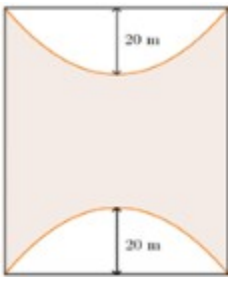
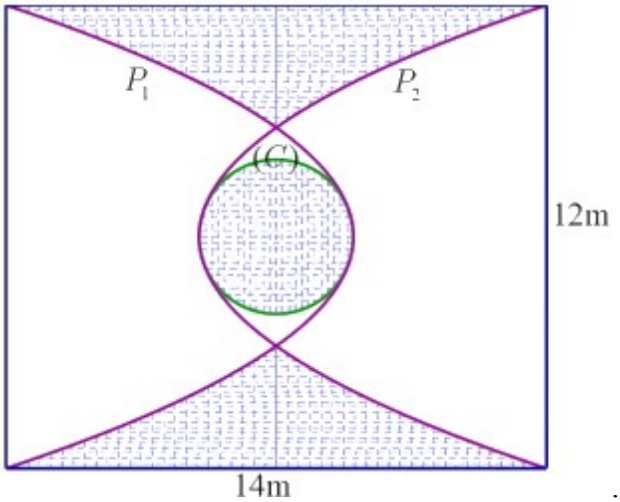
BÀI TOÁN THỰC TẾ ỨNG DỤNG TÍCH PHÂN

Câu 1. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?

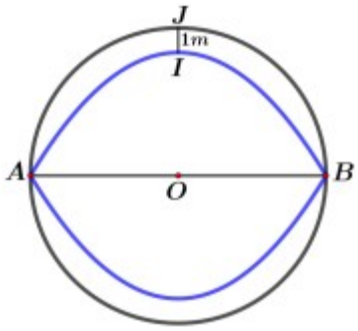


Câu 2. Người ta lát gạch trang trí một mảnh sân hình chữ nhật có kích thước $14\text{m}\times 12\text{m}$ như hình vẽ bên dưới, trong đó $(P_1),(P_2)$ là hai parabol đối xứng trục với nhau qua trục đối xứng vuông góc với chiều dài của mảnh sân, (C) là đường tròn có tâm trùng với tâm của mảnh sân và lần lượt có duy nhất một điểm chung với các parabol đó (tham khảo hình vẽ biết phần gạch đậm là phần lát gạch). Chi phí cho phần lát gạch là 240 nghìn đồng một mét vuông. Trong trường hợp hình tròn (C) có diện tích lớn nhất thì chi phí lát gạch là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn tới hàng phần chục).

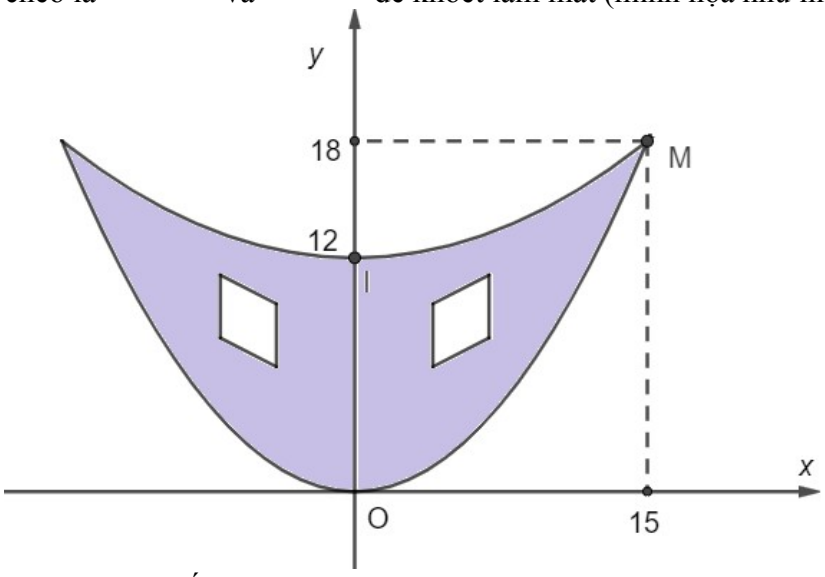


Câu 3. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 4 dm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Giả sử để hoàn thiện sơn và phủ bóng viên gạch thì chi phí phần cánh hoa (màu đen) là 400 nghìn/ m^2, chi phí phần còn lại (màu trắng) là 300 nghìn/ m^2.Tính chi phí (đơn vị nghìn đồng) để sơn và phủ bóng cả viên gạch (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Câu 4. Khu vực trung tâm một quảng trường *(xem hình vẽ bên dưới)* có dạng hình tròn đường kính AB bằng $12m$. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A B, và có đỉnh cách mép hình tròn $1m$. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 300 nghìn đồng mỗi mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 900 nghìn đồng mỗi mét vuông. Tổng chi phí để hoàn thành khu vực này là bao nhiêu triệu đồng?*(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)*.

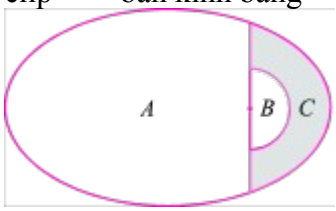


Câu 5. Để tham gia lễ hội hóa trang, Bạn An dự định làm một chiếc mặt nạ nửa mặt bằng chất liệu giấy cứng. Hình dạng của chiếc mặt nạ được bạn thiết kế trên mặt phẳng tọa độ Oxy là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol $(P_1),(P_2)$ lần lượt có đỉnh là gốc tọa độ O và điểm $I(0;12)$, cùng nhận trục Oy làm trục đối xứng và cùng đi qua điểm $M(15;18)$. Mỗi đơn vị trên các trục tọa độ có độ dài $1\,\text{cm}$. Sau đó, bạn vẽ hai hình thoi bằng nhau có độ dài các đường chéo là $2\sqrt{2}\,\text{cm}$ và $4\sqrt{2}\,\text{cm}$ để khoét làm mắt (minh họa như hình vẽ dưới đây)



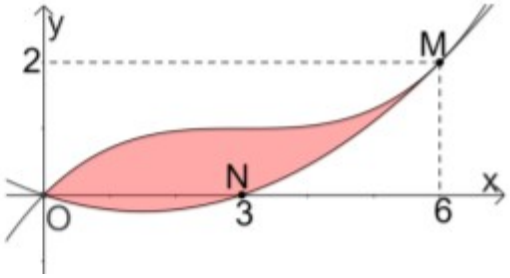
Công đoạn cuối cùng là tô màu xám cho một mặt của mặt nạ. Tính diện tích cần tô màu theo đơn vị cm^2.

Câu 6. Một khu vườn hình elip (E) có độ dài trục lớn bằng $10m$ và trục nhỏ bằng $8m$ (như hình vẽ). Khu vực A để trồng hoa; khu vực B để trồng cỏ, là nửa hình tròn có tâm là một tiêu điểm của elip (E) bán kính bằng $1m$ còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch.



Diện tích phần lát gạch bằng bao nhiêu m^2 *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*

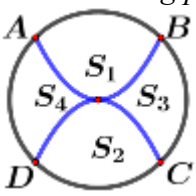
Câu 7. Một công ty thuê thợ vẽ logo công ty như hình vẽ lên một bức tường lớn. Logo có dạng là một bông hoa có 6 cách hoa giống nhau, sắp xếp cách đề như hình vẽ.



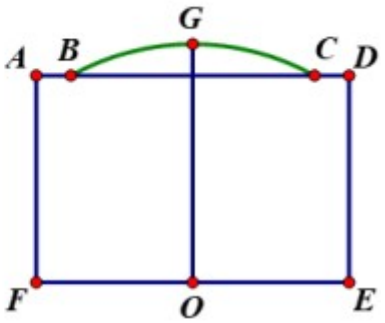
Để chính xác hóa kích thước và hình dạng như hình vẽ, mỗi cánh hoa được thiết kế như sau: Trong mặt phẳng Oxy (một đơn vị ứng với 1 mét trên thực tế), một cánh hoa được xem là một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số bậc ba $y=\frac{(x-3)^3}{27}+1\,(C)$ và một đường parabol $(P): y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. (C) và (P) cắt nhau tại hai điểm $O(0;0), M(6;2)$ và (P) đi qua điểm $N(3;0)$. Biết rằng chi phí vẽ logo nói trên được tính dựa trên mỗi mét vuông cánh hoa được vẽ, mỗi mét vuông được báo giá là 210 nghìn đồng.

Hãy tính chi phí vẽ logo đó (đơn vị: nghìn đồng, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 8. Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A; B; C; D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng 4 m *(như hình vẽ)*. Phần diện tích $S_1;S_2$ dùng để trồng hoa, phần diện tích $S_3;S_4$ dùng để trồng cỏ. Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng/m^2, kinh phí để trồng cỏ là 100.000 đồng/m^2. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu triệu đồng để trồng bồn hoa đó? *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*



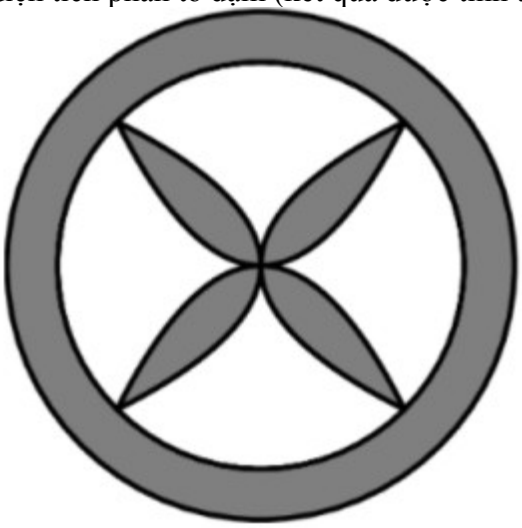
Câu 9. Cổng chính nhà bác Bình có 2 cánh cửa kẽm, sơn tĩnh điện, bằng nhau và có hoạ tiết giống hệt nhau. Khi khép cửa tạo ra một đường khép kín $ABGCDEFA$ (như hình ảnh dưới).



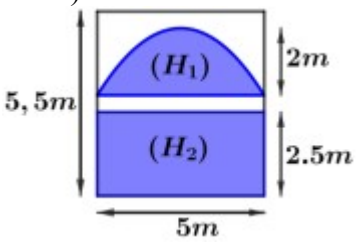
Biết $AF=DE=2,4(m); AB=CD=0,5(m); OG=3(m)$, O là trung điểm của EF, đường cong BGC là cung tròn có bán kính bằng OG (G là trung điểm cung BC). Do đã sử dụng lâu năm nên lớp sơn tĩnh điện đã bị xuống cấp. Bác Bình muốn sơn mới lại cửa, giá thành để sơn mới lại cửa là 300 nghìn đồng trên một m^2 diện tích cửa. Hỏi bác Bình phải trả khoản tiền bằng bao nhiêu triệu đồng (*kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm*).

Câu 10. Một hoa văn trang trí được thiết kế gồm hai đường tròn đồng tâm và bốn phần của bốn đường parabol chung đỉnh (đỉnh là tâm của hai đường tròn). Biết rằng hai đường tròn đó có bán kính

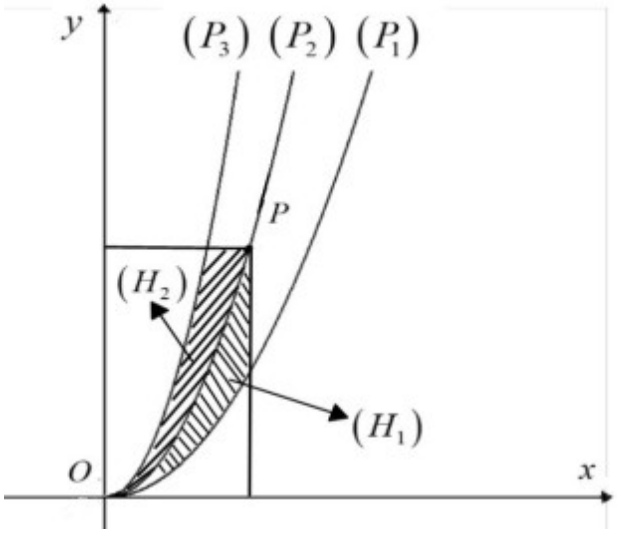
lần lượt là $20\ \text{cm}$ và $16\ \text{cm}$; bốn đường parabol đó đôi một cắt nhau tại bốn điểm (khác đỉnh của parabol) là bốn đỉnh của một hình vuông nội tiếp đường tròn nhỏ (như hình vẽ bên). Tính diện tích phần tô đậm (kết quả được tính theo cm^2 và làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 11. Hình vẽ bên dưới minh họa mặt cắt đứng của mặt trước một ngôi nhà có dạng hình chữ nhật $5\text{m}\times 5,5\text{m}$ với các kích thước được cho như trong hình bên dưới. Phần tô đậm trong hình vẽ ứng với phần kính được lắp đặt, phần còn lại lót gạch men. Phần lắp kính được chia làm 2 miền (H_1) và (H_2), trong đó miền (H_1) có đường biên cong là một phần của parabol. Chi phí lắp kính là 1,5 triệu đồng cho 1m^2 và chi phí lót gạch men là 0,28 triệu đồng cho 1m^2. Tổng chi phí cần hoàn thành mặt trước ngôi nhà là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).

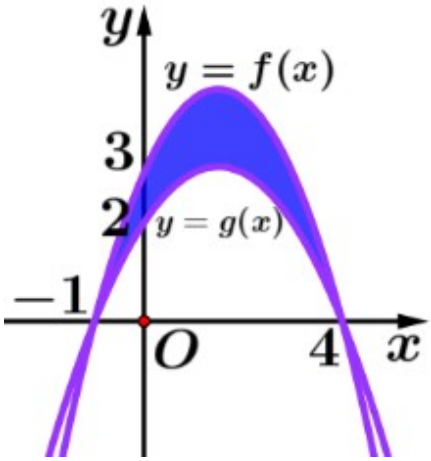


Câu 12. Cho ba Parabol $(P_1): y=x^2; (P_2): y=2x^2; (P_3): y=kx^2$ với $k>2$. Gọi P là điểm bất kỳ thuộc parabol (P_2) và S_1, S_2 là diện tích các miền phẳng $(H_1), (H_2)$ (các miền được gạch chéo trong hình vẽ).



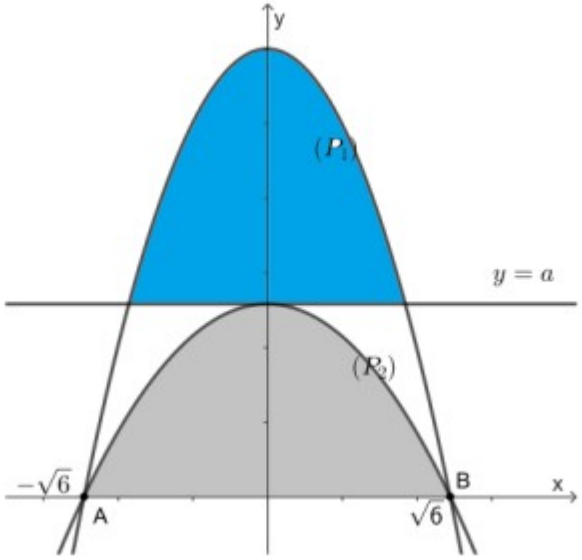
Nếu $S_1=S_2$ thì giá trị của $k=\dfrac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\dfrac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Câu 13. Hai hàm số $y=f(x); y=g(x)$ đều là những hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ bên dưới.

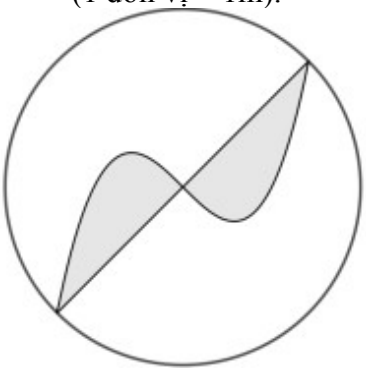


Tính diện tích phần tô đậm (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

Câu 14. Cho parabol $(P_1): \ y=-x^2+6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A và B; parabol (P_2) đi qua hai điểm A; B và có đỉnh nằm trên đường thẳng $d: y=a, (0<a<6)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d; gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ). Biết rằng $S_1=S_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=a^3-12a^2+108a$



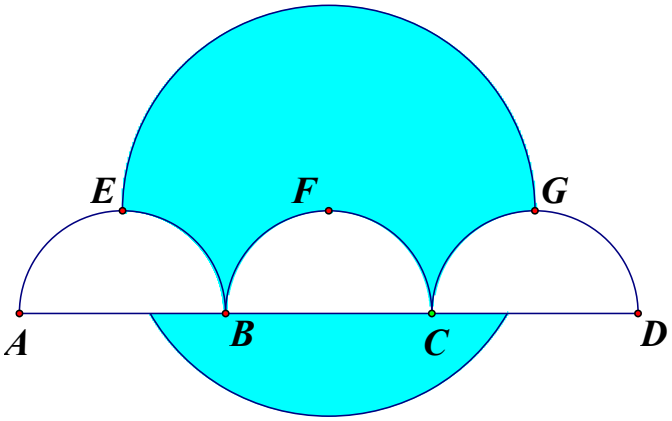
Câu 15. Một công ty đã đặt hàng việc xây dựng logo doanh nghiệp của mình bằng gỗ và đồng thiết kế theo mẫu bên dưới. Hình tròn sẽ làm bằng gỗ có tâm tại điểm $O(0;0)$. Phần làm bằng đồng (là phần tô đậm) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đường thẳng có phương trình $y=x$. (1 đơn vị = 1m).



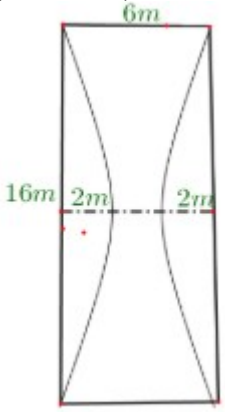
Biết rằng 1 mét vuông tấm đồng có giá 600000 đồng và không bị hao phí; chi phí nhân công làm phần đồng là 30% so với giá tiền tấm đồng, và chi phí cho hình tròn bằng gỗ, vận chuyển

và lắp đặt tại chỗ là một khoản cố định là 2700000 đồng. Hỏi công ty phải trả bao nhiêu triệu đồng cho việc chế tạo và lắp đặt logo doanh nghiệp của mình?

Câu 16. Trong hình vẽ dưới đây, đoạn AD được chia làm 3 bởi các điểm B và C sao cho $AB = BC = CD = 2$. Ba nửa đường tròn có bán kính bằng 1 là $\overset{\frown}{AEB}$, $\overset{\frown}{BFC}$ và $\overset{\frown}{CGD}$ có đường kính tương ứng là AB, BC và CD. Các điểm E, F, G lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung EG với 3 nửa đường tròn. Một đường tròn tâm F, bán kính bằng 2. Diện tích miền bên trong đường tròn tâm F và bên ngoài 3 nửa đường tròn (miền tô đậm) bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).

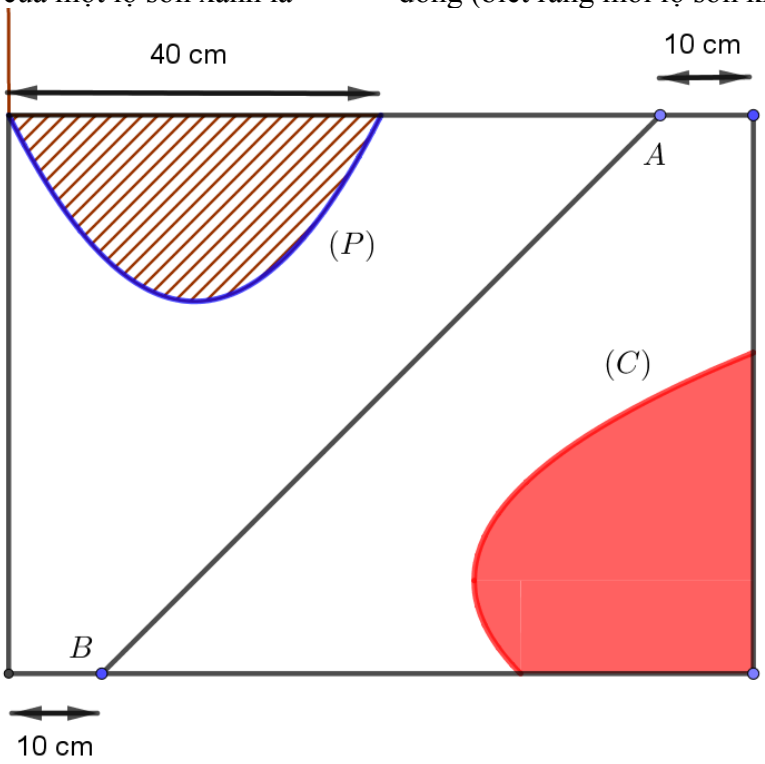


Câu 17. Ông A có mảnh đất hình chữ nhật chiều dài 16m, chiều rộng 6m. Ông A muốn thiết kế mảnh đất đó thành ba phần bởi đường cong hypebol (như hình vẽ). Ông A dự định trồng hoa ở hai phần đất được giới hạn bởi đường cong hypebol và chiều dài mảnh đất, phần đất còn lại ông lát đá. Biết chi phí trồng hoa là 150.000 đồng/$1m^2$ và lát đá là 300.000 đồng/$1m^2$. Tính chi phí mà ông A bỏ ra để hoàn thành dự định của mình, (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).

