậy diện tích hình phẳng phần gạch chéo trong hình vẽ là $S=\int_{-1}^{2}\left(-x^3-2x^2+5x+6\right)\mathrm{d}x$.

Câu 18: Diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bên dưới bằng



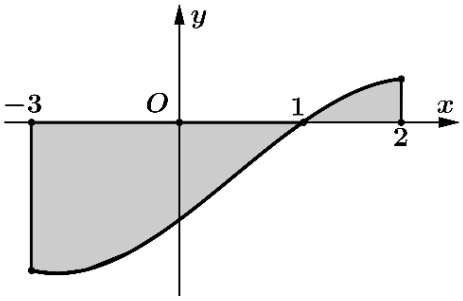
A. $\int_{1}^{3}\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$. **B.** $\int_{1}^{3}\left(2^x+2\right)\mathrm{d}x$. **C.** $\int_{1}^{3}\left(2-2^x\right)\mathrm{d}x$. **D.** $\int_{1}^{3}2^x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ được giới hạn bởi các đường $y=2^x,y=2,x=1$ và $x=3$.

Do đó diện tích hình phẳng gạch sọc trong hình vẽ bằng $\int_{1}^{3}\left|2^x-2\right|\mathrm{d}x=\int_{1}^{3}\left(2^x-2\right)\mathrm{d}x$.

Câu 19: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=f(x)$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-3,x=2$ (như hình vẽ). Đặt $a=\int_{-3}^{1}f(x)\mathrm{d}x,b=\int_{1}^{2}f(x)\mathrm{d}x$



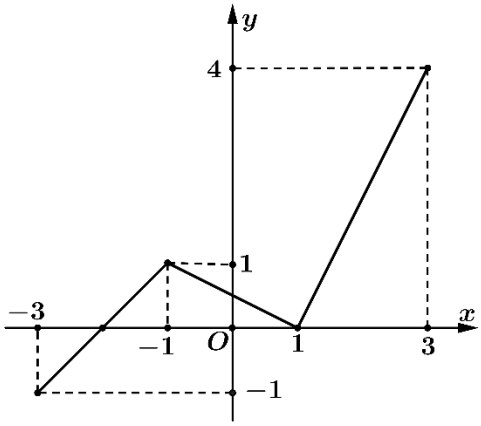
Mệnh đề nào sau đây là đúng?

A. $S=-a-b$. **B.** $S=a+b$. **C.** $S=a-b$. **D.** $S=b-a$.

Lời giải

Ta có: $S=\int\limits_{-3}^{2}\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=-\int\limits_{-3}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{2}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-a+b$.

Câu 20: Cho hàm số $y=f\left(x\right)$ có tập xác định là $\left[-3;3\right]$ và có đồ thị như hình vẽ. Giá trị của $\int\limits_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x$ bằng



A. 6. **B.** 5. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

Ta có: $\int\limits_{-3}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=\int\limits_{-3}^{-2}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{-2}^{1}f\left(x\right)\mathrm{d}x+\int\limits_{1}^{3}f\left(x\right)\mathrm{d}x=-S_{\Delta ABC}+S_{\Delta CDE}+S_{\Delta EFG}$

$=-\frac{1}{2}.1.1+\frac{1}{2}.1.3+\frac{1}{2}.2.4=5$

Câu 21: Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ giới hạn bởi hai đường $y=x^3-x$ và $y=2x^2-x$ bằng

A. $\frac{5}{6}$. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{4}{3}$. **D.** 2

Lời giải

Xét phương trình $x^3-x=2x^2-x\Leftrightarrow x^3-2x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng $\left(H\right)$ là: $S=\int\limits_{0}^{2}\left|\left(x^3-x\right)-\left(2x^2-x\right)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-2x^2\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 22: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị các hàm số $y=x^3+11x-6, y=6x^2$ và hai đường thẳng $x=0, x=2$ là

A. $S=2$. **B.** $S=\frac{2}{5}$. **C.** $S=5$. **D.** $S=\frac{5}{2}$.

Lời giải

$x^3+11x-6=6x^2\Leftrightarrow x^3-6x^2+11x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=3\end{array}\right.$.

Giải phương trình:

Ta có $S=\int\limits_{0}^{2}\left|x^3-6x^2+11x-6\right|\mathrm{d}x=\left|\int\limits_{0}^{1}\left(x^3-6x^2+11x-6\right)\mathrm{d}x\right|+\left|\int\limits_{1}^{2}\left(x^3-6x^2+11x-6\right)\mathrm{d}x\right|=\frac{5}{2}$.

Câu 23: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2$ và $y=4x-3$ là

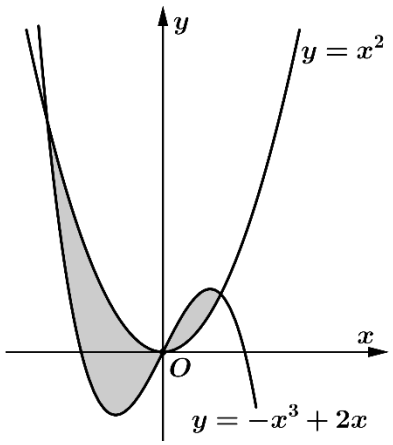
A. $S=\frac{3}{4}$. **B.** $S=\frac{4}{3}$. **C.** $S=\frac{2}{3}$. **D.** $S=2$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=4x-3\Leftrightarrow x^2-4x+3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \end{array}\right.$.

Khi đó $S=\int_1^3\left|x^2-4x+3\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 24: Diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình bên bằng



A. $\frac{55}{12}$. **B.** $\frac{37}{12}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{15}{4}$.

Lời giải

Giải phương trình $x^2=-x^3+2x\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=0 \\ x=-2. \end{array}\right.$.

Diện tích của phần hình phẳng gạch chéo trong hình bên bằng $S=\int_{-2}^{1}\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\frac{37}{12}$.

Câu 25: Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=e^{\frac{x}{2}};y=0$ và $x=0;x=2$ bằng

A. $2e-2$. **B.** $\frac{e-1}{2}$. **C.** $2e$. **D.** $e-1$.

Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường thẳng $y=e^{\frac{x}{2}};y=0$ và $x=0;x=2$ là:

$S=\int_0^2\left|e^{\frac{x}{2}}\right|\mathrm{d}x=\int_0^2 e^{\frac{x}{2}}\mathrm{d}x=2e^{\frac{x}{2}}\Big|_0^2=2\left(e^{\frac{2}{2}}-e^{\frac{0}{2}}\right)==2(e-1)=2e-2$.

Câu 26: Hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ và $y=0$ có diện tích bằng

A. $\frac{8}{3}$. **B.** 8. **C.** 2. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị: $x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2-2x$ và $y=0$ là

$S=\int\limits_0^2\left|x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 27: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2$ và đường thẳng $y=6$ bằng

A. $\frac{32}{3}$. **B.** $\frac{40}{3}$. **C.** $\frac{16}{3}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2+2=6\Leftrightarrow x=\pm2$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int\limits_{-2}^2\left|x^2-4\right|\mathrm{d}x=\frac{32}{3}$.

Câu 28: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$.

A. 13. **B.** $V=\frac{81}{12}$. **C.** $\frac{9}{4}$. **D.** $\frac{37}{12}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và $y=x-x^2$ là:

$$x^3-x=x-x^2\Leftrightarrow x^3+x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Suy ra $S=\int\limits_{-2}^1\left|x^3+x^2-2x\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^0\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x-\int\limits_0^1\left(x^3+x^2-2x\right)\mathrm{d}x$

$$=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_{-2}^0-\left(\frac{x^4}{4}+\frac{x^3}{3}-x^2\right)\Big|_0^1=\frac{8}{3}-\left(\frac{-5}{12}\right)=\frac{37}{12}.$$

Câu 29: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+x+6$ và $y=0$ bằng

A. $\frac{95\pi}{6}$. **B.** $\frac{95}{6}$. **C.** $\frac{125\pi}{6}$. **D.** $\frac{125}{6}$.

Lời giải

Ta xét phương trình hoành độ giao điểm: $-x^2+x+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-2\\x=3\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int\limits_{-2}^3\left|-x^2+x+6\right|\mathrm{d}x=\frac{125}{6}$.

Câu 30: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^3-3x$ và $y=x$ là

A. $\int\limits_{-2}^2\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$. **B.** $\int\limits_{-2}^2\left|x^3+4x\right|\mathrm{d}x$. **C.** $\int\limits_0^2\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$. **D.** $\int\limits_{-2}^0\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Xét phương trình $x^3-3x=x\Leftrightarrow x^3-4x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm2\end{array}\right.$. Vậy $S=\int_{-2}^{2}\left|x^3-4x\right|\mathrm{d}x$.

Câu 31: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2+2x$ và trục hoành bằng

A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{3}{4}$. **D.** $\frac{3\pi}{4}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=-2\end{array}\right.$.

Khi đó, diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị trên là: $S=\int_{-2}^{0}\left|x^2+2x\right|\mathrm{d}x=\frac{4}{3}$.

Câu 32: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ và $y=x-1$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** 1. **D.** $-\frac{9}{2}$.

Lời giải

Xét phương trình: $x^2-4x+3=x-1\Leftrightarrow x^2-5x+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Suy ra, diện tích hình phẳng đã cho bằng:

$$\int_{1}^{4}\left|\left(x^2-4x+3\right)-\left(x-1\right)\right|\mathrm{dx}=\int_{1}^{4}\left|x^2-5x+4\right|\mathrm{dx}=\int_{1}^{4}\left(-x^2+5x-4\right)\mathrm{dx}=\frac{9}{2}.$$

Câu 33: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y=x^2$ và $y=2-x^2$ là

A. $\frac{8}{3}$. **B.** $\frac{4}{3}$. **C.** $\frac{2}{3}$. **D.** 0.

Lời giải

Xét phương trình $x^2=2-x^2\Leftrightarrow x=\pm1$.

Vậy diện tích hình phẳng đã cho bằng $\int_{-1}^{1}\left|x^2-\left(2-x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\left|2x^2-2\right|\mathrm{d}x=\frac{8}{3}$.

Câu 34: Gọi là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $2my=x^2,\ mx=\frac{1}{2}y^2,\ (m>0)$. Tìm giá trị của m để $S=3$

A. $m=3$. **B.** $m=2$. **C.** $m=\frac{1}{2}$. **D.** $m=\frac{3}{2}$.

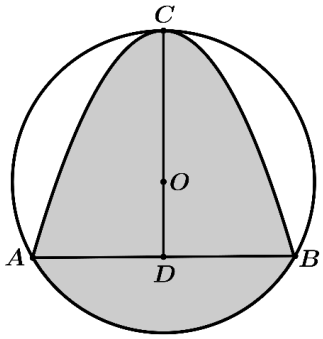
Lời giải

Do $m>0$ nên suy ra $x>0,\ y>0$.

Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình $\left\{\begin{array}{l}2my=x^2\\mx=\frac{1}{2}y^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}2my=x^2\\2mx=y^2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2m\end{array}\right.$

Ta có $S=\int_{0}^{2m}\left|\sqrt{2mx}-\frac{x^2}{2m}\right|\mathrm{d}x=3$ hay $\frac{4m^2}{3}=3\Leftrightarrow m=\frac{3}{2}$.

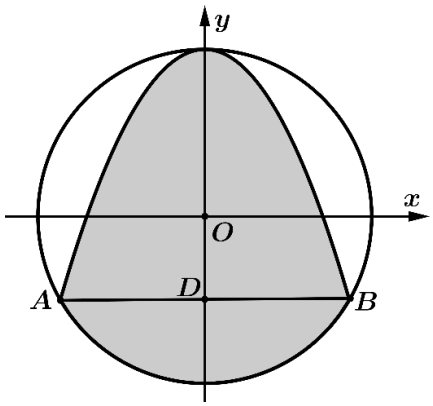
Câu 35: Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB = 4\sqrt{3}\,\text{cm}$. Đường cong qua ba điểm: A, B, C là một phần của parabol.



Diện tích phần gạch chéo bằng

A. $37,54\ \text{cm}^2$. **B.** $9,83\text{cm}^2$. **C.** $27,71\text{cm}^2$. **D.** $36,75\text{cm}^2$.

Lời giải



Do tam giác ABC là tam giác đều có cạnh $4\sqrt{3}\,\text{cm}$ nên ta có:

$CD = 4\sqrt{3}.\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 6(\text{cm}) \Rightarrow OC = \dfrac{2}{3}CD = 4(\text{cm})$ và $OD = 2(cm)$.

Gắn trục toạ độ Oxy như hình vẽ, ta có: $A\left(-2\sqrt{3};-2\right), B\left(2\sqrt{3};-2\right), C(0;4)$

Phương trình đường Parapol đi qua 3 điểm A, B, C có đỉnh C có dạng $y = ax^2 + 4\ \ (P)$.

Thay toạ độ điểm $B\left(2\sqrt{3};-2\right)$ vào (P) suy ra $a = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow (P): y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4$

Phương trình đường tròn tâm O bán kính $OA = 4$ là $x^2 + y^2 = 16 \Rightarrow$ Phương trình một phần cung nhỏ AB có dạng $y = -\sqrt{16 - x^2}$

Vậy diện tích phần gạch chéo bằng $\int_{-2\sqrt{3}}^{2\sqrt{3}} \left[\left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 4\right) - \left(-\sqrt{16 - x^2}\right)\right] dx \approx 37,54\left(\text{cm}^2\right)$

Câu 36: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Gọi $F(x),\ G(x)$ lần lượt là nguyên hàm của $f(x)$ và $f(x) - 2x - 1$ trên $\mathbb{R}$ thỏa mãn $F(2) + 2G(1) = 2023$; $2F(1) + G(2) = 2019$. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = F(x)$ và $y = G(x)$ bằng

A. $\frac{31}{6}$. **B.** $\frac{9}{2}$. **C.** $\frac{125}{6}$. **D.** $\frac{15}{2}$.

Lời giải

Theo bài ra ta có $F'(x)=f(x)$ và $G'(x)=f(x)-2x-1$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Nên $F'(x)=G'(x)+2x+1\Rightarrow F(x)=G(x)+x^2+x+C$.

Vì $\begin{cases}F(2)+2G(1)=2023\\2F(1)+G(2)=2019\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}G(2)+6+C+2G(1)=2023\\2\left(G(1)+2+C\right)+G(2)=2019\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}G(2)+2G(1)+6+C=2023\\G(2)+2G(1)+4+2C=2019\end{cases}\Rightarrow C-2=-4\Leftrightarrow C=-2$.

Khi đó: $F(x)-G(x)=x^2+x-2$ và ta có $F(x)-G(x)=0\Leftrightarrow x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=F(x)$ và $y=G(x)$ là :

$S=\int\limits_{-2}^{1}\left|F(x)-G(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_{-2}^{1}\left|x^2+x-2\right|\mathrm{d}x=\frac{9}{2}$.

Câu 37: Biết $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ và thoả mãn $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=F(4)-G(0)+2m$, với $m>0$. Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=F(x)$, $y=G(x)$; $x=0$ và $x=4$. Khi $S=8$ thì m bằng:

A. 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Theo đề ta có $\int\limits_0^4 f(x)\mathrm{d}x=F(4)-G(0)+2m\Rightarrow F(x)\Big|_0^4=F(4)-G(0)+2m$

$\Rightarrow F(4)-F(0)=F(4)-G(0)+2m\Rightarrow G(0)-F(0)=2m$ (1).

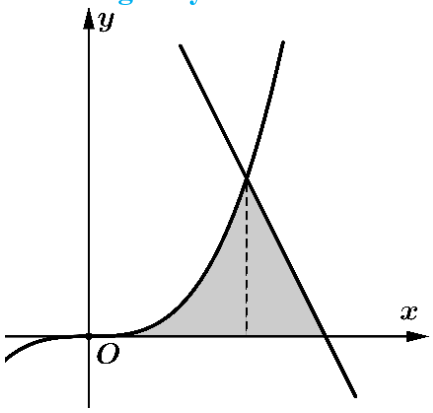
Mặt khác, do $F(x)$ và $G(x)$ là hai nguyên hàm của hàm số $f(x)$ trên $\mathbb{R}$ nên ta có $G(x)-F(x)=C$ (không đổi) với mọi $x\in\mathbb{R}$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $G(x)-F(x)=2m>0$, với mọi $x\in\mathbb{R}$.

Khi đó ta có $S=\int\limits_0^4\left|G(x)-F(x)\right|\mathrm{d}x=\int\limits_0^4 2m.\mathrm{d}x=2mx\Big|_0^4=8m$.

Theo đề ta có $8m=8\Leftrightarrow m=1$.

Câu 38: Cho hình (H) là hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^3$, đường thẳng $y=-2x+3$ và trục hoành (phần gạch chéo trong hình vẽ). Diện tích hình phẳng (H) là



A. $S=\frac{1}{4}$. **B.** $S=\frac{1}{2}$. **C.** $S=\frac{5}{4}$. **D.** $S=2$.

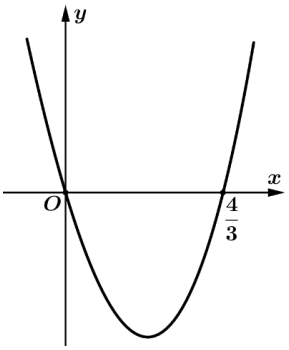
Lời giải

Ta có $x^3=-2x+3\Leftrightarrow x^3+2x-3=0\Leftrightarrow x=1$

Đường cong $y=x^3$ đi qua $O(0;0)$ và $y=-2x+3$ cắt Ox tại điểm có hoành độ $x=\frac{3}{2}$.

Vậy $S=\int_0^1 x^3\mathrm{d}x+\int_1^{\frac{3}{2}}(-2x+3)\mathrm{d}x=\frac{x^4}{4}\Big|_0^1+\left(3x-x^2\right)\Big|_1^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}$

Câu 39: Cho hàm số $y=f(x)=2x^3+ax^2+bx(a,b\in\mathbb{R})$. Biết hàm số $y=f'(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y=f(x)$ và $y=f'(x)$ bằng $\frac{m}{n}\left(m\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{Z}^+\right)$ và $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản. Tính $m+n$

A. -157. **B.** 74. **C.** 13. **D.** 119.

Lời giải

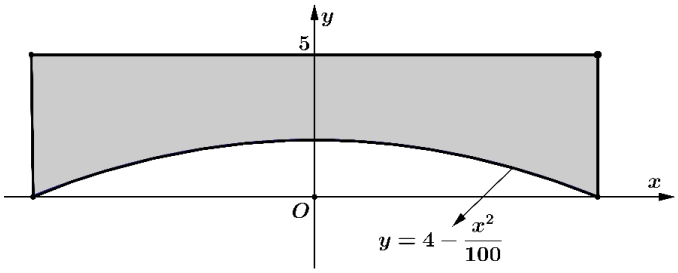
Ta có: $f'(x)=6x^2+2ax+b$.

Từ đồ thị suy ra: $\begin{cases}f'(0)=0\\f'\left(\frac{4}{3}\right)=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b=0\\a=-4\end{cases}$.

Ta có: $f(x)-f'(x)=2x^3-10x^2+8x$. Cho $f(x)-f'(x)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\\x=4\end{array}\right.$.

Vậy diện tích hình phẳng là $S=\int_0^4\left|2x^3-10x^2+8x\right|dx=\frac{71}{3}\Rightarrow m+n=74$.

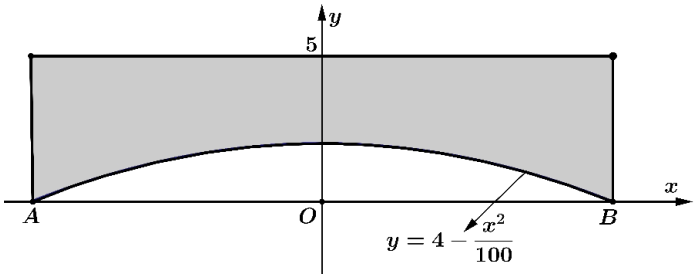
Câu 40: Hình bên dưới là mặt cắt dọc của một chiếc cầu bê tông (phần tô đậm, các đơn vị đều đo bằng mét)



Biết chiều rộng của cầu bằng 9m. Thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu là

A. $760\,\text{m}^3$. **B.** $780\,\text{m}^3$. **C.** $960\,\text{m}^3$. **D.** $840\,\text{m}^3$.

Lời giải



Parapol $y=4-\frac{x^2}{100}$ cắt trục hoành tại hai điểm A,B. Cho $y=0\Rightarrow 4-\frac{x^2}{100}=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=20\\x=-20\end{array}\right.$

Do đó $A(-20;0)$ và $B(20;0)$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi Parapol và trục hoành là $S=\int_{-20}^{20}\left(4-\frac{x^2}{100}\right)dx=\frac{320}{3}\left(\text{m}^2\right)$.

Diện tích phần tô đậm bằng $40.5-\frac{320}{3}=\frac{280}{3}\left(\text{m}^2\right)$.

Khi đó thể tích bê tông ít nhất cần để đúc cầu là $\frac{280}{3}.9=840\left(\text{m}^3\right)$.

Câu 41: Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2-4x+3\,(P)$ và các tiếp tuyến kẻ từ $A\left(\frac{3}{2};-3\right)$ đến đồ thị (P). Tính giá trị của S.

A. $S=\frac{9}{8}$. **B.** $S=\frac{9}{4}$. **C.** $S=9$. **D.** $S=\frac{9}{2}$.

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=x^2-4x+3\ (P)$ có tập xác định $D=\mathbb{R}$ và đạo hàm $y'=f'(x)=2x-4$.

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, với $y_0=x_0^2-4x_0+3$.

