CÁC DẠNG TOÁN BÀI LÔGARIT

Dạng 1: Tính giá trị biểu thức chứa logarit

Phương pháp: Giả sử a là số thực dương khác 1, M và N là các số thực dương, α là số thực tuỳ ý. Khi đó:

$$\oplus \quad \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N$$

$$\oplus \quad \log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$$

$$\oplus \quad \log_a M^{\alpha} = \alpha \log_a M.$$

Đổi cơ số của Logarit:

Với các cơ số lôgarit a và b bất kì $(0 < a \neq 1, 0 < b \neq 1)$ và M là số thực dương tuỳ ý, ta luôn có:

$$\log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a}$$

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Tính giá trị biểu thức trong các trường hợp sau:

a) $\log_2 2^{-13}$

b) $\ln e^{\sqrt{2}}$

c) $\log_8 16 - \log_8 2$

d) $\log_2 6.\log_6 8$.

Lời giải

a) $\log_2 2^{-12} = -12\log_2 2 = -12$.

b) $\ln e^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\ln(e) = \sqrt{2}.1 = \sqrt{2}$.

c) $\log_8 16 - \log_8 2 = \log_8 \frac{16}{2} = \log_8 8 = 1$.

d) $\log_2 6.\log_6 8 = \frac{\log_2 6}{\log_2 6}.\frac{\log_6 8}{\log_6 2} = \frac{\log_2 2.\log_2 4}{\log_2 2.\log_2 3} = \frac{\log_2 4}{\log_2 3} = \log_3 4 \approx 1,26186$

Bài tập 2: Cho a là số thực dương và $a \neq 1$. Tính giá trị của các biểu thức sau:

a) $T = \log_a\left(a^3\right)$.

b) Tính $I = \log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a^3}{64}\right)$ với $a \neq 4$.

c) $T = \log_a\left(\frac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[15]{a^4}}\right)$.

d) $\log_{a^2}\left(a\sqrt{a}\right)$.

e) $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$.

f) $P = \log_{\sqrt[3]{a}} \frac{1}{a^3}$.

Lời giải

$$T = \log_a\left(a^3\right) = 3$$

a) Ta có .

$$I = \log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a^3}{64}\right) = \log_{\frac{a}{4}}\left(\frac{a}{4}\right)^3 = 3$$

b) .

$$T = \log_a\left(\frac{a^2\sqrt[3]{a}\sqrt[5]{a^3}}{\sqrt[15]{a^4}}\right) = \log_a\left(\frac{a^2a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{15}}}\right) = \log_a\left(\frac{a^2a^{\frac{1}{3}}a^{\frac{3}{5}}}{a^{\frac{4}{15}}}\right) = \log_a a^{\frac{8}{3}} = \frac{8}{3}$$

c) Ta có .

$$\log_{a^2}\left(a\sqrt{a}\right) = \frac{1}{2}\log_a a^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}.\frac{3}{2}\log_a a = \frac{3}{4}$$

d) Ta có: .

$$a^{\log_{\sqrt{a}} 4} = a^{2\log_a 4} = \left(a\right)^{\log_a 4^2} = 4^2 = 16.$$

e) Ta có

$$P = \log_{\sqrt[3]{a}}\frac{1}{a^3} = \log_{a^{\frac{1}{3}}} a^{-3} = -3.3\log_a a = -9$$

f) Ta có: .

Bài tập 3: Tính giá trị các biểu thức:

a) $\log_2\frac{1}{8}$ b) $\log_{\sqrt{3}}9$.

c) $\log_3 3\sqrt{3}$ d) $\log_{\frac{1}{2}}32$.

e) $\log_4 2 + \log_4 32$ f) $\log_2 80 - \log_2 5$.

Lời giải

a) $\log_2\frac{1}{8} = \log_2 2^{-3} = -3$.

b) $\log_{\sqrt{3}}9 = \log_{\sqrt{3}}\left(\sqrt{3}\right)^4 = 4$.

c) $\log_2\left(3\sqrt{3}\right) = \log_2 3 + \log_2\sqrt{3} = \log_2 3 + \log_2 3^{\frac{1}{2}} = \log_2 3 + \frac{1}{2}\log_2 3 = \frac{3}{2}\log_2 3$

d)

$$\log_{\frac{1}{2}}32 = \frac{\log_2 32}{\log_2\frac{1}{2}} = \frac{5}{-1} = -5$$

e) $\log_4 2 + \log_4 32 = \log_4\left(2.32\right) = \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3\log_4 4 = 3$.

$$\log_2 80 - \log_2 5 = \log_2 \frac{80}{5} = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4\log_2 2 = 4$$

f) .

Bài tập 4: Cho các số a,b,c thỏa mãn: $\log_a 3 = 2, \log_b 3 = \frac{1}{4}, \log_{abc} 3 = \frac{2}{15}$. Tính giá trị của $\log_c 3$.

Lời giải

$$\log_a 3 = 2 \Rightarrow \log_3 a = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \log_b 3 = \frac{1}{4} \Rightarrow \log_3 b = 4$$

Ta có:

$$\log_{abc} 3 = \frac{2}{15} \Leftrightarrow \log_3 abc = \frac{15}{2} \Leftrightarrow \log_3 a + \log_3 b + \log_3 c = \frac{15}{2}$$

Ta có

$$\Leftrightarrow \log_3 c = \frac{15}{2} - \frac{1}{2} - 4 = 3 \Leftrightarrow \log_c 3 = \frac{1}{3}$$

.

Bai tập 5: Cho các số thực dương $x \neq 1, y \neq 1$ thỏa mãn $\log_2 x = \log_y 16$ và tích $xy = 64$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\log_2 \frac{y}{x}\right)^2$

Lời giải

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t \quad t = \log_y 16 \Rightarrow y = 16^{\frac{1}{t}} = 2^{\frac{4}{t}} \Rightarrow \frac{y}{x} = 2^{\frac{4}{t}-t}$ và

$$x.y = 64 \Rightarrow 2^t.2^{\frac{4}{t}} = 2^6 \Rightarrow t + \frac{4}{t} = 6 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 3+\sqrt{5} \\ t = 3-\sqrt{5} \end{array}\right. \rightarrow \left(\log_2 2^{\frac{4}{t}-t}\right)^2 = 20$$

.

Bai tập 6: Cho $a,b>0$ thỏa mãn $\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b-a}{4}$. Tính giá trị của $\log_{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{2} + 4b\sqrt{2}\right) - \log_{\sqrt{6}} b$

Lời giải

$$\log_4 a = \log_{25} b = \log \frac{4b-a}{4} = t \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = 4^t \\ b = 25^t \\ \frac{4b-a}{4} = 10^t \end{array}\right. \Rightarrow \frac{4.25^t - 4^t}{4} = 10^t \Leftrightarrow 4.25^t - 4^t = 4.10^t$$

Đặt

$$\Leftrightarrow 4.\left(\frac{5}{2}\right)^{2t} - 4.\left(\frac{5}{2}\right)^t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^t = \frac{1+\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{a}{b} = \left(\frac{2}{5}\right)^{2t} = 12 - 8\sqrt{2}$$

.

$$\log_{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{2}+4b\sqrt{2}\right)-\log_{\sqrt{6}}b=\log_{\sqrt{6}}\left(\frac{\frac{a}{2}+4b\sqrt{2}}{b}\right)=\log_{\sqrt{6}}\left(\frac{a}{2b}+4\sqrt{2}\right)$$

Ta có:

$$=\log_{\sqrt{6}}\left(6-4\sqrt{2}+4\sqrt{2}\right)=\log_{\sqrt{6}}(6)=2$$

.

Bai tập 7: Cho các số dương a,b,c khác 1 thoả mãn $\log_a(bc)=3$ và $\log_b(ac)=4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

Lời giải

$$\begin{cases}\log_a(bc)=3\\ \log_b(ac)=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc=a^3\\ ac=b^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a^3.c^{-1}\\ ac=\left(a^3.c^{-1}\right)^4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}b=a^3.c^{-1}\\ ac=a^{12}.c^{-4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=c^{\frac{5}{11}}\\ b=c^{\frac{4}{11}}\end{cases}$$

Ta có .

$$\Rightarrow\log_c(ab)=\log_c\left(c^{\frac{5}{11}}.c^{\frac{4}{11}}\right)=\log_c c^{\frac{9}{11}}=\frac{9}{11}$$

.

Phương pháp: Sử dụng phối hợp linh hoạt các tính chất của logarit

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho x,y là các số thực dương thỏa mãn $\log_{\frac{4}{3}}x=\log_3 y=\log_2(2x-3y)$. Tính $\frac{x}{y}$.

Lời giải

$$\log_{\frac{4}{3}}x=\log_3 y=\log_2(2x-3y)=t$$

Đặt .

$$\begin{cases}x=\left(\frac{4}{3}\right)^t\\ y=3^t\\ 2x-3y=2^t\end{cases}\Rightarrow 2.\left(\frac{4}{3}\right)^t-3.3^t=2^t\Leftrightarrow 2.\left(\frac{2}{3}\right)^t-3.\left(\frac{3}{2}\right)^t-1=0.(1)$$

Suy ra

$$\left(\frac{2}{3}\right)^t=a,(a>0)$$

Đặt

$$2a-\frac{3}{a}-1=0\Leftrightarrow 2a^2-a-3=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} a=-1 & (l)\\ a=\frac{3}{2} & (n)\end{array}\right.$$

Khi đó phương trình **(1)** trở thành

$$\left(\frac{x}{y}\right)=\left(\frac{4}{9}\right)^t=\left(\frac{2}{3}\right)^{2t}=a^2=\frac{9}{4}$$

Do đó, .

Bài tập 2: Đặt $a=\log_2 3, b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

Lời giải

Ta có $\log_6 45=\log_6 9+\log_6 5.$

$$\log_6 9=2\log_6 3=\frac{2}{\log_3 6}=\frac{2}{1+\log_3 2}=\frac{2}{1+\frac{1}{a}}=\frac{2a}{a+1}.$$

$$\log_6 5=\frac{1}{\log_5 6}=\frac{1}{\log_5 3+\log_5 2}=\frac{a}{b(a+1)}$$ vì $\log_5 2=\frac{b}{a}$.

Vậy $$\log_6 45=\frac{2a}{a+1}+\frac{a}{b(a+1)}=\frac{a+2ab}{ab+b}.$$

Bài tập 3: Đặt $a=\log_2 5$, $b=\log_3 5$. Hãy biểu diễn $\log_6 5$ theo a và b.

Lời giải

Ta có $$a=\log_2 5\Rightarrow \log_5 2=\frac{1}{a} \qquad b=\log_3 5\Rightarrow \log_5 3=\frac{1}{b}$$ và .

$$\log_6 5=\frac{1}{\log_5 6}=\frac{1}{\log_5(2.3)}=\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}=\frac{ab}{a+b}$$

Suy ra: .

Bài tập 4: Cho hai số thực a,b thỏa mãn: $2\log_3(a-3b)=\log_3 a+\log_3(4b)$ và $a>3b>0$. Tính $\frac{a}{b}$

Lời giải

$$2\log_3(a-3b)=\log_3 a+\log_3(4b)\Leftrightarrow \log_3(a-3b)^2=\log_3(4ab)$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow (a-3b)^2=4ab\Leftrightarrow a^2-10ab+9b^2=0\Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2-10\frac{a}{b}+9=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{a}{b}=9\\ \frac{a}{b}=1\ (loai)\end{array}\right.$$

.

Bài tập 5: Đặt $a=\log_3 2$, khi đó $\log_{72}768$ được biểu diễn dưới dạng $\frac{ma+n}{pa+2}$, với m,n,p là các số nguyên. Tính $m+n^2+p^3$

Lời giải

$$\log_{72} 768 = \log_{72}\left(2^8.3\right) = \log_{72} 2^8 + \log_{72} 3 = \frac{8}{\log_2\left(2^3.3^2\right)} + \frac{1}{\log_3\left(2^3.3^2\right)}$$

Ta có:

$$= \frac{8}{3+2\log_2 3} + \frac{1}{2+3\log_3 2} = \frac{8}{3+\frac{2}{a}} + \frac{1}{2+3a} = \frac{8a+1}{3a+2} \Rightarrow m=8, n=1, p=3$$

.

$$m+n^2+p^3 = 8+1^2+3^3 = 36$$

Vậy .

Bài tập 6: Cho các số nguyên dương x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau và thỏa mãn biểu thức dưới đây $x\log_{200} 5 + y\log_{200} 2 = z$. Tính giá trị của biểu thức $29x - y - 2021z$.

Lời giải

$$x\log_{200} 5 + y\log_{200} 2 = z \Leftrightarrow \log_{200} 5^x + \log_{200} 2^y = z$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \log_{200} 5^x.2^y = z \Leftrightarrow 5^x.2^y = 200^z \Leftrightarrow 5^x.2^y = (25.4.2)^z \Leftrightarrow 5^x.2^y = 5^{2z}.2^{3z} \Rightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 3z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 1 \end{cases}$$

Do các số nguyên dương x, y, z đôi một nguyên tố cùng nhau nên

$$29x - y - 2021z = 29.2 - 3 - 2021 = -1966$$

Giá trị của biểu thức .

Bài tập 7: Cho hai số thực a,b dương khác 1 thỏa mãn $\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^n} b} = \frac{1}{\log_{a^8} b}$. Tìm n

Lời giải

$$\frac{1}{\log_a b} + \frac{1}{\log_{a^2} b} + \frac{1}{\log_{a^n} b} = \frac{1}{\log_{a^8} b}$$

Vì a,b dương khác 1 nên ta có:

$$\Leftrightarrow \log_b a + \log_b a^2 + \log_b a^n = \log_b a^8 \Leftrightarrow (1+2+n-8)\log_b a = 0 \quad (1)$$

Vì hai số thực a,b dương khác 1 nên $\log_b a \neq 0$ nên từ (1) suy ra $1+2+n-8=0 \Leftrightarrow n=5$.