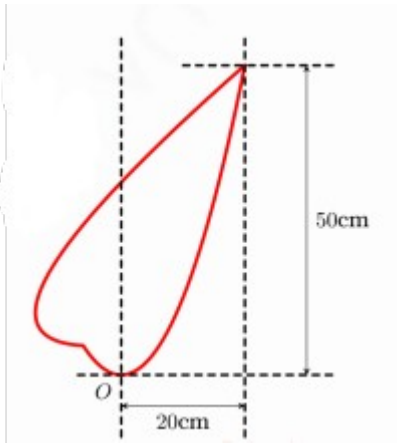


Câu 18. Một nghệ sĩ đang thực hiện vẽ tranh tường 3D nghệ thuật để trang trí nội thất. Mỗi bức tranh gồm một hình lục giác đều có cạnh bằng 30 cm, trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh lục giác đều 30 cm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình dưới). Biết tổng giá vẽ tranh 3D (bao gồm công và vật tư) là 500.000 đồng/m². Hỏi nghệ sĩ nhận được bao nhiêu tiền sau khi hoàn thành bức tranh? (Làm tròn đến nghìn đồng gần nhất.)

Câu 19. Để trang trí một ô hình chữ nhật với kích thước $80\text{ cm}\times 60\text{ cm}$ trên tường căn phòng của mình, anh Bình đã tô màu 2 hoạ tiết giới hạn bởi các parabol (P), parabol (C) và các cạnh của ô chữ nhật bằng màu vàng (kí hiệu sọc nghiêng) và màu xanh (vùng tô đậm) (như hình vẽ). Biết rằng các parabol (P) và (C) đối xứng nhau qua đường thẳng AB và diện tích phần màu vàng bằng $\frac{1600}{3}\text{ cm}^2$. Tính tổng số tiền (đơn vị: triệu đồng) mà anh Bình cần phải trả để mua sơn trang trí. Biết mỗi lọ sơn, sơn được tối đa 30 cm^2. Cho biết giá của một lọ sơn vàng là $50\,000$ đồng, giá của một lọ sơn xanh là $30\,000$ đồng (biết rằng mỗi lọ sơn không được bán lẻ).

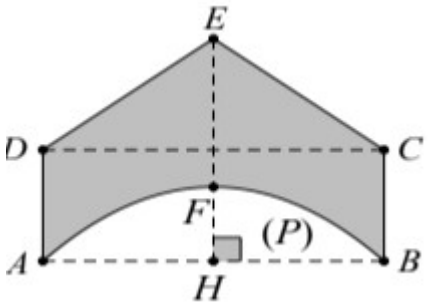


Câu 20. Sau khi đọc xong truyện ngắn rất cảm động "Chiếc lá cuối cùng" của nhà văn O.Henry, bạn An muốn thiết kế hình ảnh một chiếc lá để gửi đến chị em Johnsy và Sue. Chiếc lá là một hình phẳng được giới hạn bởi hai phần parabol giống nhau. Biết một parabol có đỉnh là điểm O và trục đối xứng của hình phẳng này là một đường thẳng tạo với phương ngang góc 60°. Với các kích thước được cho như hình vẽ, hãy tính diện tích của chiếc lá. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2)

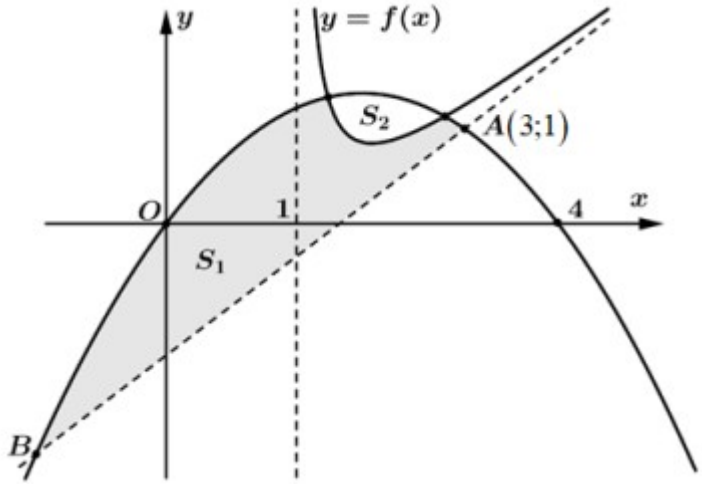


Câu 21. Bác An lên kế hoạch làm một cái biển quảng cáo phẳng, có thiết kế là phần được tô màu đậm trong hình vẽ bên. Đường cong (P) là một parabol có đỉnh là điểm F, có trục đối xứng là FH và đi qua các điểm A, B. Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật,

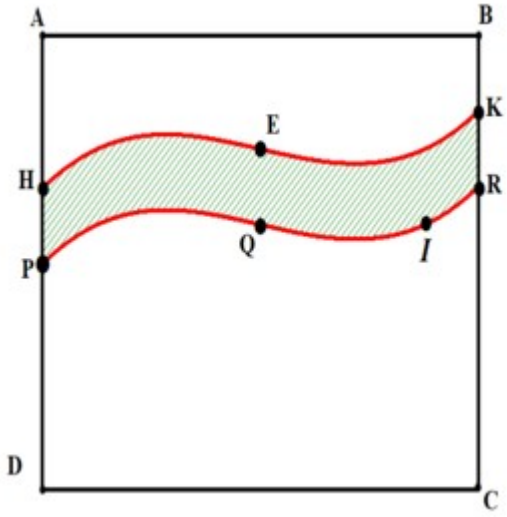
$AB = 8\,m,\ BC = 3\,m, EH = 6\,m,\ FH = 2\,m$. Bác An kí hợp đồng với công ty X với đơn giá là $1{,}1$ triệu đồng/ $1\,m^2$. Hỏi số tiền mà bác An phải trả sau khi làm xong cái biển quảng cáo là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



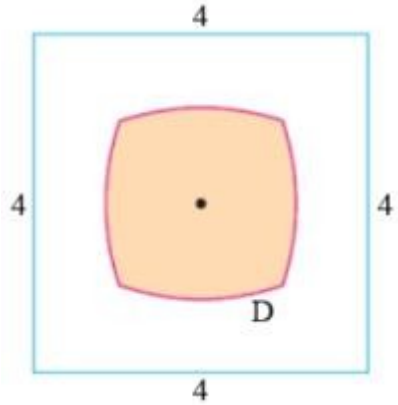
Câu 22. Cho hàm số bậc hai trên bậc nhất $f(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{4x - d}$ và parabol (P) có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y = f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x = 1$ và đường tiệm cận xiên cắt parabol tại điểm $A(3;1)$. Ký hiệu các diện tích hình phẳng S_1, S_2 lần lượt là các phần diện tích được tô đậm và không tô màu như hình vẽ. Biết rằng giá trị $S_1 + S_2 = \dfrac{32}{3}$ và $f(4) = \dfrac{7}{4}$. Tính giá trị của S_2 (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục).



Câu 23. Kiến trúc sư thiết kế một con đường để chia khu đất hình chữ nhật $ABCD$ với $AB = 40\text{ m}$, $AD = 60\text{ m}$ thành hai phần (hai lề đường là các đường cong HEK và $PQIR$). Trong đó phần giới hạn bởi đường cong HEK và các đoạn AH, AB, BK là sân chơi, phần giới hạn bởi đường cong $PQIR$ và các đoạn PD, DC, CR để trồng hoa (tham khảo hình vẽ). Nếu gắn một hệ trục tọa độ vuông góc có trục hoành, trục tung lần lượt cùng phương với các đường thẳng AB, AD thì đường cong $PQIR$ là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y = f(x)$. Đường cong HEK nhận được bằng cách tịnh tiến đường cong $PQIR$ theo phương thẳng đứng lên phía trên 10 m. Biết $AP = 30\text{ m}$, $BR = 20\text{ m}$, điểm Q cách các cạnh AB, AD lần lượt 25 m và 20 m, điểm I cách các cạnh AB, AD lần lượt 25 m và 35 m. Gọi S_1 là diện tích phần sân chơi và S_2 là diện tích phần trồng hoa. Tính $\dfrac{S_1}{S_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

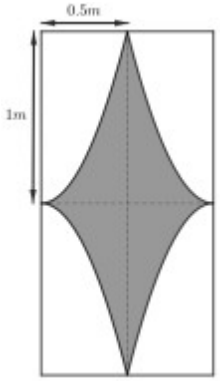


Câu 24. Hình vẽ dưới đây cho biết một miền D (được tô đậm) nằm trong hình vuông cạnh bằng 4, miền D này gồm những điểm có khoảng cách tới tâm hình vuông nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách tới cạnh gần nhất của hình vuông.

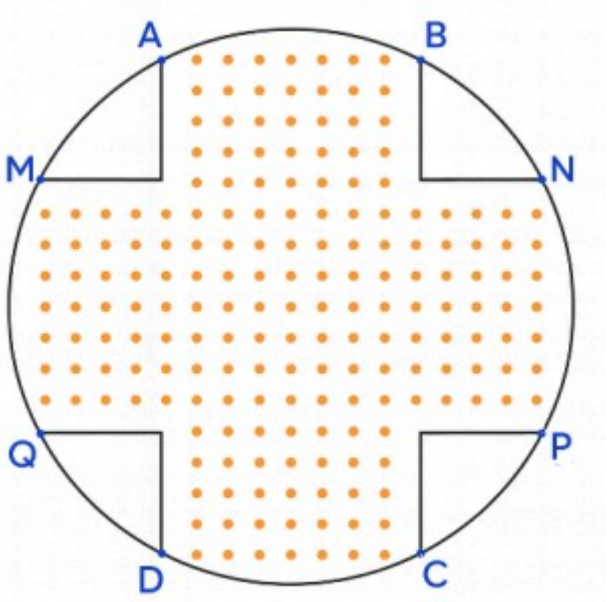


Tính diện tích miền D, với kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

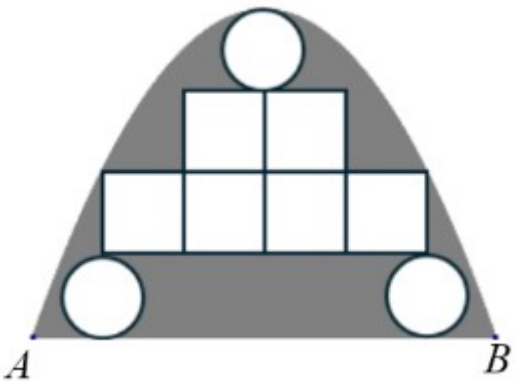
Câu 25. Nhà bác Ba có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài $2m$ và chiều rộng $1m$. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh, phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng$/m^2$ và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng$/m^2$. Hỏi, để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, bác Ba phải tốn bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng).



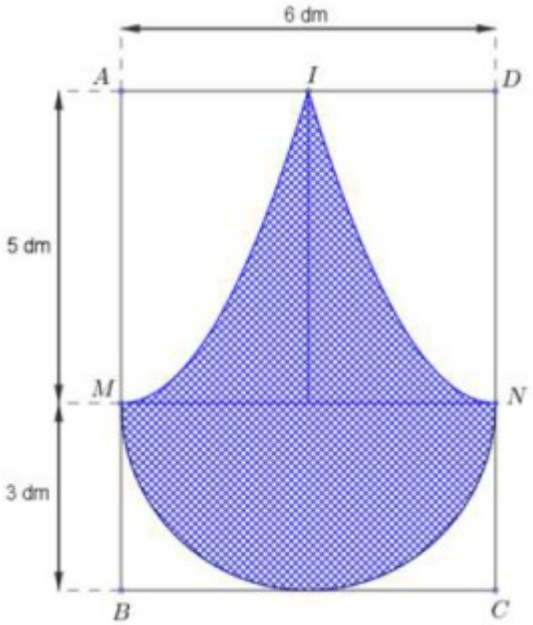
Câu 26. Một mảnh vườn hoa dạng hình tròn có bán kính bằng $6m$. Phần đất trồng hoa là phần tô trong hình vẽ bên. Biết hai hình chữ nhật $ABCD$, $MNPQ$ có $AB = MQ = 6m$ và kinh phí trồng hoa là 100000 đồng$/m^2$. Tính số tiền cần để trồng hoa? (đơn vị: triệu đồng, kết quả là tròn đến hàng phần chục).



Câu 27. Một cửa vòm có dạng hình parabol được lắp các tấm kính hình tròn đường kính $1\,m$ và các tấm kính hình vuông có cạnh $1\,m$ như hình vẽ. Phần còn lại của cửa được sơn màu trang trí với mức giá 1,2 triệu đồng $/m^2$. Chi phí sơn màu là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?

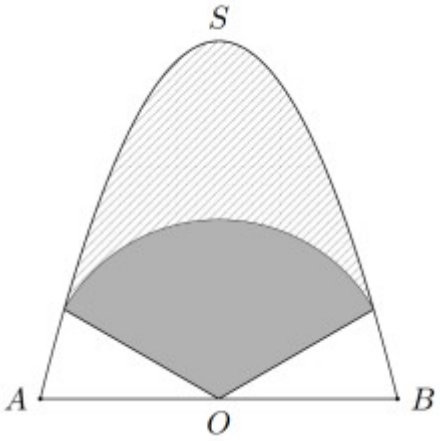


Câu 28. Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB = 8\,\text{dm}$ và chiều rộng $AD = 6\,\text{dm}$, người ta thiết kế một logo là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính $MN = 6\,\text{dm}$, tiếp xúc với BC, hai đường cong IM, IN là một phần của các đường parabol có trục đối xứng lần lượt là AB, CD với I là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ).

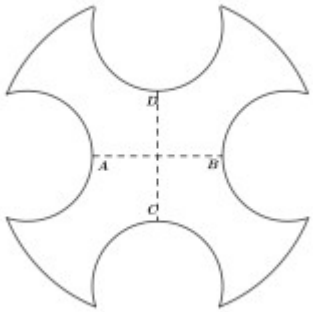


Phần logo được sơn màu xanh với chi phí 50000 đồng/ $1\,\text{dm}^2$ và phần còn lại của bảng gỗ được sơn màu trắng với chi phí 30000 đồng/ $1\,\text{dm}^2$. Hỏi cần bỏ ra bao nhiêu nghìn đồng để trang trí bảng gỗ trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

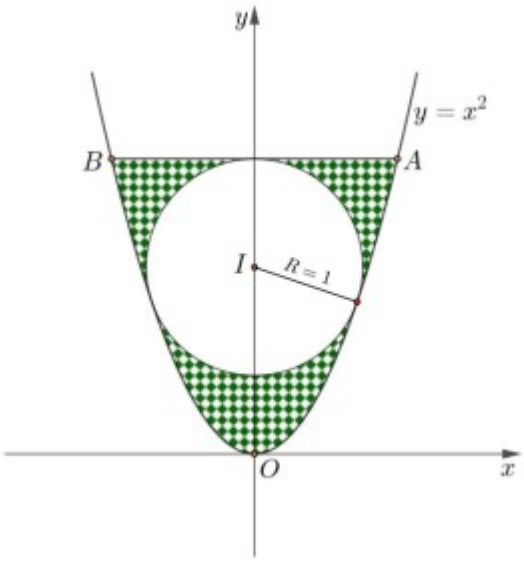
Câu 29. Để chuẩn bị quảng bá sản phẩm, người ta trang trí tấm pano dạng parabol như hình vẽ, biết $OS = 8\ m$, $AB = 6\ m$ với O là trung điểm của AB. Tấm pano được chia thành ba phần để trang trí với mức chi phí khác nhau: phần trên là phần kẻ sọc giá 100000 đồng/m², phần giữa là hình quạt tâm O bán kính $3\ m$ được tô đậm giá 200000 đồng/m², phần còn lại giá 150000 đồng/m². Tính tổng chi phí để trang trí tấm pano (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



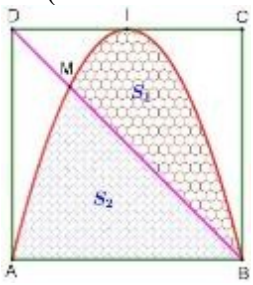
Câu 30. Trong cơ khí chế tạo, một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ bên, nhận AB và CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính *5 dm*, các đường tròn nhỏ đều có bán kính bằng *2 dm*, $AB = CD = 4\,dm$ và chi phí sơn là 103.000 đồng/m². Chi phí để sơn hoàn thiện chi tiết máy bằng bao nhiêu nghìn đồng (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị)?



Câu 31. Một khoảng sân của một ngôi nhà có hình dạng là một phần của parabol, nếu chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới thì parabol có phương trình là $y = x^2$. Chủ nhà muốn thiết kế một hồ nuôi cá cảnh có dạng hình tròn bán kính $1m$, hình tròn được thiết kế tiếp xúc với 2 nhánh của parabol, phía trên của hình tròn ngăn bởi một bức tường mỏng tiếp xúc với hình tròn. Phần đất còn lại của khoảng sân giới hạn bởi đường tròn, 2 nhánh của parabol và bức tường được thiết kế trồng hoa (phần gạch sọc trong hình). Tính diện tích mà chủ nhà thiết kế để trồng hoa, biết rằng đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).

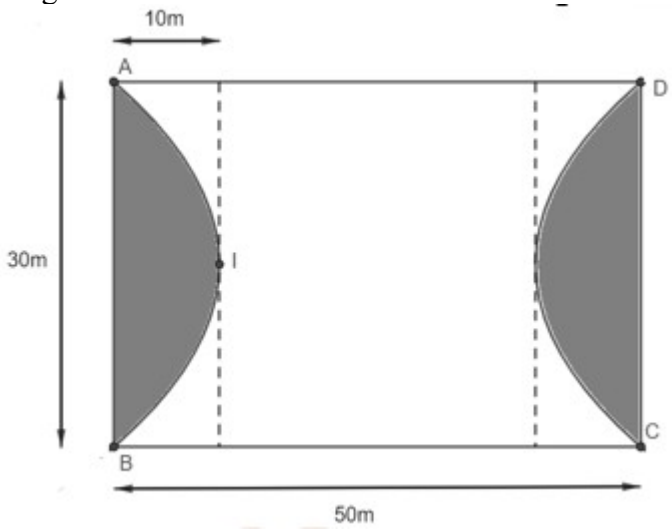


Câu 32. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4m và I là trung điểm của đoạn thẳng CD. Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A, B và cắt đường chéo BD tại M (*tham khảo hình vẽ*).

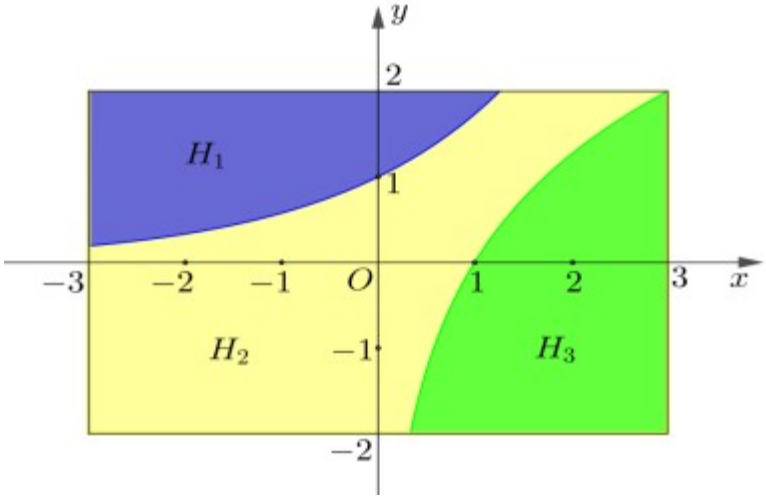


Chi phí sơn phần tô hình tổ ong (có diện tích S_1) là $200\,000$ đồng $/\text{m}^2$, chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là $150\,000$ đồng $/\text{m}^2$ và phần còn lại là $120\,000$ đồng $/\text{m}^2$. Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?

Câu 33. Kiến trúc sư thiết kế một khu vui chơi có dạng hình chữ nhật với chiều rộng $30m$ và chiều dài $50m$. Trong đó, phần tô màu đậm trồng cỏ nhung Nhật, phần còn lại trải thảm cỏ nhân tạo. Mỗi phần trồng cỏ nhung Nhật có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh I thuộc trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh I đến trung điểm của cạnh AB bằng $10m$ (xem hình minh họa). Biết giá cỏ nhung Nhật là $140\,000$ đồng/m^2, giá cỏ nhân tạo là $100\,000$ đồng/m^2. Tính tổng số tiền để trồng và trải thảm cỏ hết khu vui chơi theo đơn vị triệu đồng.

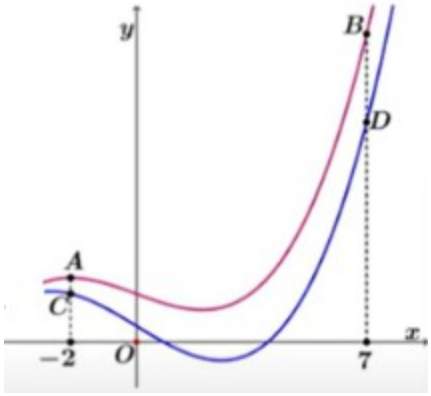


Câu 34. Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước lần lượt là $6\ m$ và $4m$ được bạn Minh trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị hàm số $f(x)=a^x\ (0<a\neq 1)$ và $g(x)=\log_b x\ (0<b\neq 1)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. Bức tường được chia làm 3 phần (tham khảo hình vẽ).



Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 sơn màu vàng và phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Bạn Minh cần mua các hộp sơn mà mỗi hộp chỉ sơn được một màu tương ứng với các màu mà bạn Minh định sơn. Biết rằng mỗi hộp sơn chỉ sơn được tối đa $3\ m^2$ tường, giá một hộp sơn màu xanh da trời là 120000 đồng, giá một hộp sơn màu xanh lá cây là 140000 đồng, giá một hộp sơn màu vàng là 160000 đồng. Cửa hàng chỉ bán số các hộp sơn là các số nguyên dương. Bạn Minh cần bao nhiêu triệu đồng để sơn bức tường đó?