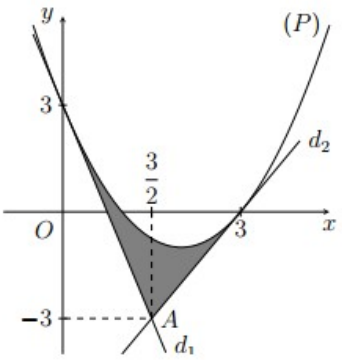
Suy ra phương trình tiếp tuyến của (P) tại M có dạng:

$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0\Leftrightarrow y=(2x_0-4)(x-x_0)+x_0^2-4x_0+3\ (d)$.

Vì $A\left(\frac{3}{2};-3\right)\in d$ nên ta có: $(2x_0-4)\left(\frac{3}{2}-x_0\right)+x_0^2-4x_0+3=-3\Leftrightarrow -x_0^2+3x_0=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=0\\x_0=3\end{array}\right.$.

Với $x_0=0$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=-4x+3\ (d_1)$.

Với $x_0=3$ suy ra phương trình tiếp tuyến là $y=2x-6\,(d_2)$.



Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_1): $x^2-4x+3=-4x+3\Leftrightarrow x=0$.

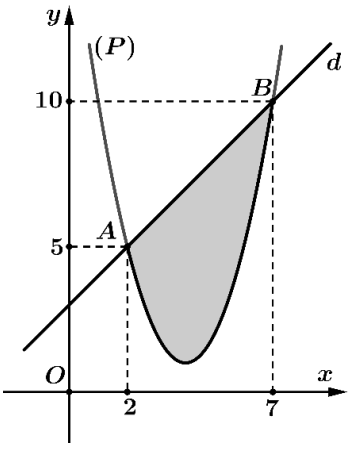
Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d_1) và (d_2): $2x-6=-4x+3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d_2): $x^2-4x+3=2x-6\Leftrightarrow x=3$.

Suy ra diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_0^{\frac{3}{2}}\left|x^2-4x+3-(-4x+3)\right|\mathrm{d}x+\int_{\frac{3}{2}}^{3}\left|x^2-4x+3-(2x-6)\right|\mathrm{d}x=\frac{9}{4}$$ (đvdt).

Câu 42: Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị (P) và đường thẳng d cắt tại hai điểm như trong hình bên. Biết rằng hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\frac{125}{6}$. Khi đó hãy tính tích phân $\int_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x$.



A. $\frac{215}{3}$. **B.** $\frac{265}{3}$. **C.** $\frac{245}{3}$. **D.** $\frac{415}{3}$.

Lời giải

Dựa vào đồ thị ta có điểm $A(2;5)$ và $B(7;10)$ thuộc đường thẳng d và Parabol (P)

Suy ra đường thẳng d có vecto chỉ phương $\overrightarrow{AB}=(5;5)$

Phương trình đường thẳng $d: y=x+3$

Gọi (P) có phương trình: $y=ax^2+bx+c,(a>0)$

$A,B\in(P)\Rightarrow$ Hệ phương trình: $\begin{cases}4a+2b+c=5\\49a+7b+c=10\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4a-2b+5\\49a+7b+5-4a-2b=10\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}c=-4a-2b+5\\b=1-9a\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=3+14a\\b=1-9a\end{cases}$

Hình phẳng giới hạn bởi (P) và d có diện tích $S=\dfrac{125}{6}$

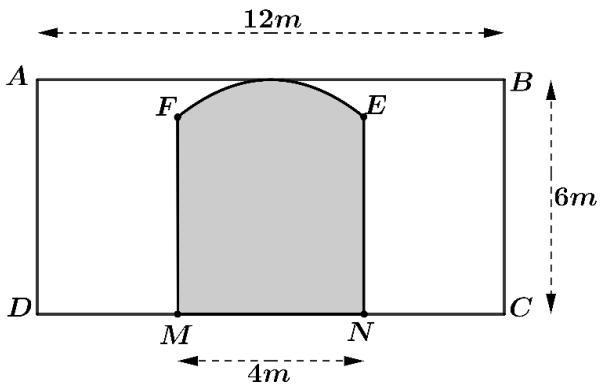
$\Rightarrow\int_2^7\left|x+3-\left(ax^2+bx+c\right)\right|\mathrm{d}x=\dfrac{125}{6}\Rightarrow\int_2^7\left|x+3-\left[ax^2+(1-9a)x+(3+14a)\right]\right|\mathrm{d}x=\dfrac{125}{6}$

$\Leftrightarrow\int_2^7\left[-ax^2+9ax-14a\right]\mathrm{d}x=\dfrac{125}{6}\Leftrightarrow\left(-\dfrac{ax^3}{3}+\dfrac{9ax^2}{2}-14ax\right)\Big|_2^7=\dfrac{125}{6}$

$\Leftrightarrow\dfrac{125}{6}a=\dfrac{125}{6}\Leftrightarrow a=1\Rightarrow b=-8;c=17$

(P) có phương trình: $y=f(x)=x^2-8x+17\Rightarrow f'(x)=2x-8\Rightarrow\int_2^7(2x-3)f'(x)\mathrm{d}x=\dfrac{215}{3}$

Câu 43: Một công ty quảng cáo muốn làm một bức tranh trang trí như phần $MNEIF$ được tô đậm trong hình vẽ bên dưới ở chính giữa của một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có $BC=6\text{m}$, $CD=12\text{m}$



Biết $MN=4\text{m}$; cung EIF có hình parabol với đỉnh I là trung điểm của cạnh AB và đi qua hai điểm C,D. Kinh phí làm bức tranh là $1.200.000$ đồng/m^2. Hỏi công ty đó cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh?

A. 34266666 đồng. **B.** 13866666 đồng. **C.** 14933333 đồng. **D.** 27733333 đồng.

Lời giải

Gọi O là trung điểm cạnh MN và trùng với gốc toạ độ $\Rightarrow M(-2;0);N(2;0)$.

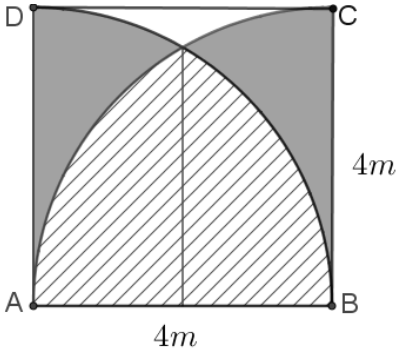
Phương trình parapol đỉnh $I(0;6)$ và đi qua hai điểm $D(-6;0);C(6;0)$ là $(P):y=-\dfrac{1}{2}x^2+6$.

Diện tích giới hạn bởi $(P): y = -\frac{1}{2}x^2 + 6$; $y = 0; x = -2; x = 2$.

Khi đó: $S = \int_{-2}^{2} \left| -\frac{1}{2}x^2 + 6 \right| dx = \frac{208}{9} (\text{m}^2)$.

Vậy công ty đó cần bao nhiêu tiền để làm bức tranh $\frac{208}{9}.1.200.000 = 27733333$ đồng.

Câu 44: Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh $AB = 4\text{m}$. Trên tấm biển đó có các đường tròn tâm A và đường tròn tâm B cùng bán kính $R = 4\text{m}$, hai đường tròn cắt nhau như hình vẽ. Chi phí để sơn phần gạch chéo là $150\ 000$ đồng/m^2, chi phí sơn phần màu đen là $100\ 000$ đồng/ m^2 và chi phí để sơn phần còn lại là $250\ 000$ đồng/m^2



Hỏi số tiền để sơn biển quảng cáo theo cách trên gần nhất với số tiền nào dưới đây?

A. $3,017$ triệu đồng. **B.** $1,213$ triệu đồng. **C.** $2,06$ triệu đồng. **D.** $2,195$ triệu đồng.

Lời giải

Gọi I là giao điểm của 2 cung tròn $AC; BD$. Chọn gốc toạ độ $A(0;0) \Rightarrow B(4,0)$

Xét cung tròn có phương trình $y = \sqrt{16 - x^2}$

Phần diện tích gạch chéo $S = 2.\int_{2}^{4} \sqrt{16 - x^2} dx = 16\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x \right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

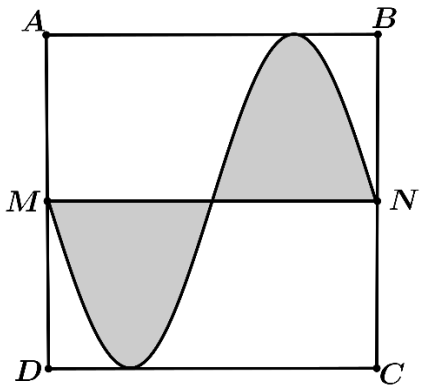
Phần diện tích màu đen: $2.\left(\frac{1}{4}\pi.4^2 - \frac{16\pi}{3} + 4\sqrt{3} \right) = \frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3}$

Phần diện tích còn lại: $16 - \left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} + \frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3} \right) = 16 - \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3}$

Số tiền để sơn biển quảng cáo:

$\left(\frac{16\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right).150\ 000 + \left(\frac{-8\pi}{3} + 8\sqrt{3} \right).100\ 000 + \left(16 - \frac{8\pi}{3} - 4\sqrt{3} \right).250\ 000 = 2,195$ triệu đồng.

Câu 45: Bác An có mảnh vườn hình chữ nhật $ABCD$, chiều dài $AB = 2\pi(m)$, chiều rộng $BC = 3(m)$. Bác muốn trồng hoa trên dải đất (phần tô đậm) được giới hạn bởi đường MN (với M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC) và một đường hình sin (tham khảo hình vẽ). Diện tích đất trồng hoa bằng.



A. 3m^2. **B.** $5,57\text{m}^2$. **C.** $7,14\text{m}^2$. **D.** 6m^2.

Lời giải

Dựng hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

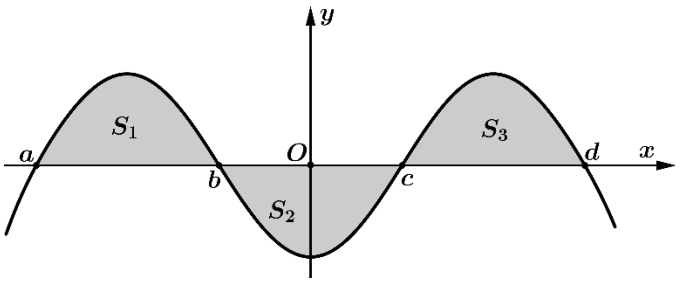
Vì phần đường cong là một đồ thị hình sin đi qua các điểm $(0;0),\left(-\frac{\pi}{2};1,5\right),(-\pi;0),\left(\frac{\pi}{2};1,5\right)$ $,(\pi;0)$ nên đường cong có phương trình $y=\frac{3}{2}\sin x$

Khi đó phần diện tích đất trồng hoa giới hạn bởi các đồ thị hàm số: $\begin{cases} y=\frac{3}{2}\sin x \\ y=0 \\ x=-\pi;x=\pi \end{cases}$

Do đó diện tích đất trồng hoa là $S=\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{3}{2}\sin x\right|\text{d}x=6\text{m}^2$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hàm số $f(x)$ liên tục trên $[a;d]$ và có đồ thị như hình vẽ. Biết đồ thị $f(x)$ cắt trục hoành tại 4 điểm a,b,c,d, đồng thời tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x=a,x=d$ thành một hình phẳng (H) gồm 3 phần có diện tích lần lượt là S_1,S_2,S_3 như hình vẽ.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S_1=\int_a^b f(x)\text{d}x$

b) $S_2 = -\int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x$

c) $S_3 = -\int_c^d f(x)\mathrm{d}x$

d) $S_{(H)} = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$

Lời giải

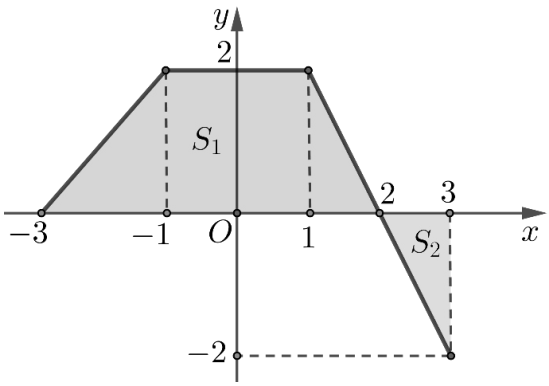
a) Đúng: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1 = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

b) Sai: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_2 = \int_c^b |f(x)|\mathrm{d}x = -\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$ (do $f(x) \le 0, x \in [b;c]$).

c) Sai: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_3 = \int_c^d |f(x)|\mathrm{d}x = \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$ (do $f(x) \ge 0, x \in [c;d]$).

d) Đúng: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_{(H)} = \int_a^d |f(x)|\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_b^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^d f(x)\mathrm{d}x$.

Câu 2: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[-3;3]$ có đồ thị như hình vẽ, Biết rằng $f(x)$ tạo với trục hoành và 2 đường thẳng $x = -3, x = 3$ một hình phẳng (H) gồm 2 phần có diện tích lần lượt là S_1, S_2.



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $S_{(H)} = \int_{-3}^{3} f(x)\mathrm{d}x$

b) $S_2 = \left|\int_2^3 (-2x+4)\mathrm{d}x\right| = 1$

c) $S_1 = \int_{-3}^{-1} (x+3)\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} 2\mathrm{d}x + \int_1^2 (-2x+4)\,\mathrm{d}x$

d) $S_{(H)} = S_1 - \int_2^3 (-2x+4)\mathrm{d}x$

Lời giải

Xét hàm số $y = f(x)$, ta có:

$$f(x) = \begin{cases} x+3, & x \in [-3;-1] \\ 2, & x \in [-1;1] \\ -2x+4, & x \in [1;3] \end{cases}$$

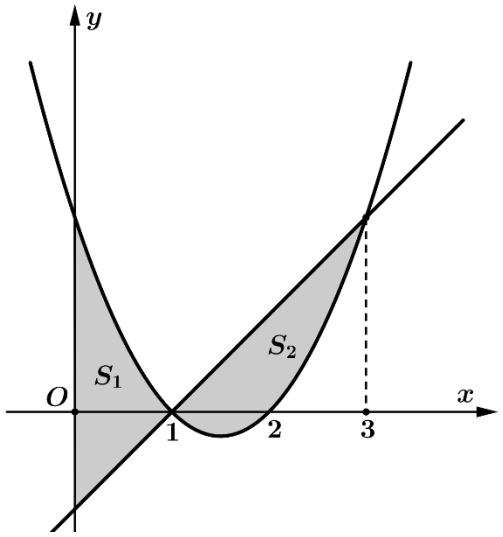
a) Sai: Ta có: $S_{(H)} = \int_{-3}^{3} |f(x)|\mathrm{d}x$.

b) Đúng: Do $f(x)=-2x+4\le 0, x\in[2;3]$ nên $S_2=\int_2^3|-2x+4|\mathrm{d}x=\left|\int_2^3(-2x+4)\mathrm{d}x\right|=1$.

c) Đúng: Dựa vào hình vẽ, ta có: $S_1=\int_{-3}^{2}|f(x)|\mathrm{d}x=\int_{-3}^{-1}(x+3)\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}2\mathrm{d}x+\int_{1}^{2}(-2x+4)\mathrm{d}x$.

(d) Đúng: Ta có: $S_{(H)}=\int_{-3}^{3}|f(x)|\mathrm{d}x=S_1+S_2=S_1-\int_{2}^{3}(-2x+4)\mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ và $S_1;S_2$ là phần diện tích phần được tô như trong hình dưới.



Xét tính đúng sai của các khẳng đính sau:

a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x$

b) $S_1=\frac{4}{3}$

c) $S_1=S_2$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2;\ y=x-1;\ x=0;\ x=3$ là $\int_0^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x=1$.

Lời giải

a) Sai: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và $y=x-1$ là $\int_1^3\left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)\mathrm{d}x=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x$.

b) Đúng: $S_1=\int_0^1\left(x^2-3x+2-(x-1)\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^2-4x+3\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{x^3}{3}-2x^2+3x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{3}-2+3=\frac{4}{3}$.

c) Đúng: $S_2=\int_1^3\left(x-1-\left(x^2-3x+2\right)\right)\mathrm{d}x=\int_1^3\left(-x^2+4x-3\right)\mathrm{d}x=\left(-\frac{x^3}{3}+2x^2-3x\right)\Big|_1^3$

$=-9+18-9-\left(-\frac{1}{3}+2-3\right)=\frac{4}{3}$

Vậy $S_1=S_2$.

d) Sai: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$; $y=x-1$; $x=0$; $x=3$ là $\int_0^3\left|-x^2+4x-3\right|dx=S_1+S_2=\frac{8}{3}$.

Câu 4: Cho hàm số $y=x^3-3x+2$ có đồ thị là (C) và đường thẳng $y=-2x+8$ có đồ thị là (d) và các đường thẳng $x=1$, $x=3$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=1$; S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (d), trục hoành và đường thẳng $x=5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Số giao điểm của đồ thị (C) và đường thẳng (d) là 3.

b) Hàm số $y=x^3-3x+2$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

c) $S_1>S_2$.

d) Tính diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng 23.

Lời giải

a) Sai: Xét phương trình hoành độ: $x^3-3x+2=-2x+8\Leftrightarrow x^3-x-6=0\Leftrightarrow x=2$.

Suy ra (C) cắt (d) tại duy nhất một điểm.

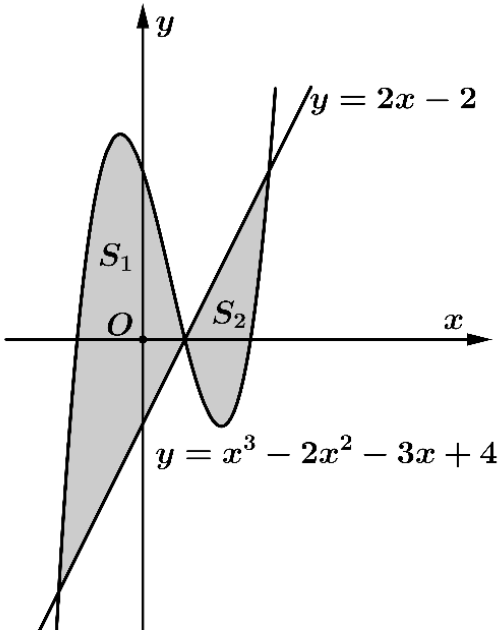
b) Đúng: Ta có: $y'=3x^2-3=0\Rightarrow 3x^2-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1\end{array}\right.$ nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$.

c) Đúng: Ta có $S_1=\int_1^4(8-2x)\mathrm{d}x=9$ và $S_2=-\int_4^5(8-2x)\mathrm{d}x=1$ nên suy ra $S_1>S_2$.

d) Sai: Diện tích giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=x^3-3x+2$, $y=-2x+8$ và hai đường thẳng $x=1$, $x=3$ bằng:

$$\int_1^3\left|x^3-3x+2-(8-2x)\right|\mathrm{d}x=\int_1^2\left|x^3-x-6\right|\mathrm{d}x+\int_2^3\left|x^3-x-6\right|\mathrm{d}x=\frac{15}{4}+\frac{31}{4}=\frac{46}{4}=\frac{23}{2}.$$

Câu 5: Cho đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-3x+4$ có đồ thị (C) và đường thẳng $(d):y=2x-2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6), B(1;0), C(3;4)$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C), trục hoành, đường thẳng $x=-1; x=2$ bằng $\frac{21}{4}$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị (C) và đường thẳng d bằng $\frac{253}{12}$.

d) Biết đường thẳng d cắt đồ thị (C) thành hai miền S_1 và S_2. Khi đó tỉ số $\frac{S_1}{S_2}=\frac{63}{16}$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^3-2x^2-3x+4=2x-2 \Leftrightarrow x^3-2x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \Rightarrow y=-6 \\ x=1 \Rightarrow y=0 \\ x=3 \Rightarrow y=4 \end{array}\right.$$

Vậy đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại ba điểm $A(-2;-6), B(1;0), C(3;4)$.

b) Sai: Diện tích cần tính là: $S=\int_{-1}^{2}\left|x^3-2x^2-3x+4\right|dx=\frac{97}{12}$.

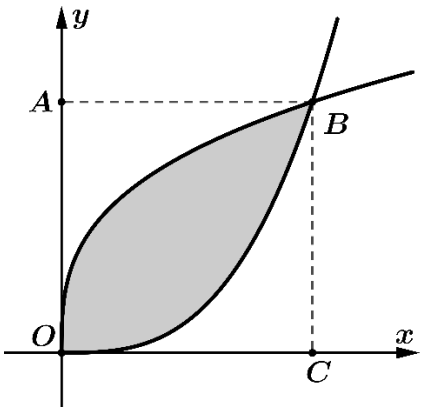
c) Đúng: Ta có $(S):\begin{cases} y=f(x)=x^3-2x^2-3x+4 \\ y=g(x)=2x-2 \\ x=-2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow f(x)-g(x)=x^3-2x^2-5x+6$.

Diện tích $S = S_1 + S_2 = \int_{-2}^{1} |x^3 - 2x^2 - 5x + 6| dx + \int_{1}^{3} |x^3 - 2x^2 - 5x + 6| dx = \frac{63}{4} + \frac{16}{3} = \frac{253}{12}$.

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{63}{4}}{\frac{16}{3}} = \frac{189}{64}$$

d) Sai: Ta có .

Câu 6: Cho một viên gạch men có dạng hình vuông $OABC$ như hình vẽ. Sau khi tọa độ hóa, ta có $O(0;0)$, $A(0;1)$, $B(1;1)$, $C(1;0)$ và hai đường cong lần lượt là đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$



a) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sqrt[3]{x}$, trục Ox, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ được tính bằng công thức $S = \int_{0}^{1} |\sqrt[3]{x}| dx$.

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox,đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ có giá trị bằng $\frac{3}{4}$ (đvdt).

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$ và $y = \sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$ được tính bằng công thức $S = \int_{0}^{1} \left(x^3 - \sqrt[3]{x}\right) dx$.

d) Diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men có giá trị bằng $\frac{1}{2}$ (đvdt).