Dạng 3: So sánh các logarit

Phương pháp: Sử dụng kiến thức cơ bản đề so sánh

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Cho các số dương a,b. Tìm điều kiện của a, b để $\log_a \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{3}$ và $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$.

Lời giải

Ta có : $\log_a \frac{1}{2} > \log_a \frac{1}{3}$ và do $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$ nên $a > 1$.

Vì $b^{\frac{2}{3}} > b^{\frac{3}{4}}$ và $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ nên $0 < b < 1$.

Bài tập 2: Cho các số dương a,b. Tìm điều kiện của a, b để $\log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) > \log_b\left(2+\sqrt{3}\right)$ và $a^{\frac{13}{7}} < a^{\frac{15}{8}}$

Lời giải

Ta có: $\begin{cases} \frac{13}{7} < \frac{15}{8} \\ a^{\frac{13}{7}} < a^{\frac{15}{8}} \end{cases} \Rightarrow a > 1$.

Mặt khác: $\begin{cases} \sqrt{2}+\sqrt{5} < 2+\sqrt{3} \\ \log_b\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) > \log_b\left(2+\sqrt{3}\right) \end{cases} \Rightarrow 0 < b < 1$.

Bài tập 3: Cho hai số thực a, b biết $0 < a < b < 1$. Hãy so sánh $\log_a b$ và $\log_b a$

Lời giải

Do $0 < a < b < 1$ nên ta có $1 = \log_a a > \log_a b$; $\log_b a > \log_b b = 1$. Vậy ta có $\log_a b < \log_b a$.

Bài tập 4: Xét a và b là hai số thực dương tùy ý. Đặt $x = \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000}$; $y = 1000\ln a - \ln\frac{1}{b^{1000}}$. Hãy so sánh x và y

Lời giải

Ta có $a^2 - ab + b^2 = \left(a - \frac{1}{2}b\right)^2 + \frac{3}{4}b^2 > 0, \forall a > 0; b > 0$.

$x = \ln\left(a^2 - ab + b^2\right)^{1000} = 1000.\ln\left(a^2 - ab + b^2\right)$.

$y = 1000\ln a - \ln\frac{1}{b^{1000}} = 1000\ln a + 1000.\ln b = 1000.\ln(ab)$.

Với $\forall a > 0; b > 0$ thì $(a-b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - ab + b^2 \geq ab$.

Suy ra $\ln\left(a^2 - ab + b^2\right) \geq \ln(ab)$.

Ta thấy $\ln\left(a^2 - ab + b^2\right) = \ln(ab)$, khi và chỉ khi $x = y$. Do vậy $x \geq y$.

Bài tập 5: Cho hai số thực dương m, n $(n \neq 1)$ thỏa mãn $\frac{\log_7 m.\log_2 7}{\log_2 10-1}=3+\frac{1}{\log_n 5}$. Tìm mối quan hệ giữa m và n.

Lời giải

Ta có:

$$\frac{\log_7 m.\log_2 7}{\log_2 10-1}=3+\frac{1}{\log_n 5} \Leftrightarrow \frac{\log_2 m}{\log_2 5}=3+\log_5 n$$

$$\Leftrightarrow \log_5 m=3+\log_5 n \Leftrightarrow \log_5 m-\log_5 n=3 \Leftrightarrow \log_5 \frac{m}{n}=3 \Leftrightarrow \frac{m}{n}=5^3=125 \Leftrightarrow m=125n$$

.

Bài tập 6: Cho các số thực dương a,b khác 1 thoả mãn $\log_2 a=\log_b 16$ và $ab=64$. Tính giá trị của biểu thức $\left(\log_2 \frac{a}{b}\right)^2$

Lời giải

Ta có:

$$\log_2 a=\log_b 16 \Leftrightarrow \log_2 a=\frac{1}{\log_{16} b} \Leftrightarrow \log_2 a.\log_2 b=4$$

.

Mặt khác:

$$ab=64 \Rightarrow \log_2 ab=\log_2 64 \Rightarrow \log_2 a+\log_2 b=6$$

.

Khi đó:

$$\left(\log_2 \frac{a}{b}\right)^2=(\log_2 a-\log_2 b)^2 \quad (\log_2 a+\log_2 b)^2-4\log_2 a.\log_2 b=6^2-4.4=20$$

=

.

Bài tập 7: Cho các số dương a,b,c khác 1 thỏa mãn $\log_a(bc)=2, \log_b(ca)=4$. Tính giá trị của biểu thức $\log_c(ab)$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{cases}\log_a(bc)=2\\ \log_b(ca)=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{\log_c(bc)}{\log_c a}=2\\ \frac{\log_c(ca)}{\log_c b}=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\log_c b+1=2\log_c a\\ 1+\log_c a=4\log_c b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2\log_c a-\log_c b=1\\ \log_c a-4\log_c b=-1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\log_c a=\frac{5}{7}\\ \log_c b=\frac{3}{7}\end{cases} \quad \log_c(ab)=\log_c a+\log_c b=\frac{8}{7}$$

. Vậy

.

Bài tập 8: Cho biết hai số thực dương a và b thỏa mãn $\log_a^2(ab)=4$; với $b>1>a>0$. Tính giá trị của biểu thức $\log_a^3\left(ab^2\right)$.

Lời giải

Với $b>1>a>0$ ta có :

$$\log_a^2(ab)=4\Leftrightarrow(\log_a a+\log_a b)^2=4\Leftrightarrow(1+\log_a b)^2=4\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1+\log_a b=2\\1+\log_a b=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_a b=1\\\log_a b=-3\end{array}\right.$$

Vì $\left\{\begin{array}{l}0<a<1\\b>1\end{array}\right.$ nên $\log_a b=-3$. Khi đó :

$$\log_a^3\left(ab^2\right)=\left(\log_a a+2\log_a b\right)^3=\left(1+2.(-3)\right)^3=-125$$

.

Bài tập 9: Cho $a,b>0;a,b\neq 1$ thỏa mãn $\log_{a^2} b-8\log_b\left(a\sqrt[3]{b}\right)=\frac{-8}{3}$. Tính giá trị $P=\log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right)+2019$

Lời giải

$$\log_{a^2} b-8\log_b\left(a\sqrt[3]{b}\right)=\frac{-8}{3}\Leftrightarrow\log_{a^2} b-8\log_b a=0\Leftrightarrow\log_{a^3} b-8=0\Leftrightarrow\log_a b=2\Leftrightarrow a^2=b$$

$$P=\log_a\left(a\sqrt[3]{ab}\right)+2019=1+\frac{1}{3}\left(1+\log_a a^2\right)+2019=1+\frac{1}{3}(1+2)+2019=2021$$

.

Bài tập 10: Cho các số thực a,b,c,d thoả mãn $\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^b}+\frac{1}{8^c}+\frac{1}{16^d}=\frac{1}{4}$. Gọi m là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S=a+2b+3c+4d$. Giá trị của biểu thức $\log_2 m$ bằng

Lời giải

Ta có:

$$\frac{1}{4}=\frac{1}{2^a}+\frac{1}{4^b}+\frac{1}{8^c}+\frac{1}{16^d}\geq 4\sqrt[4]{\frac{1}{2^a}.\frac{1}{4^b}.\frac{1}{8^c}.\frac{1}{16^d}}\Leftrightarrow\frac{1}{16}\geq\sqrt[4]{\frac{1}{2^{a+2b+3c+4d}}}\Leftrightarrow 2^{a+2b+3c+4d}\geq 2^{16}$$

$$\Leftrightarrow a+2b+3c+4d\geq 16$$

Dấu "=" xảy ra khi: $\frac{1}{2^a}=\frac{1}{4^b}=\frac{1}{8^c}=\frac{1}{16^d}=\frac{1}{16}\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}a=4\\b=2\\c=\frac{4}{3}\\d=1\end{array}\right.$. Khi đó $m=16\Rightarrow\log_2 m=4$.

Dạng 4: Vận dụng vào các bài toán thực tế

Phương pháp: Bài toán lại kép

Số tiền lãi không chỉ tính trên số tiền gốc mà còn tính trên số tiền lãi do tiền gốc đó sinh ra thay đổi theo từng định kỳ. Công thức: $T_n=T_0\left(1+r\right)^n$

Trong đó:

T_n: Số tiền cả vốn lẫn lãi sau n kỳ hạn;

T_0 : Số tiền gửi ban đầu;
n : Số kỳ hạn tính lãi;
r : Lãi suất định kỳ, tính theo %.

A. BÀI TẬP TỰ LUẬN

Bài tập 1: Biết rằng khi độ cao tăng lên, áp suất không khí sẽ giảm và công thức tính áp suất dựa trên độ cao là: $a = 15500(5 - \log p)$ trong đó a là độ cao so với mực nước biển (tính bằng mét) và p là áp suất không khí (tính bằng pascal).Tính áp suất không khí ở đỉnh Everest có độ cao $8850\ \text{m}$ so với mực nước biển.

Lời giải

Để tính áp suất không khí ở độ cao $8.850\,\text{m}$, ta thay a $= 8.850$ vào công thức và giải phương trình để tìm giá trị của p.

Ta có: $a = 15.500(5 - \log p).8.850 = 15.500(5 - \log p)$

$$\Leftrightarrow 5 - \log p = \frac{8.850}{15.500} \Leftrightarrow \log p = 5 - \frac{8.850}{15.500} \Leftrightarrow \log p = 3.407$$

Suy ra: $p = 10^{3} \cdot 407 \approx 245,37 Pa$

Vậy áp suất không khí ở độ cao $8.850\,\text{m}$ so với mực nước biển là khoảng 245,37 Pa.

Bài tập 2: Mức cường độ âm L đo bằng decibel (dB) của âm thanh có cường độ I (đo bằng oát trên mét vuông, kí hiệu là W/m^2) được định nghĩa như sau: $L(I) = 10\log\frac{I}{I_0}$ trong đó $I_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$ là cường độ âm thanh nhỏ nhất mà tai người có thể phát hiện được (gọi là *ngưỡng nghe*). Xác định mức cường độ âm của mỗi âm sau:

a) Cuộc trò chuyện bình thường có cường độ $I = 10^{-7}\ \text{W/m}^2$.

b) Giao thông thành phố đông đúc có cường độ $\text{I} = 10^{-3}\ \text{W/m}^2$.

Lời giải

a) Áp dụng công thức: $L(I) = 10\log\frac{I}{I_0}$

$$L\left(10^{-7}\right) = 10\log\frac{10^{-7}}{10^{-12}} = 10\log 10^{5} = 10 \times 5 = 50 dB$$

b) Thay các giá trị ta có: $L\left(10^{-3}\right) = 10\log\frac{10^{-3}}{10^{-12}} = 10\log 10^{9} = 10.9 = 90\ \text{dB}$

Bài tập 3: Trong nuôi trồng thuỷ sản, độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản. Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất là trong

khoảng từ 7,8 đến 8,5. Phân tích nồng độ $\left[H^+\right]$ trong một đầm nuôi tôm sú, ta thu được $\left[H^+\right]=8\cdot10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho tôm sú phát triển không?

(*Nguồn: https://nongnghiep.farmvina.com*)

Lời giải

Ta có $pH=-\log\left[H^+\right]=-\log8\cdot10^{-8}\approx7,1$

$\Rightarrow$ Độ pH của đầm đó không thích hợp để tôm sú phát triển.

Bài tập 4: a) Nước cất có nồng độ H^+ là $10^{-7}\ mol/L$. Tính độ pH của nước cất.

b) Một dung dịch có nồng độ H^+ gấp 20 lần nồng độ H^+ của nước cất. Tính độ pH của dung dịch đó.

Lời giải

$$pH=-\log\left[H^+\right]=-\log\left[10^{-7}\right]=7$$

a) Độ pH của nước cất là: .

b) Nồng độ H^+ của dung dịch đó là: $20.10^{-7}\ mol/L$

Độ pH của dung dịch đó là: $pH=-\log\left[H^+\right]=-\log\left[20.10^{-7}\right]\approx5,7$.

Bài tập 5: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng 5.10^{-13} gam và cứ 20 phút vi khuẩn đó tự nhân đôi một lần. Giả sử các vi khuẩn được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại trong ít nhất 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất (lấy khối lượng của Trái Đất là $6\cdot10^{27}$ gam) (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)?

(Nguồn: Câu hỏi và Câu tập vi sinh học, NXB ĐHSP, 2008)

Lời giải

$$N=\frac{6.10^{27}}{\left(5.10^{-13}\right)}=1,2.10^{40}$$

Số lượng tế bào đạt tới khối lượng của Trái Đất là:

$$N=N_o.2^n\Rightarrow n=\frac{\log N-\lg N_o}{\lg 2}=133$$

Số lần phân chia:

$$\frac{133}{3}=44,3$$

Thời gian cần thiết là: (giờ)

Bài tập 6: Gia đình bác An gửi tiết kiệm 500 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất $6,5\%$/năm. Biết rằng tiền lãi của kì trước được cộng vào gốc tính lãi kì sau (lãi kép).

a) Hỏi sau ba năm, gia đình bác nhận được số tiền cả vốn lẫn lãi là bao nhiêu? Nếu tính theo thể thức lãi kép liên tục thì số tiền cả vốn lẫn lãi của gia đình bác An thu được là bao nhiêu (sau ba năm)?

b) Vẫn với 500 triệu đồng, gia đình bác An gửi tiết kiệm với lãi kép $6,5\%$/năm theo kì hạn 6 tháng. Hỏi để nhận được cả gốc và lãi là 1 tỉ đồng thì gia đình bác An cần gửi bao nhiêu năm?

Lời giải

a) Ta có: $A_o = 500$ triệu đồng là số tiền gốc ban đầu.

$r = 6,5\% = 0,065$ /năm là lãi suất một kỳ.

$n = 3$ (năm) là số kỳ hạn gửi.

A_n là số tiền cả vốn và lãi nhận được sau n kỳ gửi.

Sau ba năm, gia đình bác An nhận được số tiền cả gốc và lãi là:

$A_n = A_o(1+r)^n = 500.(1+0,065)^3 \approx 603,975$ triệu đồng.