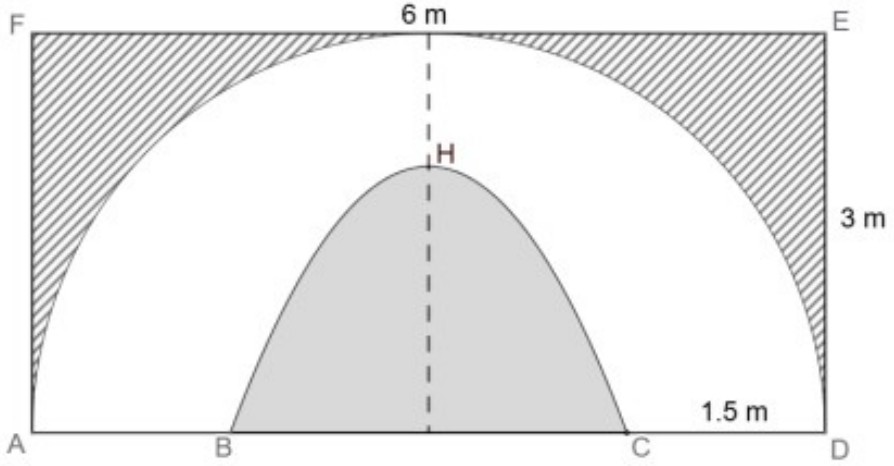
Câu 35. Hưởng ứng chính sách hiện đại hóa nông thôn, người dân ở khu phố A đồng lòng cùng nhau góp tiền để bê tông một đường đi trong khu phố (phần được tô đậm trong hình vẽ).



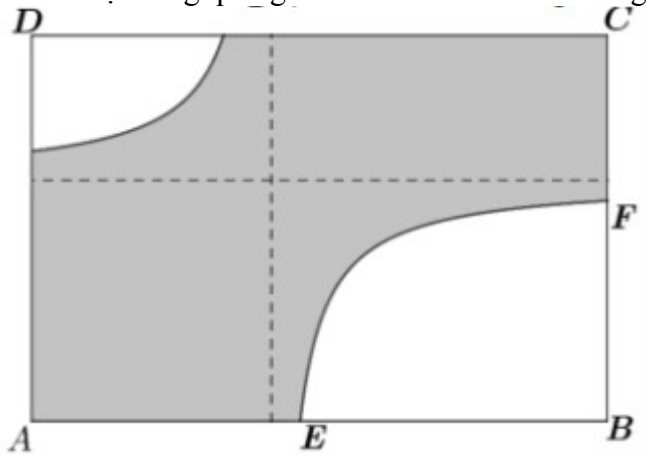
Biết rằng khi chọn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là $10\,\text{m}$, các đường cong AB, CD là mép đường được cho bởi đồ thị hàm số $f(x)=\frac{1}{32}x^3-\frac{3}{8}x+\frac{3}{2}$ và $g(x)=\frac{1}{32}x^3-\frac{5}{8}x+\frac{1}{2}$, đồng thời lớp bê tông được đổ dày $16\,\text{cm}$ và giá tiền $1\,\text{m}^3$ bê tông là 1080000 đồng. Tính số tiền (đơn vị triệu đồng) cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 36. Bác Bình muốn nhờ thợ trang trí một bức tường hình chữ nhật $ADEF$ với kích thước $EF=6m,\ DE=3m$ sao cho cân xứng hai nửa. Phần gạch chéo là hình giới hạn bởi đường gấp khúc $AFED$ và nửa đường tròn đường kính AD, được thuê sơn với đơn giá 250000 đồng mỗi mét vuông. Phần màu trắng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AD và một đường parabol (có đỉnh H cách đường thẳng AB một khoảng bằng $2m$ và đi qua hai điểm B, C nằm trên cạnh AD thỏa mãn $AB=CD=1,5m$) được thuê trang trí bằng bức phù điêu đắp bằng xi

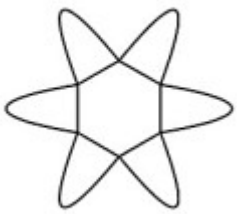
măng với đơn giá 1950000 đồng mỗi mét vuông (tham khảo hình vẽ). Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu triệu đồng để trang trí bức tường như vậy (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)

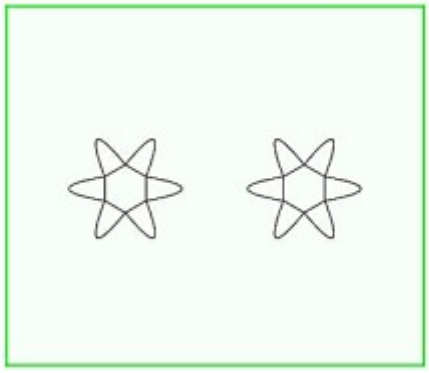


Câu 37. Một công ti đang thiết kế một bảng quảng cáo hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB = 12\,m$ và $AD = 8\,m$. Phần trung tâm của bảng sẽ được in nội dung quảng cáo, được mô tả là phần tô đậm (xem hình minh họa). Hai đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số có dạng $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này đều cách điểm A một khoảng bằng 5 m. Đồ thị giao với cạnh AB tại điểm E thỏa mãn $\dfrac{AE}{AB} = \dfrac{7}{15}$. Diện tích phần in nội dung quảng cáo là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



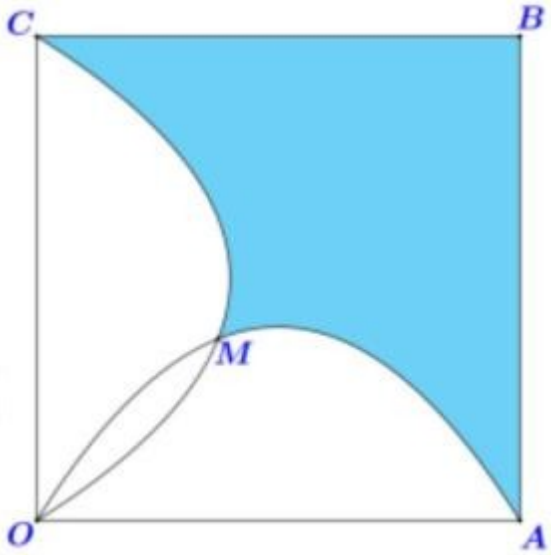
Câu 38. Để trang trí một bức tường hình chữ nhật có kích thước $3m \times 4m$ trong phòng, bạn Hoa vẽ lên tường một hình như sau: Trên mỗi cạnh của một hình lục giác đều có cạnh $2dm$, vẽ một cánh hoa hình parabol. Đỉnh của parabol cách cạnh $3dm$ và nằm phía ngoài hình lục giác đều. Đường parabol đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh hình lục giác (tham khảo hình vẽ).



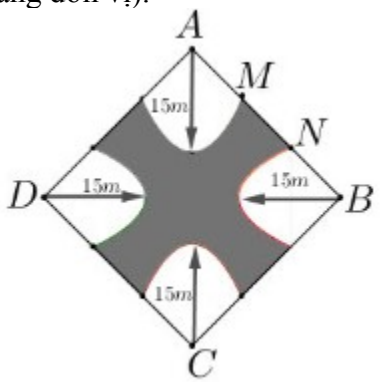


Hỏi bạn Hoa có thể vẽ tối đa bao nhiêu hình có cùng kích thước như vậy lên bức tường cần trang trí?

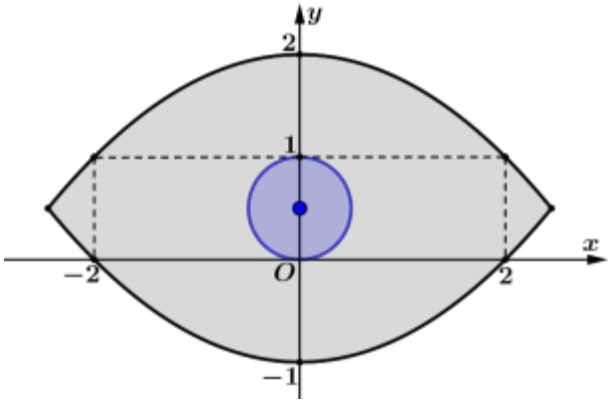
Câu 39. Cho hình vuông OABC cạnh bằng 8, điểm M nằm trong hình vuông sao cho khoảng cách từ M đến các cạnh OA, OC cùng bằng 3. Parabol (P_1) đi qua các điểm O, A, M, Parabol (P_2) đi qua các điểm O, C, M. Tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ bên). (kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



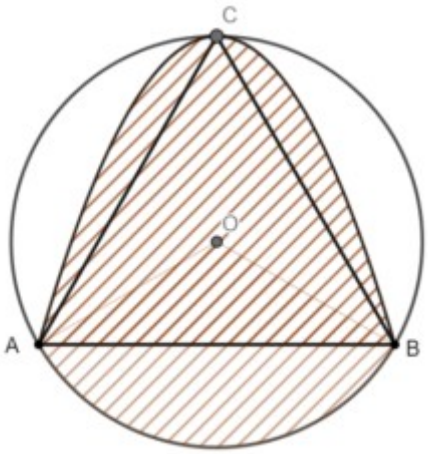
Câu 40. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo $AC = 45\,\text{m}$. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với các đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình vuông, khoảng cách từ đỉnh đó đến đỉnh tương ứng của hình vuông bằng $15\,\text{m}$. Bản thiết kế khu sinh hoạt nhận tâm hình vuông $ABCD$ làm tâm đối xứng và trên hình bên ta có $AM = MN = NB$. Để trang trí cho phần sân chơi tốn 500 nghìn đồng $/1\,\text{m}^2$, để trồng hoa tốn 200 nghìn đồng $/1\,\text{m}^2$. Tổng số tiền cần dùng là bao nhiêu triệu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Câu 41. Bạn An thực hiện thiết kế một logo hình con mắt cho một phòng khám nhãn khoa. Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y = f(x)$ và $y = g(x)$ có các kích thước như hình vẽ dưới đây (phần được tô màu đen) và một hình tròn có bán kính bằng $0,5$ dm ở giữa là phần con ngươi (phần được tô màu xanh), đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet. Biết rằng chi phí để sơn phần con ngươi hình tròn màu xanh là 25000 đồng/dm^2 và chi phí để sơn phần còn lại màu đen là 20000 đồng/dm^2. Chi phí để sơn logo trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

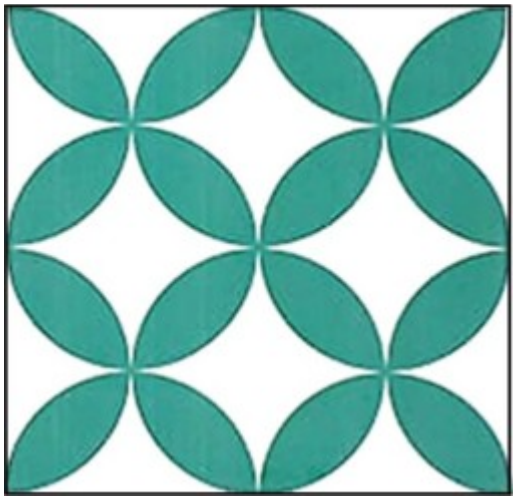


Câu 42. Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB = 2\sqrt{3}\ cm.$ Đường cong qua ba điểm A, B, C là một phần của parabol (xem hình vẽ).



Tính diện tích của phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần không gạch) theo đơn vị cm^2 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

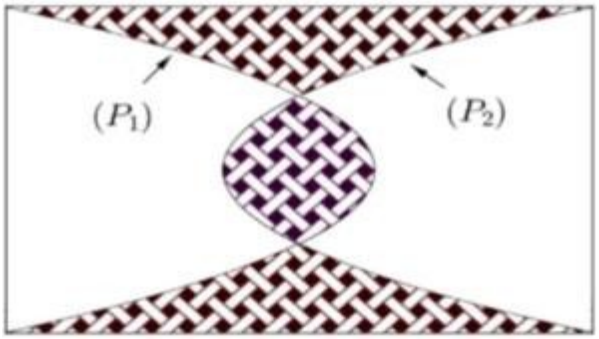
Câu 43. Viên gạch men dùng để lát nền nhà là một hình vuông có cạnh bằng 80 cm (xem hình bên dưới). Mỗi viên gạch có 4 bông hoa, mỗi bông hoa gồm 4 cánh hoa. Mỗi cánh hoa (phần màu xanh) là phần giao nhau của hai hình tròn có cùng bán kính và khoảng cách giữa hai tâm là $20\sqrt{2}$ cm.



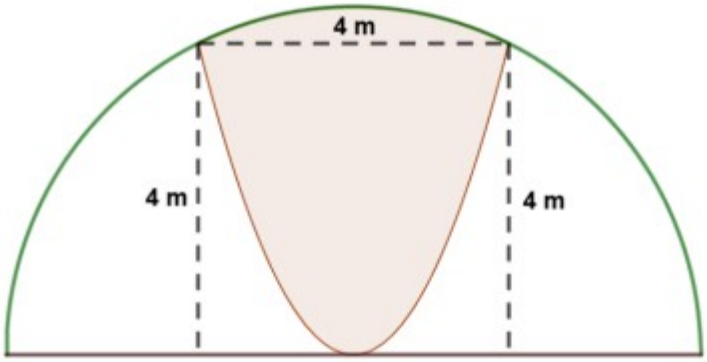
Ước tính ở công đoạn tráng men, phần màu xanh có chi phí 50 nghìn đồng trên một mét vuông, còn phần màu trắng có chi phí 30 nghìn đồng trên một mét vuông. Tính chi phí (đơn vị: tỉ đồng) của công đoạn tráng men này, khi cơ sở dự định sản xuất 100000 viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Câu 44. Trang trí một sân hình chữ nhật kích thước 28m x 16m, trong đó hai Parabol (P_1) đối xứng với (P_2) qua đường thẳng đi qua hai trung điểm của chiều dài sân (hình vẽ), khoảng cách giữa hai

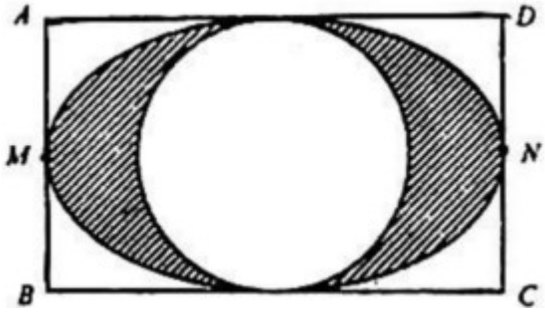
đỉnh Parabol bằng 4m. Chi phí trang trí cho phần hoa văn là 180 ngàn đồng trên một mét vuông, phần trắng là 160 ngàn đồng trên một mét vuông. Tổng chi phí trang trí cho sân là bao nhiêu **triệu đồng**? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



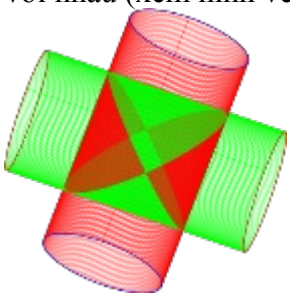
Câu 45. Khuôn viên nhà bạn Thùy Dương có dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên dành để trồng cỏ Nhung Nhật. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí trồng hoa và cỏ Nhung Nhật tương ứng là 250.000 đồng/m^2 và 150.000 đồng/m^2. Hỏi chi phí để trồng hoa và trồng cỏ Nhung Nhật trong khuôn viên đó hết bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



Câu 46. Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục MN. Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB = 6cm, AD = 10cm$ và M, N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Hai đường cong là đường Elip có hình chữ nhật cơ sở là $ABCD$ và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AD và BC (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của vật trang trí đó (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị* cm^3).

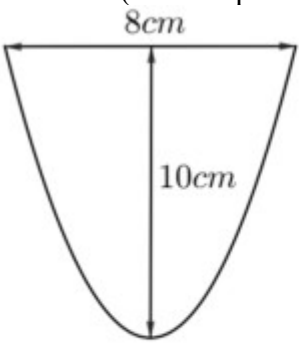


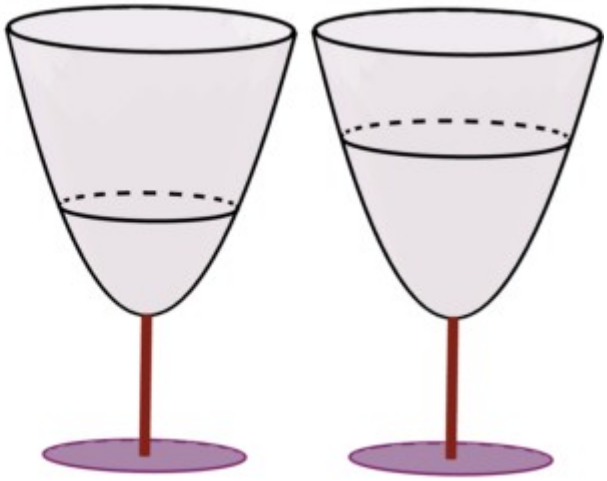
Câu 47. Cho hai khối trụ có bán kính đáy bằng 3 và có trục là hai đường thẳng cắt nhau và vuông góc với nhau (xem hình vẽ).



Gọi (H) là phần giao nhau của hai khối trụ đó. Tính thể tích của (H).

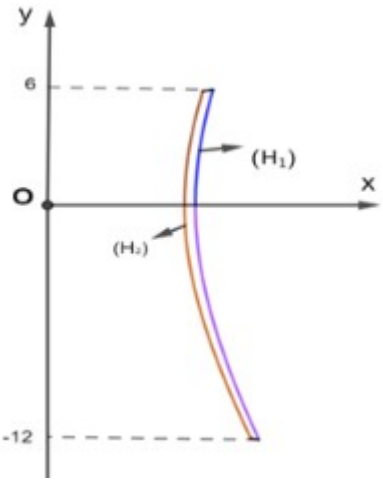
Câu 48. Một ly thủy tinh có hình dạng phần chứa nước là một hình parabol tròn xoay. Hình dạng này được tạo ra bằng cách quay một phần của đường parabol quanh trục đối xứng của nó. Biết phần chứa nước của ly có chiều cao tính từ đáy ly lên đến miệng ly là $10\,\text{cm}$, đường kính miệng ly là $8\,\text{cm}$ (chỉ tính phần chứa nước, không tính phần thủy tinh).





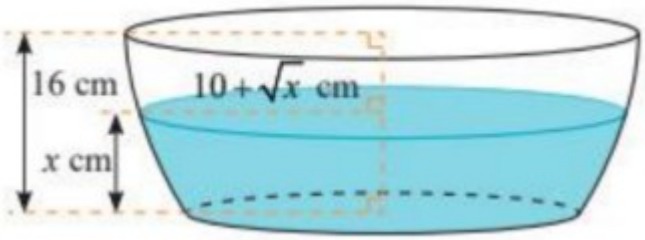
Ban đầu, người ta đổ vào ly một lượng nước có thể tích bằng $\frac{1}{4}$ thể tích của ly khi nó chứa đầy nước. Sau đó, người ta đổ thêm vào ly một lượng nước có thể tích bằng với lượng nước đã đổ ban đầu. Hỏi sau khi đổ thêm, chiều cao của mực nước trong ly đã tăng thêm bao nhiêu centimet so với lúc ban đầu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Câu 49. Lớp vỏ của một lò phản ứng hạt nhân bằng kim loại và được tạo bởi hình phẳng (S) giới hạn bởi nhánh bên phải trục tung của các đường hypebol (H_1), (H_2) và hai đường thẳng $y=-12, y=6$ khi quay quanh trục Oy (tham khảo hình vẽ).

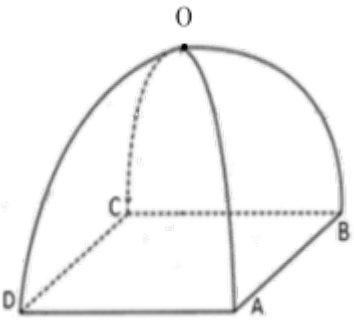


Biết (H_1) đi qua điểm $\left(\sqrt{35};0\right)$ có tiêu cự bằng $10\sqrt{7}$, (H_1) đi qua điểm $\left(\sqrt{30};0\right)$ có tiêu cự bằng $10\sqrt{6}$ và đơn vị trên các trục toạ độ bằng mét. Thể tích khối kim loại cần sử dụng để làm vỏ lò phản ứng hạt nhân bằng bao nhiêu mét khối? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

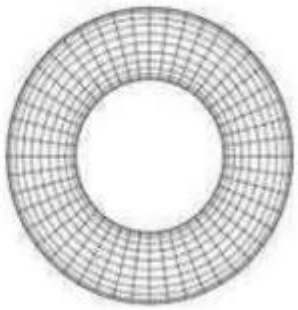
Câu 50. Nếu cắt chậu nước có hình dạng như hình bên bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy $x\,(\text{cm})\,(0\le x\le 16)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $R=10+\sqrt{x}\,(\text{cm})$. Tìm x (đơn vị cm, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) để dung tích nước trong chậu bằng $\frac{1}{2}$ thể tích của chậu?