Lời giải

a) Đúng: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = f(x)$, trục Ox, đường thẳng $x = a, x = b$ được tính bằng công thức $S = \int_{a}^{b} |f(x)| dx$

b) Sai: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3$, trục Ox,đường thẳng $x = 0$ và đường thẳng $x = 1$.

Ta có $S=\int_0^1\left|x^3\right|\mathrm{d}x=\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{1}{4}$ (đvdt).

c) Sai: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)$ và $y=g(x)$, đường thẳng $x=a$ và đường thẳng $x=b$ được tính bằng công thức $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|\,\mathrm{d}x$, vì phần đồ thị của hàm số $y=x^3$ nằm dưới phần đồ thị của hàm số $y=\sqrt[3]{x}$, nên diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3$ và $y=\sqrt[3]{x}$, đường thẳng $x=0$ và đường thẳng $x=1$ được tính bằng công thức $S=\int_0^1\left(-x^3+\sqrt[3]{x}\right)\mathrm{d}x$

d) Đúng: Diện tích hình vuông có cạnh bằng 1 là $S=1^2=1$ (đvdt)

Gọi S_1 là diện tích phần tô đậm: $S_1=\int_0^1\left(\sqrt[3]{x}-x^3\right)\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x^{\frac{1}{3}}-x^3\right)\mathrm{d}x=\left.\left(\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}-\frac{x^4}{4}\right)\right|_0^1=\frac{1}{2}$ (đvdt),

Vậy diện tích phần không được tô đậm trên viên gạch men bằng $S-S_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ (đvdt).

Câu 7: Các nhà kinh tế sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2005, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số

$$y=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2,0\le x\le 100$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất

Theo R.Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009)

Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập thực tế của 60% các gia đình đầu tiên chiếm chưa đến 30% so với tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

b) Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

c) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:

$$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

d) Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Lời giải

a) Đúng: Tính theo thứ tự từ các gia đình nghèo nhất đến giàu nhất, tổng thu nhập của 60% các gia đình của đầu tiên chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập là: $f(60)=27,321529(\%)$.

b) Sai: Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo nhất đến giàu nhất, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau từ 1 đến 10, tổng thu nhập của các gia đình trong nhóm 3 chiếm khoảng $8,56\%$ tổng thu nhập của toàn bộ các gia đình.

Nếu sắp xếp các gia đình theo thứ tự từ nghèo đến giàu, rồi chia thành 10 nhóm bằng nhau, mỗi nhóm chiếm 10% số gia đình của Hoa Kỳ.

Tổng thu nhập của 30% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2,3$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là: $f(30)=8,561476\ (\%)$.

Tổng thu nhập của 20% số gia đình (là các gia đình thuộc nhóm $1,2$) chiếm tỷ lệ trong tổng thu nhập của tất cả các gia đình là: $f(20)=5,774409\ (\%)$.

$\Rightarrow$ Tỷ lệ của tổng thu nhập các gia đình nhóm thứ 3 so với toàn bộ các gia đình là:

$f(30)-f(20)=2,787067(\%)$.

c) Sai: Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì năm 2005 được xác định bởi công thức:

$\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]dx$.

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2005 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y=x \\ y=\left(0,00061x^2+0,0218+1,723\right)^2 \\ x=0;x=100 \end{cases} \Rightarrow S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|dx.$$

Cách 1:

Sử dụng máy tính cầm tay, ta thấy phương trình $\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x=0$ có hai ngiệm $x=a;x=b\ (a<b)$ thuộc $[0;100]$.

Xét dấu biểu thức $g(x)=\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x$ ta được:

x	0		a		b		100
$g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Suy ra: $S=\int_0^{100}\left|g(x)\right|dx=\int_0^{a}\left|g(x)\right|dx+\int_a^{b}\left|g(x)\right|dx+\int_b^{100}\left|g(x)\right|dx$.

$=\left|\int_0^{a}g(x)dx\right|+\left|\int_a^{b}g(x)dx\right|+\left|\int_b^{100}g(x)dx\right|=\int_0^{a}g(x)dx-\int_a^{b}g(x)dx+\int_b^{100}g(x)dx$.

Cách 2:

Sử dụng máy tính cầm tay ta được: $S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|dx\approx 2068,9$.

Kiểm tra phép tính của đề bài, ta có: $\int_0^{100}\left[x-\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2\right]dx=2059,3131$.

d) Đúng: Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 đã vượt quá 2000.

Sự bất bình đẳng thu nhập của Hoa Kỳ năm 2005 là:

$$S=\int_0^{100}\left|\left(0,00061x^2+0,0218x+1,723\right)^2-x\right|\mathrm{d}x\approx 2068,9$$

.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tìm a để diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi $(P):y=\dfrac{x^2-2x}{x-1}$, đường thẳng $d:y=x-1$ và $x=a,\ x=2a\ (a>1)$ bằng $\ln 3$?

Lời giải

Ta có: $S=\int_a^{2a}\left|\dfrac{x^2-2x}{x-1}-(x-1)\right|\mathrm{d}x=\int_a^{2a}\left|\dfrac{1}{x-1}\right|\mathrm{d}x=\int_a^{2a}\dfrac{1}{x-1}\mathrm{d}x$ (vì $a>1$) $=\ln(x-1)\Big|_a^{2a}$ (vì $a>1$)

$=\ln(2a-1)-\ln(a-1)=\ln\dfrac{2a-1}{a-1}$.

Ta có: $\ln\dfrac{2a-1}{a-1}=\ln 3\Leftrightarrow\dfrac{2a-1}{a-1}=3\Leftrightarrow a=2.$

Câu 2: Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$; $y=x$ và hai đường thẳng $x=2;x=3$ bằng $S=a\ln 2+b$. Giá trị của $a+b$ bằng bao nhiêu?

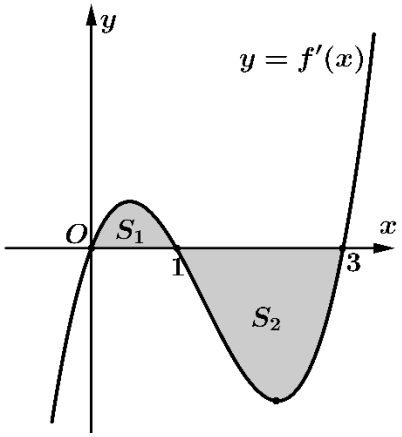
Lời giải

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}$; $y=x$ và hai đường thẳng $x=2;x=3$ là: $S=\int_2^3\left|\dfrac{x^2-2x+3}{x-1}-x\right|\mathrm{d}x=\int_2^3\left|\dfrac{-x+3}{x-1}\right|\mathrm{d}x=\int_2^3\left|-1+\dfrac{2}{x-1}\right|\mathrm{d}x=$

$=\left(-x+2\ln|x-1|\right)\Big|_2^3=(-3+2\ln 2)+2=-1+2\ln 2$

Vậy $a=2;b=-1\Rightarrow a+b=1$.

Câu 3: Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.



Lời giải

Hình phẳng A được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, trục tung $x=0$ và đường thẳng $x=1$ nên diện tích hình phẳng A là:

$$S_A=\int_0^1\left|f'(x)\right|\,dx=\int_0^1 f'(x)\,dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)\Rightarrow f(1)=S_A+f(0)=4+2=6.$$

Hình phẳng B được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, đường thẳng $x=1$ và đường thẳng $x=3$ nên diện tích hình phẳng B là:

$$S_B=\int_1^3\left|f'(x)\right|\,dx=-\int_1^3 f'(x)\,dx=-f(x)\Big|_1^3=-\left[f(3)-f(1)\right]=-f(3)+f(1).$$

Suy ra $f(3)=f(1)-S_B=6-10=-4$.

Vậy $f(3)=-4$.

Câu 4: Cho hàm số $f(x)=\begin{cases}7-4x^3 & \text{khi } 0\le x\le 1\\ 4-x^2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$ và các đường thẳng $x=0,x=3,y=0$.

Lời giải

Ta có: $S=\int_0^1\left(7-4x^3\right)dx+\int_1^2\left(4-x^2\right)dx+\int_2^3\left(x^2-4\right)dx$

$$=\left(7x-x^4\right)\Big|_0^1+\left(4x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_1^2+\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\Big|_2^3=6+4-\frac{7}{3}-3-\frac{8}{3}+8=10.$$

Câu 5: Cho (H) là hình phẳng được tô đậm trong hình vẽ và được giới hạn bởi các đường có phương trình $y=\frac{10}{3}x-x^2$, $y=\begin{cases}-x & \text{khi } x\le 1\\ x-2 & \text{khi } x>1\end{cases}$. Diện tích của (H) bằng bao nhiêu?

Lời giải

Hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y=-x$ và $y=x-2$ là: $-x=x-2\Leftrightarrow x=1$.

Diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_0^1\left(\frac{10}{3}x-x^2+x\right)dx+\int_1^3\left(\frac{10}{3}x-x^2-x+2\right)dx$.

$$\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)dx+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)dx\Leftrightarrow S=\int_0^1\left(\frac{13}{3}x-x^2\right)dx+\int_1^3\left(\frac{7}{3}x-x^2+2\right)dx$$

$$\Leftrightarrow S=\left(\frac{13}{6}x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1+\left(\frac{7}{6}x^2-\frac{x^3}{3}+2x\right)\Big|_1^3=\frac{13}{2}=6,5.$$

Câu 6: Tại một nhà máy ta gọi $C(x)$ là tổng chi phí (tính theo triệu động) để sản xuất x tấn sản phẩm A trong một tháng. Khi đó đạo hàm $C'(x)$ gọi là chi phí cận biên, cho biết tốc độ tăng tổng chi phí theo lượng sản phẩm được sản xuất. Giả sử chi phí cận biên (tính theo triệu đồng trên tấn) của nhà máy được ước lượng bởi công thức:

$$C'(x) = 5 - 0,06x + 0,00072x^2 \text{ với } 0 \le x \le 150.$$

Biết rằng $C(0) = 30$ triệu đồng, gọi là chi phí cố định. Tính tổng chi phí khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm A trong tháng.

Lời giải

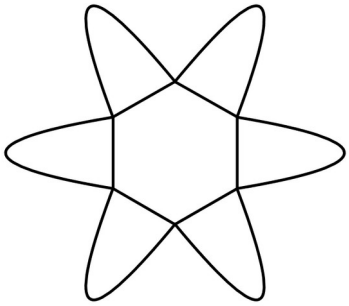
Ta có: $C(100) - C(0) = \int_0^{100} C'(x)dx = \int_0^{100} (5 - 0,06x + 0,00072x^2)dx$

$$= 5\int_0^{100} dx - 0.06\int_0^{100} xdx + 0.00072\int_0^{100} x^2dx = 5x\Big|_0^{100} - 0,03x^2\Big|_0^{100} + 0,00024x^3\Big|_0^{100} = 440.$$

Suy ra $C(100) = C(0) + 440 = 30 + 440 = 470$ (triệu đồng).

Vậy khi nhà máy sản xuất 100 tấn sản phẩm loại A trong tháng thì tổng chi phí là 470 triệu đồng.

Câu 7: Để trang trí cho một phòng trong một tòa nhà, người ta vẽ lên tường một hình như sau: trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có cạnh bằng 2 dm có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh 3 dm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình sau). Hãy tính diện tích của hình nói trên (kể cả hình lục giác đều) để mua sơn trang trí cho phù hợp *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)*



Lời giải

Hình lục giác đều có cạnh bằng 2dm .

Diện tích của hình lục giác đều có thể được tính bằng công thức: $S_{\text{Lục giác}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^2$ với $a = 2\text{dm}$

Thay vào công thức ta có: $S_{\text{Lục giác}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.2^2 = 6\sqrt{3}\left(\text{dm}^2\right)$

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trung điểm của cạnh là AB, với $A(1,0), B(-1,0)$ và đỉnh $I(0,3)$ của parabol.

Phương trình của parabol có dạng: $y = ax^2 + b$

Do parabol đi qua các điểm A và B nên ta có: $y = -3x^2 + 3$

Diện tích mỗi cánh hoa được tính bằng tích phân: $S_{\text{Cánh hoa}} = \int_{-1}^{1} \left(-3x^2 + 3\right) dx$

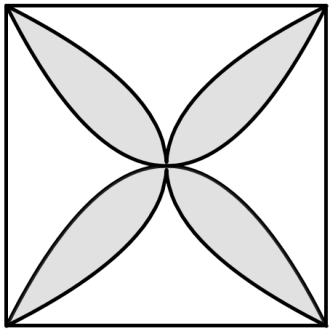
Tính tích phân: $S_{\text{cánh hoa}} = \left[-x^3 + 3x\right]\Big|_{-1}^{1} = \left(-1 + 3\right) - \left(1 - 3\right) = 4\text{dm}^2$

Hình có 6 cánh hoa nên tổng diện tích của các cánh hoa là: $S_{\text{Tong cánh hoa}} = 6.4 = 24\ \text{dm}^2$

Tổng diện tích của hình bao gồm cả hình lục giác và các cánh hoa là:

$$S_{\text{Tong}} = S_{\text{Luc giác}} + S_{\text{Tong cánh hoa}} = 6\sqrt{3} + 24 \approx 34,39\,\text{dm}^2$$

Câu 8: Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 60 cm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô mầu sẫm như hình vẽ bên).



Tính diện tích phần cánh hoa của viên gạch.

Lời giải

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $10\,\text{cm} = 1\,\text{dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y = \frac{x^2}{3}$, $y = -\frac{x^2}{3}$, $x = -\frac{y^2}{3}$, $x = \frac{y^2}{3}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = \frac{x^2}{3}$, $y = \sqrt{3x}$ và hai đường thẳng $x = 0; x = 3$.

Do đó diện tích một cánh hoa bằng: $\int_{0}^{3} \left(\sqrt{3x} - \frac{x^2}{3}\right) dx = 3\left(\text{dm}^2\right) = 300\left(\text{cm}^2\right)$.

Câu 9: Một doanh nghiệp sản xuất mặt hàng với chi phí cận biên được mô tả bởi hàm số:

$f\left(x\right) = \frac{1}{10}\left(x^2 - 16x + 93\right)$, x là số sản phẩm sản xuất

Giả sử rằng doanh nghiệp bán được hết số lượng sản phẩm sản xuất được. Biết rằng doanh thu cận biên được mô tả bởi hàm số $g\left(x\right) = \left(\frac{4}{5}\right)^{x-8} + 5$, với x là số lượng sản phẩm được bán ra. Giả sử rằng tổng chi phí khi chưa sản xuất sản phẩm nào là 0 đồng và tổng doanh thu khi chưa

bán được sản phẩm nào là 0 đồng. Hỏi khi sản xuất 8 sản phẩm và bán hết thì doanh nghiệp thu được lợi nhuận là bao nhiêu? *(kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai sau dấu phẩy)*

Lời giải

Hàm tổng chi phí $F(x)$ là nguyên hàm của hàm chi phí cận biên $f(x)$.

Ta có: $F(x)=\int f(x)\mathrm{d}x=\int\frac{1}{10}\left(x^2-16x+93\right)\mathrm{d}x$ và $F(x)=\frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+93x\right)+C$

Với điều kiện ban đầu $F(0)=0$ ta có: $\frac{1}{10}\left(\frac{0^3}{3}-8.0^2+93.0\right)+C=0\Rightarrow C=0$

Do đó: $F(x)=\frac{1}{10}\left(\frac{x^3}{3}-8x^2+93x\right)$

Hàm tổng doanh thu $G(x)$ là nguyên hàm của hàm doanh thu cận biên $g(x)$.

Ta có: $G(x)=\int g(x)\mathrm{d}x=\int\left(\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5\right)\mathrm{d}x$ và $G(x)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x+C$

Với điều kiện ban đầu $G(0)=0$ ta có: $\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}+5.0+C=0\Rightarrow C=-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

Do đó: $G(x)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{x-8}+5x-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

Khi đó $F(8)=\frac{1}{10}\left(\frac{8^3}{3}-8.8^2+93.8\right)$ và $G(8)=\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{8-8}+5.8-\frac{1}{\ln\frac{4}{5}}\left(\frac{4}{5}\right)^{-8}$

$=G(8)-F(8)\approx 21,96$

Lợi nhuận khi sản xuất và bán hết 8 sản phẩm là: Lợi nhuận đồng

Câu 10: Người ta sử dụng đường cong Lorenz để minh họa sự phân phối thu nhập trong một quốc gia. Gọi x là đại diện cho phần trăm số gia đình trong một quốc gia và y là phần trăm tổng thu nhập, mô hình $y=x$ sẽ đại diện cho một quốc gia mà các gia đình có thu nhập như nhau. Đường cong Lorenz $y=f(x)$, biểu thị sự phân phối thu nhập thực tế. Diện tích giữa hai mô hình này, với $0\le x\le 100$, biểu thị "sự bất bình đẳng về thu nhập" của một quốc gia. Năm 2009, đường cong Lorenz của Hoa Kỳ có thể được mô hình hóa bởi hàm số:

$$y=\left(0,00061x^2+0,0224x+1,666\right)^2,0\le x\le 100$$

Trong đó x được tính từ các gia đình nghèo nhất đến giàu có nhất. Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là bao nhiêu?

Lời giải

Sự bất bình đẳng về thu nhập của Hoa Kì vào năm 2009 là diện tích hình phẳng S giới hạn bởi hai đồ thị:

$$\begin{cases} y = x \\ y = \left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 \\ x = 0;\ x = 100 \end{cases} \Rightarrow S = \int_0^{100} \left|\left(0,00061x^2 + 0,0224x + 1,666\right)^2 - x\right| dx.$$

Sử dụng máy tính cầm tay, ta được $S \approx 2085,5$.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi:

a) Đồ thị hàm số $y = x^2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

b) Đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$.

c) Đồ thị hàm số $y = x^3 + 1$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 1$.

d) Đồ thị hàm số $y = x^2 + x - 2$ và trục hoành.

e) Đồ thị hàm số $y = x^2 - 1$, trục hoành và đường thẳng $x = 3$.

f) Đồ thị hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 4$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 3$.

g) Đồ thị của các hàm số $y = x^3, y = 2x - 1$ và hai đường thẳng $x = 1, x = 2$.

h) Đồ thị hàm số $y = \cos x - 2$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$ và $x = \pi$.

i) Đồ thị của hai hàm số $y = x^2, y = 2 - x$ và hai đường thẳng $x = 0, x = 2$.

Lời giải

a) Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^2 \left|x^2\right| dx = \int_0^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 = \frac{8}{3}$.

b) Diện tích hình phẳng cần tính là $S = \int_0^2 \left|e^x\right| dx = \int_0^2 e^x dx = \left.e^x\right|_0^2 = e^2 - 1.$

c) Diện tích hình phẳng cần tính là: $S = \int_0^1 \left|x^3 + 1\right| dx = \int_0^1 \left(x^3 + 1\right) dx = \left.\left(\frac{x^4}{4} + x\right)\right|_0^1 = \frac{5}{4}$.

d) Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số và trục hoành là nghiệm của phương trình:

$x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Diện tích hình phẳng $S = \int_{-2}^1 \left|x^2 + x - 2\right| dx = -\int_{-2}^1 \left(x^2 + x - 2\right) dx = \frac{9}{2}$.

e) Phương trình hoành độ giao điểm của các đường $y = x^2 - 1$ và Ox là: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$.