Với thể thức lãi kép liên tục thì số tiền gia đình bác An thu được sau ba năm là:

$A_n = A_o e^{rr} = 500.e^{3.0,065} \approx 607,655$ triệu đồng.

b) Ta có: $A_o = 500$ triệu đồng là số tiền gốc ban đầu.

$r = 6,5\% = 0,065$ /năm là lãi suất một kỳ.

n là số năm cần gửi.

$A_n = 1$ tỉ đồng là số tiền cả vốn và lãi nhận được sau n năm gửi.

Do kì hạn là 6 tháng, tức là mỗi năm là 2 kì tính lãi nên:

Số kì gửi là $N = 2n$, lãi suất mỗi kì gửi là $\frac{r}{2}$.

$$A_n = A_o\left(1+\frac{r}{2}\right)^{2n} \Leftrightarrow 1000 = 500.\left(1+\frac{0,65\%}{2}\right)^{2n} \Leftrightarrow 1,0325^{2n} = 2$$

Khi đó: .

$\Leftrightarrow n = \frac{\log_{1,0325} 2}{2} \approx 10,83$ (năm).

Vậy, gia đình bác An cần gửi ít nhất 11 năm để nhận được số tiền như dư định.

Bài tập 7: Người ta sử dụng công thức $S = A.e^{n.r}$ để dự báo dân số của một quốc gia, trong đó A là số dân của năm lấy làm mốc tính, S là số dân sau n năm và r là tỉ lệ gia tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001, dân số của Việt Nam là $78.685.800$ người. Giả sử tỉ lệ tăng dân số hàng năm không đổi là $1,2\%$, hỏi dân số nước ta đạt 110 triệu người vào năm nào?

Lời giải

Theo công thức tăng trưởng mũ: $S = A.\mathrm{e}^{n.r}$

$$\Rightarrow 110000000 = 78685800.e^{1,2\%.n} \Leftrightarrow n = \frac{1}{1,2\%}\ln\frac{110000000}{78685800} \approx 27,91$$

$\Rightarrow$ Sau 28 năm thì dân số Việt Nam năm nào sau đây đạt 110 triệu người.

Vậy dân số đạt 110 triệu người vào năm 2029

Bài tập 8: Một học sinh A khi đủ 18 tuổi được cha mẹ cho $200\,000\,000$ VNĐ. Số tiền này được bảo quản trong ngân hàng MSB với kì hạn thanh toán 1 năm và học sinh A chỉ nhận được số tiền này khi học xong 4 năm đại học. Biết rằng khi đủ 22 tuổi, số tiền mà học sinh A được nhận sẽ là $243\,101\,250$ VNĐ. Vậy lãi suất kì hạn một năm của ngân hàng MSB là bao nhiêu?

Bài tập 9: Cường độ một trận động đất M được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ $8,3$ độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở gần đó đo được $7,1$ độ Richter. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu trận động đất này.

Lời giải

Xét trận động đất ở San Francisco, ta có

$$8,3 = \log A - \log A_0 \Leftrightarrow 8,3 = \log\frac{A}{A_0} \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^{8,3} \Leftrightarrow A = A_0.10^{8,3}$$

Xét trận động đất khác gần đó, ta có:

$$7,1 = \log A - \log A_0 \Leftrightarrow 7,1 = \log\frac{A}{A_0} \Leftrightarrow \frac{A}{A_0} = 10^{7,1} \Leftrightarrow A = A_0.10^{7,1}$$

Từ đó ta tính tỉ lệ: $\frac{A_0.10^{8,3}}{A_0.10^{7,1}} = 10^{1,2} \approx 15,8$

Vậy trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp $\approx 15,8$ trận động đất khác gần đó.

Bài tập 10: Trong nuôi trồng thuỷ sản , độ pH của môi trường nước sẽ ảnh hưởng đến sức khoẻ và sự phát triển của thuỷ sản . Độ pH thích hợp cho nước trong đầm nuôi tôm sú là từ 7,2 đến 8,8 và tốt nhất trong khoảng từ 7,8 đến 8,5 . Phân tích nồng độ $\left[H^+\right]$ trong một đầm nuôi tôm sú thu được $\left[H^+\right] = 8.10^{-8}$. Hỏi độ pH của đầm đó có thích hợp cho nuôi tôm sú phát triển không ?

Lời giải

Độ pH của đầm là : pH = $-\log\left[H^+\right] = -\log\left(8.10^{-8}\right) \approx 7,1$

Ta thấy 7,1 < 7,2 nên độ pH của đầm chưa thích hợp để cho tôm sú phát triển.

Bài tập 11: Một vi khuẩn có khối lượng khoảng 5.10^{-13} gam và cứ sau 20 phút vi khẩn đó tự nhân đôi một lần . Giả sử được nuôi trong các điều kiện sinh trưởng tối ưu và mỗi con vi khuẩn đều tồn tại ít nhất là 60 giờ. Hỏi sau bao nhiêu giờ khối lượng do tế bào vi khuẩn sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất là 6.10^{-23} gam (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Gọi $\alpha_0 = 5.10^{-3}$ (gam) là khối lượng ban đầu của vi khuẩn .

Sau 20 phút đầu tiên, khối lượng của vi khuẩn là : $\alpha_0.2$.

Sau 20 phút thứ 2, khối lượng của vi khuẩn là : $(\alpha_0.2).2=\alpha_0.2^2$

Sau 20 phút thứ 3, khối lượng của vi khuẩn là : $\left(\alpha_0.2^2\right).2=\alpha_0.2^3$.

Sau 20 phút thứ n, khối lượng vi khuẩn là : $\alpha_0.2^n$.

Gỉa sử : $\alpha_0.2^n = 6.10^{27} \Leftrightarrow 5.10^{-3}.2^n = 6.10^{27} \Leftrightarrow 2^n = 1,2.10^{30} \Leftrightarrow n = \log_2\left(1,2.10^{10}\right) \approx 100$

Vậy sau khoảng 100.20 = 2000 phút $\approx$ 33,3 (giờ) thì khối lượng của tế bào vi khuẩn này sinh ra sẽ đạt tới khối lượng của Trái Đất.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

PHẦN I. Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn. Mỗi câu hỏi thí sinh chỉ chọn một phương án.

Câu 1: Tính giá trị biểu thức $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)$

A. -2. **B.** $\frac{3}{2}$. **C.** 3. **D.** -3.

Lời giải

Ta có $\log_2\left(2\sqrt{2}\right)=\log_2\left(2.2^{\frac{1}{2}}\right)=\log_2\left(2^{\frac{3}{2}}\right)=\frac{3}{2}$.

Câu 2: Tính giá trị biểu thức $3^{2\log_3 5}$

A. 10. **B.** 25. **C.** 7. **D.** 20.

Lời giải

Ta có $3^{2\log_3 5}=3^{\log_3 5^2}=5^2=25$.

Câu 3: Cho $\log_a 3=5$. Tính $P=\log_a\left(3a^5\right)$.

A. $P=10$ **B.** $P=25$ **C.** $P=12$ **D.** $P=125$

Lời giải

Ta có: $\log_a\left(3a^5\right)=\log_a 3+\log_a a^5=5+5=10$.

Câu 4: Với mọi số thực a dương, $\log_2\frac{a}{2}$ bằng

A. $\frac{1}{2}\log_2 a$. **B.** $\log_2 a+1$. **C.** $\log_2 a-1$. **D.** $\log_2 a-2$.

Lời giải

Có $\log_2\frac{a}{2}=\log_2 a-\log_2 2=\log_2 a-1$.

Câu 5: Với mọi a,b thỏa mãn $\log_2 a-3\log_2 b=2$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a=4b^3$. **B.** $a=3b+4$. **C.** $a=3b+2$. **D.** $a=\frac{4}{b^3}$.

Lời giải

Điều kiện: $a,b>0$

$$\log_2 a-3\log_2 b=2\Leftrightarrow \log_2 a-\log_2 b^3=2\Leftrightarrow \log_2\frac{a}{b^3}=2\Leftrightarrow \frac{a}{b^3}=4\Leftrightarrow a=4b^3$$

Câu 6: Với a là số thực dương tùy ý, $\log(100a)$ bằng

A. $1-\log a$. **B.** $2+\log a$. **C.** $2-\log a$. **D.** $1+\log a$.

Lời giải

$$\log(100a)=\log(100)+\log a=2+\log a$$

Câu 7: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a \sqrt[4]{a}$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

Ta có: $\log_a \sqrt[4]{a}=\log_a a^{\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}$.

Câu 8: Cho $\log_a b=2$ và $\log_a c=3$. Tính $P=\log_a\left(b^2c^3\right)$.

A. $P=13$ **B.** $P=31$ **C.** $P=30$ **D.** $P=108$

Lời giải

Ta có: $\log_a\left(b^2c^3\right)=2\log_a b+3\log_a c=2.2+3.3=13$.

Câu 9: Cho a và b là hai số thực dương thỏa mãn $a^3b^2=32$. Giá trị của $3\log_2 a+2\log_2 b$ bằng

A. 4. **B.** 5. **C.** 2. **D.** 32.

Lời giải

Ta có: $\log_2 a^3b^2=\log_2 32\Leftrightarrow 3\log_2 a+2\log_2 b=5$

Câu 10: Cho a,b là các số thực dương lớn hơn 1 thỏa mãn $\log_a b=2$. Tính giá trị biểu thức $P=\log_{a^2} b+\log_{ab^2} b^5$

A. $P=3$. **B.** $P=4$. **C.** $P=2$. **D.** $P=5$.

Lời giải

$$P=\log_{a^2} b+\log_{ab^2} b^5=\log_{a^2} b+\frac{1}{\log_{b^5} ab^2}=\frac{1}{2}\log_a b+\frac{1}{\log_{b^5} a+\log_{b^5} b^2}$$

Ta có

$$=\frac{1}{2}\log_a b+\frac{1}{\frac{1}{5}\log_b a+\frac{2}{5}}=\frac{1}{2}.2+\frac{1}{\frac{1}{5}.\frac{1}{2}+\frac{2}{5}}=1+2=3$$

.

Câu 11: Cho $\log_7 25 = m$ và $\log_2 5 = n$. Tính $A = \log_{\sqrt{5}} \frac{49}{8}$ theo m và n

A. $\frac{9m+12n}{mn}$ **B.** $\frac{-9m+12n}{mn}$ **C.** $-9m+12n+mn$ **D.** $\frac{-3m+4n}{3mn}$

Lời giải

$$\log_{\sqrt{5}} \frac{49}{8} = 3(\log_5 49 - \log_5 8) = 3(2\log_5 7 - 3\log_5 2)$$

Ta có: $\log_7 25 = 2\log_7 5 = \frac{2}{\log_5 7} = m \Rightarrow \log_5 7 = \frac{2}{m}$

$$\log_2 5 = n \Leftrightarrow \frac{1}{\log_5 2} = n \Leftrightarrow \log_5 2 = \frac{1}{n} \Rightarrow A = 3\left(\frac{4}{m} - \frac{3}{n}\right) = \frac{12n-9m}{mn}$$

Câu 12: Cho $\log 2 = a$. Tính $A = \log \frac{125}{4}$ theo a?

A. $6+7a$ **B.** $2(a+5)$ **C.** $4(1+a)$ **D.** $3-5a$

Lời giải

$$A = \log \frac{125}{4} = \log 125 - \log 4 = \log 5^3 - \log 2^2$$

$$= 3\log 5 - 2\log 2 = \frac{3}{\log_5 10} - 2\log 2 = \frac{3}{\log_5 (5.2)} - 2\log 2 = \frac{3}{\log_5 2 + 1} - 2\log_2$$

Ta có: $\log 2 = \frac{1}{\log_2 10} = \frac{1}{\log_2 (2.5)} = \frac{1}{1+\log_2 5}$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\log_2 5} = a \Leftrightarrow 1+\log_2 5 = \frac{1}{a} \Leftrightarrow \log_2 5 = \frac{1-a}{a} \Rightarrow \log_5 2 = \frac{a}{1-a}$$

$$\Rightarrow A = \frac{3}{\frac{a}{1-a}+1} - 2a = 3(1-a) - 2a = 3 - 5a$$

Câu 13: Cho $a = \log_3 5$, $b = \log_2 7$, $c = \log_2 3$ và $I = \frac{-1}{\log 126}\left(\log \frac{1}{2} + \log \frac{2}{3} + \log \frac{3}{4} + ... + \log \frac{149}{150}\right)$. Tính I theo a, b, c.

A. $\frac{1+c+2ac}{1+2c+b}$. **B.** $\frac{1+c-2ac}{1+2c+b}$. **C.** $\frac{1+c-2ac}{1+2c-b}$. **D.** $\frac{1+c+2ac}{1+2c-b}$.

Lời giải

Từ giả thiết suy ra $\log_2 5 = \log_2 3 \log_3 5 = ac$.

$$I = \frac{-1}{\log 126}.\log\left(\frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4}.....\frac{149}{150}\right) = \frac{\log 150}{\log 126}$$

Ta có:

$$= \log_{126} 150 = \frac{\log_2 150}{\log_2 126} = \frac{1+\log_2 3+2\log_2 5}{1+2\log_2 3+\log_2 7} = \frac{1+c+2ac}{1+2c+b}.$$

Câu 14: Cho số thực dương a khác 1. Giá trị của biểu thức $\log_2(4a)$ bằng

A. $4+\log_2 a$. **B.** $2+\log_2 a$. **C.** $2\log_2 a$. **D.** $4\log_2 a$.

Lời giải

Ta có $\log_2(4a)=\log_2 4+\log_2 a=2+\log_2 a$.

Câu 15: Cho a và b là các số thực dương tùy ý. Nếu $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ và $\log_b\left(\frac{1}{3}\right)<\log_b\left(\frac{1}{4}\right)$ thì

A. $a>1,0<b<1$. **B.** $0<a<1,0<b<1$. **C.** $a>1,b>1$. **D.** $0<a<1,b>1$.

Lời giải

Ta có: $\frac{1}{2}>\frac{1}{3}$ mà $a^{\frac{1}{2}}>a^{\frac{1}{3}}$ nên $a>1$

Mặt khác: $\frac{1}{3}>\frac{1}{4}$ mà $\log_b\left(\frac{1}{3}\right)<\log_b\left(\frac{1}{4}\right)$ nên $0<b<1$.