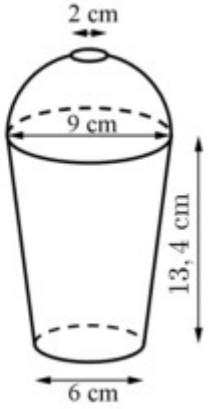
Câu 51. Một lều cắm trại có dạng như hình vẽ dưới, khung lều được tạo thành từ hai parabol giống nhau có chung đỉnh O và thuộc hai mặt phẳng vuông góc nhau (một parabol đi qua A,O,C và một parabol đi qua B,D,O), bốn chân tạo thành hình vuông $ABCD$ có cạnh là $2\sqrt{2}$ (m), chiều cao tính từ đỉnh lều là 2 (m). Biết mặt cắt của lều khi cắt bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ luôn là một hình vuông. Tính thể tích của lều (đơn vị là m^3).



Câu 52. **Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2025)** Trong các làng nghề chế tạo đá mỹ nghệ, người ta làm được nhiều đồ trang sức bằng đá rất đẹp. Một người thợ thủ công chế tạo vòng đeo tay hình tròn bằng đá xanh, biết rằng bán kính vòng ngoài của vòng là $7cm$, bán kính vòng trong là $5cm$ (hình vẽ). Tính thể tích của chiếc vòng (theo đơn vị đo là cm^3 và làm tròn đến hàng đơn vị).

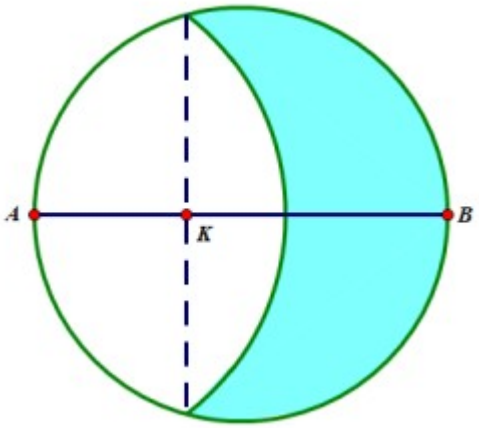


Câu 53. Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6cm, đường kính miệng ly 9cm, chiều cao $13,4\text{cm}$, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).



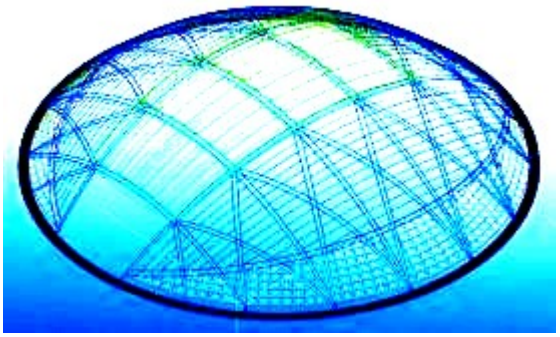
Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là bao nhiêu cm^3? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

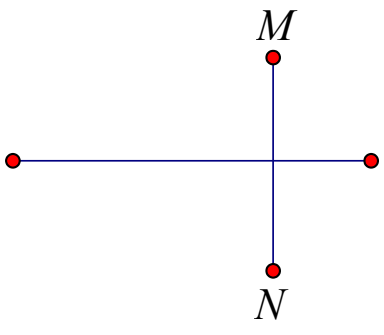
Câu 54. Một khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần màu xám trong hình vẽ) quanh trục AB.

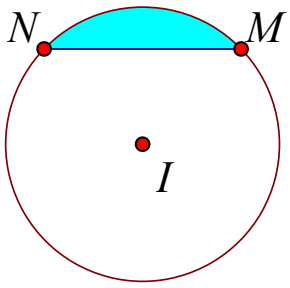


Miền (H) được giới hạn bởi đường tròn đường kính AB và cung tròn tâm A. Biết $AB = 8\text{cm}$ và điểm K trong hình vẽ thỏa mãn $AK = 3\,\text{cm}$. Thể tích của khối tròn xoay đó bằng bao nhiêu cm^3 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Câu 55. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $MIN = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là $200\ BTU/m^3$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chiếc điều hòa công suất 50000 BTU?

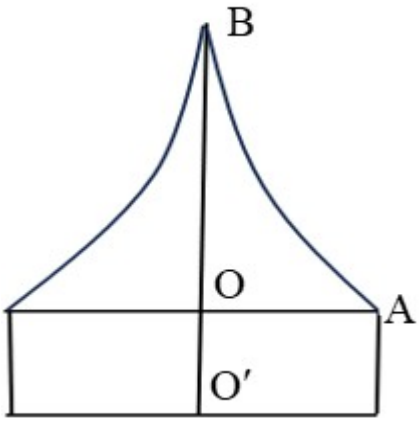




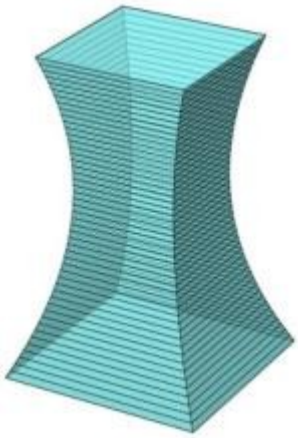


Câu 56. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, nhóm bạn Lan đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như

hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=6cm$, $OA=10cm$, $OB=20cm$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B. Tính thể tích của chiếc mũ (làm tròn đến hàng đơn vị).

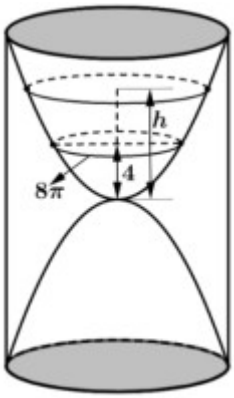


Câu 57. Một kiến trúc sư chịu trách nhiệm thiết kế một tòa nhà cao 30 mét. Mặt cắt ngang tại mọi độ cao, vuông góc với trục thẳng đứng, luôn là một hình vuông (xem hình vẽ).



Mặt đáy tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_0 = 26$ m, mặt đỉnh là hình vuông có cạnh $L_{30} = 20$ m. Mặt cắt ngang tại vị trí hẹp nhất của tòa nhà: Hình vuông có cạnh $L_{min} = 13,75$ m. Mặt cắt của tòa nhà theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong parabol đối xứng nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của tòa nhà. Tính thể tích của tòa nhà đó (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị tính: mét khối).

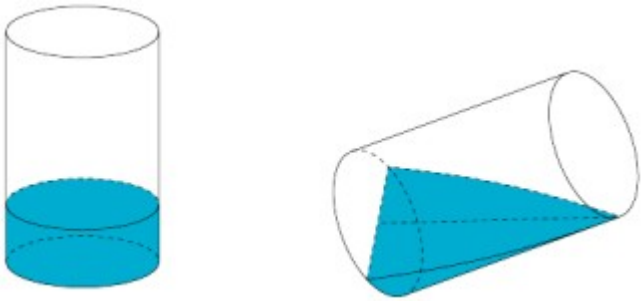
Câu 58. Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó (xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với tốc độ $v(t)=0,2t+13$ (cm^3/phút). Khi chiều cao của cát còn 4cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi bằng 8π cm. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài bằng bao nhiêu centimet? (*Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn đến hàng đơn vị*).



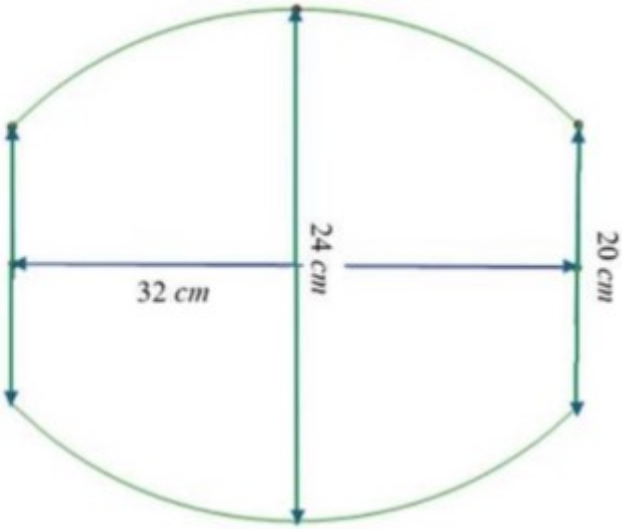
Câu 59. Một nhà máy nhiệt điện sử dụng 90 máng Parabol thu nhiệt năng lượng mặt trời có cùng kích thước, bề mặt cong đều nhau (tham khảo hình vẽ).

Mỗi máng có chiều rộng $2\,\text{m}$, bề dày của khối silic làm mặt máng là $2\,\text{dm}$, chiều dài $3\,\text{m}$. Đặt máng tiếp giáp mặt đất có điểm cao nhất của khối silic làm mặt máng so với mặt đất là $5\,\text{dm}$. Khi đó thể tích của khối silic làm 90 mặt máng bằng bao nhiêu m^3?

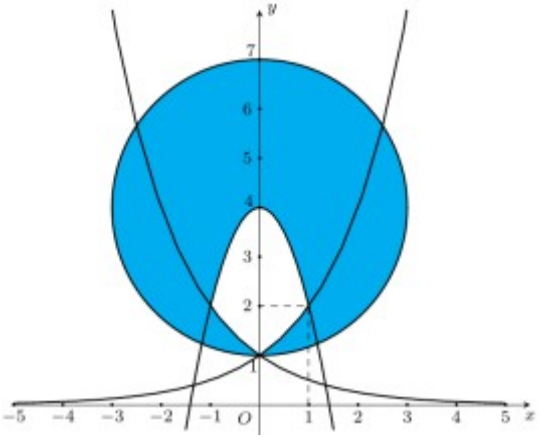
Câu 60. Một cốc thủy tinh có dạng hình trụ đang đựng một lượng nước, bán kính trong lòng đáy cốc là $8\,\text{cm}$, chiều cao trong lòng cốc là $10\,\text{cm}$. Tính thể tích lượng nước trong cốc (*đơn vị* cm^3), biết khi nghiêng cố nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy cốc mực nước trùng với đường kính của đáy cốc (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).



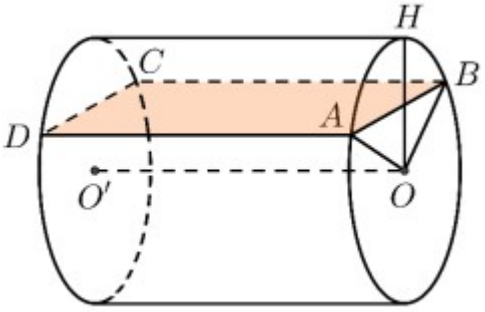
Câu 61. Một thùng chứa rượu có dạng hình tròn xoay với đường sinh là một cung của đường tròn, hai đáy là hai hình tròn bằng nhau và có đường kính bằng $20cm$, khoảng cách giữa hai đáy bằng $32cm$, đường kính lớn nhất của thân thùng là $24cm$ (biết các kích thước đã trừ lớp vỏ thùng, tham khảo hình vẽ). Hỏi phần không gian bên trong thùng chứa rượu đỏ có thể tích bằng bao nhiêu lít? (kết quả lấy đến chữ số hàng phần chục và không làm tròn).



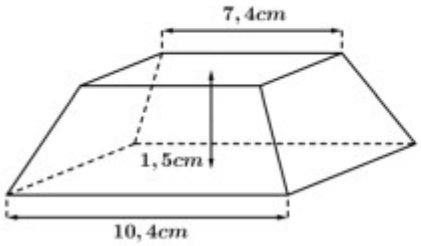
Câu 62. Cho các đồ thị hàm số: $y=a^x$, $y=a^{-x}$, $y=Ax^2+Bx+C$, $a>1$, $A,B,C\in\mathbb{R}$ và đường tròn (C). Gọi (D) là miền phẳng được tô đậm (*hình vẽ*). Quay miền (D) quanh trục Ox ta được một vật thể tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)?

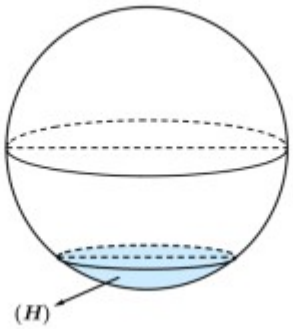


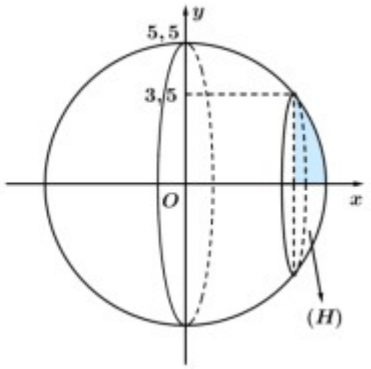
Câu 63. Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích của lượng dầu còn lại trong bồn theo đơn vị m^3.(làm tròn đến hàng phần chục)



Câu 64. Để đặt được một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau. Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng $7,4cm$ và $10,4cm$, bề dày khối gỗ bằng $1,5cm$. Sau đó khoét bỏ đi một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H, ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính $5,5cm$ bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn bán kính $3,5cm$ *(xem hình dưới)*

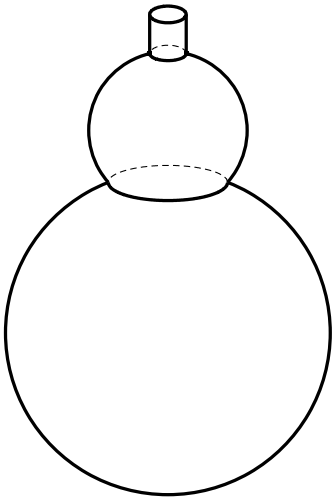




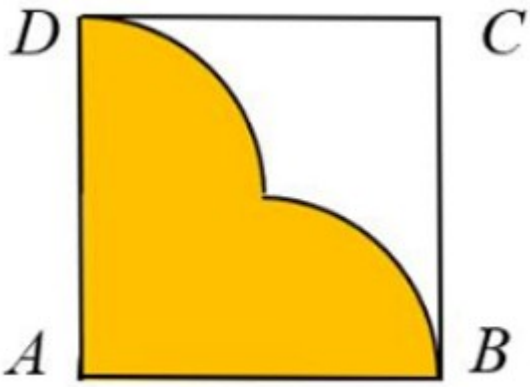


Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimét khối *(không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)*

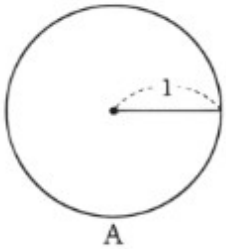
Câu 65. Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R=13$ cm và $r=\sqrt{41}$ cm để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hai hình cầu có bán kính $r'=5$ cm và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến phần mười).

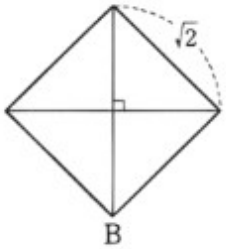


Câu 66. Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.

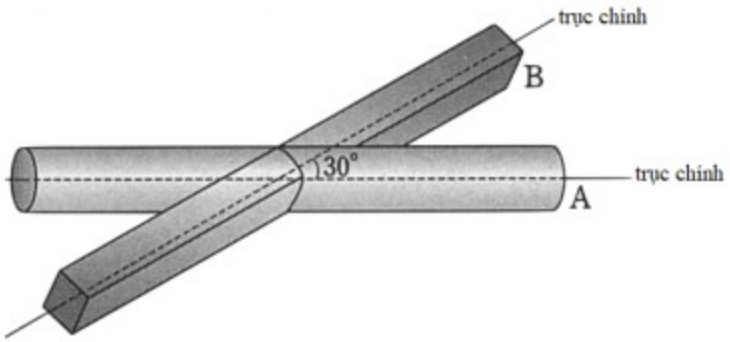


Câu 67. Cho một thanh gỗ hình trụ A có đáy là hình tròn bán kính 1, và một thanh gỗ hình lăng trụ đứng B có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}$ như hình vẽ.



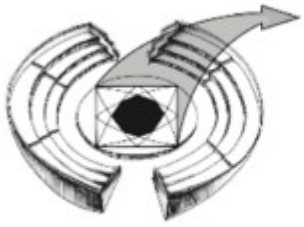


Hai thanh gỗ có trục chính cắt nhau và tạo với nhau một góc 30°.

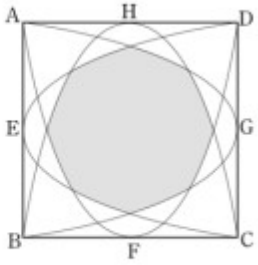


Trong hai đường chéo của tiết diện vuông góc với trục của thanh gỗ B, có một đường chéo vuông góc với mặt phẳng chứa trục của cả hai thanh gỗ, còn đường chéo còn lại thì nằm trong mặt phẳng đó. Khi đó, phần thể tích chung của hai thanh gỗ là $a\pi + b.$ Hãy tính giá trị của biểu thức $10a + 3b$, biết rằng a và b là các số hữu tỉ.

Câu 68. Hình 1 là một tác phẩm dự thi của nhà thiết kế sân khấu trong một cuộc thi thiết kế sân khấu ngoài trời tổ chức tại một quảng trường. Khi mở rộng sân khấu trung tâm, ta được Hình 2. Quá trình thiết kế sân khấu trung tâm được mô tả như sau:



Hình 1



Hình 2

Bước 1. Vẽ hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2, và lấy trung điểm của bốn cạnh lần lượt là E, F, G, H.

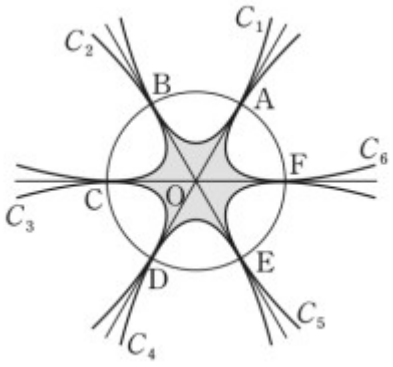
Bước 2. Vẽ đồ thị của các hàm bậc hai đi qua ba điểm B, C, H và hàm bậc hai đi qua ba điểm F, D, A.

Bước 3. Tương tự như Bước 2, vẽ đồ thị của các hàm bậc hai đi qua ba điểm A, B, G và ba điểm C, D, E

Biết rằng: Diện tích phần tô đen trong Hình 2 được cho bởi công thức: $\dfrac{p\sqrt{2}+q}{3}$

Hãy tính giá trị của $p-q$. (Với p, q là các số nguyên.)

Câu 69. Cho đường tròn tâm O, bán kính bằng 2. Trên đường tròn, lấy 6 điểm chia đều đường tròn, lần lượt là A, B, C, D, E, F. Vẽ cung tròn C_1 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OA và OB, đi qua hai điểm A và B. Tương tự, vẽ cung tròn C_2 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OB và OC, đi qua hai điểm B và C.

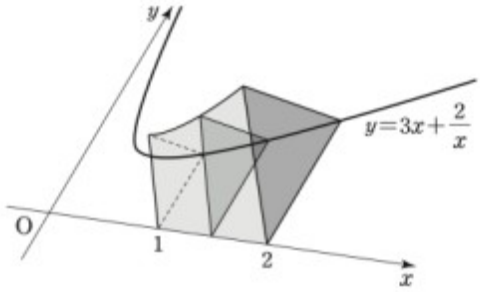


Tiếp tục bằng cách tương tự, ta vẽ các cung tròn C_3, C_4, C_5, C_6 tiếp xúc với các cặp đoạn thẳng liên tiếp tạo bởi các điểm trên.

Hỏi: Diện tích phần được bao bởi 6 cung tròn C_1 đến C_6 là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 70. Cho khối V có đáy là miền phẳng bị giới hạn bởi:

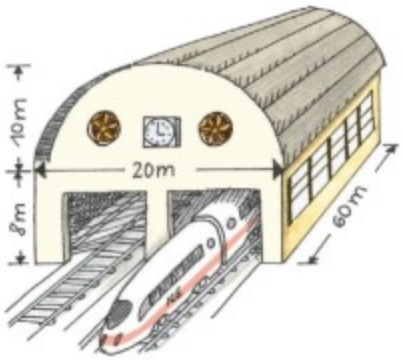
- Đồ thị hàm số $y = 3x + \frac{2}{x}, x > 0$
- Trục Ox
- Hai đường thẳng $x = 1$ và $x = 2$.



Khi đó, mỗi tiết diện của khối V cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox đều là một tam giác đều.

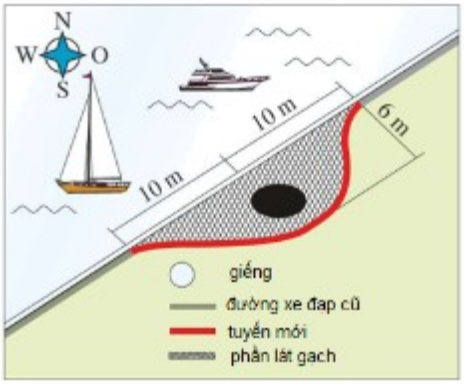
Hỏi: Thể tích của khối V bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Câu 71. Một sảnh ga có thông số như hình dưới, được thông gió bằng hai quạt, mỗi quạt có lưu lượng khoảng $80\,m^3$ / phút.



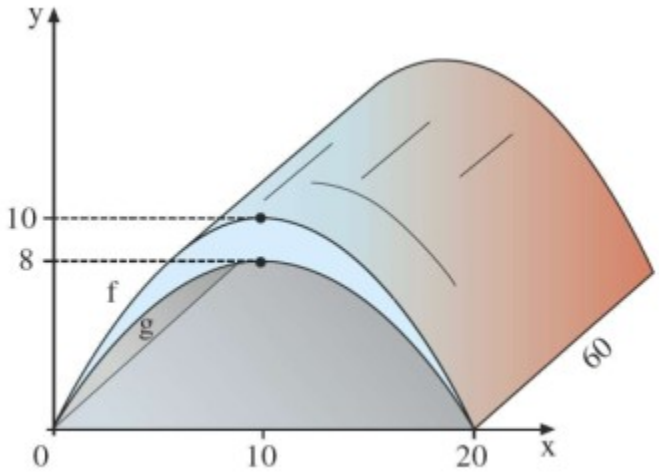
Hỏi: Cần bao nhiêu phút để trao đổi toàn bộ không khí trong sảnh? Mái sảnh là kết cấu gỗ dạng parabol.