Diện tích hình phẳng là:

$$S=\int_{-1}^{3}\left|x^2-1\right|dx=\int_{-1}^{1}\left(-x^2+1\right)dx+\int_{1}^{3}\left(x^2-1\right)dx=\left(-\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1}+\left(\frac{x^3}{3}-x\right)\Big|_{1}^{3}=8.$$

f) Ta có: $x^4-3x^2-4=0\Leftrightarrow x=2\in[0;3]$

Diện tích hình phẳng là:

$$S=\int_{0}^{3}\left|x^4-3x^2-4\right|dx=\left|\int_{0}^{2}\left(x^4-3x^2-4\right)dx\right|+\left|\int_{2}^{3}\left(x^4-3x^2-4\right)dx\right|$$

$$=\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_{0}^{2}\right|+\left|\left(\frac{x^5}{5}-x^3-4x\right)\Big|_{2}^{3}\right|=\frac{48}{5}+\frac{96}{5}=\frac{144}{5}.$$

g) Ta có:

$$x^3=2x-1\Leftrightarrow x^3-2x+1=0\Leftrightarrow\left(x-1\right)\left(x^2+x-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.$$

$$\Rightarrow x^3-2x+1\geq 0,\forall x\in[1;2]$$

Khi đó, diện tích hình phẳng cần tính là: $S=\int_{1}^{2}\left(x^3-2x+1\right)dx=\left(\frac{1}{4}x^4-x^2+x\right)\Big|_{1}^{2}=\frac{7}{4}$.

h) Vì $\cos x-2<0$ với $\forall x\in\mathbb{R}$ nên diện tích hình phẳng cần tìm là:

$$S=\int_{0}^{\pi}\left|\cos x-2\right|dx=\int_{0}^{\pi}\left(2-\cos x\right)dx=\left(2x+\sin x\right)\Big|_{0}^{\pi}=2\pi.$$

$$S=\int_{0}^{2}\left|x^2-(2-x)\right|dx=\int_{0}^{2}\left|x^2+x-2\right|dx$$

i) Diện tích cần tìm là

$$x^2+x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=-2\end{array}\right.$$

Ta có

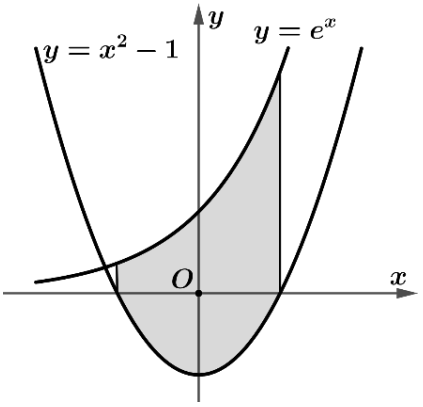
$$S=\int_{0}^{1}\left|x^2+x-2\right|dx+\int_{1}^{2}\left|x^2+x-2\right|dx=\left|\int_{0}^{1}\left(x^2+x-2\right)dx\right|+\left|\int_{1}^{2}\left(x^2+x-2\right)dx\right|$$

Khi đó:

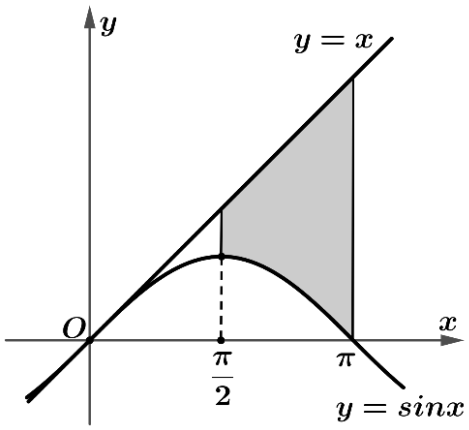
$$=\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{0}^{1}\right|+\left|\left(\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x\right)\Big|_{1}^{2}\right|=\left|\frac{-7}{6}\right|+\left|\frac{11}{6}\right|=3.$$

Bài tập 2: Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường được minh họa bởi hình vẽ sau đây:

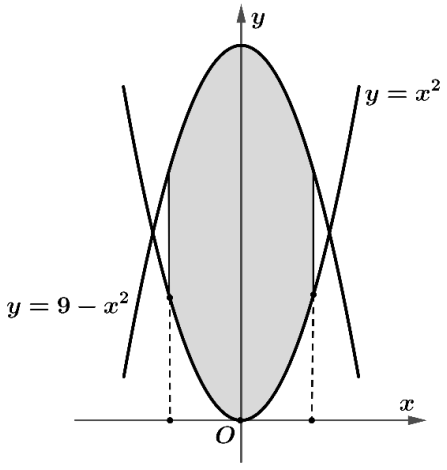
a) $y=e^x, y=x^2-1, x=-1, x=1$



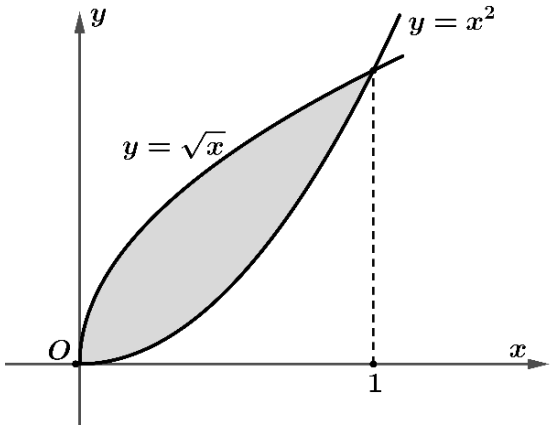
b) $y = \sin x, y = x, x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi$



c) $y = 9 - x^2, y = 2x^2, x = -\sqrt{3}, x = \sqrt{3}$



d) $y = \sqrt{x}, y = x^2, x = 0, x = 1.$



Lời giải

a) Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{-1}^{1} \left| e^x - \left(x^2 - 1\right) \right| dx = \int_{-1}^{1} \left(e^x - x^2 + 1\right) dx = \int_{-1}^{1} e^x dx + \int_{-1}^{1} \left(-x^2 + 1\right) dx = e - \frac{1}{e} + \frac{4}{3}$$

b) Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \sin x - x \right| dx$$

Trong khoảng $\left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$ thì $\sin x < 1 < x$, do đó:

$$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left| \sin x - x \right| dx = S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(x - \sin x\right) dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} x dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = \frac{x^2}{2}\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} + \cos x\Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \frac{3\pi^2}{8} - 1$$

c) Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| \left(9 - x^2\right) - 2x^2 \right| dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| 9 - 3x^2 \right| dx$$

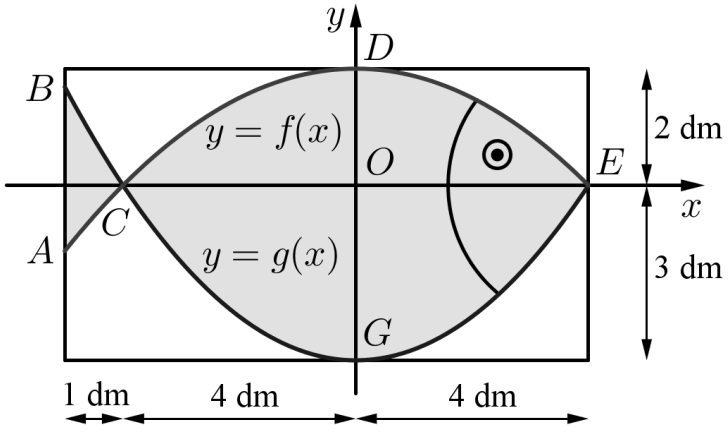
Do trên khoảng $\left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right): 3x^2 < 9$ nên diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left| 9 - 3x^2 \right| dx = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \left(9 - 3x^2\right) dx = \left(9x - 3.\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} = 12\sqrt{3}$$

d) Diện tích hình phẳng cần tính là:

$$S = \int_{0}^{1} \left| \sqrt{x} - x^2 \right| dx = \int_{0}^{1} \left(\sqrt{x} - x^2\right) dx = \int_{0}^{1} x^{\frac{1}{2}} dx - \int_{0}^{1} x^2 dx = \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{3}\Big|_{0}^{1} - \frac{x^3}{3}\Big|_{0}^{1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Bài tập 3: Trên cửa sổ có dạng hình chữ nhật, họa sĩ thiết kế logo hình con cá cho một doanh nghiệp kinh doanh hải sản. Logo là hình phẳng giới hạn bởi hai parabol với các kích thước được cho trong hình sau (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét).



a) Lập phương trình các parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$.

b) Tính diện tích của logo.

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm bao nhiêu phần trăm (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?

Lời giải

a) Từ đồ thị ta thấy parabol $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đỉnh tại điểm $O(0;0)$ nên $c = 0$ và đi qua điểm $A(2;4)$ nên $4 = 4a + 2b$

Giả sử $b = 0$ (do parabol đối xứng quá trục tung) nên $4a = 4 \Rightarrow a = 1$ nên $y = f(x) = x^2$

Parabol $y = g(x) = mx^2 + nx + p$ có đỉnh tại điểm $E(2;0)$ nên $y = -m(x-2)^2 + 0$ và đi qua điểm $C(3;1)$ nên $m = -1$ nên $y = g(x) = -(x-2)^2$

b) Phương trình hoành độ giao điểm của $y = f(x)$ và $y = g(x)$ là $x^2 = -(x-2)^2$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$$

Diện tích của logo là:

$$S = \int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^2 \left(x^2 + (x-2)^2\right)dx = \left(\frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 4x\right)\Big|_1^2 = \frac{20}{3}\left(\text{dm}^3\right)$$

c) Logo chỉ cho phép 50% lượng ánh sáng đi qua. Diện tích cửa sổ là $2.4 = 8\left(\text{dm}^3\right)$

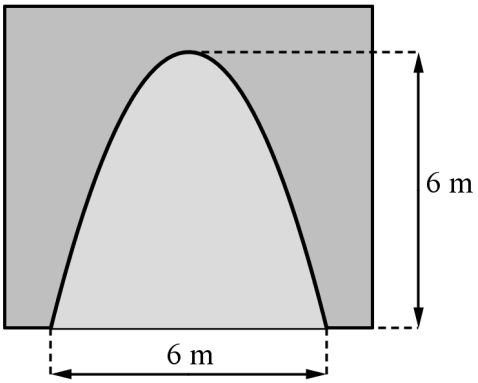
Lượng ánh sáng đi qua cửa sổ trước khi làm logo là: 100% ánh sáng $= 8\left(\text{dm}^3\right)$

Lượng ánh sáng đi qua cửa sổ sau khi làm logo là: $50\%.\frac{20}{3}=\frac{10}{3}\ \left(\text{dm}^3\right)$

Tổng lượng ánh sáng đi qua sau khi làm là: $8-\frac{10}{3}=\frac{14}{3}\ \left(\text{dm}^3\right)$

Lượng ánh sáng đi qua toàn bộ cửa sổ sau khi làm logo sẽ giảm $\frac{8-\frac{14}{3}}{8}.100=41,6\ (\%)$.

Bài tập 4: Mặt cắt của một cửa hầm có dạng là hình phẳng giới hạn bởi một parabol và đường thẳng nằm ngang như hình sau. Tính diện tích của cửa hầm.



Lời giải

Ta dễ dàng tìm được parabol là $y=-\frac{1}{6}x^2+6$ và đường thẳng nằm ngang là $y=0$

Phương trình hoành độ giao điểm là: $-\frac{1}{6}x^2+6=0\Leftrightarrow x^2=36\Leftrightarrow x=\pm 6$

Diện tích của cửa hầm là: $S=\int\limits_{-6}^{6}\left(-\frac{1}{6}x^2+6\right)\text{d}x=\left(-\frac{1}{18}x^3+6x\right)\Big|_{-6}^{6}=48\ \left(\text{m}^2\right)$.

Bài tập 5: Đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là khoảng 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và khoảng 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc. Hàm cung được cho bởi $p=0,0275x$, trong đó x là số lượng máy điều hoà được bán với giá p USD một chiếc. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất (giả sử hàm cầu là hàm bậc nhất).

Lời giải

Hàm cầu có dạng $p=ax+b$. Do đơn đặt hàng của nhà máy cho một loại máy điều hoà không khí là 6000 chiếc mỗi tuần khi giá là 331 USD/chiếc và 8000 chiếc mỗi tuần khi giá là 303 USD/chiếc nên ta có: $\begin{cases}331=6000a+b\\303=8000a+b\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-0,014\\b=415.\end{cases}$

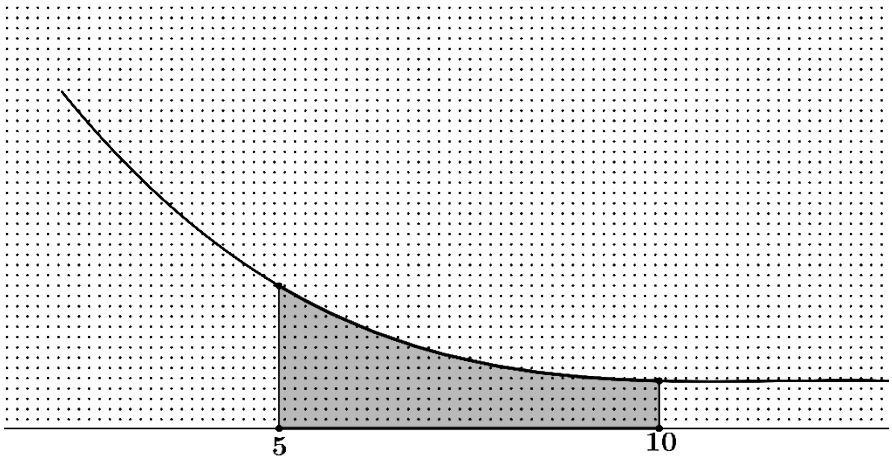
Vậy hàm cầu là $p=-0,014x+415$.

Xét phương trình $-0,014x+415=0,0275x\Leftrightarrow x=10000$ khi đó $p=275$.

Thặng dư tiêu dùng là: $\int\limits_{0}^{10000}\left(-0,014x+415-275\right)\text{d}x=700000$ (USD)

Thặng dư sản xuất là: $\int_0^{10000} (275 - 0,0275x)\,dx = 1375000$ (USD).

Bài tập 6: Trong xác suất thống kê thì một biến ngẫu nhiên *X* được gọi là có hàm mật độ $f(x)$ nếu xác suất để *X* nhận giá trị trong $[a,b]$ là diện tích của hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)$, đường thẳng $y = a$ và $y = b$. Đặc biệt, khi $f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0 \\ 0 \quad\quad , x < 0 \end{cases}$ trong đó λ là số thực cho trước thì *X* được gọi là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ với tham số λ. Chẳng hạn, tuổi thọ của một bóng đèn (đơn vị năm) là một biến ngẫu nhiên X tuân theo phân phối mũ với hệ số $\lambda = \frac{1}{5}$. Hãy tính xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm.



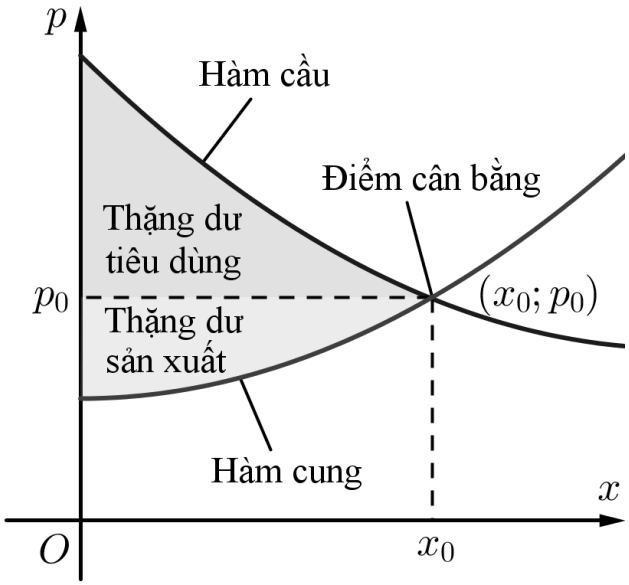
Lời giải

Hàm mật độ xác suất của *X* là: $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}, x \geq 0 \\ 0 \quad\quad\quad , x < 0 \end{cases}$. Xác suất để một bóng đèn có tuổi thọ lớn hơn 5 năm và nhỏ hơn 10 năm là: $P[5 \leq X \leq 10] = \int_5^{10} \frac{1}{5} e^{-\frac{1}{5}x}\,dx = -e^{-\frac{1}{5}x}\Big|_5^{10} = \frac{e-1}{e^2}.$

Bài tập 7: Ta biết rằng hàm cầu liên quan đến giá p của một sản phẩm với nhu cầu của người tiêu dùng, hàm cung liên quan đến giá p của sản phẩm với mức độ sẵn sàng cung cấp sản phẩm của nhà sản xuất. Điểm cắt nhau $(x_0; p_0)$ của đồ thị hàm cầu $p = D(x)$ và đồ thị hàm cung $p = S(x)$ được gọi là điểm cân bằng.

Các nhà kinh tế gọi diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị hàm cầu, đường ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ là thặng dư tiêu dùng. Tương tự, diện tích của hình giới hạn bởi đồ thị của hàm cung, đường nằm ngang $p = p_0$ và đường thẳng đứng $x = 0$ được gọi là thặng dư sản xuất, như trong hình bên dưới.

(Theo *R. Larson, Brief Calculus: An Applied Approach, 8th edition, Cengage Learning, 2009*)



Giả sử hàm cung và hàm cầu của một loại sản phẩm được mô hình hoá bởi:

Hàm cầu: $p = 5 - 0,2x$ và hàm cung: $p = 1 + 0,02x^2$, trong đó x là số đơn vị sản phẩm. Tìm thặng dư tiêu dùng và thặng dư sản xuất cho sản phẩm này.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hai hàm là: $5 - 0,2x = 1 + 0,02x^2$

$$\Leftrightarrow 0,02x^2 + 0,2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10 \\ x = -20 \end{array}\right.$$

Với $x = 10$ thỏa mãn khi đó $x_0 = 10; p_0 = 5 - 0,2.10 = 3$

Thặng dư tiêu dùng là $\int_0^{10} (5 - 0,2x - 3)\mathrm{d}x = \int_0^{10} (2 - 0,2x)\mathrm{d}x = 10$.

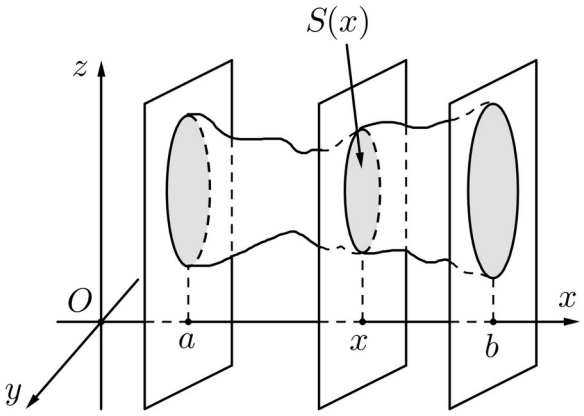
Thặng dư sản suất là $\int_0^{10} (3 - 1 - 0,02x^2)\mathrm{d}x = \int_0^{10} (2 - 0,02x^2)\mathrm{d}x = \frac{40}{3}$.

Dạng 2: Ứng dụng tích phân để tính thể tích khối tròn xoay

Phương pháp:

Thể tích vật thể tính theo mặt cắt vuông góc trục hoành

Gọi B là phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm a và b, $S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm x, $(a \le x \le b)$

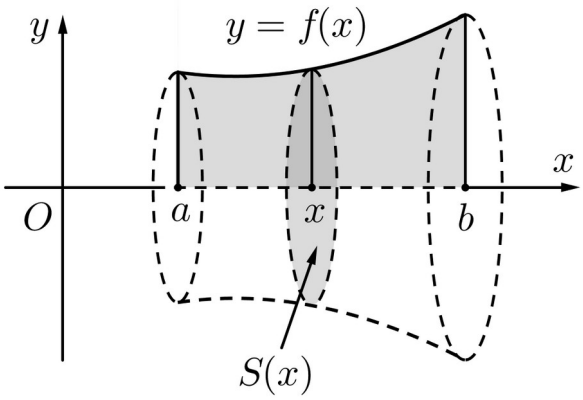


Giả sử $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$

Khi đó, thể tích của vật thể B được xác định: $\boxed{V=\int_a^b S(x)\mathrm{d}x}$.

Thể tích khối tròn xoay

Xoay miền hình phẳng giới hạn: $\begin{cases} y=f(x) \\ Ox;x=a;x=b \end{cases}$ quanh trục Ox.



Bước 1: Giải $f(x)=0\Leftrightarrow x=c;c\in[a;b]$.

Bước 2: Tính $V=\pi\int_a^b\left(f(x)\right)^2\mathrm{d}x$

A. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0,x=1$, có thiết diện bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ $x\left(0\le x\le 1\right)$ là một tam giác đều có cạnh bằng x.

A. $V=\dfrac{12\pi}{5}$. **B.** $V=\dfrac{12}{5}$. **C.** $V=\dfrac{\sqrt{3}\pi}{12}$. **D.** $V=\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

Lời giải

$$V=\int_0^1 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^2.\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

Thể tích vật thể là: .

Câu 2: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sin x$, trục Ox và các đường thẳng $x=0,\ x=\pi$ quay quanh trục Ox. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành bằng

A. $\int_0^{\pi}\sin x\,dx$. **B.** $\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$. **C.** $\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$. **D.** $\pi\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$.

Lời giải

Công thức tính thể tích khối tròn xoay $V=\pi\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$.

Câu 3: Cho hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{x+2}$ và hai trục toạ độ. Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng đó quanh trục Ox bằng

A. $\frac{4\sqrt{2}}{3}$. **B.** 2. **C.** 2π. **D.** $\frac{4\sqrt{2}}{3}\pi$.

Lời giải

$$V=\pi\int_{-2}^{0}\left(\sqrt{x+2}\right)^2 dx=\pi\left(x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{0}=2\pi.$$

Câu 4: Cho hình phẳng (D) được giới hạn bởi các đường $x=0,x=\pi,y=0$ và $y=-\sin x$. Thể tích V của khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) xung quanh trục Ox được tính theo công thức

A. $V=\pi\int_0^{\pi}|\sin x|\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

C. $V=\pi\left|\int_0^{\pi}(-\sin x)\mathrm{d}x\right|$. **D.** $V=\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có $V=\pi\int_0^{\pi}(-\sin x)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^{\pi}\sin^2 x\mathrm{d}x$.

Câu 5: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x=0$ và $x=3$, biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(0\le x\le 3)$ thì được thiết diện là một hình vuông có độ dài cạnh bằng $2\sqrt{9-x^2}$

A. 90 **B.** 72π **C.** 78π **D.** 72

Lời giải

Diện tích hình vuông là $S=\left(2\sqrt{9-x^2}\right)^2=4\left(9-x^2\right)=36-4x^2$

Vậy thể tích vật thể là $V=\int_0^3 S(x)\mathrm{d}x=\int_0^3\left(36-4x^2\right)\mathrm{d}x=72$.

Câu 6: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=e^x$, các đường thẳng $x=0$, $x=\ln 3$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục hoành là

A. 2π. **B.** 4π. **C.** 4. **D.** π.

Lời giải

$$V=\pi\int_0^{\ln 3} e^{2x}\,\mathrm{d}x=\pi\frac{1}{2}e^{2x}\Big|_0^{\ln 3}=4\pi.$$

Câu 7: Thể tích khối tròn xoay do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x}$, trục Ox và hai đường thẳng $x=1;x=4$ khi quay quanh trục hoành được tính bởi công thức nào?

A. $V=\pi\int_1^4 x\mathrm{d}x$. **B.** $V=\pi^2\int_1^4 x\mathrm{d}x$. **C.** $V=\pi\int_1^4 \sqrt{x}\mathrm{d}x$. **D.** $V=\int_1^4 \left|\sqrt{x}\right|\mathrm{d}x$.

Lời giải

Ta có: $V=\pi\int_1^4 x\mathrm{d}x$

Câu 8: Cho miền phẳng (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1$, $x=2$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành.