Câu 16: Cho a,b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^2}\left(\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right)=3$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

A. -5. **B.** 5. **C.** $\frac{1}{5}$. **D.** $-\frac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có $\log_{a^2}\left(\frac{a^3}{\sqrt[5]{b^3}}\right)=3\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(\log_a a^3-\log_a b^{\frac{3}{5}}\right)=3\Leftrightarrow 3-\frac{3}{5}\log_a b=6\Leftrightarrow\log_a b=-5$.

Câu 17: Cho số $a>0,a\neq 1$ thỏa mãn $a^x=b$. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

A. $a=\log_x b$. **B.** $a=\log_b x$. **C.** $x=\log_a b$. **D.** $x=\log_b a$.

Lời giải

Ta có $a^x=b\Leftrightarrow x=\log_a b$.

Câu 18: Tính giá trị của biểu thức $P=2^{\log_2 a}+\log_a\left(a^b\right)\ (a>0,a\neq 1)$.

A. $P=2^a+b$. **B.** $P=a-b$. **C.** $P=2a+b$. **D.** $P=a+b$.

Lời giải

Ta có $P=2^{\log_2 a}+\log_a\left(a^b\right)=a+b$.

Câu 19: Với a,b là các số thực dương, khác 1. Mệnh đề nào dưới đây **sai**?

A. $\log_3(ab)=\log_3 a+\log_3 b$. **B.** $\log_a b=\dfrac{\log_{2022} b}{\log_{2022} a}$.

C. $1-\log_a b=\log_a \dfrac{a}{b}$. **D.** $\log_a b^3=\dfrac{1}{3}\log_a b$.

Lời giải

Ta có: $\log_a b^3=3\log_a b$.

Câu 20: Giá trị của biểu thức $P=\log_2 8+\log_{\sqrt{3}} 9$ là

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 4.

Lời giải

Ta có $P=\log_2 8+\log_{\sqrt{3}} 9=\log_2 2^3+\log_{3^{\frac{1}{2}}} 3^2=3\log_2 2+4\log_3 3=3+4=7$.

Câu 21: Cho a là số thực dương khác 1. Tính $P=\log_a\left(a^4.a^{\frac{1}{3}}\right)$.

A. $P=\dfrac{3}{4}$. **B.** $P=12$. **C.** $P=1$. **D.** $P=\dfrac{13}{3}$.

Lời giải

Ta có $P=\log_a\left(a^4.a^{\frac{1}{3}}\right)=\log_a\left(a^{\frac{13}{3}}\right)=\dfrac{13}{3}$.

Câu 22: Với mọi a,b dương thỏa mãn $\log_2\sqrt{a}-\log_2 b=3$, khẳng định nào dưới đây đúng?

A. $a=64b^2$. **B.** $ab^2=64$. **C.** $\sqrt{a}-b=8$. **D.** $\dfrac{\sqrt{a}}{b}=3$.

Lời giải

Ta có $\log_2\sqrt{a}-\log_2 b=3\Leftrightarrow\log_2\dfrac{\sqrt{a}}{b}=3\Leftrightarrow\dfrac{\sqrt{a}}{b}=2^3\Leftrightarrow a=64b^2$.

Câu 23: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a\sqrt[5]{a}$ bằng

A. $\dfrac{1}{5}$. **B.** -5. **C.** 5. **D.** $-\dfrac{1}{5}$.

Lời giải

Ta có: $\log_a\sqrt[5]{a}=\log_a(a)^{\frac{1}{5}}=\dfrac{1}{5}$.

Câu 24: Cho $a>0$ và $a\neq 1$, khi đó $\log_a\sqrt[2021]{a^{2022}}$ bằng

A. 2021. **B.** $\dfrac{2022}{2021}$. **C.** $\dfrac{2021}{2022}$. **D.** 2022.

Lời giải

Với $a>0$ và $a\neq 1$ ta có: $\log_a \sqrt[2021]{a^{2022}} = \log_a a^{\frac{2022}{2021}} = \frac{2022}{2021}\log_a a = \frac{2022}{2021}$.

Câu 25: Cho a là số thực dương khác 2. Tính $I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right)$.

A. $I=\frac{1}{2}$. **B.** $I=-\frac{1}{2}$. **C.** $I=2$. **D.** $I=-2$.

Lời giải

$$I = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a^2}{4}\right) = \log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right)^2 = 2\log_{\frac{a}{2}}\left(\frac{a}{2}\right) = 2.$$

Câu 26: Cho a là số thực dương khác 5. Tính $I = \log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a^3}{125}\right)$.

A. $I=-\frac{1}{3}$. **B.** $I=-3$. **C.** $I=\frac{1}{3}$. **D.** $I=3$.

Lời giải

Ta có: $I = \log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a^3}{125}\right) = \log_{\frac{a}{5}}\left(\frac{a}{5}\right)^3 = 3$.

Câu 27: Xét các số thực dương a,b thỏa mãn $\log_5 a = 5$ và $\log_3 b = \frac{2}{3}$. Tính giá trị biểu thức $I = 2\log_6\left[\log_5(5a)\right] + \log_{\frac{1}{9}} b^3$.

A. $I=3$. **B.** $I=-2$. **C.** $I=1$. **D.** $I=2\log_6 5+1$.

Lời giải

Ta có: $I = 2\log_6\left[\log_5(5a)\right] + \log_{\frac{1}{9}} b^3 = 2\log_6(1+\log_5 a) - \frac{3}{2}\log_3 b = 2\log_6 6 - \frac{3}{2}.\frac{2}{3} = 2-1=1$.

Câu 28: Cho a,b là các số thực dương và a khác 1, thỏa mãn $\log_{a^3}\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}} = 2$. Giá trị của biểu thức $\log_a b$ bằng

A. 4. **B.** $\frac{1}{4}$. **C.** $-\frac{1}{4}$. **D.** -4.

Lời giải

$$2=\log_{\sqrt[3]{a}}\frac{a^5}{\sqrt[4]{b}}=\frac{1}{3}\log_a\frac{a^5}{b^{\frac{1}{4}}}=\frac{1}{3}\left(\log_a a^5-\log_a b^{\frac{1}{4}}\right)=\frac{1}{3}\left(5-\frac{1}{4}\log_a b\right)$$

Ta có:

$$\Rightarrow 5-\frac{1}{4}\log_a b=6\Rightarrow \log_a b=-4$$

.

Câu 29: Cho $a,\ b$ là các số thực dương khác 1 thỏa mãn $\log_a b=\sqrt{3}.$ Giá trị của $\log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)$ là

A. $-\sqrt{3}.$ **B.** $-2\sqrt{3}.$ **C.** $\sqrt{3}.$ **D.** $-\frac{1}{\sqrt{3}}.$

Lời giải

$$\log_a b=\sqrt{3}\Leftrightarrow b=a^{\sqrt{3}}\Rightarrow \log_{\frac{\sqrt{b}}{a}}\left(\frac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{a}}\right)=\log_{\frac{a^{\frac{\sqrt{3}}{3}}}{a^{\frac{1}{2}}}}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Ta có:

Câu 30: Cho số thực $a>0;\ a\neq 1, a\neq\frac{1}{27}$ và số thực x thỏa mãn $\log_a 3=x$. Tính $\log_{27a}9$ theo x.

A. $\frac{2x}{x+3}.$ **B.** $\frac{2x}{3x+1}.$ **C.** $2(3x+1).$ **D.** $\frac{2}{3x+1}.$

Lời giải

$$\log_{27a}9=\frac{\log_3 9}{\log_3 27a}=\frac{2}{\log_3 27+\log_3 a}=\frac{2}{3+\log_3 a}=\frac{2}{\frac{1}{\log_a 3}+3}=\frac{2}{\frac{1}{x}+3}=\frac{2x}{3x+1}$$

Ta có:

.

Câu 31: Cho $\log_a b=3,\ \log_a c=-4.$ Khi đó $P=\log_a\left(\frac{a^3\sqrt{c}}{b^2}\right)$ bằng bao nhiêu?

A. $P=7.$ **B.** $P=-1.$ **C.** $P=11.$ **D.** $P=-5.$

Lời giải

$$P=\log_a\left(\frac{a^3\sqrt{c}}{b^2}\right)=\log_a a^3\sqrt{c}-\log_a b^2=\log_a a^3+\log_a c^{\frac{1}{2}}-\log_a b^2=3+\frac{1}{2}\log_a c-2\log_a b$$

$$=3+\frac{1}{2}(-4)-2.3=-5$$

.

Câu 32: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}}y=\frac{2y}{5},\log_{25}x=\frac{5}{2y}.$ Tính giá trị của $P=y^2-2x^2.$

A. $P=1.$ **B.** $P=0.$ **C.** $P=-25.$ **D.** $P=25.$

Lời giải

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{x}} y=\dfrac{2y}{5}\\ \log_{25} x=\dfrac{5}{2y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x y^2=\dfrac{2y}{5}\\ \log_x 25=\dfrac{2y}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=25\\ \log_{25} x=\dfrac{5}{2y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ \log_{25} x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ x=5\end{cases}$$

Ta có:

$$P=y^2-2x^2=-25.$$

Vậy

Câu 33: Cho a,b,c là các số thực dương, trong đó $a,b>1$ và thỏa mãn $\log_a c=3,\ \log_b c=4$. Tính giá trị biểu thức $P=\log_{ab} c$?

A. $P=\dfrac{12}{7}$. **B.** $P=\dfrac{7}{12}$. **C.** $P=\dfrac{1}{12}$. **D.** $P=12$.

Lời giải

Từ giả thiết ta suy ra $c\neq 1$ và $\log_c a=\dfrac{1}{\log_a c}=\dfrac{1}{3};\ \log_c b=\dfrac{1}{\log_b c}=\dfrac{1}{4}$.

$$P=\log_{ab} c=\frac{1}{\log_c(ab)}=\frac{1}{\log_c a+\log_c b}=\frac{1}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}=\frac{12}{7}.$$

Khi đó,

Câu 34: Với mọi a,b thoả mãn $\dfrac{\log_3 a.\log_2 3}{1+\log_2 5}+\log b=1$. Khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a=1-b\log_2 5$. **B.** $ab=10$. **C.** $a\log_2 5+b=1$. **D.** $a+b=1$.

Lời giải

$$\frac{\log_3 a.\log_2 3}{1+\log_2 5}+\log b=1\Leftrightarrow\frac{\log_2 a}{\log_2 10}+\log b=1\Leftrightarrow\log a+\log b=1$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow\log(ab)=1\Leftrightarrow ab=10$$

.

Câu 35: Cho $\log_2 5=m$, $\log_3 5=n$. Khi đó $\log_6 5$ tính theo m và n là

A. m^2+n^2. **B.** $\dfrac{mn}{m+n}$. **C.** $m+n$. **D.** $\dfrac{1}{m+n}$.

Lời giải

$$\log_6 5=\frac{1}{\log_5 6}=\frac{1}{\log_5(2.3)}=\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{1}{m+n}$$

Ta có

Câu 36: Với mọi số thực dương a,b thỏa mãn $\log_2 a+\log_4 b=1$, khẳng định nào sau đây đúng?

A. $a^2b=1$. **B.** $ab^2=4$. **C.** $ab^2=1$. **D.** $a^2b=4$.

Lời giải

$$\log_2 a+\log_4 b=1\Leftrightarrow \log_2 a+\frac{1}{2}\log_2 b=1\Leftrightarrow 2\log_2 a+\log_2 b=2\Leftrightarrow \log_2 a^2+\log_2 b=2$$

Ta có:

$$\Leftrightarrow \log_2 a^2 b=2\Leftrightarrow a^2 b=4$$

.

Câu 37: Đặt $a=\ln 2$ và $b=\ln 5$. Rút gọn biểu thức $P=\ln\frac{2}{5}+\ln\frac{5}{8}+\ln\frac{8}{11}+\ln\frac{11}{4}+...+\ln\frac{7997}{8000}$.

A. $P=6a-3b$. **B.** $P=5a-3b$. **C.** $P=3a-6b$. **D.** $P=-5a-3b$.

Lời giải

$$P=\ln\frac{2}{5}+\ln\frac{5}{8}+\ln\frac{8}{11}+\ln\frac{11}{4}+...+\ln\frac{7997}{8000}=\ln\left(\frac{2}{5}.\frac{5}{8}.\frac{8}{11}.\frac{11}{4}...\frac{7997}{8000}\right)=\ln\frac{1}{4000}$$

Ta có:

$$=-\ln\left(2^5.5^3\right)=-5\ln 2-3\ln 5=-5a-3b$$

.

Câu 38: Cho $a=\log_7 5, b=\log_3 5$. Biểu thức $M=\log_{21}5$ bằng

A. $\frac{ab}{a+b}$. **B.** ab. **C.** $\frac{1}{ab}$. **D.** $\frac{a+b}{ab}$.

Lời giải

$$M=\log_{21}5=\frac{1}{\log_5 21}=\frac{1}{\log_5 3+\log_5 7}=\frac{1}{\frac{1}{\log_3 5}+\frac{1}{\log_7 5}}$$

Ta có

$$=\frac{1}{\frac{\log_7 5+\log_3 5}{\log_7 5.\log_3 5.}}=\frac{\log_7 5.\log_3 5}{\log_7 5+\log_3 5.}=\frac{ab}{a+b}$$

.

Câu 39: Cho a, $b>0$. Nếu $\ln x=5\ln a+2\ln\sqrt{b}$ thì x bằng

A. $10a\sqrt{b}$. **B.** $\frac{a^5}{b}$. **C.** $a^5 b$. **D.** a^5+b.

Lời giải

$$\ln x=5\ln a+2\ln\sqrt{b}\Leftrightarrow \ln x=\ln a^5+\ln\left(\sqrt{b}\right)^2\Leftrightarrow \ln x=\ln a^5+\ln b\Leftrightarrow \ln x=\ln\left(a^5 b\right)\Leftrightarrow x=a^5 b$$

Câu 40: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}} y=\frac{2y}{5}, \log_{25} x=\frac{5}{2y}$. Tính giá trị của $P=y^2-2x^2$.