Câu 72. Dọc bờ nước có một đường xe đạp. Trên một đoạn dài 20 m, người ta muốn thay bằng tuyến mới đi vòng một cái giếng (đường kính 2 m). Các đoạn nối phải trơn (chuyển tiếp êm).

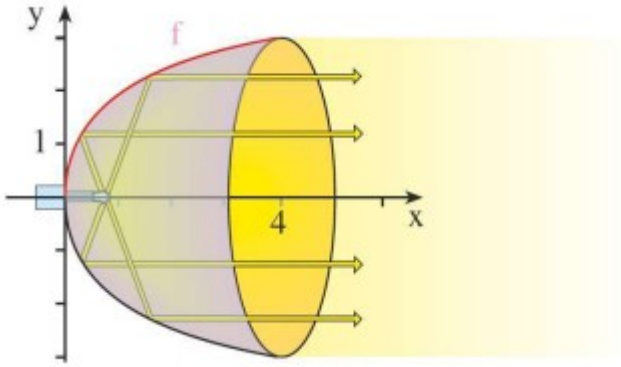


Diện tích phần tô màu cần lát giữa bờ và tuyến mới là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Câu 73. Mái của một nhà thi đấu rộng 20 m và dài 60 m được kéo theo dạng vòm parabol. Hỏi thể tích không khí tăng thêm là bao nhiêu mét khối nếu chọn chiều cao đỉnh mái 10 m thay vì phương án ban đầu 8 m ?

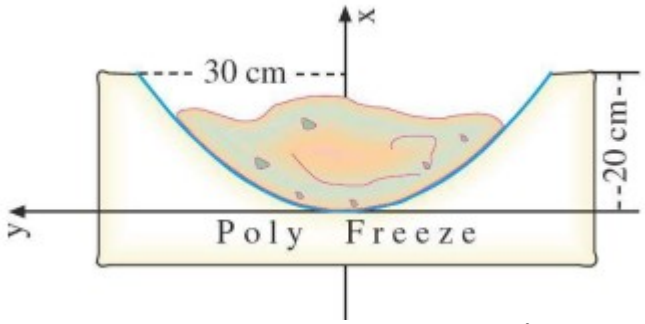


Câu 74. Một đèn pha dạng parabol có đường biên (mặt cắt) cho bởi $f(x)=\frac{3}{2}\sqrt{x}$

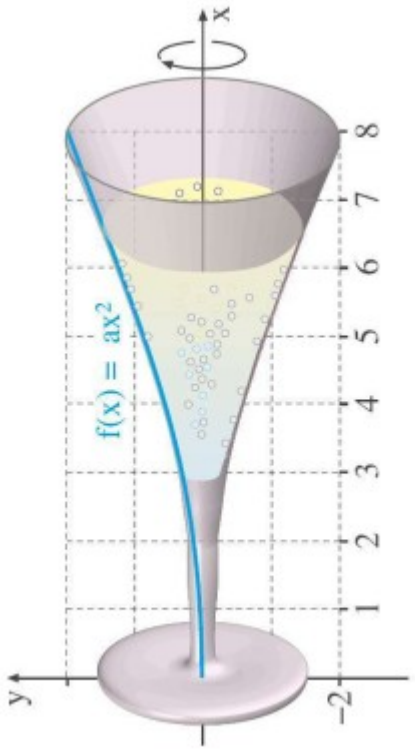


Chiều dài chóa là 4 cm. Hỏi: thể tích không khí bên trong là bao nhiêu cm^3? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

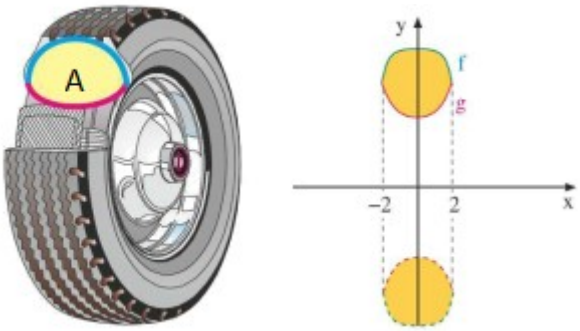
Câu 75. Một thùng làm kem có mặt cắt dạng parabol như hình. Biết phương trình đường biên có dạng $f(x)=a\sqrt{x}$, hỏi dung tích của thùng bằng bao nhiêu lít.



Câu 76. Ly ở hình dưới chứa được bao nhiêu thể tích (đơn vị cm^3). Biết đường bao mép ly là một parabol bậc hai dạng $f(x)=ax^2$. Lưu ý: trục Ox hướng lên trên. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

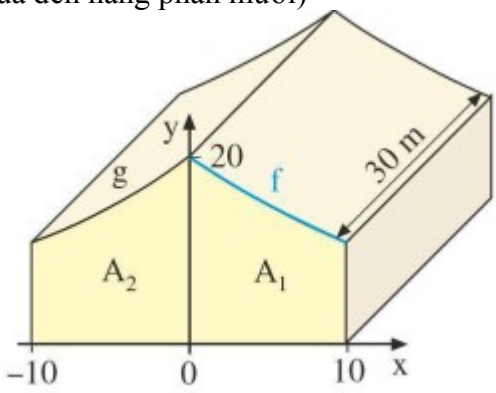


Câu 77. Không khí trong lốp có thể xem là một vật thể thu được khi quay tiết diện của lốp quanh trục Ox. Bên dưới là miền A bị chặn phía trên bởi $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+4$ và phía dưới bởi $g(x)=\frac{1}{4}x^2+2$ trên đoạn $[-2;2]$. Khi quay miền A quanh trục Ox, ta được thể tích không khí trong lốp. Hãy tính thể tích đó bằng bao nhiêu dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



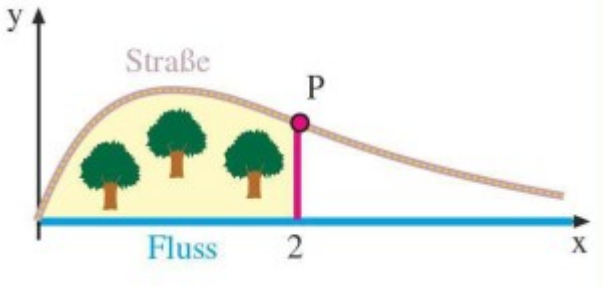
(Quy ước: 1 đơn vị $=1dm$.)

Câu 78. Thể tích không khí của chiếc lều hội chợ trong hình là bao nhiêu ML (megalit) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Biết biên dạng mái lều được cho bởi hai hàm biên: $f(x)=20\cdot e^{-\frac{1}{40}x}$, $g(x)=20\cdot e^{\frac{1}{40}x}$

Câu 79. Con đường có phương trình $f(x) = x \cdot e^{1-x}$. Con sông nằm dọc trục Ox. Miền đất trồng cây ăn quả được giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và đường thẳng đứng qua điểm P có hoành độ $x = 2$ (xem hình).

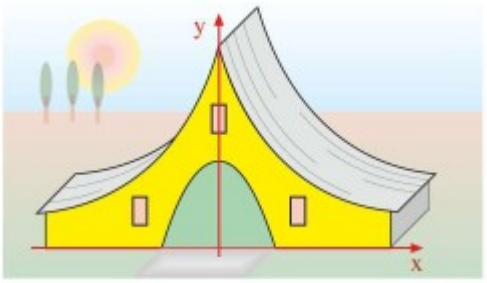


Quy ước 1 đơn vị $= 100m$.

Mỗi cây cần $20m^2$. Hỏi trồng được bao nhiêu cây?

Biết $F(x) = (-1-x)e^{1-x}$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Câu 80. Mái chùa đối xứng qua trục, có biên dạng $f(x) = 6 \cdot e^{-0,5x} + 1, \quad 0 \le x \le 6$



Cổng chùa dạng parabol, rộng 4 m và cao 3 m.

Mỗi cửa sổ kích thước $1m \times 0,5m$.

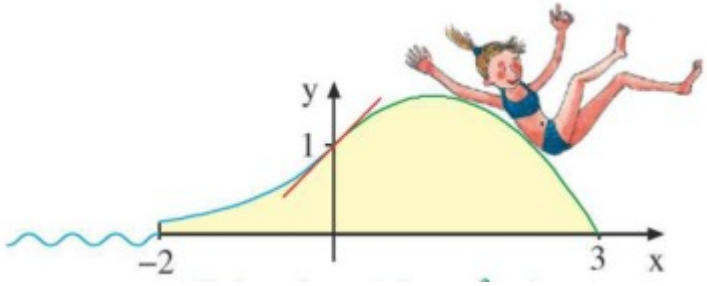
Mặt tiền phía trước của mặt sẽ được sơn màu vàng dày $0,1mm$.

Hỏi: Cần bao nhiêu lít nước sơn? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Câu 81. Ở bể bơi thành phố sẽ xây một cầu trượt nước mới. Cầu trượt dài 5 m và có thể trượt từ cả hai phía. Những người thận trọng trượt về bên trái, nơi mép trượt được cho bởi $f(x) = e^x$
Những người ưa mạo hiểm trượt về bên phải, nơi mép trượt cao và dốc hơn, mô hình bởi

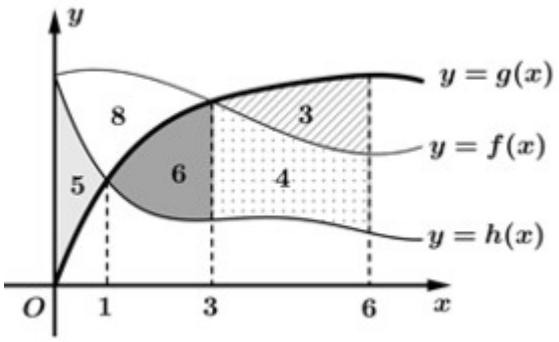
$$g(x) = -\frac{4}{9}x^2 + x + 1$$

Tại $x = 0$ hai đường cong nối trơn với nhau (không gãy, không góc nhọn). (Đơn vị x, y tính bằng mét.)



Hai thành bên của cầu trượt được ốp nhựa. Cần bao nhiêu m^2 nhựa?

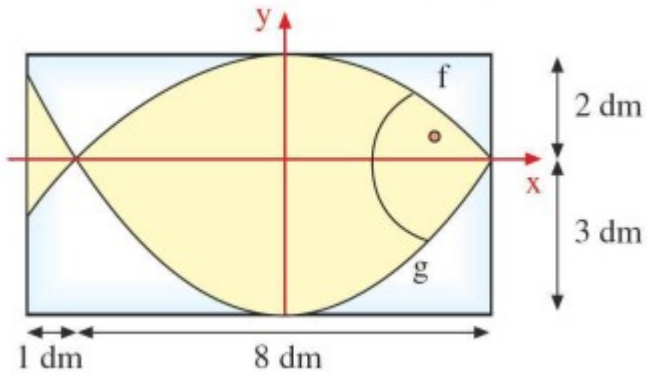
Câu 82. Cho ba hàm số $y = f(x), y = g(x)$ và $y = h(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



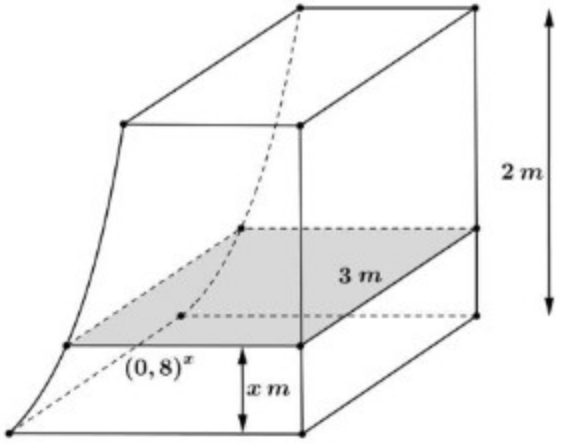
Diện tích mỗi miền được ghi bằng số trong hình.

Tính $\int_1^6 [h(x)-g(x)]dx + \int_0^6 [f(x)-g(x)]dx$

Câu 83. Mac Fish muốn làm logo trong suốt dán lên cửa sổ. Nhà thiết kế đưa bản vẽ như hình. (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét). Diện tích logo là bao nhiêu dm^2. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

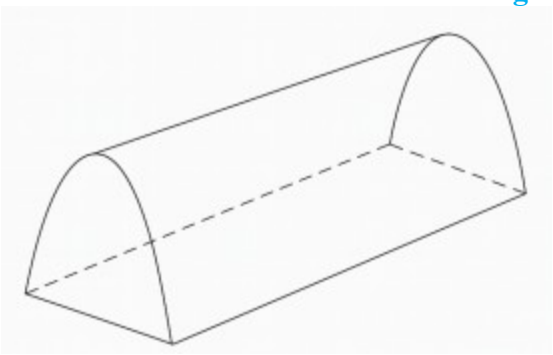


Câu 84. Một khối bê tông có chiều cao 2 mét được đặt trên mặt đất. Nếu cắt khối bê tông bởi một mặt phẳng nằm ngang và cách mặt đất x mét $(0 \le x \le 2)$ thì được mặt cắt là một hình chữ nhật có chiều dài 3 m và chiều rộng bằng $(0,8)^x$ mét (tham khảo hình vẽ).

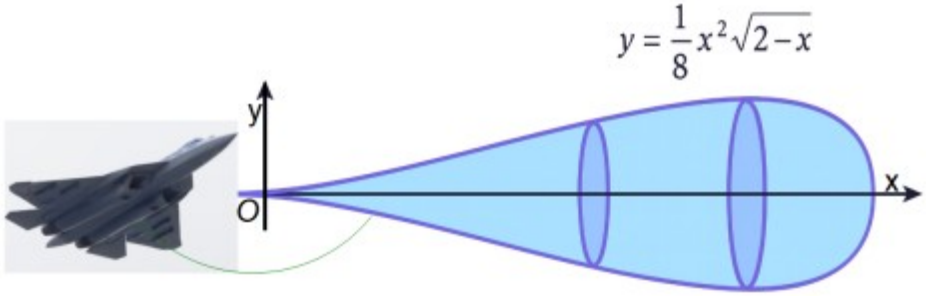


Tính thể tích (đơn vị m^3) của khối bê tông đó (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

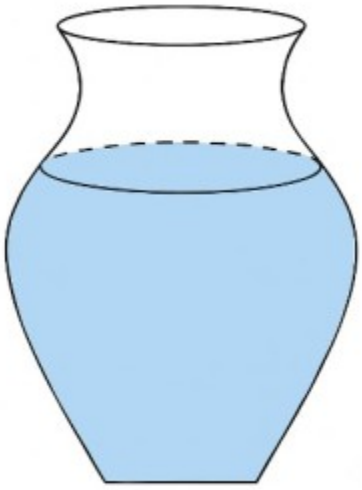
Câu 85. Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12A dự kiến dựng một cái trại các khung xương có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?



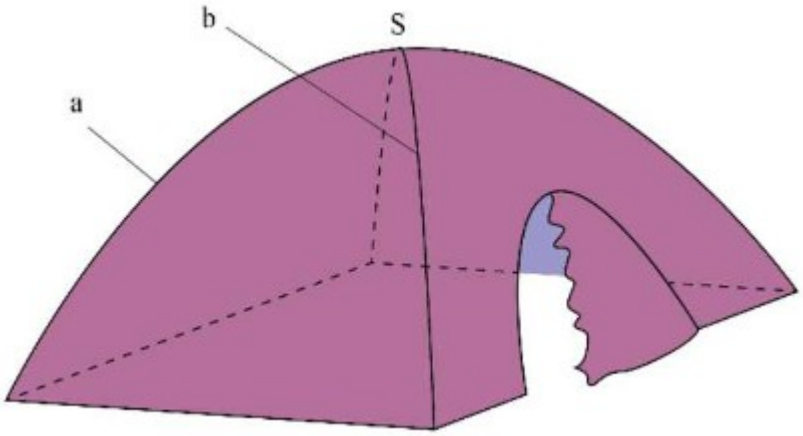
Câu 86. Bình chứa nhiên liệu của một chiếc máy bay phản lực được mô tả trong không gian là một khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{1}{8}x^2\sqrt{2-x}$ với $(0\le x\le 2)$ và trục Ox quanh trục Ox (x tính theo đơn vị m). Thể tích của bình chứa bằng $\frac{a\pi}{b}m^3$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng



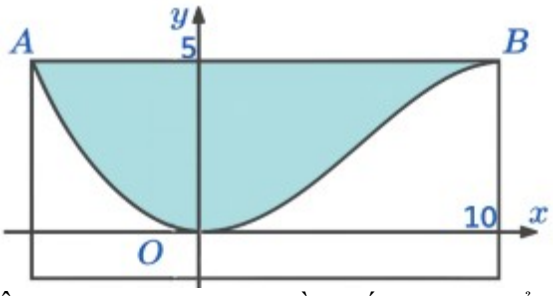
Câu 87. Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là 25 cm (tham khảo hình vẽ). Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán kính $R=\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}(dm)$ với $x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]$ là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa (tính theo đơn vị dm). Lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



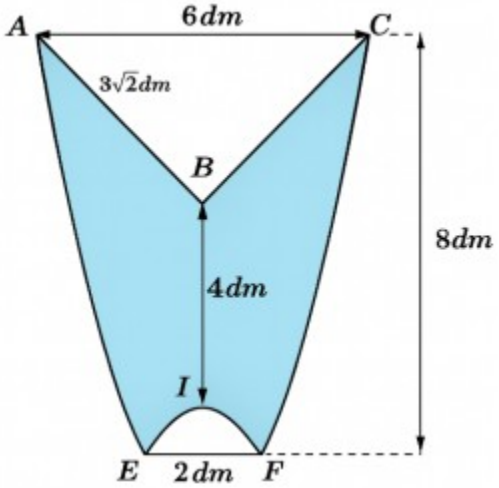
Câu 88. Một chiếc lều vải du lịch dạng hình cong như hình vẽ. Khung chính bao gồm đáy là hình vuông cạnh 2 m và hai xương dây a,b nằm trên các đường parabol đỉnh S. Biết chiều cao của lều là $SO=1,35\,m,O$ là tâm của đáy. Tính thể tích chiếc lều theo đơn vị m^3. Viết kết quả dưới dạng số thập phân.



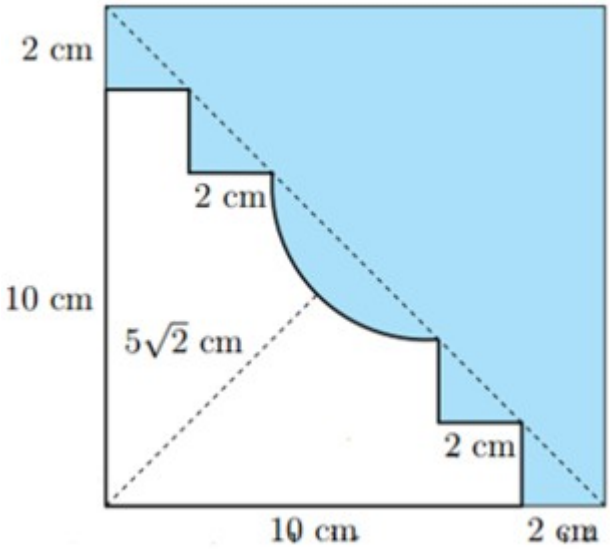
Câu 89. Hình bên minh hoạ mặt cắt đứng của một con kênh đặt trong hệ trục toạ độ Oxy. Đáy của con kênh là một đường cong AOB cho bởi hàm số bậc ba có dạng $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Hãy tính diện tích hình phẳng tô đậm trong hình vẽ, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét và đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận gốc toạ độ O và điểm B là các điểm cực trị. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của m^2.