A. $\frac{3}{2}$. **B.** $\frac{3\pi}{2}$. **C.** $\frac{2\pi}{3}$. **D.** 3π.

Lời giải

Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (D) quanh trục hoành $V=\pi\int_1^2\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{2}$

Câu 9: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{16}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{31\pi}{30}$. **D.** $\frac{31}{30}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox là: $V=\pi\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 10: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và $x=5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi D quay quanh Ox bằng

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Lời giải

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $\sqrt{x-1}=0\Rightarrow x=1$ $\Rightarrow V=\pi\int_1^5|x-1|\mathrm{d}x=8\pi$.

Câu 11: Thể tích vật thể tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-4x+3$ và trục hoành quay quanh Ox là

A. $\frac{4}{3}$. **B.** $\frac{16}{15}$. **C.** $\frac{4\pi}{3}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Ta có $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$. Vậy $V_{Ox}=\pi\int_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$.

Câu 12: Giả sử D là hình phẳng giới hạn bởi đường parabol $y=x^2-3x+2$ và trục hoành. Quay D quanh trục hoành ta thu được khối tròn xoay có thể tích bằng

A. $V=\frac{\pi}{30}$. **B.** $V=\frac{1}{30}$. **C.** $V=\frac{1}{6}$. **D.** $V=\frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Ta có $y=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$. Khi đó: $V=\pi\int_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx=\frac{\pi}{30}$.

Câu 13: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi hai đồ thị $y=x^2+x$ và $y=2x$. Quay hình (H) quanh trục hoành, tính thể tích vật thể thu được

A. $\frac{3\pi}{10}$. **B.** $\frac{5\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{6}$. **D.** $\frac{5}{6}$

Lời giải

Xét phương trình: $x^2+x=2x\Leftrightarrow x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$

Ta có thể tích cần tìm là: $V=\pi\int_0^1\left|\left(x^2+x\right)^2-(2x)^2\right|\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{10}$

Câu 14: Cho hình phẳng D giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và $x=5$. Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox bằng

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** 8π. **D.** 8.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số $y=\sqrt{x-1}$ và trục hoành là $\sqrt{x-1}=0\Rightarrow x=1$.

Khi đó thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_1^5\left(\sqrt{x-1}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_1^5(x-1)\,\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\Big|_1^5=8\pi.$$

Câu 15: Tính thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ xung quanh trục Ox.

A. $\frac{5\pi}{2}$. **B.** $\frac{27\pi}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm giữa hai đường $y=-x^2+3x$ và $y=0$ là $-x^2+3x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$. Do đó thể tích khối tròn xoay cần tính là $V=\pi\int\limits_0^3\left(-x^2+3x\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{81\pi}{10}$.

Câu 16: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị $(P):y=2x-x^2$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi cho (H) quay quanh trục Ox.

A. $V=\dfrac{19\pi}{15}$. **B.** $V=\dfrac{13\pi}{15}$. **C.** $V=\dfrac{17\pi}{15}$. **D.** $V=\dfrac{16\pi}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (P) và trục Ox là: $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int\limits_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{5}$.

Câu 17: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quanh trục ox bằng

A. $\dfrac{34\pi}{3}$. **B.** $\dfrac{31\pi}{3}$. **C.** $\dfrac{32\pi}{3}$. **D.** $\dfrac{35\pi}{3}$.

Lời giải

Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và đường thẳng $y=0$ là nghiệm phương trình $\sqrt{4x-x^2}=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=4\end{array}\right.$.

Do đó, thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4x-x^2}$ và $y=0$ quay quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_0^4\left(\sqrt{4x-x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^4\left(4x-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(2x^2-\dfrac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^4=\dfrac{32\pi}{3}$.

Câu 18: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

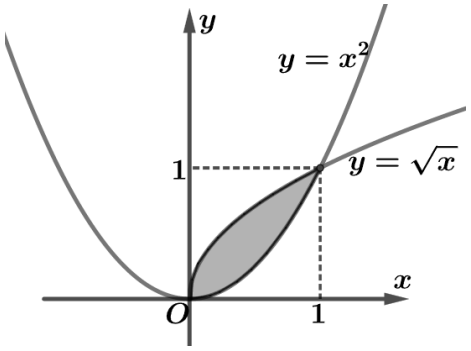
A. $\dfrac{16}{15}$. **B.** $\dfrac{16\pi}{15}$. **C.** $\dfrac{31\pi}{30}$. **D.** $\dfrac{31}{30}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường $y=x^2-4x+3$ và đường $y=0$ là $x^2-4x+3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=3\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-4x+3$ và $y=0$ quanh trục Ox là $V=\pi\int\limits_1^3\left(x^2-4x+3\right)^2\mathrm{d}x=\dfrac{16\pi}{15}$.

Câu 19: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=x^2$ và đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x}$ (tham khảo hình vẽ). Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục Ox bằng



A. $V=\frac{9\pi}{10}$. **B.** $V=\frac{3\pi}{10}$. **C.** $V=\frac{\pi}{10}$. **D.** $V=\frac{7\pi}{10}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay thu được là $V=\pi\int_0^1\left|x^4-x\right|\mathrm{d}x=\frac{3\pi}{10}$.

Câu 20: Kí hiệu (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f(x)=\sqrt{x}.e^{x^2}$, trục hoành, đường thẳng $x=1$. Tính thể tích V của khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $V=\frac{1}{4}\pi\left(e^2-1\right)$. **B.** $V=\pi\left(e^2-1\right)$. **C.** $V=\frac{1}{4}\pi e^2-1$. **D.** $V=e^2-1$.

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x}.e^{x^2}=0\Leftrightarrow x=0$

Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay (H) quanh trục hoành là:

$$V=\pi\int_0^1\left(\sqrt{x}.e^{x^2}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^1 xe^{2x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}\int_0^1 e^{2x^2}\mathrm{d}\left(2x^2\right)=\frac{\pi}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1=\frac{\pi}{4}\left(e^2-1\right).$$

Câu 21: Thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $V=\frac{512\pi}{15}$. **B.** $V=\frac{32}{3}$. **C.** $V=\frac{32\pi}{3}$. **D.** $V=\frac{512}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=-2\end{array}\right.$.

Thể tích của khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2dx=\frac{512\pi}{15}$.

Câu 22: Cho (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-x-2$ và trục hoành. Quay hình phẳng (H) quay quanh trục hoành, ta được một khối nón tròn xoay có thể tích bằng

A. $\frac{81}{10}\pi$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{9}{2}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị với trục hoành: $x^2-x-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=2\end{array}\right.$

Thể tích khối nón là $V=\pi\int_{-1}^{2}\left(x^2-x-2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{10}$.

Câu 23: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=4-x^2$ và trục hoành. Thể tích khối tròn xoay được tạo thành khi quay (H) xung quanh trục hoành bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{32}{3}$. **D.** $\frac{512}{15}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 2$

Khi đó: $V=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{-2}^{2}\left(16-8x^2+x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(16x-\frac{8}{3}x^3+\frac{x^5}{5}\right)\Big|_{-2}^{2}=\frac{512}{15}\pi$.

Câu 24: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi^2}{30}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2-3x+2\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$. Vậy $V=\pi\int_{1}^{2}\left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}$.

Câu 25: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=\left|x^2-3x+2\right|$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi^2}{30}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi^2}{6}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $\left|x^2-3x+2\right|=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\end{array}\right.$.

Vậy $V=\pi\int_{1}^{2}\left|x^2-3x+2\right|^2\mathrm{d}x=\frac{\pi}{30}$.

Câu 26: Tính thể tích của khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$, trục hoành và đường thẳng $x=2$, khi quay xung quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{5}$. **B.** $\frac{\pi}{6}$. **C.** $\frac{5\pi}{6}$. **D.** $\frac{4\pi}{5}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_{0}^{2}\left(x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{1}{5}x^5\right)\Big|_{0}^{2}=\frac{32\pi}{5}$.

Câu 27: Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox là

A. $\frac{71\pi}{35}$. **B.** $\frac{81}{35}$. **C.** $\frac{71}{35}$. **D.** $\frac{81\pi}{35}$.

Lời giải

Ta có $\frac{1}{3}x^3-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=3\end{array}\right.$.

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tìm là $V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}$.

Câu 28: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parapol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{256\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$$V=\pi\int_0^2\left[(2x)^2-\left(x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}.$$

Câu 29: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi parapol $(P):y=x^2$ và đường thẳng $d:y=2x$. Thể tích khối tròn xoay sinh bởi (H) khi quay quanh trục Ox bằng

A. $\frac{64\pi}{15}$. **B.** $\frac{16\pi}{15}$. **C.** $\frac{256\pi}{15}$. **D.** $\frac{4\pi}{3}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2=2x\Leftrightarrow x^2-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

$$V=\pi\int_0^2\left[(2x)^2-\left(x^2\right)^2\right]\mathrm{d}x=\pi\int_0^2\left(4x^2-x^4\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{4}{3}x^3-\frac{x^5}{5}\right)\Big|_0^2=\frac{64\pi}{15}.$$

Câu 30: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm2$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int_{-2}^2\left(4-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{512\pi}{15}$.

Câu 31: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=4-x^2$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{32\pi}{3}$. **B.** $\frac{512\pi}{15}$. **C.** $\frac{16\pi}{3}$. **D.** $\frac{256\pi}{15}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $4-x^2=0\Leftrightarrow x=\pm 2$.

Thể tích khối tròn xoay thu được là: $V=\pi\int_{-2}^{2}\left(4-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{512\pi}{15}$.

Câu 32: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$, hai đường thẳng $x=1,x=4$ và trục hoành. Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành.

A. $\frac{15\pi}{2}$. **B.** $\frac{15}{2}$. **C.** $\frac{14\pi}{3}$. **D.** $\frac{14}{3}$.

Lời giải

Thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay (H) quanh trục hoành

$$V=\pi\int_{1}^{4}\left(\sqrt{x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_{1}^{4}x\mathrm{d}x=\pi.\frac{x^2}{2}\Big|_{1}^{4}=\frac{15\pi}{2}.$$

Câu 33: Cho hình phẳng (H) giới hạn bởi $y=2x-x^2,y=0$. Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox ta được $V=\pi\left(\frac{a}{b}+1\right)$ với a,b là các số tự nhiên, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó

A. $ab=16$. **B.** $ab=12$. **C.** $ab=15$. **D.** $ab=18$.

Lời giải

Xét phương trình $2x-x^2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$.

Tính thể tích của khối tròn xoay thu được khi quay (H) xung quanh trục Ox là

$$V=\pi\int_{0}^{2}\left(2x-x^2\right)dx=\frac{16}{15}\pi=\left(1+\frac{1}{15}\right)\pi\Rightarrow a=1,b=15\Rightarrow ab=15.$$

Câu 34: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi hai đường $y=x^2-x$ và $y=0$ quanh trục Ox bằng

A. $\frac{\pi}{3}$. **B.** $\frac{\pi}{15}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{\pi}{5}$.

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm: $x^2-x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Thể tích khối tròn xoay là: $V=\pi\int_{0}^{1}\left(x^2-x\right)^2dx=\frac{\pi}{30}$.

Câu 35: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-3x+2$ và trục hoành. Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục hoành bằng

A. $\frac{\pi}{6}$. **B.** $\frac{1}{6}$. **C.** $\frac{\pi}{30}$. **D.** $\frac{1}{30}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $y=0\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Vậy $V=\pi\int\limits_1^2\left(x^2-3x+2\right)^2dx=\frac{\pi}{30}$.

Câu 36: Gọi (H) là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2-5x+4$ và trục Ox. Tính thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox.

A. $\frac{9}{2}$. **B.** $\frac{81}{10}$. **C.** $\frac{81\pi}{10}$. **D.** $\frac{9\pi}{2}$.

Lời giải

Ta có: $x^2-5x+4=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Thể tích của khối tròn xoay sinh ra khi quay hình (H) quanh trục Ox là

$V=\pi\int\limits_1^4\left(x^2-5x+4\right)^2dx=\frac{81\pi}{10}$.

Câu 37: Thể tích khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2-2x$, $y=0$ và $x=3$ quay quanh trục Ox bằng

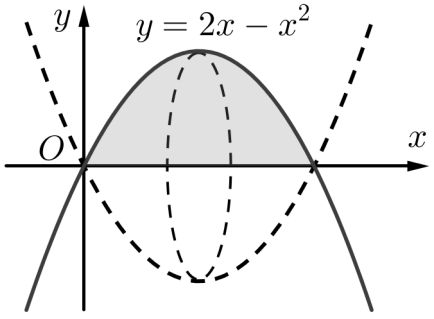
A. $\frac{18\pi}{5}$. **B.** $\frac{8\pi}{3}$. **C.** $\frac{18}{5}$. **D.** $\frac{8}{3}$.

Lời giải

Xét phương trình $x^2-2x=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right.$.

Khi đó $V=\pi\int\limits_0^3\left(x^2-2x\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_0^3\left(x^4-4x^3+4x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4x^3}{3}\right)\Big|_0^3=\frac{18\pi}{5}$

Câu 38: Thể tích khối tròn xoay giới hạn bởi các đường $y=2x-x^2$, $y=0$ khi quay quanh trục Ox là:



A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{13\pi}{15}$. **C.** $\frac{14\pi}{15}$. **D.** $\frac{16\pi}{15}$.

Lời giải

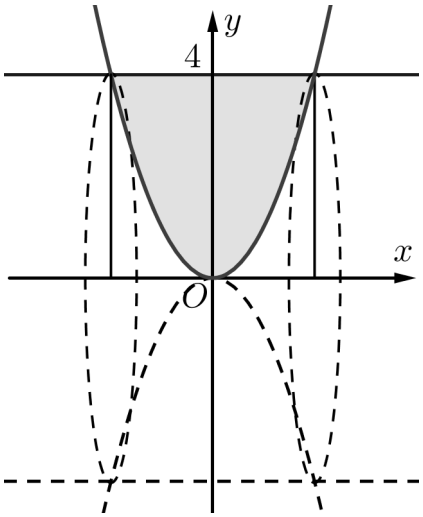
$$-x^2+2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$$

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$$V=\pi\int_0^2\left(2x-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\frac{16\pi}{15}$$

Thể tích khối tròn xoay là:

Câu 39: Cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^2$ và đường thẳng $y=4$ quay quanh trục Ox. Thể tích khối tròn xoay sinh ra bằng:



A. $\frac{64\pi}{5}$. **B.** $\frac{128\pi}{5}$. **C.** $\frac{256\pi}{5}$. **D.** $\frac{152\pi}{5}$.

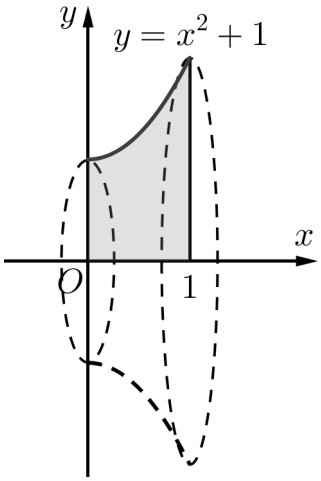
Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2=4\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow x=\pm2$

$$V=\pi\int_{-2}^2\left|\left(x^2\right)^2-4^2\right|\mathrm{d}x=\frac{256\pi}{5}$$

Thể tích khối tròn xoay là: .

Câu 40: Thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x^2+1,\ x=0,\ x=1,\ y=0$ quay quanh trục Ox là:



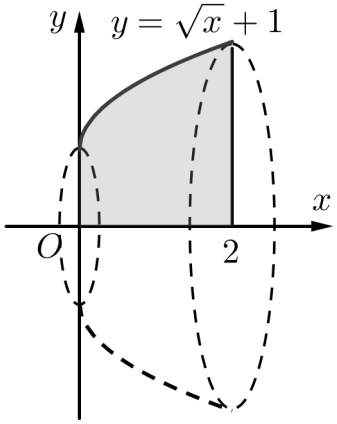
A. $\frac{4\pi}{3}$. **B.** $\frac{28}{15}$. **C.** $\frac{28\pi}{15}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

$$V=\pi\int_0^1\left(x^2+1\right)^2\mathrm{d}x=\frac{28\pi}{15}$$

Thể tích khối tròn xoay là:

Câu 41: Tính thể tích chứa được của một cái chậu inox to mà khách hàng đặt theo kích thước yêu cầu, biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{x}+1$, trục Ox và các đường thẳng $x=0,\ x=2$ quanh trục Ox, đơn vị trên trục là decimet (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).



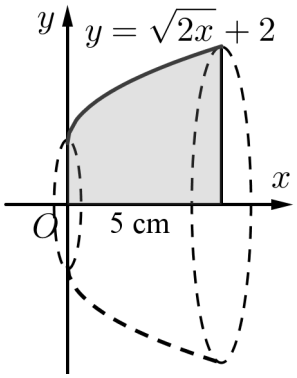
A. 12,12 dm^3. **B.** 12,21 dm^3. **C.** 24,14 dm^3. **D.** 24,41 dm^3.

Lời giải

$$V=\pi\int_0^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{8}{3}\sqrt{2}+4\right)\approx 24,41$$

Thể tích của chậu inox là: (dm^3).

Câu 42: Tính thể tích chứa được (dung tích) của một cái chén (bát), biết phần trong của nó có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi đường $y=\sqrt{2x}+2$ và trục Ox (như hình vẽ), bát có độ sâu 5 cm, đơn vị trên trục là centimet (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



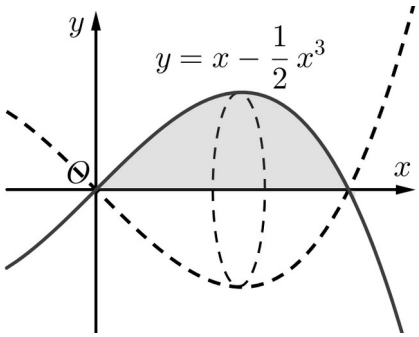
A. 78 cm^3. **B.** 274 cm^3. **C.** 87 cm^3. **D.** 247 cm^3.

Lời giải

$$V=\pi\int_0^5\left(\sqrt{2x}+2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\left(\frac{40}{3}\sqrt{10}+45\right)\approx 274$$

Thể tích của chén là: (cm^3)

Câu 43: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x - \frac{1}{2}x^3$, $y = 0$, $x = 0,\ x = \sqrt{2}$. Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra bởi hình phẳng đó khi quay quanh trục Ox có giá trị thuộc khoảng nào sau đây?



A. $\left(\frac{3}{2};2\right)$. **B.** $\left(1;\frac{3}{2}\right)$. **C.** $\left(0;\frac{1}{2}\right)$. **D.** $\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Lời giải

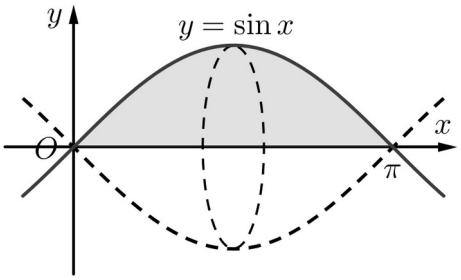
$$x - \frac{1}{2}x^3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \sqrt{2} \\ x = 0 \end{array}\right.$$

Phương trình hoành độ giao điểm là:

$$V = \pi \int_0^{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{2}x^3\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{16\sqrt{2}\pi}{105} \approx 0{,}677 \in \left(\frac{1}{2};1\right)$$

Thể tích của vật thể là: .

Câu 44: Biết một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ là $F(x) = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4}$. Thể tích của khối tròn xoay giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \sin x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0,\ x = \pi$ khi quay quanh trục Ox là:



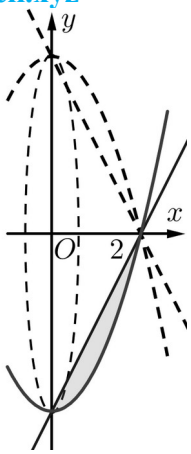
A. $\frac{\pi^2}{4}$. **B.** $\frac{\pi^2}{2}$. **C.** $\frac{\pi}{2}$. **D.** $\frac{\pi}{4}$.

Lời giải

$$V = \pi \int_0^{\pi} (\sin x)^2 \mathrm{d}x = \pi \left(\int_0^{\pi} \frac{1 - \cos 2x}{2} \mathrm{d}x \right) = \frac{\pi^2}{2}$$

Thể tích khối tròn xoay là:

Câu 45: Thể tích hình khối do hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 - 4,\ y = 2x - 4,\ x = 0,\ x = 2$ quay quanh trục Ox bằng:



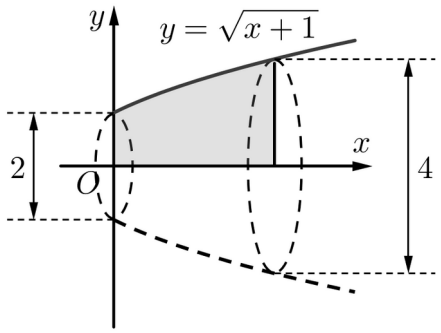
A. $\frac{416\pi}{15}$. **B.** $\frac{752\pi}{5}$. **C.** $\frac{16\pi}{15}$. **D.** $\frac{32\pi}{5}$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm là: $x^2-4=2x-4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=2\end{array}\right.$

Thể tích của hình khối là: $V=\pi\int_0^2\left|\left(x^2-4\right)^2-\left(2x-4\right)^2\right|\mathrm{d}x=\frac{32\pi}{5}$.

Câu 46: Một bác thợ gốm làm một cái chậu trồng cây, phần trong chậu cây có dạng khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng được tô đậm như hình sau quanh trục Ox (đơn vị trên trục là decimet), biết đường cong trong hình là đồ thị của hàm số $y=\sqrt{x+1}$, đáy chậu và miệng chậu có đường kính lần lượt là 2 dm và 4 dm. Dung tích của chậu là bao nhiêu (làm tròn kết quả nếu cần thiết)?