A. $P=1$. **B.** $P=0$. **C.** $P=-25$. **D.** $P=25$.

Lời giải

$$\begin{cases}\log_{\sqrt{x}} y=\dfrac{2y}{5}\\ \log_{25} x=\dfrac{5}{2y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_x y^2=\dfrac{2y}{5}\\ \log_x 25=\dfrac{2y}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y^2=25\\ \log_{25} x=\dfrac{5}{2y}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ \log_{25} x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=5\\ x=5\end{cases}$$

Ta có:

$$P=y^2-2x^2=-25.$$

Vậy

Câu 41: Cho số thực dương a,b thỏa mãn $\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}\dfrac{2a-b}{3}$. Tỉ số $\dfrac{a}{b}$ thuộc khoảng nào sau đây?

A. $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$. **B.** $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{2}{3}\right)$. **C.** $(1;2)$. **D.** $(-2;0)$.

Lời giải

$$\log_{16} a=\log_{20} b=\log_{25}\frac{2a-b}{3}=x\Leftrightarrow\begin{cases}a=16^x\\ b=20^x\\ 2a-b=3.25^x\end{cases}$$

Đặt

$$2.16^x-20^x=3.25^x\Leftrightarrow 2.\left(\frac{16}{20}\right)^x-3.\left(\frac{25}{20}\right)^x-1=0$$

Suy ra

$$\Leftrightarrow 2.\left(\frac{4}{5}\right)^x-3.\left(\frac{5}{4}\right)^x-1=0\Leftrightarrow 2.\left(\frac{4}{5}\right)^{2x}-\left(\frac{4}{5}\right)^x-3=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\left(\dfrac{4}{5}\right)^x=-1\ (PTVN)\\ \left(\dfrac{4}{5}\right)^x=\dfrac{3}{2}\end{array}\right.$$

$$\frac{a}{b}=\frac{16^x}{20^x}=\left(\frac{4}{5}\right)^x=\frac{3}{2}\in(1;2)$$

Vậy

Câu 42: Cho x,y là hai số thực dương, $x\neq 1$ thỏa mãn $\log_{\sqrt{x}} y=\dfrac{3y}{8},\log_{\sqrt{2}} x=\dfrac{32}{y}$. Tính giá trị của $P=x^2-y^2$.

A. $P=120$. **B.** $P=132$. **C.** $P=240$. **D.** $P=340$.

Lời giải

$$\log_{\sqrt{2}} x=\frac{32}{y}\Leftrightarrow 2\log_2 x=\frac{32}{y}\Leftrightarrow y=\frac{16}{\log_2 x}=16\log_x 2\quad(*).$$

Ta có:

$$\log_{\sqrt{x}} y=\frac{3y}{8}\Leftrightarrow 3\log_x y=\frac{3y}{8}\Leftrightarrow\log_x y=\frac{y}{8}\Leftrightarrow\log_x(16\log_x 2)=2\log_x 2$$

$$\Leftrightarrow \log_x(16\log_x 2)=\log_x 2^2 \Leftrightarrow 16\log_x 2=4 \Leftrightarrow \log_x 2=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \log_2 x=4 \Leftrightarrow x=16.$$

Từ (*) suy ra $y=4$. Vậy $P=x^2-y^2=16^2-4^2=240.$

Câu 43: Với hai số thực dương a,b tùy ý và $\frac{\log_3 5\log_5 a}{1+\log_3 2}-\log_6 b=2$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

A. $a=b\log_6 2$. **B.** $a=36b$. **C.** $2a+3b=0$. **D.** $a=b\log_6 3$.

Lời giải

Ta có $\frac{\log_3 5\log_5 a}{1+\log_3 2}-\log_6 b=2 \Leftrightarrow \frac{\log_3 a}{\log_3 6}-\log_6 b=2 \Leftrightarrow \log_6 a-\log_6 b=2$

$$\Leftrightarrow \log_6\frac{a}{b}=2 \Leftrightarrow \frac{a}{b}=36 \Leftrightarrow a=36b$$

.

Câu 44: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a>b>1$ và $\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_a b}=\sqrt{2020}$. Giá trị của biểu thức $P=\frac{1}{\log_{ab} b}-\frac{1}{\log_{ab} a}$ bằng

A. $\sqrt{2014}$. **B.** $\sqrt{2016}$. **C.** $\sqrt{2018}$. **D.** $\sqrt{2020}$.

Lời giải

Do $a>b>1$ nên $\log_a b>0$, $\log_b a>0$ và $\log_b a>\log_a b$.

Ta có: $\frac{1}{\log_b a}+\frac{1}{\log_a b}=\sqrt{2020} \Leftrightarrow \log_b a+\log_a b=\sqrt{2020}$

$$\Leftrightarrow \log_b^2 a+\log_a^2 b+2=2020 \Leftrightarrow \log_b^2 a+\log_a^2 b=2018 \quad (*)$$

Khi đó, $P=\log_b ab-\log_a ab=\log_b a+\log_b b-\log_a a-\log_a b=\log_b a-\log_a b$

Suy ra: $P^2=(\log_b a-\log_a b)^2=\log_b^2 a+\log_a^2 b-2=2018-2=2016 \Rightarrow P=\sqrt{2016}$.

Câu 45: Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w=24$, $\log_y w=40$ và $\log_{xyz} w=12$. Tính $\log_z w$.

A. 52. **B.** -60. **C.** 60. **D.** -52.

Lời giải

$\log_x w = 24 \Rightarrow \log_w x = \dfrac{1}{24}$; $\log_y w = 40 \Rightarrow \log_w y = \dfrac{1}{40}$.

$$\log_{xyz} w = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w (xyz)} = 12 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 12$$

Lại do:

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x + \log_w y + \log_w z} = 12$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{24} + \frac{1}{40} + \log_w z} = 12 \Leftrightarrow \log_w z = \frac{1}{60} \Rightarrow \log_z w = 60.$$

Câu 46: Cho các số thực dương x, y, z thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{\log_2 x} + \dfrac{1}{\log_2 y} + \dfrac{1}{\log_2 z} = \dfrac{1}{2020}$ và $\log_2(xyz) = 2020$. Tính $\log_2\left(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1\right)$

A. 4040. **B.** 1010. **C.** 2020. **D.** 2020^2.

Lời giải

Đặt $a = \log_2 x; b = \log_2 y; c = \log_2 z$.

Ta có $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{2020}$ và $a + b + c = 2020$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)(a+b+c) = 1 \Leftrightarrow (a+b+c)(ab+ac+bc) = abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b + ab^2 + abc + abc + b^2c + bc^2 + a^2c + ac^2 = 0 \Leftrightarrow (a+b)(b+c)(c+a) = 0$$

Vì vai trò a, b, c như nhau nên giả sử $a + b = 0 \Rightarrow c = 2020 \Rightarrow z = 2^{2020}$ và $xy = 1$.

$$\log_2\left(xyz(x+y+z) - xy - yz - zx + 1\right) = \log_2\left(z(x+y+z) - 1 - yz - zx + 1\right)$$

$$= \log_2\left(z^2\right) = 2\log_2 z = 4040$$

Câu 47: Cho hàm số $f(x) = \dfrac{1}{2}\log_2\left(\dfrac{2x}{1-x}\right)$ và hai số thực m, n thuộc khoảng $(0;1)$ sao cho $m + n = 1$. Tính $f(m) + f(n)$.

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** $\dfrac{1}{2}$.

Lời giải

$$f(m)+f(n)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right)+\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)=\frac{1}{2}\left[\log_2\left(\frac{2m}{1-m}\right)+\log_2\left(\frac{2n}{1-n}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{2m}{1-m}.\frac{2n}{1-n}\right)=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{4mn}{1-m-n+mn}\right)$$, vì $m+n=1$

$$=\frac{1}{2}\log_2\left(\frac{4mn}{mn}\right)=\frac{1}{2}\log_2 4=\frac{1}{2}.2=1$$.

Câu 48: Cho x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân; $\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng, với a là số thực dương khác 1. Giá trị của $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}$ là

A. 13. **B.** 3. **C.** 12. **D.** 10.

Lời giải

x, y, z là ba số thực dương lập thành cấp số nhân nên ta có $xz=y^2$ (1).

$\log_a x$, $\log_{\sqrt{a}} y$, $\log_{\sqrt[3]{a}} z$ lập thành cấp số cộng nên:

$\log_a x+\log_{\sqrt{a}} z=2\log_{\sqrt{a}} y \Leftrightarrow \log_a x+3\log_a z=4\log_a y \Leftrightarrow xz^3=y^4$ (2).

Từ (1) và (2) ta suy ra $x=y=z$.

Vậy $p=\frac{9x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{3z}{x}=9+1+3=13$.

Câu 49: Có bao nhiêu số nguyên dương n để $\log_n 256$ là một số nguyên dương?

A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 1.

Lời giải

$\log_n 256=8.\log_n 2=\frac{8}{\log_2 n}$ là số nguyên dương $\Leftrightarrow \log_2 n\in\{1;2;4;8\}\Leftrightarrow n\in\{2;4;16;256\}$.

Vậy có 4 số nguyên dương.

Câu 50: Giả sử $\log_{27}5=a;\ \log_8 7=b;\ \log_2 3=c$. Hãy biểu diễn $\log_{12}35$ theo $a,\ b,\ c$?

A. $\frac{3b+3ac}{c+2}$. **B.** $\frac{3b+3ac}{c+1}$. **C.** $\frac{3b+2ac}{c+3}$. **D.** $\frac{3b+2ac}{c+2}$.

Lời giải

$$\log_{27}5=a\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_3 5=a\Leftrightarrow\frac{\log_2 5}{\log_2 3}=3a\Leftrightarrow\log_2 5=3ac.$$

$$\log_8 7=b\Leftrightarrow\frac{1}{3}\log_2 7=b\Leftrightarrow\log_2 7=3b.$$

$$\log_{12}35=\frac{\log_2 35}{\log_2 12}=\frac{\log_2(5.7)}{\log_2(3.2^2)}=\frac{\log_2 5+\log_2 7}{\log_2 3+2}=\frac{3ac+3b}{c+2}.$$

Xét

Câu 51: Cho $\log_3 5=a$, $\log_3 6=b$, $\log_3 22=c$. Tính $P=\log_3\left(\frac{90}{11}\right)$ theo a, b, c.

A. $P=2a+b-c$. **B.** $P=a+2b-c$. **C.** $P=2a+b+c$. **D.** $P=2a-b+c$.

Lời giải

Ta có:

$$P=\log_3\left(\frac{90}{11}\right)=\log_3\left(\frac{180}{22}\right)=\log_3 180-\log_3 22=\log_3(36.5)-\log_3 22=\log_3 36+\log_3 5-\log_3 22$$

$$=\log_3(6^2)+\log_3 5-\log_3 22=2\log_3 6+\log_3 5-\log_3 22=a+2b-c.$$

Vậy $P=a+2b-c$.

Câu 52: Đặt $a=\log_2 3; b=\log_3 5$. Biểu diễn $\log_{20}12$ theo a,b.

A. $\log_{20}12=\frac{a+b}{b+2}$. **B.** $\log_{20}12=\frac{ab+1}{b-2}$. **C.** $\log_{20}12=\frac{a+1}{b-2}$. **D.** $\log_{20}12=\frac{a+2}{ab+2}$.

Lời giải

$$\log_{20}12=\frac{\log_2 12}{\log_2 20}=\frac{\log_2(4.3)}{\log_2(4.5)}=\frac{2+\log_2 3}{2+\log_2 5}=\frac{2+\log_2 3}{2+\log_2 3.\log_3 5}=\frac{a+2}{ab+2}$$

Ta có .

Câu 53: Cho $\log_{12}3=a$. Tính $\log_{24}18$ theo a.

A. $\frac{3a+1}{3-a}$. **B.** $\frac{3a+1}{3+a}$. **C.** $\frac{3a-1}{3+a}$. **D.** $\frac{3a-1}{3-a}$.

Lời giải

$$a=\log_{12}3=\frac{1}{\log_3 12}=\frac{1}{1+2\log_3 2}\Leftrightarrow\log_2 3=\frac{2a}{1-a}$$

Ta có .

$$\log_{24}18=\frac{\log_2(3^2.2)}{\log_2(2^3.3)}=\frac{1+2\log_2 3}{3+\log_2 3}=\frac{1+2.\frac{2a}{1-a}}{3+\frac{2a}{1-a}}=\frac{1+3a}{3-a}$$

Khi đó: .

Câu 54: Nước chanh có độ pH bằng $2,4$; giấm có độ pH bằng 3. Nước chanh có độ acid gấp bao nhiêu lần giấm (nghĩa là có nồng độ H^+ gấp bao nhiêu lần)?

A. $3,9$. **B.** $3,98$. **C.** $4,3$. **D.** $4,5$.

Lời giải

Gọi x,y lần lượt là nồng độ H^+ trong nước chanh và giấm. Theo giả thiết ta có

$2,4 = -\log x$ và $3 = -\log y$.

Suy ra $x = 10^{-2,4}$ và $y = 10^{-3}$.

Suy ra $\frac{x}{y} \approx 3,98$.

Vậy nước chanh có độ acid gấp $3,98$ lần giấm.

Câu 55: Trên một chiếc đài Radio FM có vạch chia để người dùng có thể dò sóng cần tìm. Vạch ngoài cùng bên trái và vạch ngoài cùng bên phải tương ứng với $88\,Mhz$ và $108\,Mhz$. Hai vạch này cách nhau $10\,\text{cm}$. Biết vị trí của vạch cách vạch ngoài cùng bên trái $d\,(\text{cm})$ thì có tần số bằng $k.a^d\,(Mhz)$ với k và a là hai hằng số. Tìm vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV$_1$ với tần số $102,7\,Mhz$.