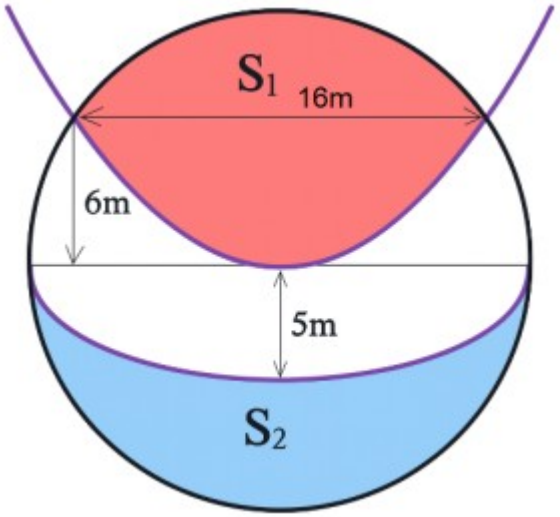
Câu 90. Ông A làm một logo bằng tấm nhựa phẳng, có hình dạng là một hình có trục đối xứng. Biết đường viền AE, CF ở hai bên là hai nhánh của một parabol và phần lõm EIF phía dưới đáy cũng là một parabol, hai nhánh phía trên là hai đoạn thẳng như hình bên dưới. Cho biết $AC=6dm, AB=3\sqrt{2}dm, EF=2dm$ và khoảng cách giữa AC và EF bằng 8 dm. Hỏi diện tích của logo đó bằng bao nhiêu dm^2. Viết kết quả dưới dạng số thập phân. Viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



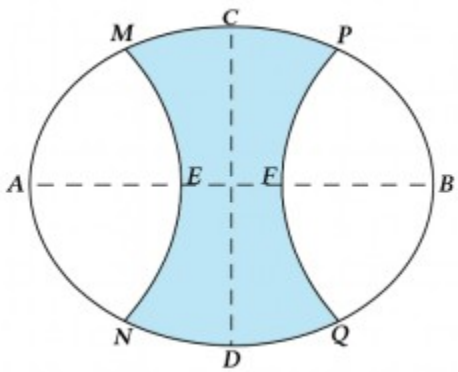
Câu 91. Từ một miếng tôn hình vuông, người thợ làm chậu cảnh đã tạo mẫu và cắt đi phần hình phẳng không tô đậm trên hình, phần tô đậm được giữ lại làm khuôn quay thành các đôn để đặt các chậu hoa. Tính diện tích hình phẳng đã bị cắt bỏ (đơn vị cm^2) biết đường cong trong hình là một parabol có đỉnh nằm trên đường chéo của hình vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



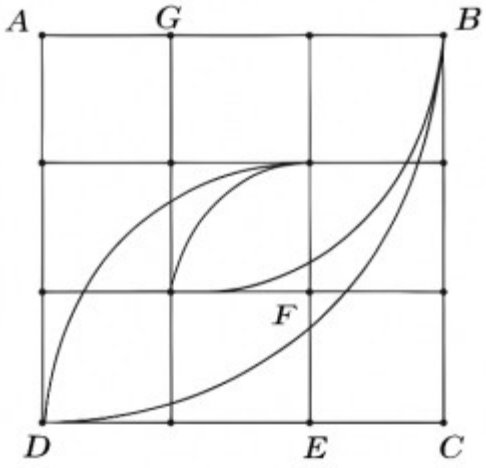
Câu 92. Khu vườn nhà ông Ba có dạng hình tròn, bán kính 10 m. Ông Ba dự định trồng hoa Hồng ở khu vực S_1 và hoa Ly ở khu vực hình bán nguyệt S_2. Với S_1 là phần diện tích giới hạn bởi đường parabol đi qua tâm hình tròn và S_2 là phần diện tích giới hạn bởi nửa đường elip không chứa tâm hình tròn (kích thước như hình vẽ). Biết rằng kinh phí trồng hoa Hồng là 100.000 đồng/ m^2, kinh phí trồng hoa Ly là 150.000 đồng $/m^2$. Hỏi ông Ba phải mất bao nhiêu triệu đồng để trồng hoa lên hai dải đất đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



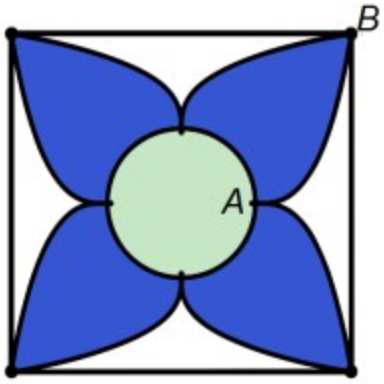
Câu 93. Vườn hoa của một trường học có hình dạng được giới hạn bởi một đường elip có bốn đỉnh A, B, C, D và hai đường parabol có các đỉnh lần lượt là E, F (phần tô đậm của hình vẽ). Hai đường parabol có cùng trục đối xứng AB, đối xứng nhau qua trục CD, hai parabol cắt elip tại các điểm M, N, P, Q. Biết $AB = 8\,m, CD = 6\,m, MN = PQ = 3\sqrt{3}\,m, EF = 2\,m$. Chi phí để trồng hoa trên vườn là $300.000\,/\,m^2$. Hỏi số tiền trồng hoa cho cả vườn là bao nhiêu triệu đồng. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm



Câu 94. "Bài toán tính diện tích hình càng cua". Từ bảng gỗ hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh 12 cm, người ta chia hình vuông này thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau rồi vẽ một hình càng cua được giới hạn bởi các cung phần tư của các đường tròn tâm A, E, F, G (xem hình vẽ). Tính diện tích hình càng cua theo đơn vị cm^2 (phần tô đậm trong hình vẽ). Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Câu 95. Vào ngày 8/3, từ một tấm bìa hình vuông cạnh $8(dm)$, An dùng các đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và $x = f(y)$ để vẽ hoa tặng mẹ, nhụy hoa được vẽ bằng đường tròn có tâm là tâm hình vuông và bán kính bằng $2(dm)$. Khi đặt trong hệ tọa độ Oxy thì điểm $A(2;0)$ và đường cong AB là một phần của đồ thị hàm đa thức bậc ba $y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c$. Biết rằng tỷ lệ phần tô đậm chiếm $\frac{3}{4}$ diện tích hình vuông. Tính abc.

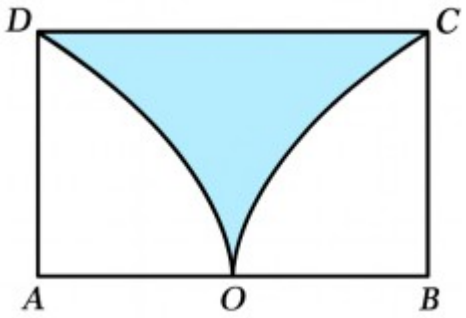


Câu 96. Một quả bóng bầu dục theo quy định được sử dụng trong giải bầu dục quốc gia có kích thước $28(cm)$ từ đầu này đến đầu kia và đường kính $17(cm)$ ở phần dày nhất (quy định có phép thay đổi một chút về các kích thước này) (Nguồn: NFL).

Hình dạng của một quả bóng bầu dục có kích thước nói trên có thể được tạo thành khi quay phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, trục hoành và các

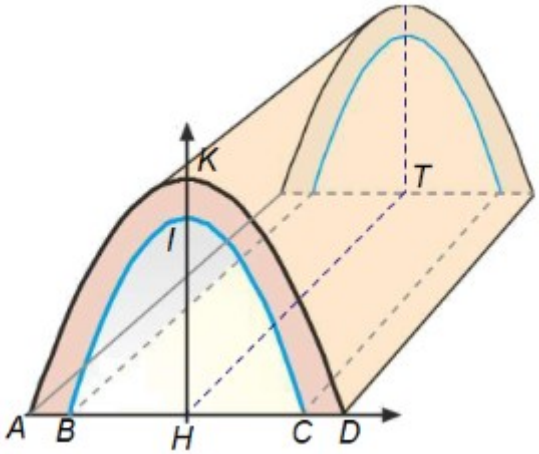
đường thẳng $x=-4; x=24$, trong đó x tính bằng centimet (cm). Thể tích (đơn vị: cm^3, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) của quả bóng bầu dục có kích thước nói trên bằng bao nhiêu?

Câu 97. Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=8\,cm$ và chiều rộng $BC=4\,cm$, người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường thẳng parabol có chung đỉnh là trung điểm cạnh AB, chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C, D của hình chữ nhất đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu cm^3. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.

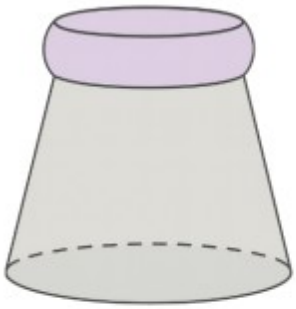


Câu 98. Trên một tuyến đường thẳng có một đoạn phải đi xuyên qua một quả núi nhỏ, do đó người ta đã tạo một hầm chui để thuận tiện cho các phương tiện giao thông di chuyển, vòm của hầm chui được đổ bê tông có dạng như hình vẽ dưới đây

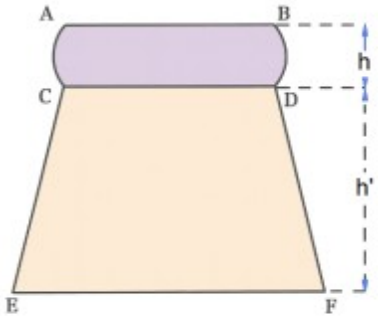
với $BC=8(m); IH=5(m); IK=0,6(m); AB=CD=0,5(m); HT=10(m)$. Biết khi cắt vòm của hầm chui bằng mặt phẳng vuông góc với trục của tuyến đường ta luôn có thiết diện là một hình phẳng được giới hạn bởi hai parabol và giao tuyến của mặt cắt với mặt đường. Hỏi cần bao nhiêu mét khối bê tông để đổ vòm của hầm chui. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Câu 99. Ông An có một cái bình đựng rượu, thân bình có hai phần: phần phía dưới là hình nón cụt, phần trên là hình cầu bị cắt bỏ 2 đầu chỏm (hình 1).



Hình 1

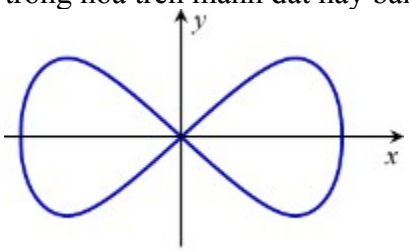


Hình 2

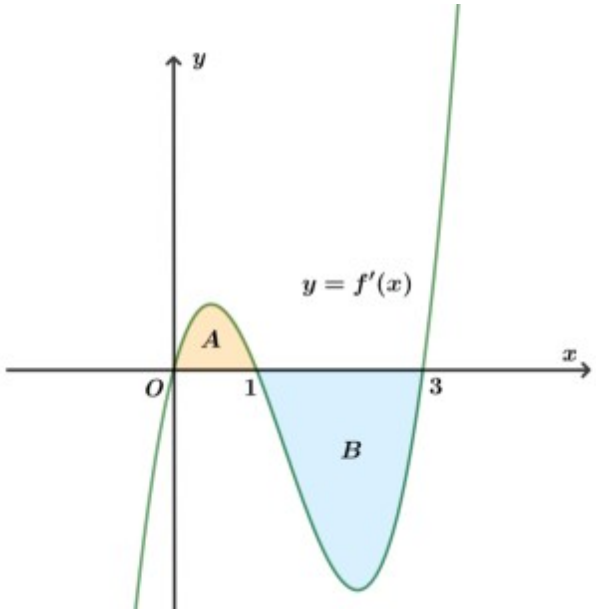
Thiết diện qua trục của bình như hình 2.

Biết $AB = CD = 16\,cm, EF = 30\,cm, h = 12\,cm, h' = 30\,cm$ và giá mỗi lít rượu là 100000 đồng. Hỏi số tiền ông An cần để đổ đầy bình rượu là bao nhiêu triệu đồng (giả sử độ dày của vỏ bình rượu không đáng kể)? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Câu 100. Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemniscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2 = x^2\left(25 - x^2\right)$ như hình vẽ bên dưới (đơn vị trên trục là mét). Biết chi phí để trồng hoa trên mảnh đất Bernoulli là 150 nghìn đồng/m^2. Số tiền cần dùng để trồng hoa trên mảnh đất này bằng bao nhiêu nghìn đồng?

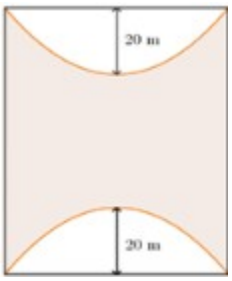


Câu 101. Cho hàm số $y = f\left(x\right)$. Đồ thị hàm số $y = f'\left(x\right)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A = 4$ và $S_B = 10$. Tính giá trị của $f\left(3\right)$, biết giá trị của $f\left(0\right) = 2$.



ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

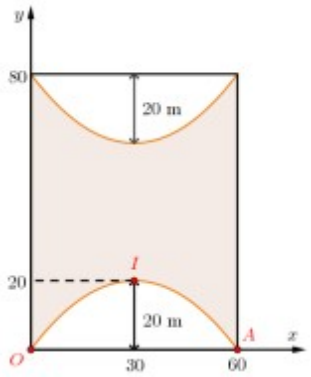
Câu 1. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình chữ nhật với chiều rộng và chiều dài lần lượt là 60m và 80m. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh đó đến trung điểm cạnh tương ứng của hình chữ nhật bằng 20m (xem hình minh họa). Diện tích của phần sân chơi là bao nhiêu mét vuông?



Lời giải

Đáp án: 3200.

Đặt hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Nhận thấy hai phần trồng hoa dạng đường parabol có diện tích như nhau. Vậy ta xét đường parabol ở bồn hoa phía dưới có dạng $(P): y = ax^2 + bx + c$ với $a \neq 0$.

Ta có đồ thị (P) đi qua ba điểm là $O(0;0), I(30;20)$ và $A(60;0)$. Thay vào ta thu được hệ phương trình

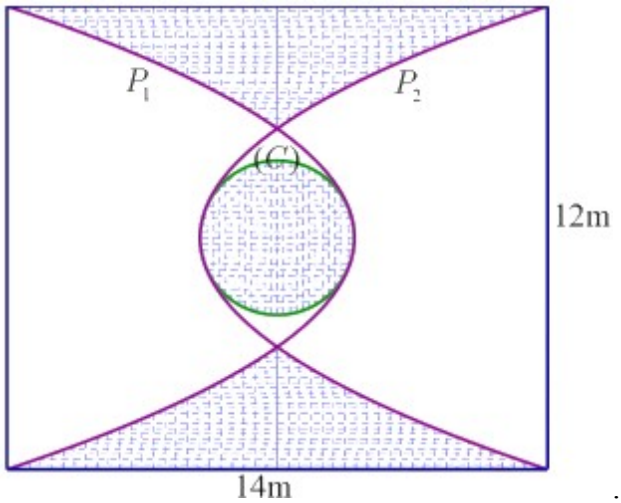
$$\begin{cases} c = 0 \\ 900a + 30b + c = 20 \\ 3600a + 60b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{45} \\ b = \dfrac{4}{3} \\ c = 0 \end{cases}$$

Như vậy, ta có phương trình parabol đó là $y = -\dfrac{1}{45}x^2 + \dfrac{4}{3}x$ và diện tích của phần trồng hoa phía dưới là

$$S_{\text{hoa}} = \int_0^{60} \left| -\frac{1}{45}x^2 + \frac{4}{3}x \right| dx = \int_0^{60} \left(-\frac{1}{45}x^2 + \frac{4}{3}x \right) dx = 800 \left(m^2 \right).$$

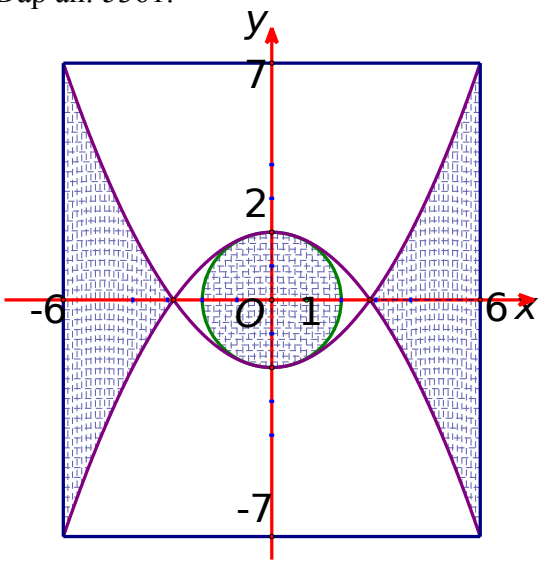
Khi đó, diện tích của phần sân chơi là $S = 60.80 - 2S_{\text{hoa}} = 3200 \left(m^2 \right)$.

Câu 2. Người ta lát gạch trang trí một mảnh sân hình chữ nhật có kích thước $14\text{m} \times 12\text{m}$ như hình vẽ bên dưới, trong đó $(P_1), (P_2)$ là hai parabol đối xứng trục với nhau qua trục đối xứng vuông góc với chiều dài của mảnh sân, (C) là đường tròn có tâm trùng với tâm của mảnh sân và lần lượt có duy nhất một điểm chung với các parabol đó (tham khảo hình vẽ biết phần gạch đậm là phần lát gạch). Chi phí cho phần lát gạch là 240 nghìn đồng một mét vuông. Trong trường hợp hình tròn (C) có diện tích lớn nhất thì chi phí lát gạch là bao nhiêu triệu đồng? (kết quả làm tròn tới hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 5361.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ với $M(0;m)(m<0)$ là đỉnh của parabol P_1.

Khi đó $P_1: y=\frac{7-m}{36}x^2+m$ và $(C): x^2+y^2=m^2$.

Để $P_1,(C)$ có một điểm chung duy nhất thì phương trình sau có nghiệm duy nhất.

$$x^2+\left(\frac{7-m}{36}x^2+m\right)^2=m^2 \Leftrightarrow x^2\left[\left(\frac{7-m}{36}\right)^2x^2+\frac{-m^2+7m+18}{18}\right]=0$$

$$\text{Ycbt} \Leftrightarrow -m^2+7m+18\geq 0 \Leftrightarrow -2\leq m\leq 9$$

Khi đó, bán kính lớn nhất của (C) khi $m=-2\Rightarrow r=2.$

Hoành độ giao điểm của $(P_1): y=\frac{1}{4}x^2-2$ và trục hoành là $x=\pm 2\sqrt{2}$.

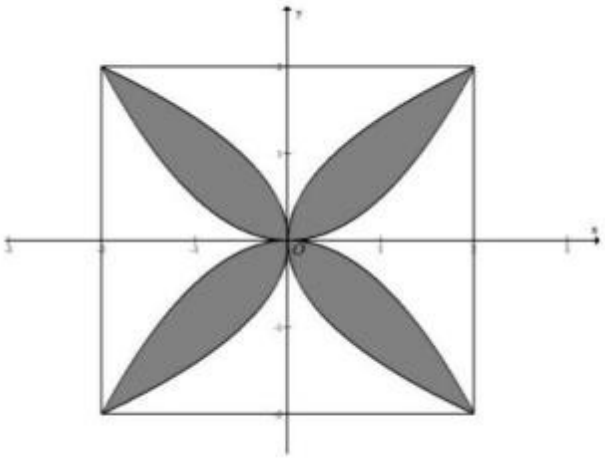
Diện tích phần lát gạch là $S=4\int_{2\sqrt{2}}^{6}\left(\frac{1}{4}x^2-2\right)dx+\pi r^2=\frac{18+8\sqrt{2}}{3}+4\pi$

Số tiền lát gạch là: $240S=5361$ nghìn đồng.

Câu 3. Một viên gạch hoa hình vuông cạnh 4 dm. Người thiết kế đã sử dụng bốn đường parabol có chung đỉnh tại tâm viên gạch để tạo ra bốn cánh hoa (được tô đen như hình vẽ dưới). Giả sử để hoàn thiện sơn và phủ bóng viên gạch thì chi phí phần cánh hoa (màu đen) là 400 nghìn/ m^2, chi phí phần còn lại (màu trắng) là 300 nghìn/ m^2.Tính chi phí (đơn vị nghìn đồng) để sơn và phủ bóng cả viên gạch (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 53.



Chọn hệ tọa độ như hình vẽ (1 đơn vị trên trục bằng $1\ \text{dm}$), các cánh hoa tạo bởi các đường parabol có phương trình $y=\frac{x^2}{2}$, $y=-\frac{x^2}{2}$, $x=-\frac{y^2}{2}$, $x=\frac{y^2}{2}$.

Diện tích một cánh hoa (nằm trong góc phần tư thứ nhất) bằng diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y=\frac{x^2}{2}, y=\sqrt{2x}$ và hai đường thẳng $x=0$, $x=2$.

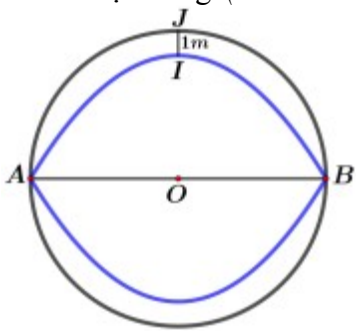
Do đó diện tích một cánh hoa bằng: $\int_0^2\left(\sqrt{2x}-\frac{x^2}{2}\right)\text{d}x=\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\sqrt{x^3}-\frac{x^3}{6}\right)\Big|_0^2=\frac{4}{3}\left(\text{dm}^2\right)$

Suy ra diện tích phần cánh hoa được tô đen là $\frac{4}{3}.4=\frac{16}{3}\left(\text{dm}^2\right)=\frac{4}{75}\left(\text{m}^2\right)$

Diện tích phần màu trắng còn lại là: $4.4-\frac{16}{3}=\frac{32}{3}\left(\text{dm}^2\right)=\frac{8}{75}\left(\text{m}^2\right)$

Số tiền cần dùng là: $\frac{4}{75}.400+\frac{8}{75}.300=\frac{160}{3}\approx 53$ nghìn đồng.

Câu 4. Khu vực trung tâm một quảng trường *(xem hình vẽ bên dưới)* có dạng hình tròn đường kính AB bằng $12m$. Người ta trang trí khu vực này bằng hai đường parabol đối xứng nhau qua AB, nằm trong hình tròn, đi qua các điểm A B, và có đỉnh cách mép hình tròn $1m$. Phần giới hạn bởi 2 parabol được trồng hoa với chi phí 300 nghìn đồng mỗi mét vuông, phần còn lại được lát gốm sứ với chi phí 900 nghìn đồng mỗi mét vuông. Tổng chi phí để hoàn thành khu vực này là bao nhiêu triệu đồng?*(làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)*.