A. 25,13 lít. **B.** 23,56 lít. **C.** 14,66 lít. **D.** 7,5 lít.

Lời giải

Với bán kính đáy chậu là 1 dm thì $y=1\Rightarrow\sqrt{x}+1=1\Rightarrow x=0$

Với bán kính đáy chậu là 2 dm thì $y=2\Rightarrow\sqrt{x}+1=2\Rightarrow x=3$

Thể tích của khối chậu là: $V=\pi\int_0^2\left(\sqrt{x}+1\right)^2\mathrm{d}x=\frac{15\pi}{2}\approx 23{,}56\,\mathrm{dm}^3$.

Câu 47: Từ một quả cầu bằng đá trắng sứ bán kính bằng 1 dm, người ta khoan rút lõi ngay "chính giữa" quả cầu (trục đối xứng của lõi và quả cầu trùng nhau) như hình sau với đường kính mũi khoan là 1 dm được một vật thể có thể tích V là bao nhiêu (bỏ qua độ dày mũi khoan)?

A. $V=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ dm^3. **B.** $V=\dfrac{8-3\sqrt{3}}{6}\pi$ dm^3. **C.** $V=\dfrac{8+3\sqrt{3}}{6}\pi$ dm^3. **D.** $V=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\pi$ dm^3.

Lời giải

Gọi V_1 là thể tích của khối trụ và V_2 là thể tích của chỏm cầu

Nửa chiều cao của khối trụ là: $l=\sqrt{1^2-(0,5)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ nên ta có thể suy ra chiều cao của chỏm cầu là: $h=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Thể tích khối trụ là:

$$V_1=\pi R^2.H=\pi.R^2.2l=\frac{\pi\sqrt{3}}{4}$$

Thể tích chỏm cầu:

$$V_2=\pi\int_{R-h}^{R}\left(\sqrt{R^2-x^2}\right)^2dx\Leftrightarrow V_2=\pi\int_{R-h}^{R}\left(R^2-x^2\right)dx\Leftrightarrow V_2=\pi\left(R^2x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{R-h}^{R}$$

$$\Leftrightarrow V_2=\pi\left[\left(R^3-\frac{R^3}{3}\right)-\left(R^2(R-h)-\frac{(R-h)^3}{3}\right)\right]\Leftrightarrow V_2=\pi h^2\left(R-\frac{h}{3}\right).$$

$$V_2=\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)$$

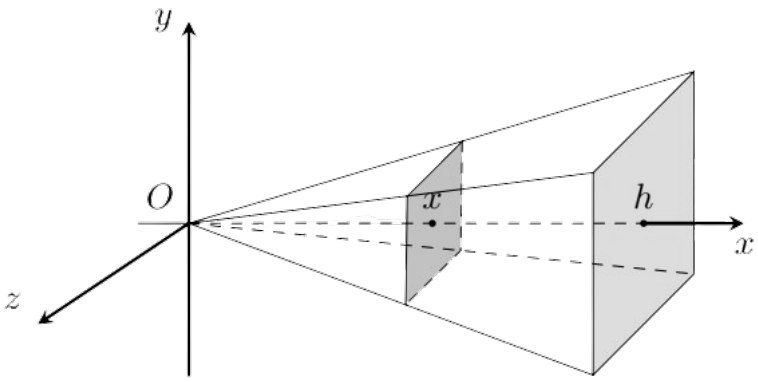
Thay số ta suy ra được thể tích của chỏm cầu là

$$V=V_1+2V_2=\frac{\pi\sqrt{3}}{4}+\pi\left(\frac{2}{3}-\frac{3\sqrt{3}}{8}\right)=\frac{8-3\sqrt{3}}{6}\pi$$

Khi đó thể tích của khối cần tìm là dm^3

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho khối chóp đều có đáy là hình vuông cạnh L và chiều cao là h. Chọn trục Ox sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và trục đi qua tâm của đáy. (như hình dưới).



Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

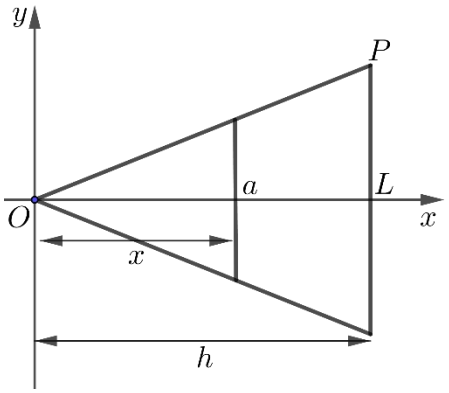
a) Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng song song với Ox.

b) Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\,(0 \le x \le h)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông cạnh a.

c) Diện tích mặt cắt là $S(x) = \frac{L}{h}x^2$.

d) Thể tích của khối chóp là $V = \frac{1}{3}L^2h$.

Lời giải



a) Sai: Đáy của khối chóp nằm trên mặt phẳng vuông góc với Ox tại $x = h$.

b) Đúng: Mỗi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ bằng $x\,(0 \le x \le h)$, cắt khối chóp theo mặt cắt là hình vuông có cạnh là a.

c) Sai: Theo định lí Tha-les, ta có $\frac{x}{h} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{L}{2}}$ suy ra $a = \frac{L}{h}x$.

Do đó, diện tích của mặt cắt này là $S(x) = \frac{L^2}{h^2}x^2$.

d) Đúng: Thể tích của khối chóp này là $V = \int_0^h S(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^h \frac{L^2}{h^2}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{L^2}{h^2}\frac{x^3}{3}\Big|_0^h = \frac{1}{3}L^2h$.

Câu 2: Trong mặt phẳng Oxy, cho hàm số $y = x + \sqrt{x}$ và $y = x + x^2$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Hoành độ giao điểm của đồ thị hai hàm số trên là $x = 0$ hoặc $x = -1$

b) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$

c) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ được tính theo công thức $S=\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$

d) Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hai hàm số trên và $x=0$, $x=1$ bằng $\frac{1}{3}$ đvdt

Lời giải

a) Sai: Phương trình hoành giao độ giao điểm của hai đồ thị hàm số trên là $x+\sqrt{x}=x+x^2 \Leftrightarrow x=x^4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

b) Đúng: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là: $S=\int_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left|\sqrt{x}-x^2\right|\mathrm{d}x=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x$.

c) Sai: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là: $S=\int_0^1\left|\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right|\mathrm{d}x$

$=\int_0^1\left[\left(x+\sqrt{x}\right)-\left(x+x^2\right)\right]\mathrm{d}x$ (vì $x+\sqrt{x}\geq x+x^2\ \forall x\in[0;1]$) $=\int_0^1\left(x+\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x-\int_0^1\left(x+x^2\right)\mathrm{d}x$.

d) Sai: Diện tích hình phẳng được giới hạn bởi các đường $y=x+\sqrt{x}$, $y=x+x^2$, $x=0$, $x=1$ là $S=\int_0^1\left(\sqrt{x}-x^2\right)\mathrm{d}x=\left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$ đvdt.

Câu 3: Khối chỏm cầu có bán kính $R=5$ và chiều cao $h=1$ sinh ra khi quay hình phẳng giới hạn bởi cung tròn có phương trình $y=\sqrt{25-x^2}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=4$, $x=5$ xung quanh trục Ox. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng 3.

b) Thể tích của khối chỏm cầu V_1 được tính theo công thức $V_1=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$.

c) Thể tích của khối chỏm cầu $V_1=\frac{14\pi}{3}$.

d) Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5. Tỉ số thể tích $\frac{V_1}{V_2}=\frac{7}{125}$.

Lời giải

a) Sai: Khoảng cách từ tâm của khối cầu đến khối chỏm cầu bằng $5-1=4$.

b) Đúng: Thể tích của khối chỏm cầu được tính theo công thức

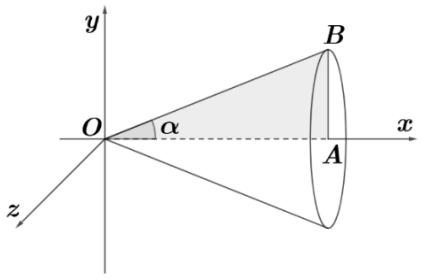
$$V_1=\pi\int_4^5\sqrt{25-x^2}^2\mathrm{d}x=\pi\int_4^5\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x$$

c) Đúng: Ta có thể tích khối chỏm cầu là $V=\pi\int\limits_{4}^{5}\left(25-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(25x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_4^5=\frac{14\pi}{3}$.

d) Đúng: Gọi V_2 là thể tích của nửa khối cầu có bán kính bằng 5.

Ta có $V_2=\frac{1}{2}.\frac{4}{3}\pi.5^3=\frac{250}{3}\pi$ nên suy ra $\frac{V_1}{V_2}=\frac{\frac{14}{3}\pi}{\frac{250}{3}\pi}=\frac{7}{125}$.

Câu 4: Cho tam giác vuông OAB có cạnh $OA=a$ nằm trên tục Ox và $AOB=\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Gọi β là khối tròn xoay sinh ra khi quay miền tam giác OAB xung quanh trục Ox. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Khi $\alpha=\frac{\pi}{4}$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{3}$ (đvtt).

b) Khi $\alpha=\frac{\pi}{6}$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Khi thể tích V của khối β là $\frac{4\pi a^3}{3}$ thì giá trị $\cos\alpha<\frac{1}{2}$.

d) Khi $\tan\alpha=\cot\alpha$ thì thể tích V của khối β là $\frac{\pi a^3}{3}$.

Lời giải

a) Đúng: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\frac{\pi}{4}$ nên $OB:y=\tan\frac{\pi}{4}x=x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int\limits_{0}^{a}x^2\mathrm{d}x=\frac{\pi x^3}{3}\Big|_0^a=\frac{\pi a^3}{3}$ (đvtt)

b) Đúng: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc $\frac{\pi}{6}$ nên $OB:y=\tan\frac{\pi}{6}x=\frac{x}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int\limits_{0}^{a}\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int\limits_{0}^{a}\frac{x^2}{3}\mathrm{d}x=\frac{\pi x^3}{9}\Big|_0^a=\frac{\pi a^3}{9}$ (đvtt).

c) Đúng: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB:y=\tan\alpha.x$.

Khi đó, thể tích của khối β theo $V=\pi\int\limits_{0}^{a}\left(\tan\alpha.x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi\tan^2\alpha x^3}{3}\Big|_0^a=\frac{\pi\tan^2\alpha a^3}{3}$ (đvtt).

Do $V=\frac{4\pi a^3}{3}\Leftrightarrow\frac{\pi\tan^2\alpha a^3}{3}=\frac{4\pi a^3}{3}\Leftrightarrow\tan^2\alpha=4\Rightarrow\frac{1}{\cos^2\alpha}=\tan^2\alpha+1=5\Rightarrow\cos\alpha=\frac{\pm1}{\sqrt{5}}$.

Mặt khác $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

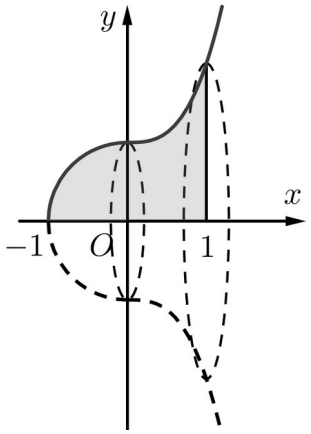
d) Đúng: Ta có: Do OB đi qua gốc tọa độ và tạo với Ox một góc α nên $OB: y=\tan\alpha.x$.

Khi đó thể tích của khối β theo $V=\pi\int_0^a(\tan\alpha.x)^2\,dx=\frac{\pi\tan^2\alpha.x^3}{3}\Big|_0^a=\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}$ (đvtt).

Do $\tan\alpha=\cot\alpha\Rightarrow\tan^2\alpha=\cot\alpha.\tan\alpha=1\Leftrightarrow\tan\alpha=\pm1$.

Mặt khác $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ nên $\tan\alpha=1\Rightarrow V=\frac{\pi\tan^2\alpha.a^3}{3}=\frac{\pi.a^3}{3}$ (đvtt).

Câu 5: Giả sử chiếc nón rộng vành sau có thể mô hình hóa bằng cách cho hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\begin{cases}x^3+1 & \text{khi } 0<x\le1\\ \sqrt{1-x^2} & \text{khi } -1\le x\le0\end{cases}$, trục Ox và các đường thẳng $x=-1$ và $x=1$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên trục là dm). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Diện tích hình phẳng (H) được tính theo công thức $S=\int_{-1}^{1}\left|\sqrt{1-x^2}+x^3+1\right|dx$.

b) Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

c) Công thức tính thể tích khối tròn xoay trên là $V=\pi\int_0^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_0^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx$.

d) Nếu thể tích của khối tròn xoay có dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản thì $a+b=139$.

Lời giải

a) Sai: Diện tích hình phẳng (H) được tính bằng công thức: $S=\int_{-1}^{0}\left(\sqrt{1-x^2}\right)dx+\int_0^1\left(x^3+1\right)dx$

b) Đúng: Diện tích thiết diện qua trục đối xứng của khối tròn xoay trên là $\frac{\pi+5}{2}$ dm^2.

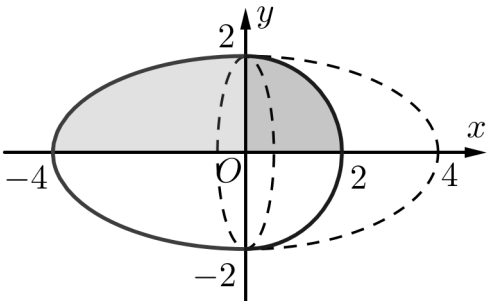
$$V=\pi\int_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx$$

c) Đúng: ông thức tính thể tích khối tròn xoay trên là .

$$V=\pi\int_{0}^{-1}\left(x^2-1\right)dx+\pi\int_{0}^{1}\left(x^6+2x^3+1\right)dx=\frac{97\pi}{42}$$

d) Đúng: nên $a=97$ và $b=42\Rightarrow a+b=139$.

Câu 6: Một cái trứng khủng long đồ chơi là một khối tròn xoay được tạo thành từ 2 mảnh ghép lại. Biết mảnh trên được tạo thành khi xoay một phần tư đường elip với trục lớn là 8 và trục nhỏ là 4 quanh trục Ox và mảnh dưới được tạo thành khi xoay một phần tư đường tròn bán kính 2 quanh trục Ox như hình sau (bỏ qua độ dày của vỏ trứng). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



$$V_1=\frac{\pi}{4}\int_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$$

a) Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi .

b) Thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

c) Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là 16π.

d) Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 3π.

Lời giải

$$\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1\Rightarrow y^2=4\left(1-\frac{x^2}{16}\right)$$

a) Đúng: Mảnh trên được biểu diễn bởi elip:

$$V_1=\pi\int_{-4}^{0}\left[4\left(1-\frac{x^2}{16}\right)\right]dx=\frac{\pi}{4}\int_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx$$

Thể tích phần trong của mảnh trên được tính bởi .

$$V_1=\frac{\pi}{4}\int_{-4}^{0}\left(16-x^2\right)dx=\frac{32\pi}{3}$$

b) Đúng: Thể tích phần trong mảnh trên là:

$$x^2+y^2=4\Rightarrow y^2=4-x^2$$

Mảnh dưới được biểu diễn bởi đường tròn:

$$V_2=\pi\int_{0}^{2}\left(4-x^2\right)dx=\frac{16\pi}{3}$$

Thể tích phần trong dưới là: .

Vậy thể tích phần trong của mảnh trên gấp 2 lần thể tích phần trong của mảnh dưới.

$$V = V_1 + V_2 = \frac{32\pi}{3} + \frac{16\pi}{3} = 16\pi$$

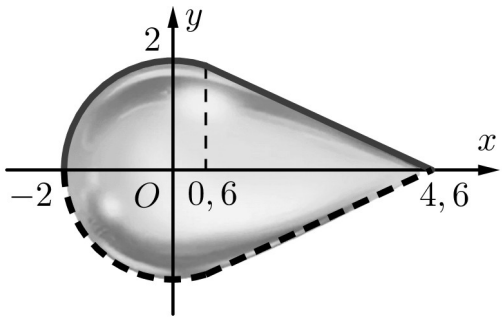
c) Đúng: Thể tích phần trong của quả trứng đồ chơi này là:

d) Sai: Diện tích thiết diện khi cắt bởi mặt phẳng qua trục của quả trứng là 4π.

Câu 7: Người ta chế tác một giọt nước bằng thủy tinh. Biết giọt nước thủy tinh này là vật thể tròn xoay khi xoay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{4-x^2} & (-2 \le x \le 0,6) \\ -\dfrac{\sqrt{91}}{20}x + \dfrac{23\sqrt{91}}{100} & (0,6 < x \le 4,6) \end{cases}$$

và trục Ox quanh trục Ox (đơn vị trên trục là centimet). Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:



a) Hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0,6$.

b) Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S = 2\int_{-2}^{4,6} f(x)\,dx$ cm^2.

c) Thể tích của giọt nước thủy tinh này lớn hơn 40 cm^3.

d) Biết khối lượng riêng của thủy tinh là $\rho = 2,6$ g/cm^3, khối lượng của giọt nước thủy tinh này là 102,22 g (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

a) Đúng: $\lim\limits_{x \to 0,6^-} f(x) = \sqrt{4-(0,6)^2} = \sqrt{4-0,36} = \sqrt{3,64} \approx 1,907$

$$\lim_{x \to 0,6^+} f(x) = -\frac{\sqrt{91}}{20}.0,6 + \frac{23\sqrt{91}}{100} \approx 1,907$$

Vậy hàm số $y = f(x)$ liên tục tại $x = 0,6$

b) Đúng: Diện tích mặt cắt của giọt nước thủy tinh khi cắt bởi mặt phẳng qua trục được tính bởi công thức $S = 2\int_{-2}^{4,6} f(x)\,dx$ cm^2.

c) Sai: Thể tích của giọt nước thủy tinh này là:

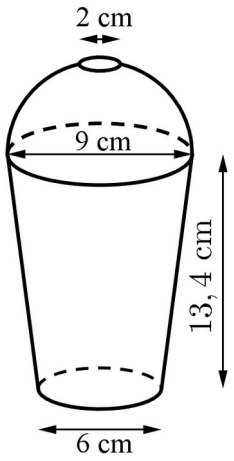
$$V = V_1 + V_2 = \pi \int_{-2}^{0,6} \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 dx + \pi \int_{0,6}^{4,6} \left(-\frac{\sqrt{91}}{20}x + \frac{23\sqrt{91}}{100}\right)^2 dx = \frac{4693\pi}{375} \approx 39,32$$

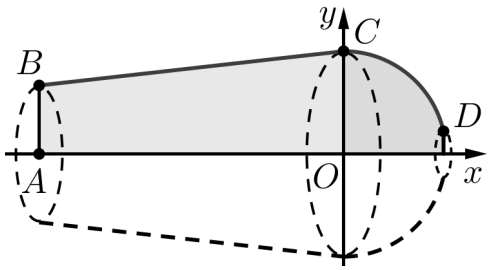
cm^3

$$m = \rho V = 2,6.\frac{4693\pi}{375} \approx 102,22$$

d) Đúng: Khối lượng của giọt nước thủy tinh này là: g.

Câu 8: Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6 cm, đường kính miệng ly 9 cm, chiều cao 13,4 cm, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2 cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).





Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên trục là centimet) với trục Ox đi qua tâm của 2 đáy hình nón cụt và gốc tọa độ O trùng với tâm của đáy lớn như hình vẽ trên.

a) Phương trình đường thẳng BC là: $1,5x - 13,4y + 60,3 = 0$.

b) Tọa độ điểm D là $D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$.

c) Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là 600 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

d) Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là 780 ml (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

a) Đúng: $B = (-13,4;3)$ và $C = (0;4,5)$ nên $\overrightarrow{BC} = (13,4;1,5)$ nên đường thẳng BC có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{n_{BC}} = (-1,5;13,4)$

Phương trình đường thẳng BC là: $-1,5(x - 13,4) + 13,4(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 1,5x - 13,4y + 60,3 = 0$

b) Đúng: Hoành độ của điểm D là: $x_D = \sqrt{(4,5)^2 - 1} = \frac{\sqrt{77}}{2} \Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$

$$V_1 = \pi \int_{-13,4}^{0} \left(\frac{1,5x + 60,3}{13,4} \right)^2 dx \approx 600$$

c) Đúng: Thể tích bên trong của ly không bao gồm nắp là: $600\ cm^3$

d) Sai: Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là: $V = V_1 + (V_2 - V_3)$ trong đó V_2 là nửa thể tích của khối cầu và V_3 là thể tích của chỏm cầu.

Nửa thể tích khối cầu là: $$V_2 = \frac{1}{2}.\frac{4}{3}.\pi.R^3 = \frac{243\pi}{4}$$

Thể tích chỏm cầu: $$V_3 = \pi \int_{R-h}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 dx \Leftrightarrow V_3 = \pi \int_{R-h}^{R} \left(R^2 - x^2 \right) dx \Leftrightarrow V_3 = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{R-h}^{R}$$

$$\Leftrightarrow V_3 = \pi \left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3} \right) - \left(R^2 (R-h) - \frac{(R-h)^3}{3} \right) \right] \Leftrightarrow V_3 = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3} \right).$$

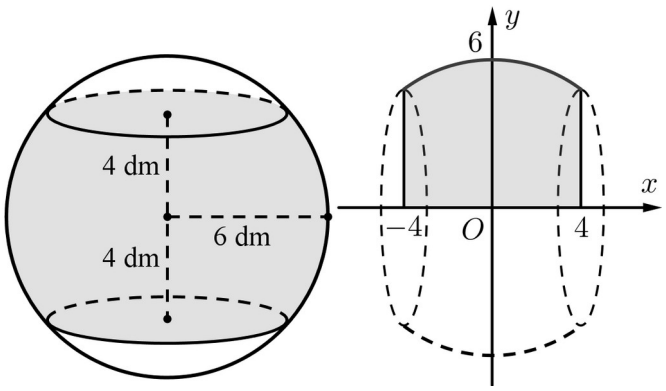
Thay số ta có: $h = 4,5 - \frac{\sqrt{77}}{2}$; $R = 4,5 \Rightarrow V_3 = \frac{\left(729 - 83\sqrt{77}\right)\pi}{12}$

Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là:

$$V = 600 + \left[\frac{243\pi}{4} - \frac{\left(729 - 83\sqrt{77}\right)\pi}{12} \right] \approx 790$$ ml.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Một hình cầu có bán kính 6 dm, người ta cắt bỏ hai phần bằng hai mặt phẳng song song và cùng vuông góc với đường kính để làm mặt xung quanh của một chiếc lu chứa nước (như hình vẽ). Tính thể tích V (lít) mà chiếc lu chứa được biết mặt phẳng cách tâm mặt cầu 4 dm (làm tròn đến hàng đơn vị).