A. Cách vạch ngoài cùng bên phải $7,35\,\text{cm}$. **B.** Cách vạch ngoài cùng bên phải $2,46\,\text{cm}$.

C. Cách vạch ngoài cùng bên trái $7,54\,\text{cm}$. **D.** Cách vạch ngoài cùng bên trái $8,23\,\text{cm}$

Lời giải

Ta có:

$d = 0 \Rightarrow k.a^0 = 88 \Rightarrow k = 88$.

$d = 10 \Rightarrow k.a^{10} = 108 \Rightarrow 88.a^{10} = 108 \Rightarrow a^{10} = \frac{108}{88} \Rightarrow a = \sqrt[10]{\frac{108}{88}}$.

Gọi d_1 là vị trí để vạch có tần số $102,7\,Mhz$ khi đó ta có

$88.\left(\sqrt[10]{\frac{108}{88}}\right)^{d_1} = 102,7 \Leftrightarrow \left(\sqrt[10]{\frac{108}{88}}\right)^{d_1} = \frac{102,7}{88} \Leftrightarrow d_1 = \log_{\sqrt[10]{\frac{108}{88}}} \frac{102,7}{88} = 7,54$.

Vậy vị trí tốt nhất của vạch để bắt sóng VOV$_1$ với tần số $102,7\,Mhz$ là $7,54\,\text{cm}$.

Câu 56: Biết rằng vi khuẩn E. coli là vi khuẩn gây tiêu chảy đường ruột, gây đau bụng dữ dội, ngoài ra cứ sau 20 phút thì số lượng vi khuẩn tăng gấp đôi, nghĩa là số lượng tính theo công thức $S = S_0.2^n$, S_0 là số lượng ban đầu, n là số lần nhân đôi. Ban đầu chỉ có 40 con vi khuẩn nói trên trong đường ruột, hỏi sau bao lâu số lượng vi khuẩn là 671088640 con?

A. 20 giờ. **B.** 8 giờ. **C.** 12 giờ. **D.** 6 giờ.

Lời giải

Ta có: $S = S_0.2^n$.

$671088640 = 40.2^n \Leftrightarrow 2^n = \frac{671088640}{40} = 16777216 \Leftrightarrow n = \log_2 16777216 = 24$

Suy ra .

Để số lượng vi khuẩn là 671088640 con thì vi khuẩn đã có 24 lần nhân đôi.

Do đó, thời gian mà vi khuẩn đã thực hiện 24 lần nhân đôi đó là $20.24 = 480$ phút (8 giờ).

Vậy, sau 8 giờ số lượng vi khuẩn là 671088640 con.

Câu 57: Vào cuối năm 2022, báo Rossiyskaya Gazeta dẫn lời Bộ trưởng Tài nguyên Nga cảnh báo nước này sẽ cạn kiệt dầu mỏ sau 28 năm nữa nếu sản lượng khai thác hằng năm vẫn giữ như năm 2022. Bắt đầu từ năm 2023, nếu nước Nga mỗi năm giảm sản lượng khai thác 2% so với năm trước thì sau bao nhiêu năm nữa nước này cạn kiệt dầu mỏ (chọn phương án có kết quả gần nhất với tính toán của bạn)?

A. 52. **B.** 32. **C.** 44. **D.** 40.

Lời giải

Gọi S (tỷ tấn) là sản lượng dầu mỏ còn lại của Nga trên thực tế tính từ cuối năm 2022.

x (tỷ tấn) là sản lượng khai khác hằng năm như năm 2022.

Theo đề bài, ta có: $S = 28x$ (tỷ tấn).

Gọi n là số năm khai thác còn lại với sản lượng khai thác thay đổi hằng năm tính từ 2023.

Lượng khai thác mỗi năm tính từ năm 2023 là: $x.\dfrac{(1-2\%)^n-1}{(1-2\%)-1}=\dfrac{0,98^n-1}{-0,02}x$ (tỷ tấn).

Đến khi khai thác hết, ta có: $\dfrac{0,98^n-1}{-0,02}x = 28x \Leftrightarrow n = \log_{0,98}(1-0,02.28) \approx 40.64$.

PHẦN II. Câu trắc nghiệm đúng sai. Trong mỗi ý a), b), c), d) ở mỗi câu, thí sinh chọn đúng hoặc sai.

Câu 1: Cho hai số thực a và b, với $1<a<b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_{a^2} b = 5\log_a b$

b) $\log_a b > 1$

c) $\log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = \dfrac{6}{\log_b a}$

d) Nếu $a^2+b^2=7ab$ thì $\log_3(a+b) = 1+\log_3 a + \log_3 b$

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\log_{a^2} b = \dfrac{1}{5}\log_a b$

b) Đúng: Ta có : $\log_a b > \log_a a = 1$.

$$\log_a b^3 + \log_{a^2} b^6 = 3\log_a b + 3\log_a b = 6\log_a b = \frac{6}{\log_b a}$$

c) Đúng: Ta có : .

$$a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow a^2 + b^2 + 2ab = 9ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \quad (*)$$

d) Sai: Ta có: Ta có:

Do $a, b > 0 \Rightarrow \begin{cases} ab > 0 \\ a+b > 0 \end{cases}$, lấy logarit cơ số 2 hai vế của $(*)$ ta được:

$$\log_3 (a+b)^2 = \log_3 (9ab) \Leftrightarrow 2\log_3 (a+b) = \log_3 9 + \log_3 a + \log_3 b$$

$$\Leftrightarrow \log_3 (a+b) = 1 + \frac{1}{2}(\log_3 a + \log_3 b)$$

. Suy ra mệnh đề **sai.**

Câu 2: Biết $a = \log_{27} 5$, $b = \log_8 7$, $c = \log_2 3$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $c > 2$

b) $a.c = \frac{1}{3}\log_2 5$

c) $\frac{a.c}{b} = \log_7 5$

d) $\log_{12} 35 = \frac{3(b+ac)}{c+2}$

Lời giải

a) Sai: Ta có: $c = \log_2 3 < \log_2 4 = 2$

b) Đúng: Ta có:

$$a.c = c.a = \log_2 (3).\log_{27} (5) = \log_2 (3).\frac{1}{3}\log_3 (5) = \frac{1}{3}\log_2 5$$

c) Đúng: Ta có:

$$\frac{a.c}{b} = \frac{\frac{1}{3}\log_2 5}{\log_8 7} = \frac{1}{3}\log_2 (5).\log_7 (8) = \frac{1}{3}\log_2 (5).3.\log_7 (2) = \log_7 5$$

d) Đúng: Ta có:

$$\begin{cases} a = \log_{27} (5) = \frac{1}{3}\log_3 5 \\ b = \log_8 7 = \frac{1}{3}\log_2 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 5 = 3a \\ \log_2 7 = 3b \end{cases}$$

$$\log_{12}35=\frac{\log_2(7.5)}{\log_2(3.2^2)}=\frac{\log_2 7+\log_2 5}{\log_2 3+2}=\frac{\log_2 7+\log_2 3.\log_3 5}{\log_2 3+2}=\frac{3b+c.3a}{c+2}=\frac{3(b+ac)}{c+2}$$

Mà:

Câu 3: Cho số thực $x,y>0$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_2 x=\log_4 x^2$

b) $\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(2x^2y)+\log_4(2y^2)=1$

c) $\log_3 x+\log_3 x^2+...+\log_3 x^{2023}=2023.2024\log_3 x$

d) Nếu $x=\log_2 6$, $y=\log_3 10$. Khi đó $\frac{xy+2x-y}{x+2}=\log_2 30$.

Lời giải

a) Đúng: Ta có $\log_{2^2}(x)^2=\log_2 x$ do $x>0$

b) Sai: Ta có

$$\log_{\sqrt{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}(2x^2y)+\log_4(2y^2)=2\log_2 x-\log_2(2x^2y)+\frac{1}{2}\log_2(2y^2)$$

$$=\log_2\frac{x^2y}{x^2y}-1+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

.

c) Sai: Ta có $\log_3 x+\log_3 x^2+...+\log_3 x^{2023}$

$$=\log_3(x.x^2...x^{2023})=\log_3 x^{1+2+...+2023}=\frac{(2023+1)2023}{2}\log_3 x$$

4) Sai: Ta có: $x=\log_2 6$, $y=\log_3 10$,

$$\frac{xy+2x-y}{x+2}=\frac{y(x-1)+2x}{x+2}=\frac{\log_3 10.(\log_2 6-1)+2\log_2 6}{\log_2 6+2}=\frac{\log_2 10+\log_2 36}{\log_2 24}=\log_{24}360,$$

và $\log_{24}360\neq\log_2 30$

Câu 4: Cho số thực dương $a\neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\ln a-\ln 2=\ln(a-2)$

a) $\log_5\left(125a^2\right)=3+2\log_5 a$

b) $2\log_9 a-\dfrac{\log_2 a}{\log_2 3}=0$

c) $\dfrac{1}{\log_2 a}+\dfrac{1}{\log_3 a}+\dfrac{1}{\log_4 a}+...+\dfrac{1}{\log_{100} a}=\log_a 5050$

d)

Lời giải

a) Sai: Ta có: $\ln a-\ln 2=\ln\dfrac{a}{2}$.

b) Đúng: Ta có: $\log_5\left(125a^2\right)=\log_5 5^3+\log_5 a^2=3+2\log_5 a$.

c) Đúng: Ta có $2\log_9 a-\dfrac{\log_2 a}{\log_2 3}=\log_3 a-\log_3 a=0$.

d) Sai: Ta có: $\dfrac{1}{\log_2 a}+\dfrac{1}{\log_3 a}+\dfrac{1}{\log_4 a}+...+\dfrac{1}{\log_{99} a}+\dfrac{1}{\log_{100} a}$

$=\log_a 2+\log_a 3+\log_a 4+...\log_a 99+\log_a 100=\log_a\left(2.3.4...99.100\right)=\log_a(100!)$.

Câu 5: Với mọi số thực dương a,b và $a,b\neq 1$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log(ab)=\log a+\log b$

b) $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b$

c) $\log_3^2 a^2=2\log_3^2 a$

d) Biết $\ln\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{2\ln a+\ln b}{3}$. Khi đó $a^3+b^3=3\left(8a^2b-ab^2\right)$.

Lời giải

a) Đúng: a,b là các số thực dương nên $\log(ab)=\log a+\log b$.

b) Đúng: $\log_{a^2}(ab)=\dfrac{1}{2}\left(\log_a a+\log_a b\right)=\dfrac{1}{2}\left(1+\log_a b\right)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\log_a b$.

$$\log_3^2 a^2 = \left(\log_3 a^2\right)^2 = \left(2\log_3 a\right)^2 = 4\log_3^2 a$$

c) Sai: Ta có .

$$\ln\frac{a+b}{2} = \frac{2\ln a + \ln b}{3} \Leftrightarrow 3\ln\frac{a+b}{2} = \ln a^2 + \ln b$$

d) Sai: Ta có:

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{a+b}{2}\right)^3 = \ln\left(a^2 b\right) \Leftrightarrow \frac{(a+b)^3}{8} = a^2 b$$

$$\Leftrightarrow a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3 = 8a^2 b \Leftrightarrow a^3 + b^3 = 5a^2 b - 3ab^2.$$

Câu 6: Cho $\log_{27} 5 = a$, $\log_3 7 = b$ và $\log_2 3 = c$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $0 < a < 1$

b) $bc = \log_7 2$

c) $\log_6 45 = \dfrac{6ac + 2c}{1 + c}$

d) Biết $\log_6 35 = \dfrac{(ma + nb)c}{1 + pc}$ với $m, n, p \in \square$ $m^2 + n^2 + p^2 = 11$. Khi đó .

Lời giải

$$0 = \log_{27} 1 < \log_{27} 5 < \log_{27} 27 = 1 \Rightarrow 0 < a < 1$$

a) Đúng: Ta có

$$bc = \log_3 7.\log_2 3 = \frac{\log_3 7}{\log_3 2} = \log_2 7$$

b) Sai: Ta có .

$$\log_{27} 5 = a \Rightarrow a = \frac{1}{3}\log_3 5 \Rightarrow 3a = \log_3 5$$

3) Đúng: .

$$\log_6 45 = \frac{\log_2\left(3^2.5\right)}{\log_2(2.3)} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 5}{1 + \log_2 3} = \frac{2c + \log_2 3.\log_3 5}{1 + c} = \frac{2c + 2c.3a}{1 + c} = \frac{6ac + 2c}{1 + c}$$

Khi đó .

$$\log_{27} 5 = a \Rightarrow a = \frac{1}{3}\log_3 5 \Rightarrow 3a = \log_3 5 \Rightarrow \log_5 3 = \frac{1}{3a}$$

d) Đúng:

$\log_3 7 = b \Rightarrow \log_7 3 = \dfrac{1}{b}$;

$bc = \log_2 3.\log_3 7 = \log_2 7 \Rightarrow \log_7 2 = \dfrac{1}{bc}$;

$3ac = \log_3 5.\log_2 3 = \log_2 5 \Rightarrow \log_5 2 = \dfrac{1}{3ac}$.

$\log_6 35 = \log_6 5 + \log_6 7$

Khi đó

$= \dfrac{1}{\log_5 6} + \dfrac{1}{\log_7 6} = \dfrac{1}{\log_5 2 + \log_5 3} + \dfrac{1}{\log_7 3 + \log_7 2} = \dfrac{1}{\dfrac{1}{3ac} + \dfrac{1}{3a}} + \dfrac{1}{\dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{bc}} = \dfrac{(3a+b)c}{c+1}$.

$\begin{cases} m = 3 \\ n = 1 \\ p = 1 \end{cases} \Rightarrow m^2 + n^2 + p^2 = 11$

Vậy ta có: .

Câu 7: Cho $a = \log_2 5$, $b = \log_3 5$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $b > 1$

b) $ab = \log_2 3$

c) $\log_{12} 5 = \dfrac{2}{a+b}$

d) Biết $\log_{24} 250 = \dfrac{mab + nb}{pa + qb}$ với $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Khi đó $A = mnpq = 9$.