Lời giải

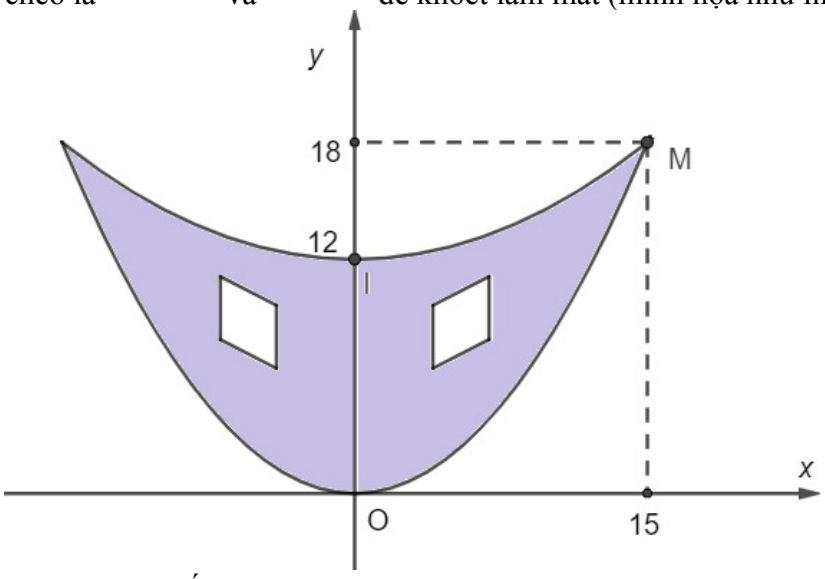
Đáp án: 54.

Ta có diện tích phần parabol giới hạn bởi parabol đi qua A, I, B và đường thẳng AB bằng $\frac{2}{3}AB.OI=\frac{2}{3}.12.5=40\left(m^2\right)$. Do đó diện tích phần trồng hoa bằng $40.2=80\left(m^2\right)$.

Suy ra diện tích phần lát gốm sứ bằng $\pi.6^2-80=36\pi-80\ \left(m^2\right)$.

Vậy tổng chi phí bằng $80.0,3+0,9.\left(36\pi-80\right)\approx 53,7876$ (triệu đồng)

Câu 5. Để tham gia lễ hội hóa trang, Bạn An dự định làm một chiếc mặt nạ nửa mặt bằng chất liệu giấy cứng. Hình dạng của chiếc mặt nạ được bạn thiết kế trên mặt phẳng tọa độ Oxy là phần hình phẳng giới hạn bởi hai đường parabol $(P_1),(P_2)$ lần lượt có đỉnh là gốc tọa độ O và điểm $I(0;12)$, cùng nhận trục Oy làm trục đối xứng và cùng đi qua điểm $M(15;18)$. Mỗi đơn vị trên các trục tọa độ có độ dài $1\,\text{cm}$. Sau đó, bạn vẽ hai hình thoi bằng nhau có độ dài các đường chéo là $2\sqrt{2}\,\text{cm}$ và $4\sqrt{2}\,\text{cm}$ để khoét làm mắt (minh họa như hình vẽ dưới đây)



Công đoạn cuối cùng là tô màu xám cho một mặt của mặt nạ. Tính diện tích cần tô màu theo đơn vị cm^2.

Lời giải

Đáp án: 224.

Gọi parabol có đỉnh O có phương trình là $y=ax^2\ (a>0)$, ta có parabol đi qua điểm $M(15;18)$ nên ta có $15^2a=18\Leftrightarrow a=\dfrac{18}{225}$, phương trình parabol là $y=\dfrac{18}{225}x^2$.

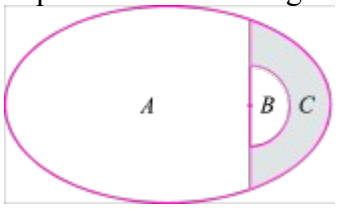
Gọi parabol có đỉnh là I có phương trình dạng $y=bx^2+12$, parabol đi qua điểm M nên ta có phương trình $15^2b+12=18\Leftrightarrow b=\dfrac{6}{225}$, phương trình parabol là $y=\dfrac{6}{225}x^2$.

Diện tích mặt nạ là $S_1=2\int_0^{15}\left[\dfrac{6}{225}x^2+12-\dfrac{18}{225}x^2\right]dx=240\ (\text{cm}^2)$

Diện tích hai hình thoi làm mắt là $S_2=2.\dfrac{1}{2}2\sqrt{2}.4\sqrt{2}=16\ (\text{cm}^2)$.

Diện tích cần sơn mặt nạ là $S=S_1-S_2=240-16=224\ (\text{cm}^2)$.

Câu 6. Một khu vườn hình elip (E) có độ dài trục lớn bằng $10m$ và trục nhỏ bằng $8m$ (như hình vẽ). Khu vực A để trồng hoa; khu vực B để trồng cỏ, là nửa hình tròn có tâm là một tiêu điểm của elip (E) bán kính bằng $1m$ còn lại là khu vực C (phần tô đậm) người ta lát gạch.



Diện tích phần lát gạch bằng bao nhiêu m^2 *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*

Lời giải

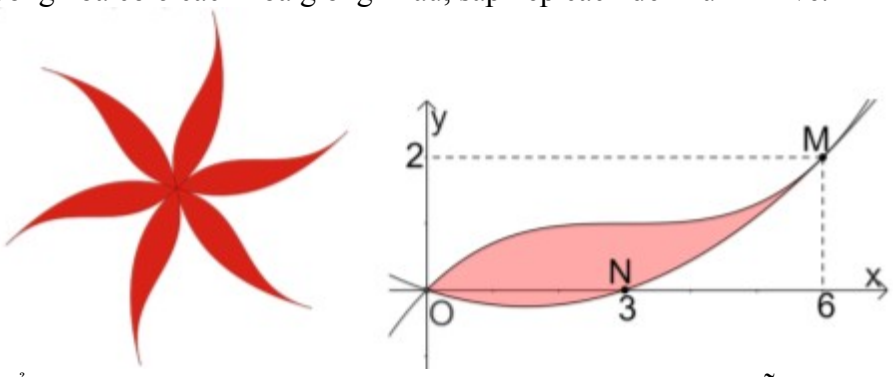
Đáp án: 7,38

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho (E) có trục lớn nằm trên trục hoành và trục nhỏ nằm trên trục tung. Khi đó $(E):\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1\Rightarrow y^2=\frac{16}{25}\left(25-x^2\right)$

Diện tích của phần B là $S_1=\frac{\pi}{2}\left(m^2\right)$

Diện tích của phần C là $S=\frac{8}{5}\int_3^5\sqrt{25-x^2}dx-S_1\approx 7{,}38\left(m^2\right)$.

Câu 7. Một công ty thuê thợ vẽ logo công ty như hình vẽ lên một bức tường lớn. Logo có dạng là một bông hoa có 6 cách hoa giống nhau, sắp xếp cách đề như hình vẽ.



Để chính xác hóa kích thước và hình dạng như hình vẽ, mỗi cánh hoa được thiết kế như sau: Trong mặt phẳng Oxy (một đơn vị ứng với 1 mét trên thực tế), một cánh hoa được xem là một hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số bậc ba $y=\frac{(x-3)^3}{27}+1\,(C)$ và một đường parabol $(P):y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$. (C) và (P) cắt nhau tại hai điểm $O(0;0), M(6;2)$ và (P) đi qua điểm $N(3;0)$. Biết rằng chi phí vẽ logo nói trên được tính dựa trên mỗi mét vuông cánh hoa được vẽ, mỗi mét vuông được báo giá là 210 nghìn đồng.

Hãy tính chi phí vẽ logo đó (đơn vị: nghìn đồng, làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 5040.

(P) đi qua điểm $O(0;0)$ nên

(P) đi qua 2 điểm $M(6;2)$ và $N(3;0)$ nên ta có hệ phương trình $\begin{cases}36a+6b=2\\9a+3b=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{9}\\b=\frac{-1}{3}\end{cases}$

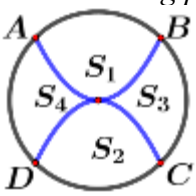
Suy ra: $(P):y=\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x$

Khi đó, diện tích của logo là $S=6\int_0^6\left(\frac{(x-3)^3}{27}+1\right)-\left(\frac{1}{9}x^2-\frac{1}{3}x\right)dx=24$

Chi phí vẽ logo là $24.210=5040$ (nghìn đồng)

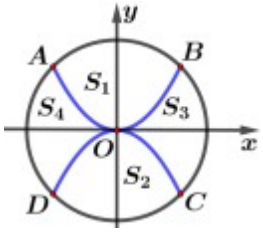
Câu 8. Sân trường có một bồn hoa hình tròn tâm O. Một nhóm học sinh lớp 12 được giao thiết kế bồn hoa, nhóm này định chia bồn hoa thành bốn phần bởi hai đường parabol có cùng đỉnh O và đối xứng nhau qua O. Hai đường parabol này cắt đường tròn tại bốn điểm A; B; C; D tạo thành một hình vuông có cạnh bằng 4 m *(như hình vẽ)*. Phần diện tích $S_1;S_2$ dùng để trồng hoa, phần diện tích $S_3;S_4$ dùng để trồng cỏ. Biết kinh phí trồng hoa là 150.000 đồng/m^2, kinh phí để trồng cỏ là

100.000 đồng/m^2. Hỏi nhà trường cần bao nhiêu triệu đồng để trồng bồn hoa đó? *(kết quả làm tròn đến hàng phần trăm)*



Lời giải

Đáp án: 3,27.



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Vì hình vuông $ABCD$ có cạnh bằng 4 $\Rightarrow AC = 4\sqrt{2} \Rightarrow OA = \dfrac{AC}{2} = 2\sqrt{2}$

Do đó phương trình đường tròn tâm O bán kính $2\sqrt{2}$ là $x^2 + y^2 = 8$.

Gọi phương trình parabol đi qua O, A, B là $y = ax^2 + bx + c$

Parabol đi qua $O(0;0) \Rightarrow c = 0$

Parabol đi qua $A(-2;2) \Rightarrow 4a - 2b = 2$

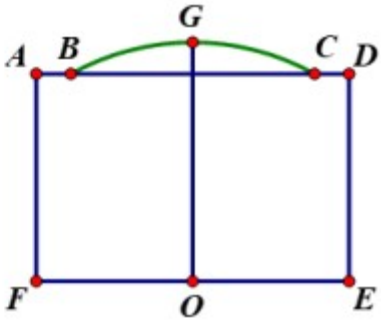
Parabol đi qua $B(2;2) \Rightarrow 4a + 2b = 2$. Do đó $a = \dfrac{1}{2}; b = 0 \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x^2$

Diện tích $S_1 = \displaystyle\int_{-2}^{2}\left(\sqrt{8 - x^2} - \frac{1}{2}x^2\right)\mathrm{d}x \approx 7,6165$.

Tổng diện tích $S_3 + S_4 = \pi R^2 - (S_1 + S_2) \approx 9,8997$.

Do đó tổng số tiền là $0,15.2S_1 + 0,1.(S_3 + S_4) \approx 3,27$ (triệu đồng)

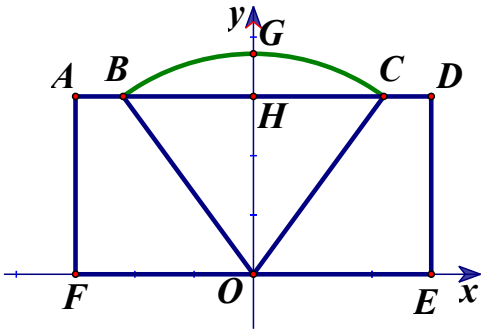
Câu 9. Cổng chính nhà bác Bình có 2 cánh cửa kẽm, sơn tĩnh điện, bằng nhau và có hoạ tiết giống hệt nhau. Khi khép cửa tạo ra một đường khép kín $ABGCDEFA$ (như hình ảnh dưới).



Biết $AF = DE = 2,4(m); AB = CD = 0,5(m); OG = 3(m)$, O là trung điểm của EF, đường cong BGC là cung tròn có bán kính bằng OG (G là trung điểm cung BC). Do đã sử dụng lâu năm nên lớp sơn tĩnh điện đã bị xuống cấp. Bác Bình muốn sơn mới lại cửa, giá thành để sơn mới lại cửa là 300 nghìn đồng trên một m^2 diện tích cửa. Hỏi bác Bình phải trả khoản tiền bằng bao nhiêu triệu đồng (*kết quả được làm tròn đến hàng phần trăm*).

Lời giải

Đáp số: $3,75$



Dựng hệ trục toạ độ như hình vẽ

Ta có $OH = AF = 2,4$ và $OB = OC = OG = 3$

$\Rightarrow CH = BH = \sqrt{OB^2 - OH^2} = \sqrt{3^2 - 2,4^2} = 1,8$

$\Rightarrow HA = HD = HC + CD = 1,8 + 0,5 = 2,3$

$\Rightarrow AD = 4,6$

Diện tích hình chữ nhật $ADEF$ là $S_1 = AD.AF = 4,6 \times 2,4 = 11,04\left(m^2\right)$.

Toạ độ các điểm $B\left(-1,8;2,4\right)$ và $C\left(1,8;2,4\right)$ $\Rightarrow$Phương trình đường thẳng $BC : y = 2,4$

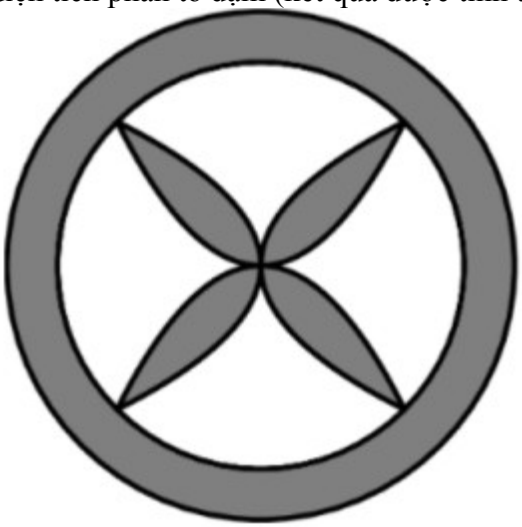
Phương trình đường tròn tâm O, bán kính $OG = 3$: $x^2 + y^2 = 9$.

$\Rightarrow$ Phươn trình của cung tròn $\overset{\frown}{BGC} : y = \sqrt{9 - x^2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi cung $\overset{\frown}{BGC}$ và dây BC là $S_2 = \int_{-1,8}^{1,8} \left(\sqrt{9 - x^2} - 2,4\right) dx$

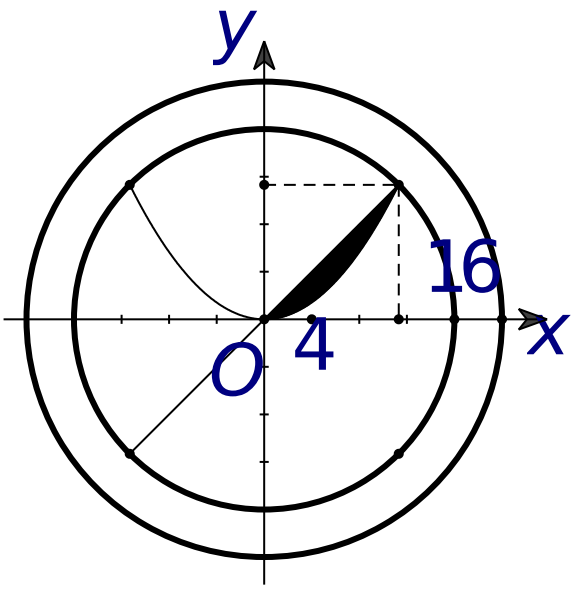
Chi phí sơn: $\left(S_1 + S_2\right).0,3 \approx 3,75$ (triệu đồng).

Câu 10. Một hoa văn trang trí được thiết kế gồm hai đường tròn đồng tâm và bốn phần của bốn đường parabol chung đỉnh (đỉnh là tâm của hai đường tròn). Biết rằng hai đường tròn đó có bán kính lần lượt là 20 cm và 16 cm; bốn đường parabol đó đôi một cắt nhau tại bốn điểm (khác đỉnh của parabol) là bốn đỉnh của một hình vuông nội tiếp đường tròn nhỏ (như hình vẽ bên). Tính diện tích phần tô đậm (kết quả được tính theo cm^2 và làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 623.



Diện tích phần vành khuyên: $S_1 = \pi(20^2 - 16^2) = 144\pi \ cm^2.$

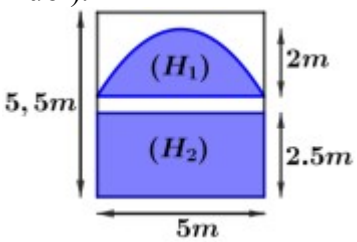
Chọn hệ trục như hình vẽ. Ta có parabol có phương trình là: $(P): y = \frac{1}{8\sqrt{2}}x^2$

Khi đó, diện tích phần cánh hoa là:

$$S_2 = 8.\int_0^{8\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{8\sqrt{2}}x^2 \right) dx = 8.\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{24\sqrt{2}} \right]_0^{8\sqrt{2}} = \frac{512}{3} \ cm^2.$$

Vậy diện tích phần tô đậm là: $S = S_1 + S_2 = 144\pi + \frac{512}{3} \approx 623 \ cm^2.$

Câu 11. Hình vẽ bên dưới minh họa mặt cắt đứng của mặt trước một ngôi nhà có dạng hình chữ nhật $5\text{m} \times 5,5\text{m}$ với các kích thước được cho như trong hình bên dưới. Phần tô đậm trong hình vẽ ứng với phần kính được lắp đặt, phần còn lại lót gạch men. Phần lắp kính được chia làm 2 miền (H_1) và (H_2), trong đó miền (H_1) có đường biên cong là một phần của parabol. Chi phí lắp kính là 1,5 triệu đồng cho 1m^2 và chi phí lót gạch men là 0,28 triệu đồng cho 1m^2. Tổng chi phí cần hoàn thành mặt trước ngôi nhà là bao nhiêu triệu đồng? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười).



Lời giải

Đáp án: 36,6.

Diện tích miền (H_1) bằng $S_1 = \frac{2}{3}.5.2 = \frac{20}{3}$ (m^2)

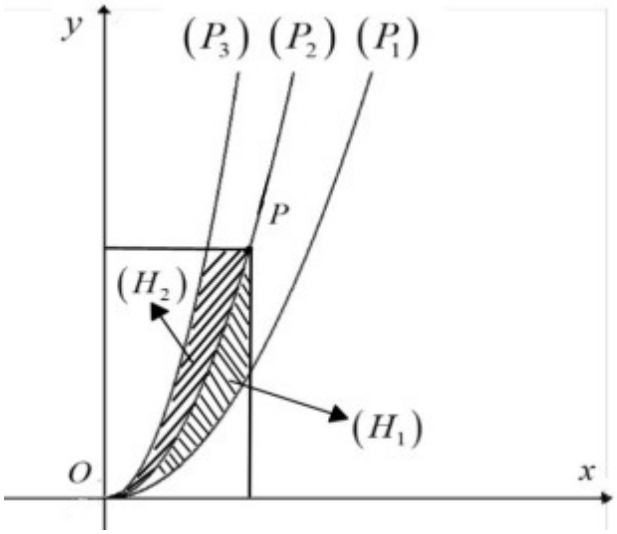
Diện tích miền (H_2) bằng $S_2 = 5.2,5 = 12,5$ (m^2)

Chi phí lắp kính bằng $1,8.\left(\frac{20}{3} + 12,5 \right) = \frac{69}{2}$ (triệu đồng)

Chi phí lát gạch men bằng $0,25.\left(5.5,5 - 12,5 - \frac{20}{3} \right) = \frac{25}{12}$ (triệu đồng)

Tổng chi phí bằng $\frac{69}{2}+\frac{25}{12}=\frac{439}{12}\approx 36,583333$.

Câu 12. Cho ba Parabol $(P_1):y=x^2;(P_2):y=2x^2;(P_3):y=kx^2$ với $k>2$. Gọi P là điểm bất kỳ thuộc parabol (P_2) và S_1,S_2 là diện tích các miền phẳng $(H_1),(H_2)$ (các miền được gạch chéo trong hình vẽ).



Nếu $S_1=S_2$ thì giá trị của $k=\frac{a}{b}$ với $a,b\in\mathbb{N}$ và $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Tính $a+b$.

Lời giải

Đáp án: 41.

Gọi $P(x_o;y_o)\Rightarrow y_o=2x_o^2$

+ Hình phẳng (H_1) giới hạn bởi: $x=0;x=x_o;(P_1):y=x^2;(P_2):y=2x^2$

$\Rightarrow$ diện tích hình phẳng (H_1) là: $S_{(H_1)}=\int_0^{x_o}\left(2x^2-x^2\right)dx=\frac{x_o^3}{3}$

+ Hình phẳng (H_2) giới hạn bởi: $y=0;y=2x_o^2;(P_2):y=2x^2;(P_3):y=kx^2$

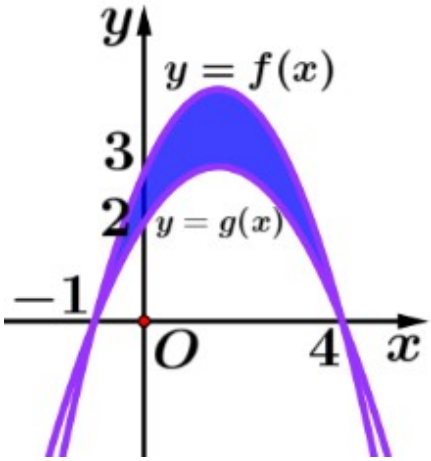
$\Rightarrow$ diện tích hình phẳng (H_2) là: $S_{(H_2)}=\int_0^{2x_o^2}\left(\sqrt{\frac{y}{2}}-\sqrt{\frac{y}{k}}\right)dy=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}y\sqrt{y}-\frac{2}{3\sqrt{k}}y\sqrt{y}\right)\Big|_0^{2x_o^2}$

$=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3\sqrt{k}}\right)2\sqrt{2}x_o^3$

+Theo giải thiết $S_1=S_2\Rightarrow\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{2}{3\sqrt{k}}\right)2\sqrt{2}x_o^3=\frac{x_o^3}{3}\Leftrightarrow 4-\frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{k}}=1\Leftrightarrow\sqrt{k}=\frac{4\sqrt{2}}{3}\Leftrightarrow k=\frac{32}{9}$

$\Rightarrow\begin{cases}a=32\\b=9\end{cases}\Rightarrow a+b=41$.