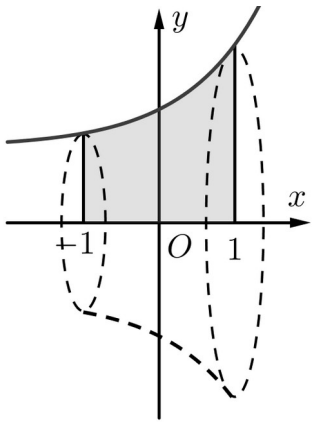
Lời giải

Thể tích cần tìm là thể tích của khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = \sqrt{36 - x^2}$, trục hoành và các đường thẳng $x = -4,\ x = 4$ quanh trục hoành.

$$V=\pi\int_{-4}^{4}\left(36-x^2\right)dx=\frac{736\pi}{3}\approx 771$$

Do đó: lít.

Câu 2: Tính thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường $y=\frac{e^x}{2}$, $y=0$ và $x=-1, x=1$ quanh trục hoành.

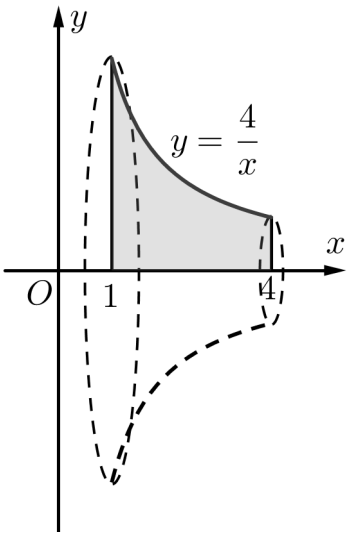


Lời giải

$$V=\pi\int_{-1}^{1}\frac{e^{2x}}{4}dx=\frac{\pi}{8}e^{2x}\Big|_{-1}^{1}=\frac{\pi}{8}\left(e^2-\frac{1}{e^2}\right)\approx 2,85$$

Thể tích khối tròn xoay là: .

Câu 3: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=1$, $x=4$ quanh trục Ox là bao nhiêu?

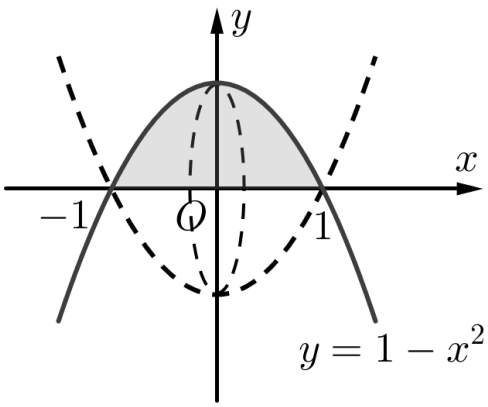


Lời giải

$$V=\pi\int_{1}^{4}\left(\frac{4}{x}\right)^2dx=12\pi\approx 37,7$$

Thể tích của khối tròn xoay là: .

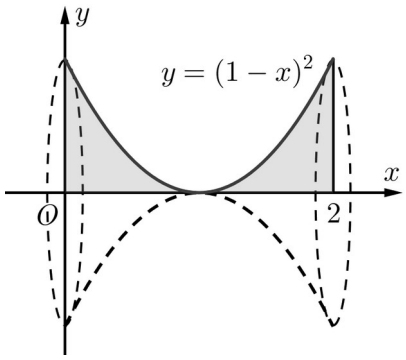
Câu 4: Thể tích vật thể tròn xoay khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=1-x^2$, $y=0$ quanh trục Ox có kết quả dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $S=a+b$ bằng bao nhiêu?



Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi\int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^2 dx = \frac{16\pi}{15};\ a=16,\ b=15;\ S=31$.

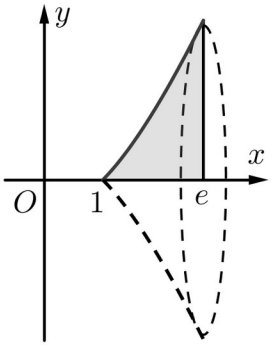
Câu 5: Biết thể tích khối tròn xoay tạo nên khi quay xung quanh trục Ox hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=(1-x)^2$, $y=0$, $x=0$, $x=2$ có dạng $\frac{a\pi}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính giá trị biểu thức $S=24a+12b$.



Lời giải

Thể tích khối tròn xoay là: $V = \pi\int_{0}^{2}(1-x)^4 dx = \frac{2\pi}{5};\ a=2,\ b=5;\ S=24a+12b=108$.

Câu 6: Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=x\ln x,\ y=0,\ x=e$ quay xung quanh trục Ox tạo thành khối tròn xoay có thể tích bằng $\frac{\pi}{a}\left(be^3-2\right)$ với $a, b\in\mathbb{Z}$. Tính $P=a^2-b^2$, biết một nguyên hàm của hàm số $f(x)=(x\ln x)^2$ là $F(x)=\frac{x^3}{27}\left(9\ln^2 x-6\ln x+2\right)$.

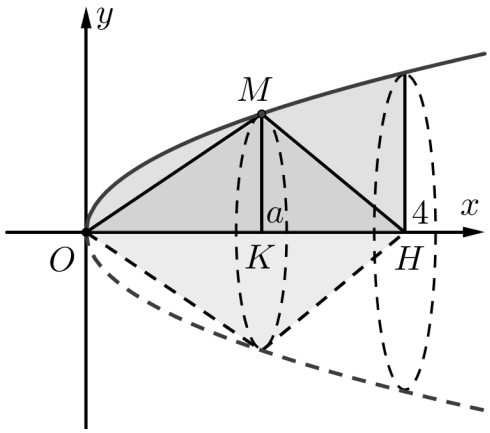


Lời giải

$$V=\pi\int_1^e y^2dx=\pi.F(x)\Big|_1^e=\frac{\pi}{27}\left(5e^3-2\right);\ a=27,\ b=5;\ P=704$$

Thể tích của khối tròn xoay là: .

Câu 7: Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{x},\ y=0$ và $x=4$ quanh trục Ox. Đường thẳng $x=a\ (0<a<4)$ cắt đồ thị hàm số $y=\sqrt{x}$ tại M (xem hình vẽ sau). Gọi V_1 là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay tam giác OMH quanh trục Ox. Biết rằng $V=2V_1$. Khi đó giá trị của a là bao nhiêu?



Lời giải

Ta có $V=\pi\int_0^4 x\,dx=8\pi$ và tọa độ $M\left(a;\sqrt{a}\right)$.

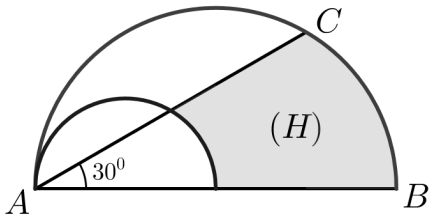
Khi quay tam giác OMH quanh trục Ox tạo thành hai hình nón có chung đáy:

Hình nón (N_1) có đỉnh là O, chiều cao $h_1=OK=a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$;

Hình nón (N_2) có đỉnh là H, chiều cao $h_2=HK=4-a$, bán kính đáy $R=MK=\sqrt{a}$.

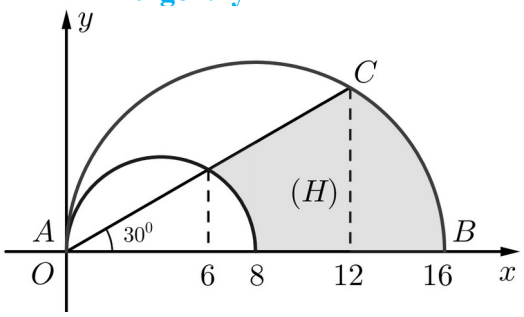
Khi đó $V_1=\frac{1}{3}\pi R^2h_1+\frac{1}{3}\pi R^2h_2=\frac{4}{3}\pi a$; $V=2V_1\Leftrightarrow 8\pi=2.\frac{4}{3}\pi a\Rightarrow a=3$.

Câu 8: Cho các nửa đường tròn như hình vẽ sau, trong đó đường kính của nửa đường tròn lớn gấp đôi đường kính của nửa đường tròn nhỏ. Biết rằng nửa hình tròn đường kính AB có diện tích là 32π và góc $BAC=30°$. Tính thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần tô đậm) xung quanh đường thẳng AB.



Lời giải

Chọn hệ trục Oxy thích hợp như hình sau:



Phương trình nửa đường tròn lớn: $f(x)=\sqrt{16x-x^2}$.

Phương trình nửa đường tròn nhỏ: $g(x)=\sqrt{8x-x^2}$.

Phương trình đường thẳng $AC: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}x$.

Khi đó $$V=\pi\int_6^8\left|\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2-\left(8x-x^2\right)\right|dx+\pi\int_8^{12}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2dx+\pi\int_{12}^{16}\left(16x-x^2\right)dx=\frac{784\pi}{3}\approx 821$$.

Câu 9: Người ta cần làm một cái cửa nhà hình parabol có chiều cao từ mặt đất đến đỉnh là 2,25 mét, chiều rộng tiếp giáp với mặt đất là 3 mét. Giá thi công trọn gói mỗi mét vuông là 1.500.000 đồng. Vậy số tiền làm cửa phải trả là bao nhiêu (đơn vị: triệu đồng)?

Lời giải

Gắn parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ vào hệ trục tọa độ sao cho (P) đi qua $O(0;0)$, $A(3;0)$ và $B(1,5;2,25)$ suy ra $(P): y=-x^2+3x$ nên diện tích cửa khi đó là: $S=\int_0^3\left|-x^2+3x\right|dx=\dfrac{9}{2}$.

Vậy số tiền làm cửa là: $\dfrac{9}{2}.1,5=6,75$ (triệu đồng).

Câu 10: Xét phần bên trong của một thùng rượu: là một khối tròn xoay có 2 đáy là hình tròn bằng nhau và có chiều cao là 60 cm, đường cong (bên trong) của thùng là một cung tròn của đường tròn bán kính là 36 cm. Thùng rượu này chứa được tối đa bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến số thập phân đầu tiên sau dấu phẩy)

Lời giải

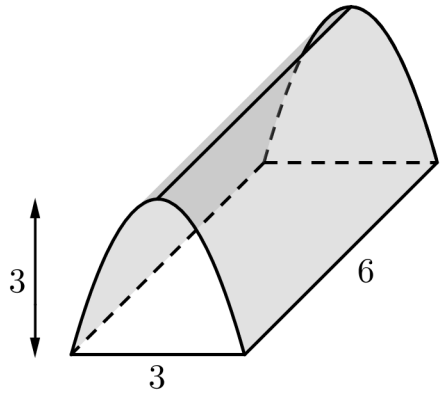
Phương trình đường tròn là: $x^2+y^2=36^2\Rightarrow y^2=36^2-x^2$

$$V=\pi\int_{-30}^{30}\left(\sqrt{36^2-x^2}\right)^2dx=\pi\int_{-30}^{30}\left(1296-x^2\right)dx=59760\pi$$

Thể tích của thùng rượu là: cm^3

Vậy thùng rượu chứa được tối ta $187,7$ lít rượu.

Câu 11: Một Chi đoàn thanh niên đi dự trại ở một đơn vị bạn, họ dự định dựng một lều trại có dạng parabol (nhìn từ mặt trước, lều trại được căng thẳng từ trước ra sau, mặt sau trại cũng là parabol có kích thước giống như mặt trước) với kích thước: nền trại là một hình chữ nhật có chiều rộng là 3 mét, chiều sâu là 6 mét, đỉnh của parabol cách mặt đất là 3 mét. Hãy tính thể tích (đơn vị: m^3) phần không gian phía trong trại để cử số lượng người tham dự trại cho phù hợp.



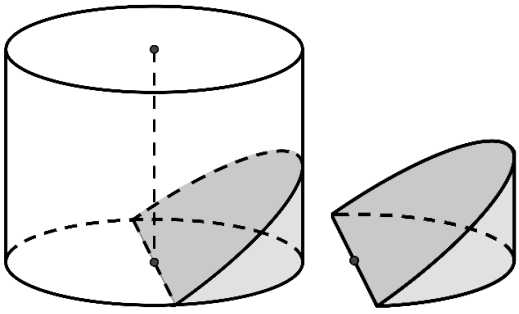
Lời giải

Gắn hệ trục tọa độ Oxy vào parabol sao cho đỉnh của parabol là $I(0;3)$, parabol cắt trục Ox tại 2 điểm là $A\left(-\frac{3}{2};0\right),\ B\left(\frac{3}{2};0\right)$. Tìm được parabol $(P):y=-\frac{4}{3}x^2+3$.

Cắt lều trại bằng mặt phẳng song song với mặt phẳng chứa parabol ta được thiết diện có diện tích S bằng diện tích của hình phẳng giới hạn bởi (P) và trục Ox ta có $S=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|-\frac{4}{3}x^2+3\right|dx=6$.

Khi đó thể tích phần không gian phía trong trại là: $V=\int_0^6 6\,dx=36$ m^3.

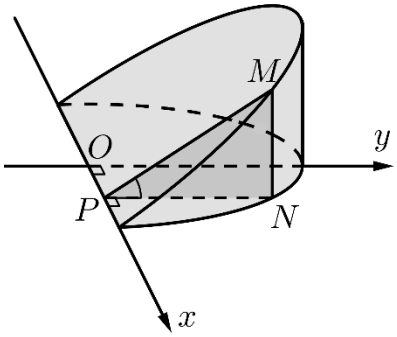
Câu 12: Từ một khúc gỗ hình trụ có đường kính 30 cm, người ta cắt khúc gỗ bởi một mặt phẳng đi qua đường kính đáy và nghiêng với đáy một góc 45° để lấy một hình nêm (xem hình minh họa dưới đây)



Kí hiệu V là thể tích của hình nêm. Tính V (cm^3).

Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Khi đó hình nêm có đáy là nửa hình tròn có phương trình: $y=\sqrt{225-x^2}, x\in[-15;15]$.

Một mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x với $x\in[-15;15]$ cắt hình nêm theo thiết diện là ΔMNP có diện tích là $S(x)$ (xem hình).

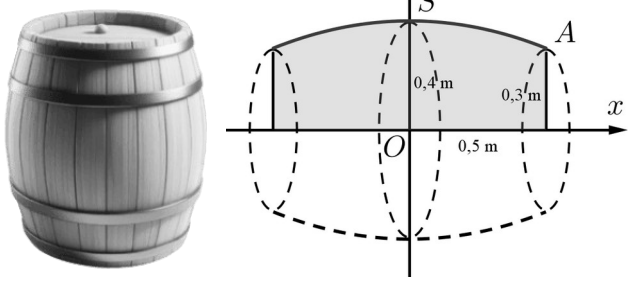
Ta có $NP=y,\ MN=NP.\tan 45^\circ=y=\sqrt{225-x^2}$. Khi đó $S(x)=\frac{1}{2}MN.NP=\frac{1}{2}(225-x^2)$.

$$V=\int_{-15}^{15}S(x)dx=2250$$

Suy ra thể tích hình nêm là: 2250 cm^3.

Câu 13: Một thùng rượu (xét phần bên trong) có 2 đáy là các hình tròn với bán kính là 30 cm, thiết diện (P) vuông góc với trục nối tâm của 2 đáy và cách đều 2 đáy có bán kính là 40 cm (bên trong), chiều cao thùng rượu là 1 m (hình vẽ). Biết rằng mặt phẳng chứa trục cắt mặt xung quanh (bên trong) thùng rượu theo các đường parabol có đỉnh nằm trên mặt phẳng (P), hỏi dung tích của thùng rượu (đơn vị: lít) là bao nhiêu (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

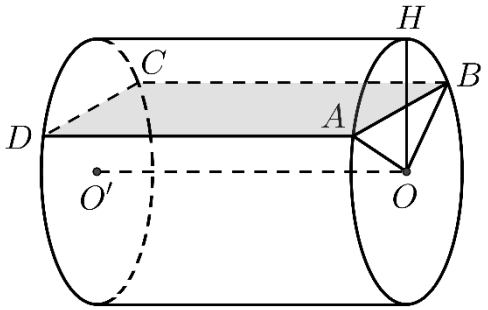
Lời giải



Gọi $(P): y = ax^2 + bx + c$ là parabol đi qua điểm $A(0,5;\ 0,3)$ và có đỉnh $S(0;\ 0,4)$ (hình vẽ). Khi đó, dung tích thùng rượu bằng thể tích khối tròn xoay khi cho hình phẳng giới hạn bởi (P), trục hoành và hai đường thẳng $x = 0,5;\ x = -0,5$ quay quanh trục Ox.

Tìm được $(P): y = -\frac{2}{5}x^2 + 0,4$. Suy ra $V = \pi \int_{-0,5}^{0,5} \left(-\frac{2}{5}x^2 + 0,4\right)^2 dx = \frac{203\pi}{1500}\ \text{m}^3 \approx 425$ lít.

Câu 14: Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích của lượng dầu còn lại trong bồn (theo đơn vị m^3).



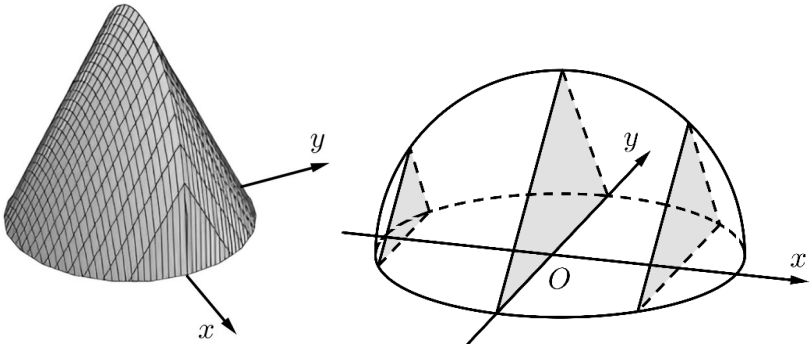
Lời giải

Dung tích của bồn (hình trụ) đựng dầu là: $V = \pi r^2 h = \pi.1^2.5 = 5\pi$ m^3.

Thể tích phần đã rút dầu ra (phần trên mặt phẳng $(ABCD)$) là: $V_1 = \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right).5$ m^3.

Vậy thể tích lượng dầu còn lại là: $V_2 = V - V_1 \approx 12,6$ m^3.

Câu 15: Một vật có kích thước và hình dáng như hình vẽ dưới đây. Đáy là hình tròn giới hạn bởi đường tròn $x^2 + y^2 = 16$, cắt vật bởi các mặt phẳng vuông góc với trục Ox ta được thiết diện là tam giác đều. Khi đó thể tích của vật thể có dạng $\frac{a\sqrt{3}}{b}$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $S = a + b$.



Lời giải

Ta có $x^2 + y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{16 - x^2}$.

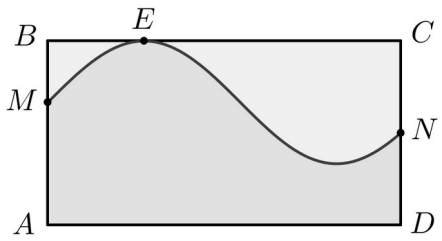
Suy ra thiết diện là tam giác đều có cạnh bằng $2\sqrt{16 - x^2}$.

Do đó diện tích thiết diện là $S(x)=\left(2\sqrt{16-x^2}\right)^2.\frac{\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\left(16-x^2\right)$.

Thể tích cần tìm là $V=\int_{-4}^{4}S(x)dx=\sqrt{3}\int_{-4}^{4}\left(16-x^2\right)dx=\frac{256\sqrt{3}}{3}$.

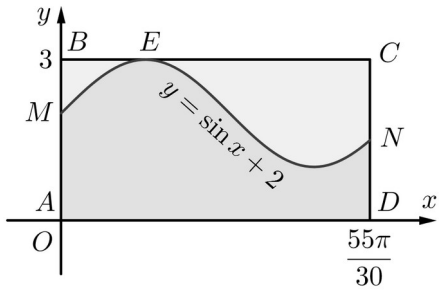
Suy ra $a=256,\ b=3;\ S=259$.

Câu 16: Từ một tấm tôn hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=30$ cm, $AD=\frac{55\pi}{3}$ cm. Người ta cắt tấm tôn theo đường hình sin như hình vẽ bên để được hai miếng tôn. Biết $AM=20$ cm, $CN=15$ cm, $BE=5\pi$ cm. Tính thể tích V (đơn vị: lít) của khối tròn xoay được tạo thành khi xoay miếng tôn lớn quanh trục AD.



Lời giải

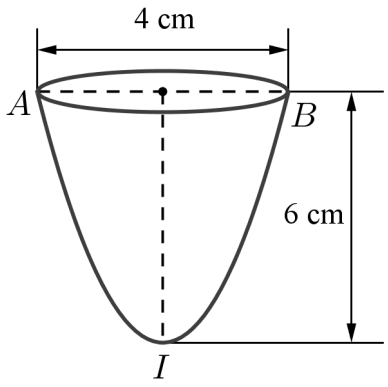
Chọn hệ trục Oxy với đơn vị trên trục là 10 cm như hình sau.