Lời giải

$b = \log_3 5 > \log_3 3 = 1$

a) Đúng: Ta có

$\log_2 3 = \dfrac{\log_5 3}{\log_5 2} = \dfrac{1}{\log_3 5}.\log_2 5 = \dfrac{a}{b}$

b) Sai: Ta có .

$\log_{12} 5 = \dfrac{1}{\log_5 12} = \dfrac{1}{\log_5 (2^2.3)} = \dfrac{1}{\log_5 2^2 + \log_5 3} = \dfrac{1}{\dfrac{2}{\log_2 5} + \dfrac{1}{\log_3 5}}$

c) Sai:

$= \dfrac{1}{\dfrac{2}{a} + \dfrac{1}{b}} = \dfrac{1}{\dfrac{a+2b}{ab}} = \dfrac{ab}{a+2b}$

.

$$\log_{24} 250 = \log_{2^3.3}\left(2.5^3\right) = \log_{2^3.3} 2 + \log_{2^3.3} 5^3 = \frac{1}{\log_2\left(2^3.3\right)} + \frac{3}{\log_5\left(2^3.3\right)}$$

d) Đúng:

$$= \frac{1}{3+\log_2 3} + \frac{3}{3\log_5 2 + \log_5 3} = \frac{1}{3+\dfrac{\log_2 5}{\log_3 5}} + \frac{3}{\dfrac{3}{\log_2 5} + \dfrac{1}{\log_3 5}}$$

$$= \frac{1}{3+\dfrac{a}{b}} + \frac{3}{\dfrac{3}{a}+\dfrac{1}{b}} = \frac{1}{\dfrac{3b+a}{b}} + \frac{3}{\dfrac{3b+a}{ab}} = \frac{b}{3b+a} + \frac{3ab}{3b+a} = \frac{3ab+b}{a+3b}$$

.

$$\begin{cases} m=3 \\ n=1 \\ p=1 \\ q=3 \end{cases} \Rightarrow mnpq = 9$$

Vậy ta có .

Câu 8: Cho $a,b,c>1$ và $m,n \in \square$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_a \sqrt{a\sqrt{a}} = \frac{3}{4}$

b) $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c.\log_{c^2} a^3 = \frac{1}{6}$

c) Cho $\log 3 = m, \log 7 = n$. Khi đó $\log_3 70 = \frac{n+1}{m}$.

d) Cho $\log_5 2 = m, \log_5 3 = n$. Khi đó $\log_{250} 30 = (m+n+1)(3+m)$.

Lời giải

a) Đúng: $\log_a \sqrt{a\sqrt{a}} = \log_a \sqrt{a^{\frac{3}{2}}} = \log_a a^{\frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$.

b) Sai: $\log_a b^2.\log_{\sqrt{b}} c.\log_{c^2} a^3 = 2.\log_a b.2.\log_b c.\frac{3}{2}.\log_c a = 6$.

d) Sai: $\log_{250} 30 = \dfrac{\log_5(3.2.5)}{\log_5\left(5^3.2\right)} = \dfrac{m+n+1}{3+m}$.

Câu 9: Cho hai số thực a và b, với $1<a<b$. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) $\log_a b < 1 < \log_b a$.

b) $1 < \log_a b < \log_b a$.

c) $\log_b a < \log_a b < 1$.

d) $\log_b a < 1 < \log_a b$.

Lời giải

$$b>a>1 \Leftrightarrow \begin{cases} \log_a b > \log_a a \Leftrightarrow \log_a b > 1 \\ \log_b b > \log_b a \Leftrightarrow 1 > \log_b a \end{cases} \Leftrightarrow \log_b a < 1 < \log_a b.$$

Ta có

a) Sai

b) Sai

c) Sai

d) Đúng

Câu 10: Công thức $\log x = 11,8 + 1,5M$ cho biết mối liên hệ giữa năng lượng x tạo ra (tính theo erg, 1 erg tương đương 10^{-7} jun) với độ lớn M theo thang Richter của một trận động đất. Xét tính đúng sai của các khẳng định sau:

a) Trận động đất có độ lớn 2 độ Richter tạo ra năng lượng khoảng $6,3.10^{34}$ erg.

b) Trận động đất có độ lớn 3 độ Richter tạo ra năng lượng khoảng 2.10^9 (J)

c) Trận động đất có độ lớn 5 độ Richter tạo ra năng lượng gấp 100 lần so với trận động đất có độ lớn 3 độ Richter.

d) Người ta ước lượng rằng một trận động đất có độ lớn khoảng từ 4 đến 6 độ Richter. Năng lượng do trận động đất đó tạo ra nằm trong khoảng $10^{17,8} \le x \le 10^{20,8}$ erg.

Lời giải

a) Sai: Ta có $\log x = 11,8 + 1,5M$

Với $M = 2$ ta được $\log x = 14,8 \Leftrightarrow x \approx 6,3.10^{14}$ erg.

b) Đúng: Với $M = 3$ ta được $\log x = 16,3 \Leftrightarrow x \approx 2.10^{16}$ erg $= 2.10^9$ jun.

c) Đúng: Gọi x_1, x_2 (erg) lần lượt là năng lượng tạo ra của hai trận động đất có độ lớn lần lượt là $M_1 = 5, M_2 = 3$ (độ Richter).

Ta có: $\log x_1 = 11,8 + 1,5M_1; \log x_2 = 11,8 + 1,5M_2$

$$\Rightarrow \log x_1 - \log x_2 = 1,5(M_1 - M_2) \Rightarrow \log \frac{x_1}{x_2} = 3 \Rightarrow \frac{x_1}{x_2} = 10^3 = 1000.$$

d) Sai: $11,8 + 1,5.4 \le \log x \le 11,8 + 1,5.6 \Rightarrow 17,8 \le \log x \le 20,8 \Rightarrow 10^{17,8} \le x \le 10^{20,8}$ erg.

PHẦN III. Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Cho ba số thực dương a,b,c đều khác 1 thoả mãn $\log_a b = 2\log_b c = 4\log_c a$ và $a + 2b + 3c = 48$. Khi đó $P = abc$ bằng bao nhiêu

Lời giải

Do a,b,c đều khác 1 nên $\log_a b, \log_b c, \log_c a$ đều khác 0 ta có:

$$\log_a b = 2\log_b c \Leftrightarrow \log_a c.\log_c b = 2\log_b c \Leftrightarrow \log_a c = 2\log_b^2 c.$$

$$\log_a b = 4\log_c a \Leftrightarrow \log_a c.\log_c b = 4\log_c a \Leftrightarrow \log_c b = 4\log_c^2 a.$$

Nên $\log_a c.\log_c b = 8\log_b^2 c.\log_c^2 a \Leftrightarrow \log_a b = 8\log_b^2 a \Leftrightarrow \log_a^3 b = 8 \Leftrightarrow \log_a b = 2 \Leftrightarrow b = a^2$.

$\log_a b = 2\log_b c \Leftrightarrow \log_a b = 2\log_{a^2} c \Leftrightarrow b = c$

Mà .

$$a + 2b + 3c = 48 \Leftrightarrow a + 2a^2 + 3a^2 = 48 \Leftrightarrow 5a^2 + a - 48 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = -\dfrac{16}{5} \\ a = 3 \end{array}\right.$$

Ta lại có

Do a,b,c đều là số thực dương $\Rightarrow a = 3 \Rightarrow b = 9,\ c = 9 \Rightarrow P = abc = 243$.

Câu 2: Cho a,b là các số thực dương thỏa mãn $\log_a b = \dfrac{b}{8}$, $\log_2 a = \dfrac{16}{b}$. Tính giá trị của biểu thức $G = a + b$.

Lời giải

Ta có: $\log_a b = \dfrac{b}{8}$ và $\log_2 a = \dfrac{16}{b} \Rightarrow \log_2 a.\log_a b = \dfrac{16}{b}.\dfrac{b}{8} \Leftrightarrow \log_2 b = 2 \Leftrightarrow b = 4$

$\Rightarrow \log_2 a = 4 \Leftrightarrow a = 16 \Rightarrow G = a + b = 16 + 4 = 20$

.

Câu 3: Cho $\log_2 3 = a$ và $\log_3 5 = b$. Biết $\log_{12} 150 = \dfrac{2ab + ma + n}{a + 2}$ với $m, n \in \mathbb{Z}$. Tính giá trị của biểu thức $L = m + n$ là

Lời giải

Ta có: $\log_2 3 = a \Leftrightarrow \log_3 2 = \dfrac{1}{a}$ và $\log_3 5 = b$.

$$\log_{12} 150 = \frac{\log_3 150}{\log_3 12} = \frac{\log_3\left(2.3.5^2\right)}{\log_3\left(2^2.3\right)} = \frac{\log_3 2 + 1 + 2\log_3 5}{2\log_3 2 + 1} = \frac{\dfrac{1}{a} + 1 + 2b}{\dfrac{2}{a} + 1} = \frac{2ab + a + 1}{a + 2}$$

Khi đó:

Do $m, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 1$ và $n = 1 \Rightarrow L = m + n = 2$.

Câu 4: Cho a, b, c là các số thực dương thỏa $a^{\log_3 7} = 9$, $b^{\log_7 11} = 7$, $c^{\log_{11} 25} = 11$. Tính giá trị biểu thức $T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25}$.

Lời giải

$$T = a^{\log_3^2 7} + b^{\log_7^2 11} + c^{\log_{11}^2 25} = \left(a^{\log_3 7}\right)^{\log_3 7} + \left(b^{\log_7 11}\right)^{\log_7 11} + \left(c^{\log_{11} 25}\right)^{\log_{11} 25}$$

.

$$= (9)^{\log_3 7} + (7)^{\log_7 11} + (11)^{\log_{11} 25} = 7^2 + 11 + 25 = 85$$

.

Câu 5: Cho x, y và z là các số thực lớn hơn 1 và gọi w là số thực dương sao cho $\log_x w=12$, $\log_y w=20$ và $\log_{xyz} w=6$. Tính $\log_z w$.

Lời giải

$\log_x w=12\Rightarrow \log_w x=\dfrac{1}{12}$; $\log_y w=20\Rightarrow \log_w y=\dfrac{1}{20}$.

$$\log_{xyz} w=6\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w(xyz)}=6\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x+\log_w y+\log_w z}=6\Leftrightarrow \frac{1}{\log_w x+\log_w y+\log_w z}=6$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\log_w z}=6\Leftrightarrow \log_w z=\frac{1}{30}\Rightarrow \log_z w=30.$$

Câu 6: Cho $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$ với mọi $m,n\in\mathbb{N}^*$. Tính giá trị của biểu thức $T=\log\left[\dfrac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]$.

Lời giải

Có $f(1)=1$, $f(m+n)=f(m)+f(n)+mn$,

$$f(96)=f(95+1)=f(95)+f(1)+95=f(95)+96=f(94)+95+96=\ldots$$

Suy ra:

$$=f(1)+2+\ldots+95+96\Rightarrow f(96)=1+2+\ldots+95+96=\frac{96.97}{2}=4656.$$

$$f(69)=1+2+\ldots+68+69=\frac{69.70}{2}=2415$$

Tương tự.

$$T=\log\left[\frac{f(96)-f(69)-241}{2}\right]=\log\left(\frac{4656-2415-241}{2}\right)=\log 1000=3$$

Vậy.

Câu 7: Cho các số thực dương x,y,z thỏa mãn đồng thời $\dfrac{1}{\log_2 x}+\dfrac{1}{\log_2 y}+\dfrac{1}{\log_2 z}=\dfrac{1}{10}$ và $\log_2(xyz)=10$. Tính $\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-zx+1\right)$

Lời giải

Đặt $a=\log_2 x;b=\log_2 y;c=\log_2 z$. Ta có $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{10}$ và $a+b+c=10$

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)=1\Leftrightarrow(a+b+c)(ab+ac+bc)=abc$$

$$\Leftrightarrow a^2b+ab^2+abc+abc+b^2c+bc^2+a^2c+ac^2=0\Leftrightarrow(a+b)(b+c)(c+a)=0$$

Vì vai trò a,b,c như nhau nên giả sử $a+b=0\Rightarrow c=10\Rightarrow z=2^{10}$ và $xy=1$.

$$\log_2\left(xyz(x+y+z)-xy-yz-zx+1\right)=\log_2\left(z(x+y+z)-1-yz-zx+1\right)$$

$$=\log_2\left(z^2\right)=2\log_2 z=2.10=20$$

.

Câu 8: Dân số thế giới được ước tính theo công thức $P_n=P_0.e^{nr}$, trong đó P_0 là dân số của năm lấy làm mốc, P_n là dân số sau n năm, r là tỉ lệ tăng dân số hàng năm. Biết rằng năm 2001 dân số Việt Nam là 76.685.800 người và tỉ lệ tăng dân số năm đó là $1,7\%$. Hỏi cứ tăng dân số với tỉ lệ như vậy thì đến năm nào dân số nước ta ở mức 115 triệu người

Lời giải

Theo bài ra ta xét phương trình:

$$P_n=115.10^6\Leftrightarrow P_0.e^{nr}=115.10^6\Leftrightarrow\ln P_0+nr=\ln\left(115.10^6\right)$$

Suy ra $$n=\frac{\ln\left(115.10^6\right)-\ln P_0}{r}\approx 23,8$$.

Như vậy đến năm 2025 dân số nước ta sẽ ở mức 115 triệu người.

Câu 9: Một điện thoại đang nạp pin, dung lượng pin nạp được tính theo công thức $Q(t)=Q_0.\left(1-e^{-t\sqrt{2}}\right)$ với t là khoảng thời gian tính bằng giờ và Q_0 là dung lượng nạp tối đa (pin đầy). Hãy tính thời gian nạp pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin cho đến khi điện thoại đạt được 90% dung lượng pin tối đa (kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm)

Lời giải

Theo bài ta có

$$Q_0.\left(1-e^{-t\sqrt{2}}\right)=0,9.Q_0\Leftrightarrow 1-e^{-t\sqrt{2}}=0,9\Leftrightarrow e^{-t\sqrt{2}}=0,1\Leftrightarrow t=-\frac{\ln(0,1)}{\sqrt{2}}\approx 1,63$$

.