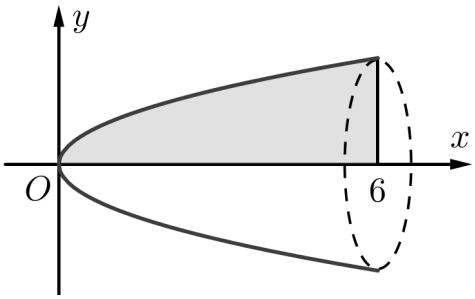
Khi đó đường cắt miếng tôn hình sin trên là đồ thị của hàm số $y=\sin x+2$, $0\le x\le\frac{55\pi}{30}$.

Thể tích cần tìm là $V=\pi\int_{0}^{\frac{55\pi}{30}}(\sin x+2)^2dx\approx 83,8$ lít.

Câu 17: Có một vật thể là hình tròn xoay có dạng giống như một cái ly như hình vẽ dưới đây. Người ta đo được đường kính của miệng ly là 4 cm và chiều cao là 6 cm. Biết rằng thiết diện của chiếc ly cắt bởi mặt phẳng đối xứng là một parabol. Tính thể tích V (cm^3) của vật thể đã cho.



Lời giải

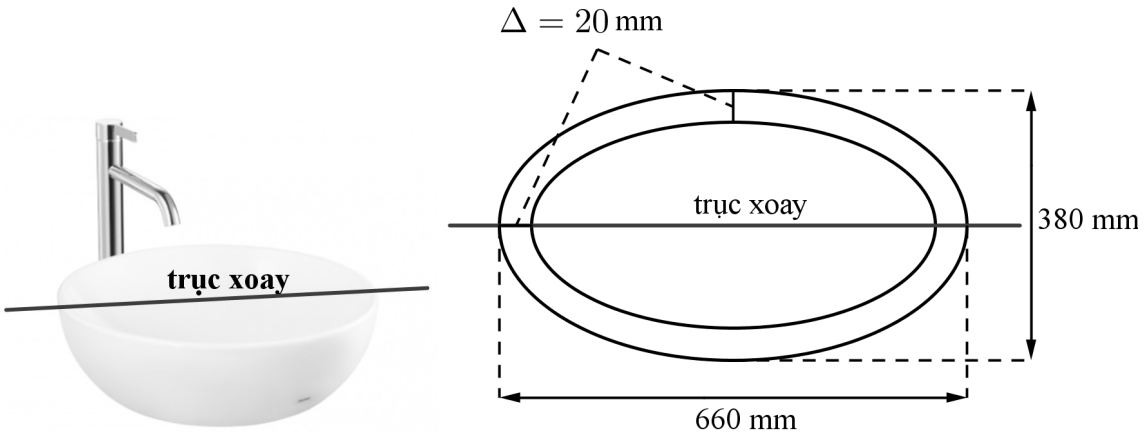


Chọn hệ trục tọa độ Oxy thích hợp, ta được phương trình parabol là $(P): y^2 = \frac{2}{3}x$ với $0 \le x \le 6$

$$V = \pi \int_0^6 \frac{2}{3} x\,dx = 12\pi \approx 37,7$$

Thể tích vật thể đã cho là: cm^3.

Câu 18: Hình elip được ứng dụng nhiều trong thực tiễn, đặc biệt là kiến trúc, xây dựng, thiết bị nội thất,. Mặt trong (lọt lòng) và ngoài (phủ bì) của một bồn rửa (lavabo) bằng sứ có hình dạng là một nửa khối tròn xoay khi quay quanh một trục của 2 elip có chung các trục đối xứng (hình minh họa). Thông số kĩ thuật mặt trên của bồn rửa: dài $\times$ rộng là 660×380 mm (phủ bì) và elip (lọt lòng) có trục lớn, trục nhỏ ít hơn elip phủ bì một khoảng 40 mm. Tính thể tích chứa nước của bồn rửa (đơn vị: lít) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ Oxy thích hợp với đơn vị trên trục là decimet.

Phương trình elip lọt lòng: $(E): \frac{x^2}{3,1^2} + \frac{y^2}{1,7^2} = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1,7\sqrt{1 - \frac{x^2}{3,1^2}}$.

Thể tích chứa nước của bồn rửa: $V=\frac{1}{2}.\pi\int_{-3,1}^{3,1}1,7^2\left(1-\frac{x^2}{3,1^2}\right)dx\approx 18,8$ lít.

B. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính thể tích khối tròn xoay tạo thành:

a) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thì hàm số $y=\sqrt{x-1}$, trục hoành và hai đường thẳng $x=2$ và $x=5$ quanh trục Ox.

b) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{2+\cos x}$, trục hoành và các đường thẳng $x=0,\ x=\frac{\pi}{2}$ quanh trục hoành.

c) Khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị của hàm số $y=e^x$, trục Ox và hai đường thẳng $x=0;x=1$ quanh trục Ox.

d) Khi quay hình phẳng giới hạn bởi các đường $y=\sqrt{\tan x},y=0,x=0,x=\frac{\pi}{4}$ quay xung quanh trục Ox.

e) Khi quay hình phẳng xác định bởi các đường $y=\frac{1}{3}x^3-x^2$, $y=0$, $x=0$ và $x=3$ quanh trục Ox.

f) Khi quay hình phẳng D giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{5-x},x\le 5$, trục tung, trục hoành quay quanh trục hoành.

Lời giải

a) Thể tích khối tròn xoay khi quay hình phẳng D quanh trục Ox ta có: $V=\pi\int_2^5\left(\sqrt{x}-1\right)^2dx$

b) Thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay D quanh trục hoành được tính theo công thức:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sqrt{2+\cos x}\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2+\cos x)dx=\pi(2x+\sin x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi(\pi+1).$$

c) Ta có thể tích cần tìm là $V=\pi\int_0^1\left(e^x\right)^2dx=\pi\int_0^1e^{2x}dx=\frac{\pi}{2}e^{2x}\Big|_0^1=\frac{\pi}{2}\left(e^2-1\right)$.

d) Thể tích vật thể tròn xoay được sinh ra là:

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\sqrt{\tan x}\right)^2.dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan x.dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{\cos x}.dx=-\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\cos x)}{\cos x}$$

$$=-\pi\left(\ln|\cos x|\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=-\pi\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi\ln 2}{2}.$$

e) Thể tích khối tròn xoay sinh ra khi quay hình phẳng (H) quanh trục Ox là :

$$V=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{3}x^3-x^2\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^3\left(\frac{1}{9}x^6-\frac{2}{3}x^5+x^4\right)\mathrm{d}x=\frac{81\pi}{35}.$$

Vậy thể tích khối tròn xoay cần tính là : $V=\frac{81\pi}{35}$.

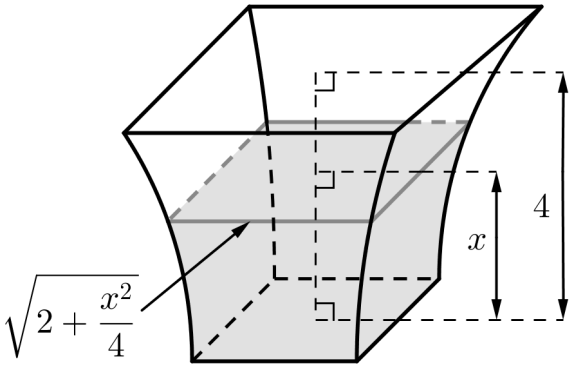
f) Xét phương trình hoành độ giao điểm hai hàm số là: $\sqrt{5-x}=0\Leftrightarrow 5-x=0\Leftrightarrow x=5$

Khi đó D là hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $\begin{cases}y=f(x)=\sqrt{5-x}\\ y=0\\ x=0;x=5\end{cases}$

Thể tích khối tròn xoay khi quay D quanh Ox là:

$$V=\pi\int_0^5\left(\sqrt{5-x}\right)^2\mathrm{d}x=\pi\int_0^5(5-x)\mathrm{d}x=\pi\left(5x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^5=\frac{25\pi}{2}.$$

Bài tập 2: Một bình chứa nước có hình dạng như hình sau. Biết rằng khi nước trong bình có chiều cao x (dm) ($0\le x\le 4$) thì mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm). Tính dung tích của bình.



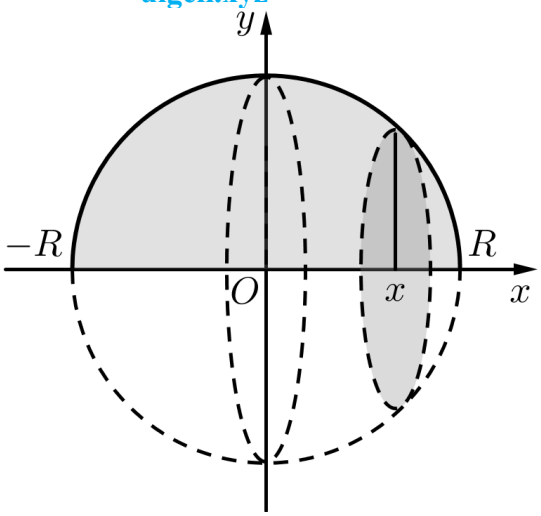
Lời giải

Mặt nước là hình vuông có cạnh $\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}$ (dm) nên có diện tích là $\left(\sqrt{2+\frac{x^2}{4}}\right)^2=2+\frac{x^2}{4}(\mathrm{dm}^2)$

Thể tích của bình chứa nước là:

$$V=\int_0^4\left(2+\frac{x^2}{4}\right)\mathrm{d}x=\frac{40}{3}(\mathrm{dm}^3)$$

Bài tập 3: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối cầu có bán kính R.



Lời giải

Khối cầu có bán kính R thì phương trình mặt cầu trong không gian là $x^2+y^2+z^2=R^2$

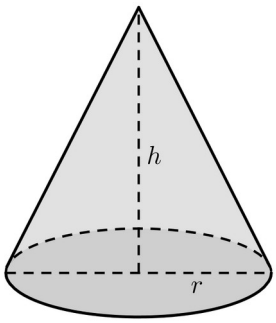
Xét mặt cát ngang của khối cầu qua trục x ta có $y^2+z^2=R^2-x^2$

Diện tích mặt cắt ngang khi đó là $\pi\left(R^2-x^2\right)$

Khi đó thể tích khối cầu là

$$V=\int_{-R}^{R}\pi\left(R^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{4}{3}\pi R^3$$

Bài tập 4: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối nón có bán kính đáy r và chiều cao h.



Lời giải

Khối nón có bán kính đáy là r và chiều cao là h.

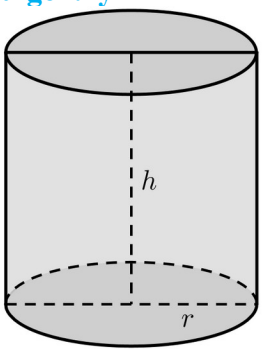
Phương trình đường sinh của khối nón trong mặt phẳng là $y=\frac{r}{h}x$

Khi đó thể tích của khối nón là

$$V=\int_{0}^{h}\pi\left(\frac{r}{h}x\right)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi r^2h$$

.

Bài tập 5: Sử dụng tích phân, tính thể tích khối trụ có bán kính đáy r và chiều cao h.



Lời giải

Để tính thể tích hình trụ bằng tích phân, ta có thể xem khối trụ như một tập hợp các đĩa tròn có độ dày vô cùng nhỏ Δx xếp chồng lên nhau từ đáy đến đỉnh. Mỗi đĩa có diện tích là πr^2.

Khi đó thể tích của một đĩa nhỏ là $\Delta V = \pi r^2 \Delta x$

Tổng thể tích của khối trụ là tổng của tất cả các đĩa từ $x = 0$ đến $x = h$ nghĩa là $V = \int_0^h \pi r^2 \mathrm{d}x$

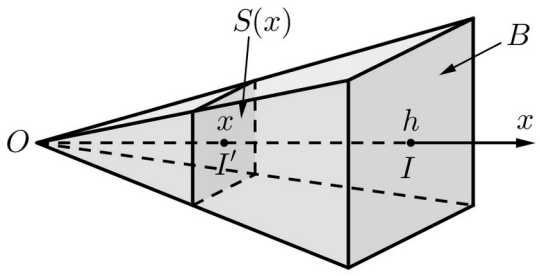
Khi đó $$V = \pi r^2 \int_0^h \mathrm{d}x = \pi r^2 h$$

Bài tập 6: Tính thể tích V của phần vật thể giới hạn bởi hai mặt phẳng $x = 1$ và $x = 3,$ biết rằng khi cắt vật thể bởi mặt phẳng tùy ý vuông góc với trục Ox tại điểm có hoành độ x $(1 \le x \le 3)$ thì được thiết diện là một hình chữ nhật có hai cạnh là $3x$ và x^2.

Lời giải

Ta có diện tích thiết diện: $S(x) = 3x.x^2 = 3x^3$. Khi đó $V = \int_1^3 3x^3 \mathrm{d}x = \frac{3}{4}x^4 \Big|_1^3 = 60$.

Bài tập 7: Cho khối chóp có chiều cao bằng h và diện tích đáy bằng B. Chọn trục Ox vuông góc với mặt phẳng đáy tại điểm I sao cho gốc O trùng với đỉnh của khối chóp và có hướng xác định bởi vectơ $\overrightarrow{OI}$. Khi đó $OI = h$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x $(0 \le x \le h)$, cắt khối chóp theo hình phẳng có diện tích $S(x)$.



a) Chứng minh rằng $S(x) = B\frac{x^2}{h^2}$.

b) Áp dụng tích phân tính thể tích khối chóp đó.

Lời giải

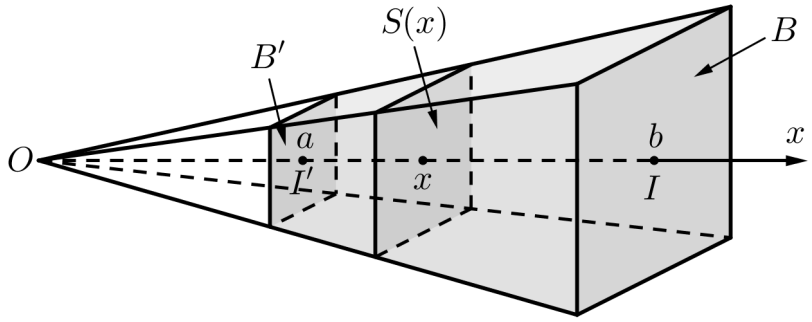
a) Khối chóp có đỉnh là O và có diện tích đáy là B. Mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại x cắt khối chóp tạo thành một hình phẳng có diện tích $S(x)$.

Do mặt phẳng (P) song song với đáy của khối chóp, hình phẳng cắt được là một hình đồng dạng với đáy. Tỉ lệ đồng dạng giữa hai hình là $\frac{x}{h}$.

Diện tích của hình đồng dạng tỉ lệ bình phương của tỉ lệ đồng dạng nên $S(x) = B\left(\frac{x}{h}\right)^2 = B.\frac{x^2}{h^2}$

b) Để tính thể tích của khối chóp, ta sử dụng tích phân của diện tích mặt cắt theo chiều cao x từ 0 đến h ta được: $V = \int_0^h S(x)\,dx = \int_0^h B.\frac{x^2}{h^2}\,dx = \frac{1}{3}.B.h$.

Bài tập 8: Cho khối chóp cụt đều tạo bởi khối chóp đỉnh S, diện tích hai đáy lần lượt là B, B' và chiều cao h. Chọn trục Ox chứa đường cao của khối chóp và gốc O trùng với đỉnh S. Hai mặt phẳng đáy của khối chóp cụt đều lần lượt cắt Ox tại I và I'. Đặt $OI = b,\ OI' = a\ (a < b)$. Một mặt phẳng (P) vuông góc với trục Ox tại $x\ (a \le x \le b)$, cắt khối chóp cụt đều theo hình phẳng có diện tích $S(x)$.



a) Chứng minh rằng $S(x) = B\frac{x^2}{b^2}$.

b) Dựa vào tích phân tính thể tích khối chóp cụt đều đó.

Lời giải

Khối chóp cụt đều có hai đáy với diện tích lần lượt là B và B'. Khi mặt phẳng (P) cắt khối chóp cụt tại vị trí x thì diện tích của thiết diện là $S(x)$

Diện tích của thiết diện thay đổi theo tỉ lệ bình phương của khoảng cách từ đỉnh S đến mặt cắt.

Cụ thể diện tích $S(x)$ tỉ lệ với bình phương của khoảng cách từ O đến x, nghĩa là $\left(\frac{x}{b}\right)^2$

$$S(x) = B\left(\frac{x}{b}\right)^2 = B.\frac{x^2}{b^2}$$

Do đó ta có:

b) Để tính thể tích của khối chóp cụt đều thì ta sử dụng tích phân của thiết diện $S(x)$ từ $x = a$ đến $x = b$.

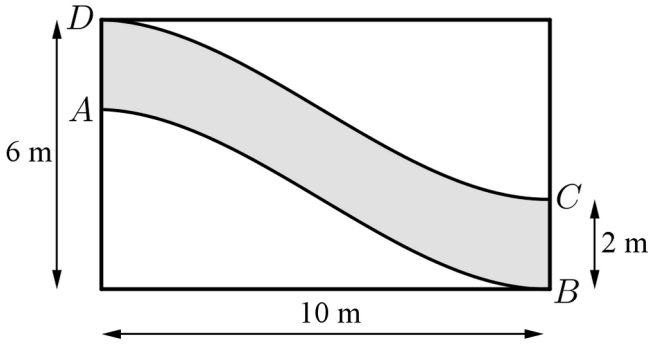
$$V = \int_a^b S(x)\mathrm{d}x = \int_a^b B.\frac{x^2}{b^2}\mathrm{d}x$$

Thể tích của khối chóp cụt đều được tính bằng công thức:

$$V = \frac{B}{b^2}\int_a^b x^2\mathrm{d}x = \frac{B}{3b^2}\left(b^3 - a^3\right)$$

Khi đó ta thay $h = b - a$ và $B' = B.\frac{a^2}{b^2}$ thì ta được thể tích khối chóp cụt được tính bằng công thức $V = \frac{h}{3}\left(B + \sqrt{B.B'} + B'\right)$.

Bài tập 9: Cô Hạnh đổ bê tông một đường đi trong vườn (phần được tô màu) với kích thước được cho trong hình sau. Biết rằng đường cong AB được cho bởi đồ thị của một hàm số liên tục và đường cong DC nhận được từ đường cong AB bằng cách tịnh tiến theo phương thẳng đứng lên phía trên 2 m. Ngoài ra, cô Hạnh quyết định đổ lớp bê tông dày 15 cm và giá tiền 1 m^3 bê tông là 1 080 000 đồng. Tính số tiền cô Hạnh cần dùng để đổ bê tông con đường đó.



Lời giải

Để tính diện tích phần đổ bê tông, ta cần xác định diện tích giữa hai đường cong AB và DC

Đường cong DC là kết quả của việc tịnh tiến đường cong AB lên trên 2 m.

Giả sử hàm số của đường cong AB là $f(x)$ thì hàm số của đường cong DC là $f(x)+2$

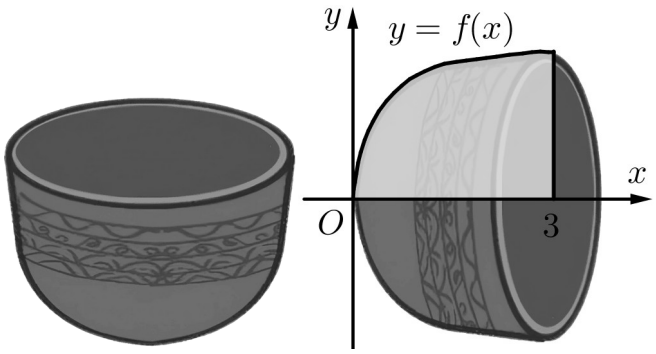
$$S = \int_0^{10}\left[f(x) + 2 - f(x)\right]\mathrm{d}x = 20\,\mathrm{m}^2$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong là:

Lớp bê tông có độ dày là 15 cm tức là $0{,}15$ m thì có thể tích là: $20.0{,}15 = 3\mathrm{m}^3$

Chi phí tổng cộng để đổ bê tông con đường đó là: $3.1080000 = 3240000$ (đồng).

Bài tập 10: Xét chiếc chén trong một bộ ấm chén uống trà, bạn Dương ước lượng được rằng chiếc chén được tạo thành khi cho hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=0,14x^3-0,87x^2+1,92x+0,85$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0,\ x=3$ quay quanh trục Ox (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là centimét). Tính thể tích của chiếc chén (làm tròn đến hàng đơn vị của centimét khối).



Lời giải

Thể tích của chiếc chén là: $V=\pi\int_0^3\left(0,14x^3-0,87x^2+1,92x+0,85\right)^2\mathrm{d}x=41,87\left(\mathrm{cm}^3\right)$.

Bài tập 11: Cho hình phẳng (H) được giới hạn bởi đường cong $y=\sqrt{m^2-x^2}$ (m là tham số khác 0) và trục hoành. Khi (H) quay xung quanh trục hoành được khối tròn xoay có thể tích V. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $V<1000\pi$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành là: $\sqrt{m^2-x^2}=0\Leftrightarrow x=\pm m$

Thể tích vật thể tròn xoay cần tính là: $V=\pi\int_{-|m|}^{|m|}\left(m^2-x^2\right)\mathrm{d}x=\pi\left(m^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_{-|m|}^{|m|}=\frac{4\pi m^2|m|}{3}$

Ta có: $V<1000\pi\Leftrightarrow\frac{4\pi m^2|m|}{3}<1000\pi\Leftrightarrow|m|^3<750\Leftrightarrow-\sqrt[3]{750}<m<\sqrt[3]{750}$.

Ta có $\sqrt[3]{750}\approx 9,08$ và $m\neq 0$.

Suy ra, các giá trị m nguyên là $m\in\{-9;-8;-7;-6;-5;-4;-3;-2;-1;1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$

Vậy có 18 giá trị nguyên của m.