Vậy sau khoảng thời gian $t\approx 1,63$ giờ thì dung lượng pin của điện thoại tính từ lúc cạn hết pin sẽ nạp được 90% dung lượng pin tối đa.

Câu 10: Áp suất không khí P (đo bằng milimet thủy ngân, kí hiệu mmHg) là một đại lượng được tính theo công thức $P=P_0e^{xi}$ trong đó x là độ cao (đo bằng mét, so với mực nước biển),

$P_0 = 760\,\text{mmHg}$ là áp suất ở mực nước biển, i là hệ số suy giảm. Biết rằng, ở độ cao 1000 m thì áp suất của không khí là 672,72 mmHg. Hỏi áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số nào trong các số sau?

Lời giải

Do ở độ cao 1000 m, áp suất của không khí là 672,72 mmHg nên ta có:

$$672,72 = 760e^{1000i} \Leftrightarrow i = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,72}{760}$$

Khi ở độ cao 15 km tức là 15000 m thì áp suất của không khí:

$$P = 760\text{e}^{15000\times\frac{1}{1000}\ln\frac{672,72}{760}} \approx 121,93399$$

Vậy, áp suất của không khí ở độ cao 15 km gần nhất với số 122.

Câu 11: Sự tăng trưởng của loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = Ae^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng ($r > 0$), t là thời gian tăng trưởng. Biết số vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu gần nhất với kết quả nào trong các kết quả sau đây?

Lời giải

$$300 = 100.\text{e}^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 3}{5}$$

Vì sau 5h có 300 con vi khuẩn, nên suy ra .

Để vi khuẩn tăng gấp đôi thì ta có phương trình:

$$200 = 100.\text{e}^{\frac{1}{5}\ln 3t} \Leftrightarrow \text{e}^{\frac{1}{5}\ln 3t} = 2 \Leftrightarrow 3^{\frac{1}{5}t} = 2 \Leftrightarrow t = 5\log_3 2 \Leftrightarrow t \approx 3,15$$

Vậy thời gian để số vi khuẩn tăng gấp đôi số vi khuẩn ban đầu là 3 giờ 9 phút.

Câu 12: Gọi $N(t)$ là số phần trăm cacbon 14 còn lại trong một bộ phận của một cây sinh trưởng từ t năm trước đây thì ta có công thức $N(t) = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}(\%)$ với A là hằng số. Biết rằng một mẫu gỗ có tuổi khoảng 3754 năm thì lượng cacbon 14 còn lại là 65%. Phân tích mẫu gỗ từ một công trình kiến trúc cổ, người ta thấy lượng cacbon 14 còn lại trong mẫu gỗ là 79%. Hãy xác định tuổi của mẫu gỗ được lấy từ công trình đó.

Lời giải

$$65 = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow 0,65 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3754}{A}} \Leftrightarrow \frac{3754}{A} = \log_{\frac{1}{2}} 0,65 \Leftrightarrow A = \frac{3754}{\log_{\frac{1}{2}} 0,65}$$

Theo bài ta có

$$79 = 100.\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}} \Leftrightarrow 0,79 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{A}}$$

Do mẫu gỗ còn 79% lượng Cacbon 14 nên ta có:

$$\Leftrightarrow \frac{t}{A} = \log_{\frac{1}{2}} 0,79 \Leftrightarrow t = A.\log_{\frac{1}{2}} 0,79 = \frac{3754}{\log_{\frac{1}{2}} 0,65}.\log_{\frac{1}{2}} 0,79 \approx 2054$$

.

Câu 13: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn trong phòng thí nghiệm được tính theo công thức $S(t) = S_0.e^{r.t}$. Trong đó S_0 là số lượng vi khuẩn ban đầu, $S(t)$ là số lượng vi khuẩn có sau t (phút), r là tỷ lệ tăng trưởng $(r > 0)$, t (tính theo phút) là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu có 500 con và sau 5 giờ có 1500 con. Hỏi sau bao nhiêu giờ kể từ lúc ban đầu có 500 con để số lượng vi khuẩn đạt 121500 con?

Lời giải

Ta có: $S_0 = 500$ (con); 5 giờ $= 300$ phút.

Sau 5 giờ số vi khuẩn là: $S(300) = 500.e^{300r} \Leftrightarrow 1500 = 500.e^{300r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 3}{300}$

Vậy khoảng thời gian t kể từ lúc bắt đầu có 500 con vi khuẩn đến khi số lượng vi khuẩn đạt 121500 con thỏa mãn $121500 = 500.e^{r.t}$

$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln 243}{r} = \frac{300\ln 243}{\ln 3} = 1500$$ (phút) $= 25$ (giờ).

Câu 14: Cường độ một trận động đất được cho bởi công thức $M = \log A - \log A_0$ độ Richter, với A là biên độ rung chấn tối đa và A_0 là một biên độ chuẩn (hằng số). Đầu thế kỷ 20, một trận động đất ở San Francisco có cường độ đo được 8 độ Richter. Trong cùng năm đó, trận động đất khác ở Nhật Bản có cường độ đo được 6 độ Richer. Hỏi trận động đất ở San Francisco có biên độ gấp bao nhiêu lần biên độ trận động đất ở Nhật Bản?

Lời giải

$$M_1 = \log A_1 - \log A_0 = \log \frac{A_1}{A_0} = 8$$

Nhận thấy ở San Francisco trận động đất có cường độ là:

$$M_2 = \log \frac{A_2}{A_0} = 6$$

Ở Nhật Bản trận động đất có cường độ là:

$$8 - 6 = \log \frac{A_1}{A_0} - \log \frac{A_2}{A_0} = \log \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow 2 = \log \frac{A_1}{A_2} \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = 10^2 = 100.$$

Khi đó:

Câu 15: Giả sử số lượng một bầy ruồi tại thời điểm t được tính theo công thức là $N(t)=N_o.e^{kt}$, trong đó N_o là số lượng bầy ruồi tại thời điểm $t=0$ và k là hằng số tăng trưởng của bầy ruồi. Biết số lượng bầy ruồi tăng lên gấp đôi sau 9 ngày và biết $N_0=100$ con. Hỏi sau bao nhiêu ngày bầy ruồi có 800 con?

Lời giải

Ta có: $2N_0=N_0.e^{9k}\Leftrightarrow k=\dfrac{\ln 2}{9}$

Để được 800 con ruồi, ta có: $800=100.e^{t.\frac{\ln 2}{9}}\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 8}{\ln 2}.9=27$ ngày.

Câu 16: Chu kì bán rã của chất phóng xạ Plutolium ^{239}Pu là 24360 năm (tức là một lượng chất ^{239}Pu sau 24360 năm phân hủy còn một nửa). Sự phân hủy này được tính theo công thức $S=Ae^{-rt}$, trong đó A là lượng chất phóng xạ ban đầu, r là tỉ lệ phân hủy hàng năm, t là thời gian phân hủy, S là lượng còn lại sau thời gian phân hủy t. Hỏi 20 gam ^{239}Pu sau ít nhất bao nhiêu năm thì phân hủy còn 4 gam ?

Lời giải

Vì ^{239}Pu có chu kì bán rã là 24360 năm nên với 20 gam ^{239}Pu ta có:

$10=20.e^{-r.24360}\Leftrightarrow -r.24360=\ln\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow r=\dfrac{\ln 2}{24360}$.

Theo bài ra ta có phương trình $4=20.e^{-rt}\Leftrightarrow -rt=\ln\dfrac{1}{5}\Leftrightarrow rt=\ln 5\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 5}{r}$.

Suy ra $t\approx 56562,2$.

Vậy sau ít nhất 56563 năm thì 20 gam ^{239}Pu sẽ phân hủy còn 4 gam.

Câu 17: Cho áp suất không khí P (đo bằng milimet thuỷ ngân, kí hiệu là mmHg) suy giảm mũ so với độ cao x (đo bằng mét), tức P giảm theo công thức $P=P_0e^{xi}$ trong đó $P_0=760mmHg$ là áp suất ở mực nước biển $(x=0)$, i là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao $1000m$ thì áp suất của không khí là $672,71mmHg$. Hỏi áp suất không khí ở độ cao $3580m$ gần với số nào sau đây nhất

Lời giải

Áp dụng công thức $P=P_0e^{xi}$

Ở độ cao $1000m$, ta có : $P_0 = 760mmHg, x = 1000m, P = 672,71mmHg$, từ giả thiết này ta tìm được hệ số suy giảm i. Ta có

$$672,71 = 760e^{1000\times i} \Leftrightarrow 1000i = \ln\frac{672,71}{760} \Leftrightarrow i = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$$

Khi đó ở độ cao $3580m$, áp suất của không khí là: $P = 760e^{\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}\times 3580} \approx 491,04$.

Câu 18: Áp suất không khí P theo công thức $P = P_0.e^{kx}\ (\text{mmHg})$, trong đó x là độ cao, $P_0 = 760\ (\text{mmHg})$ là áp suất không khí ở mức nước biển $(x = 0)$, k là hệ số suy giảm. Biết rằng ở độ cao 1000 m thì áp suất không khí là $672,71\ (\text{mmHg})$. Tính áp suất của không khí ở độ cao $4000m$

Lời giải

Ở độ cao 1000 m áp suất không khí là $672,71\ (\text{mmHg})$.

Nên ta có $672,71 = 760e^{1000k} \Leftrightarrow e^{1000k} = \frac{672,71}{760} \Leftrightarrow k = \frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}$.

Áp suất ở độ cao 4000 m là $P = 760e^{4000k} = 760e^{4000\cdot\frac{1}{1000}\ln\frac{672,71}{760}} \approx 466,52\ (\text{mmHg})$.

Câu 19: Sự tăng trưởng của một loại vi khuẩn tuân theo công thức $S = A.e^{rt}$, trong đó A là số lượng vi khuẩn ban đầu, r là tỉ lệ tăng trưởng, t là thời gian tăng trưởng. Biết rằng số lượng vi khuẩn ban đầu là 100 con và sau 5 giờ có 300 con. Hỏi số con vi khuẩn sau 10 giờ ?

Lời giải

Trước tiên, ta tìm tỉ lệ tăng trưởng mỗi giờ của loại vi khuẩn này.

Từ giả thiết ta có: $300 = 100.e^{5r} \Leftrightarrow r = \frac{\ln 300 - \ln 100}{5} = \frac{\ln 3}{5}$.

Sau 10 giờ, từ 100 con vi khuẩn sẽ có $100.e^{10.\frac{\ln 3}{5}} = 900$ con.

Câu 20: Gọi $I(t)$ là số ca bị nhiễm bệnh Covid-19 ở quốc gia X sau t ngày khảo sát. Khi đó ta có công thức $I(t) = A.e^{r_0(t-1)}$ với A là số ca bị nhiễm trong ngày khảo sát đầu tiên, r_0 là hệ số lây nhiễm. Biết rằng ngày đầu tiên khảo sát có 500 ca bị nhiễm bệnh và ngày thứ 10 khảo sát có 1000 ca bị nhiễm bệnh. Hỏi ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh gần nhất với số nào dưới đây, biết rằng trong suốt quá trình khảo sát hệ số lây nhiễm là không đổi?

Lời giải

Theo giả thiết ta có $I(1) = A = 500$.

$$I(10) = A.e^{9r_0} \Leftrightarrow 1000 = 500.e^{9r_0} \Leftrightarrow r_0 = \frac{\ln 2}{9}$$

Ngày thứ 10 có 1000 ca nên .

$$I(20)=500.e^{\frac{19\ln 2}{9}}\approx 2160$$

Vậy ngày thứ 20 số ca nhiễm bệnh là .

Câu 21: Người ta thả một lượng bèo vào một hồ nước. Kết quả cho thấy sau 9 giờ bèo sẽ sinh sôi kín cả mặt hồ. Biết rằng sau mỗi giờ, lượng bèo tăng gấp 10 lần lượng bèo trước đó và tốc độ tăng không đổi. Hỏi sau mấy giờ thì lượng bèo phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ?

Lời giải

Gọi A là lượng bèo ban đầu. Sau mỗi giờ, lượng lá bèo tăng gấp 10 lần nên sau 9 giờ ta lượng bèo là $A.10^9$.

Gọi t là số giờ để lượng bèo trong hồ phủ kín $\frac{1}{3}$ mặt hồ. Khi đó ta có:

$$A.10^t=\frac{1}{3}\times A.10^9\Rightarrow t=\log\frac{10^9}{3}=9-\log 3.$$

Câu 22: Một nguồn âm đẳng hướng đặt tại điểm O có công suất truyền âm không đổi. Mức cường độ âm tại điểm M cách O một khoảng R được tính bởi công thức $L_M=\log\frac{k}{R^2}$ (Ben) với k là hằng số. Biết điểm O thuộc đoạn thẳng AB và mức cường độ âm tại A và B lần lượt là $L_A=3$ (Ben) và $L_B=5$ (Ben). Tính mức cường độ âm tại trung điểm AB (làm tròn đến 2 chữ số sau dấu phẩy).

Lời giải

Ta có: $L_A<L_B\Rightarrow OA>OB$.

Gọi I là trung điểm AB. Ta có:

$$L_A=\log\frac{k}{OA^2}\Rightarrow\frac{k}{OA^2}=10^{L_A}\Rightarrow OA=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}}$$

$$L_B=\log\frac{k}{OB^2}\Rightarrow\frac{k}{OB^2}=10^{L_B}\Rightarrow OB=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}$$

$$L_I=\log\frac{k}{OI^2}\Rightarrow\frac{k}{OI^2}=10^{L_I}\Rightarrow OI=\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}}$$

Ta có:

$$OI=\frac{1}{2}(OA-OB)\Rightarrow\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_I}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_A}}-\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{10}^{L_I}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}}-\frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)$$

$$\Rightarrow L_I = -2\log\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{10}^{L_A}} - \frac{1}{\sqrt{10}^{L_B}}\right)\right] \Rightarrow L_I \approx 3,69$$

.