Câu 13. Hai hàm số $y=f(x);y=g(x)$ đều là những hàm số bậc hai có đồ thị như hình vẽ bên dưới.



Tính diện tích phần tô đậm (làm tròn đến hai chữ số thập phân).

Lời giải

Đáp án: 5,21.

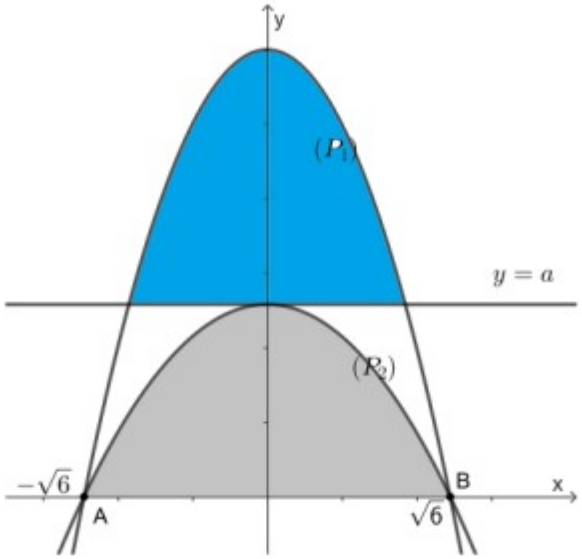
Vì hàm số $y=f(x)$ là hàm số bậc hai và đồ thị $y=f(x)$ cắt trục *Ox* tại các điểm có hoành độ –1 và 4 nên $f(x)=a(x+1)(x-4)$.

Đồ thị $y=f(x)$ đi qua điểm $(0;3)$ nên $a=\frac{-3}{4}\Rightarrow f(x)=-\frac{3}{4}(x+1)(x-4)$

Tương tự $g(x)=-\frac{1}{2}(x+1)(x-4)$.

Do đó diện tích phần tô đậm bằng $\int_{-1}^{4}\left[\frac{-3}{4}(x+1)(x-4)+\frac{1}{2}(x+1)(x-4)\right]dx=\frac{125}{24}\approx 5,21$

Câu 14. Cho parabol $(P_1):\ y=-x^2+6$ cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A và B; parabol (P_2) đi qua hai điểm A; B và có đỉnh nằm trên đường thẳng $d: y=a, (0<a<6)$. Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_1) và d; gọi S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P_2) và trục hoành (tham khảo hình vẽ). Biết rằng $S_1=S_2$. Tính giá trị của biểu thức $T=a^3-12a^2+108a$



Lời giải

Đáp án: 216.

Hoành độ giao điểm của (P_1) và d là nghiệm của phương trình: $a=-x^2+6\Rightarrow x=\pm\sqrt{6-a}$.

Từ giả thiết phương trình của (P_2) cắt trục hoành tại 2 điểm có hoành độ $\pm\sqrt{6}$ nên có dạng: $y=k\left(-x^2+6\right)$, mà (P_2) đi qua điểm $(0;a)$ nên $a=k\left(-0^2+6\right)\Rightarrow k=\frac{a}{6}$.

Vậy $(P_2):y=\frac{a}{6}\left(-x^2+6\right)$

Khi đó ta có $S_1=\int\limits_{-\sqrt{6-a}}^{\sqrt{6-a}}\left(6-x^2-a\right)dx=\frac{4}{3}\sqrt{6-a}.(6-a);\quad S_2=\int\limits_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\frac{a}{6}\left(-x^2+6\right)dx=\frac{4\sqrt{6}}{3}a$

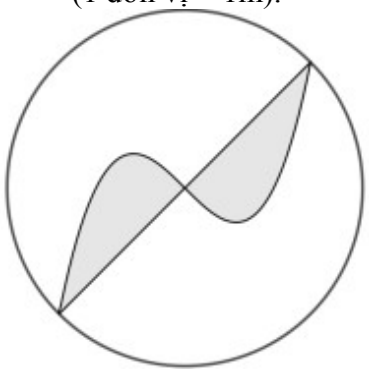
Do $S_1=S_2$ nên ta có:

$\frac{4}{3}\sqrt{6-a}.(6-a)=\frac{4\sqrt{6}}{3}a\Leftrightarrow\sqrt{6-a}.(6-a)=\sqrt{6}a$

$\Leftrightarrow a^3-12a^2+108a=216$

$\Rightarrow T=216$

Câu 15. Một công ty đã đặt hàng việc xây dựng logo doanh nghiệp của mình bằng gỗ và đồng thiết kế theo mẫu bên dưới. Hình tròn sẽ làm bằng gỗ có tâm tại điểm $O(0;0)$. Phần làm bằng đồng (là phần tô đậm) được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=x^3-x$ và đường thẳng có phương trình $y=x$. (1 đơn vị = 1m).



Biết rằng 1 mét vuông tấm đồng có giá 600000 đồng và không bị hao phí; chi phí nhân công làm phần đồng là 30% so với giá tiền tấm đồng, và chi phí cho hình tròn bằng gỗ, vận chuyển và lắp đặt tại chỗ là một khoản cố định là 2700000 đồng. Hỏi công ty phải trả bao nhiêu triệu đồng cho việc chế tạo và lắp đặt logo doanh nghiệp của mình?

Lời giải

Đáp án: 4,26.

Đề nghị sửa bổ sung đơn vị phần đề bài: (1 đơn vị = 1m)

Ta có: $x^3-x=x\Leftrightarrow x^3-2x=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$

Diện tích phần đồng là: $S=2\int\limits_0^{\sqrt{2}}(2x-x^3)\mathrm{d}x=2\left[x^2-\frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}}=2$.

Số tiền phần đồng là: $600000.2=1200000$ đồng.

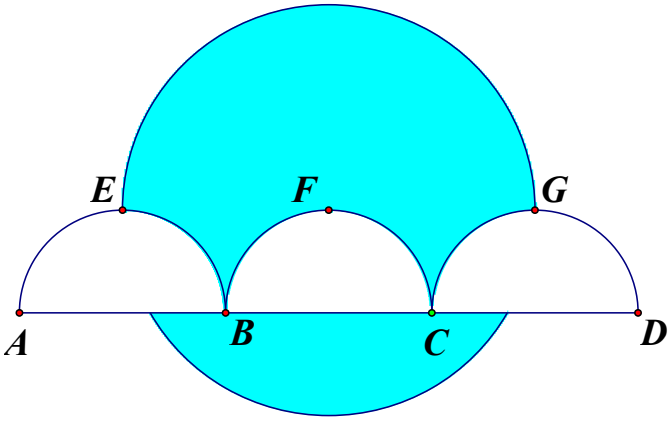
Số tiền nhân công làm phần đồng là: $1200000.30\%=360000$ đồng.

Tổng số tiền công ty phải trả là:

$1200000+360000+2700000=4260000$ đồng $=4,26$ triệu đồng.

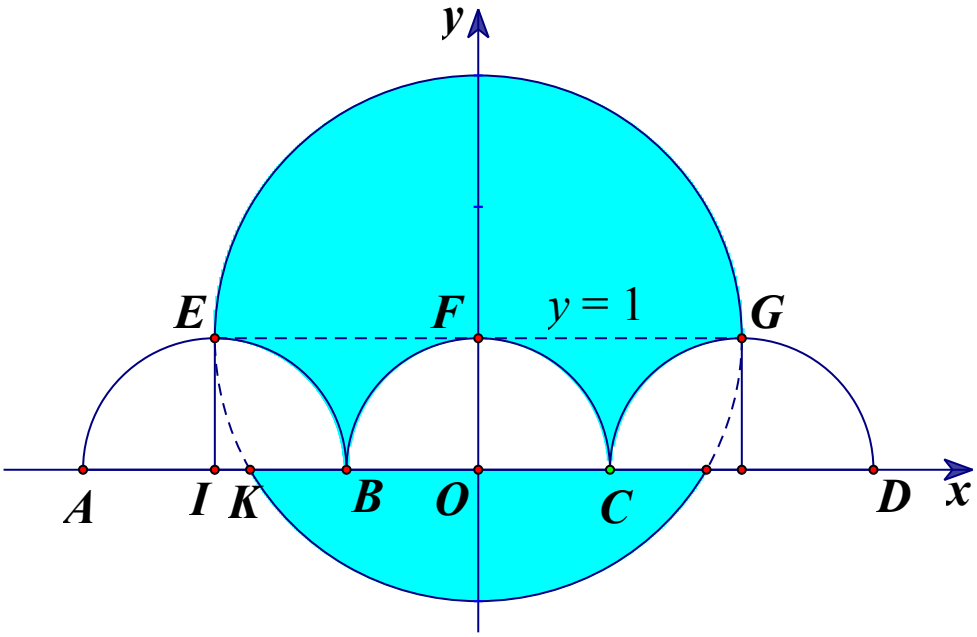
Câu 16. Trong hình vẽ dưới đây, đoạn AD được chia làm 3 bởi các điểm B và C sao cho $AB=BC=CD=2$. Ba nửa đường tròn có bán kính bằng 1 là $\overset{\frown}{AEB}$, $\overset{\frown}{BFC}$ và $\overset{\frown}{CGD}$ có

đường kính tương ứng là AB, BC và CD. Các điểm E, F, G lần lượt là tiếp điểm của tiếp tuyến chung EG với 3 nửa đường tròn. Một đường tròn tâm F, bán kính bằng 2. Diện tích miền bên trong đường tròn tâm F và bên ngoài 3 nửa đường tròn (miền tô đậm) bằng bao nhiêu? (*kết quả làm tròn đến hàng phần mười*).



Lời giải

Đáp số: $9,6$



Diện tích hình tròn tâm F, bán bán kính bằng 2 là $S_F = \pi.2^2 = 4\pi$.

Diện tích nửa hình tròn bán kính bằng 1 là $S_N = \frac{1}{2}.\pi.1^2 = \frac{\pi}{2}$.

Diện tích góc phần tư IBE là $S_I = \frac{1}{4}\pi.1^2 = \frac{\pi}{4}$.

Dựng hệ trục toạ độ Oxy như hình vẽ.

Toạ độ các điểm $F(0;1), I(-2;0)$.

Phương trình đường tròn tâm F, bán kính bằng 2 là $x^2 + (y-1)^2 = 4$.

$\Rightarrow$ Cung nhỏ EK nằm trên đồ thị $y = 1 - \sqrt{4 - x^2}$.

Hoành độ giao điểm K là nghiệm của phương trình $1 - \sqrt{4 - x^2} = 0, (x < 0)$.

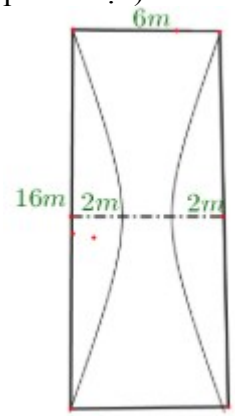
Ta có $1 - \sqrt{4 - x^2} = 0 \Leftrightarrow 4 - x^2 = 1 \Rightarrow x = -\sqrt{3}$ (vì $x < 0$).

Diện tích tam giác cong IEK là $S_C = \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \left(1 - \sqrt{4 - x^2}\right) dx$.

Diện tích miền tô đậm trong hình là:

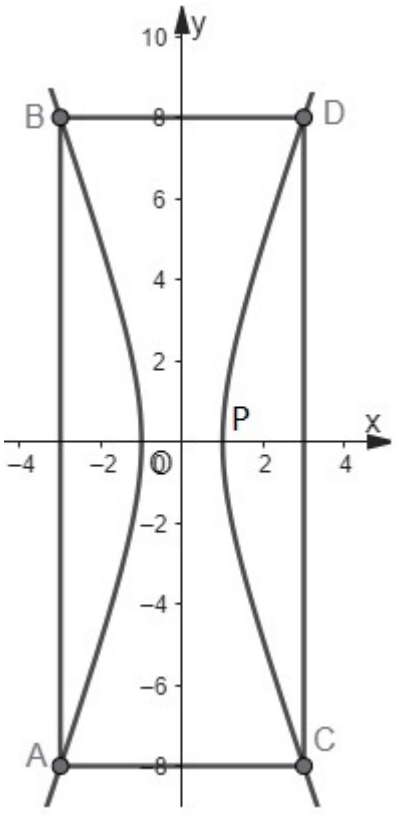
$$S = S_F - S_N - 2\left(S_I - S_C\right) = 4\pi - \frac{\pi}{2} - 2\left(\frac{\pi}{4} - \int_{-2}^{-\sqrt{3}} \left(1 - \sqrt{4 - x^2}\right) dx\right) \approx 9,6$$

Câu 17. Ông A có mảnh đất hình chữ nhật chiều dài 16m, chiều rộng 6m. Ông A muốn thiết kế mảnh đất đó thành ba phần bởi đường cong hypebol (như hình vẽ). Ông A dự định trồng hoa ở hai phần đất được giới hạn bởi đường cong hypebol và chiều dài mảnh đất, phần đất còn lại ông lát đá. Biết chi phí trồng hoa là 150.000 đồng/$1m^2$ và lát đá là 300.000 đồng/$1m^2$. Tính chi phí mà ông A bỏ ra để hoàn thành dự định của mình, (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: 23,1



Chọn hệ toạ độ Oxy như hình vẽ, đơn vị trên hệ trục là mét.

Khi đó, hypebol có phương trình chính tắc là $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, (a > 0, b > 0)$.

Ta thấy hypebol đi qua hai điểm $P(1;0),\ D(3;8)$ nên $\frac{1^2}{a^2}-\frac{0^2}{b^2}=1;\ \frac{3^2}{a^2}-\frac{8^2}{b^2}=1\Rightarrow a^2=1;\ b^2=8.$

Vậy phương trình hypebol là $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{8}=1\Rightarrow y=\pm\sqrt{8x^2-8}$

Diện tích mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ là $S=6.16=96\,m^2$

Diện tích trồng hoa (hai phần đất được giới hạn bởi đường cong hypebol và chiều dài mảnh đất) là $S_1=4\int_1^3\sqrt{8x^2-8}\approx 38\,m^2$

Diện tích phần lát đá là $S_2=S-S_1\approx 58\,m^2$

Tổng chi phí mà ông A bỏ ra để hoàn thành dự định của mình là $0,15.S_1+0,3.S_2\approx 23,1$ triệu đồng.

Kết quả làm tròn đến hàng phần chục là $23,1$ triệu

Câu 18. Một nghệ sĩ đang thực hiện vẽ tranh tường 3D nghệ thuật để trang trí nội thất. Mỗi bức tranh gồm một hình lục giác đều có cạnh bằng 30 cm, trên mỗi cạnh của hình lục giác đều có một cánh hoa hình parabol, đỉnh của parabol cách cạnh lục giác đều 30 cm và nằm phía ngoài hình lục giác, đường parabol đó đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh (xem hình dưới). Biết tổng giá vẽ tranh 3D (bao gồm công và vật tư) là 500.000 đồng/m². Hỏi nghệ sĩ nhận được bao nhiêu tiền sau khi hoàn thành bức tranh? (Làm tròn đến nghìn đồng gần nhất.)

Đáp án: 297.

Lời giải

Diện tích lục giác là diện tích của 6 tam giác đều cạnh $0,3\,\text{m}$: $S_1=6.\frac{(0,3)^2\sqrt{3}}{4}=\frac{27\sqrt{3}}{200}(m^2)$

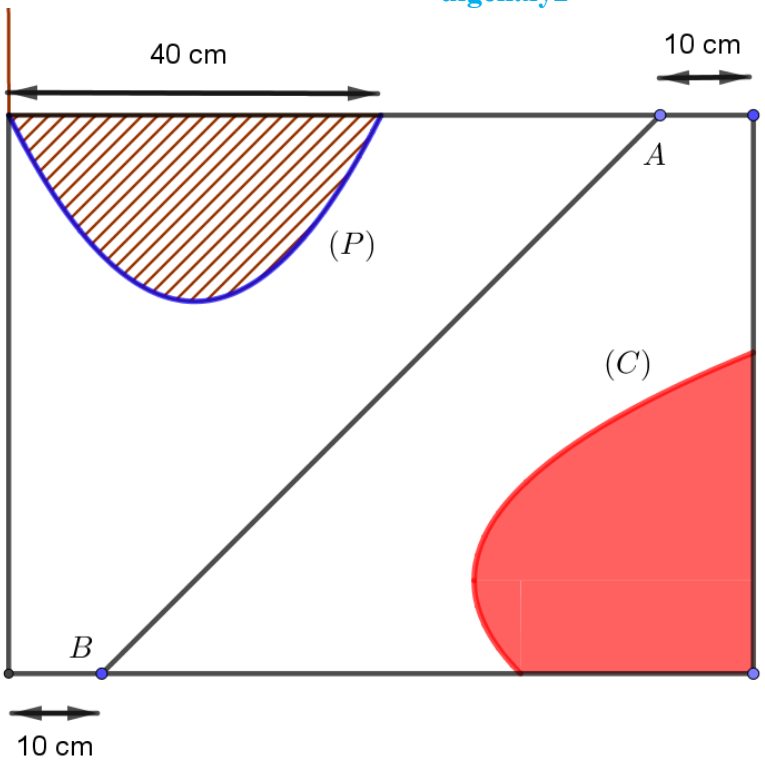
Diện tích 6 cánh hoa là diện tích 6 parabol $d=0,3m;\ h=0,3m$

$S_2=6.\frac{2}{3}h.d=6.\frac{2}{3}.0,3.0,3=\frac{9}{25}(m^2)$

Tổng diện tích bức tranh: $S=S_1+S_2$

Tổng giá tiền để vẽ bức tranh là : $\left(\frac{9}{25}+\frac{27\sqrt{3}}{200}\right).500\approx 297$ (nghìn)

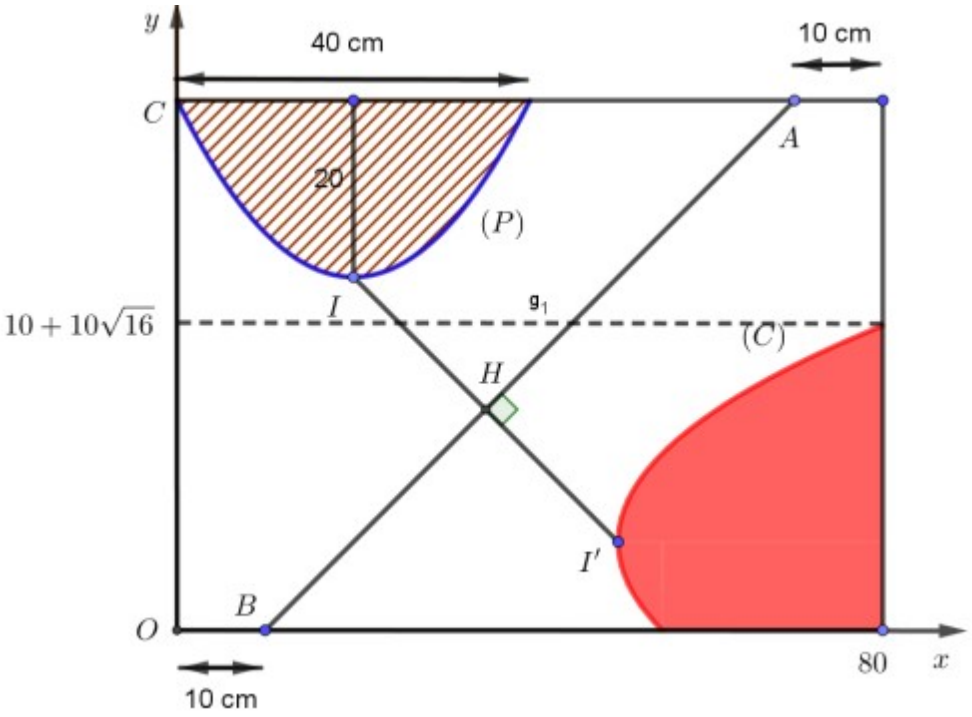
Câu 19. Để trang trí một ô hình chữ nhật với kích thước $80\text{ cm}\times 60\text{ cm}$ trên tường căn phòng của mình, anh Bình đã tô màu 2 hoạ tiết giới hạn bởi các parabol (P), parabol (C) và các cạnh của ô chữ nhật bằng màu vàng (kí hiệu sọc nghiêng) và màu xanh (vùng tô đậm) (như hình vẽ). Biết rằng các parabol (P) và (C) đối xứng nhau qua đường thẳng AB và diện tích phần màu vàng bằng $\frac{1600}{3}\text{ cm}^2$. Tính tổng số tiền (đơn vị: triệu đồng) mà anh Bình cần phải trả để mua sơn trang trí. Biết mỗi lọ sơn, sơn được tối đa 30 cm^2. Cho biết giá của một lọ sơn vàng là $50\,000$ đồng, giá của một lọ sơn xanh là $30\,000$ đồng (biết rằng mỗi lọ sơn không được bán lẻ).



Lời giải

Đáp án: 667.

Chọn hệ trục $Oxyz$ như hình vẽ.



$AB: y = ax + b$ đi qua $A(70;60)$, $B(10;0)$.

Suy ra $\begin{cases} 70a + b = 60 \\ 10a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -10 \end{cases}$.

$AB: y = x - 10$.

$S_{\text{vàng}} = \frac{2}{3} \cdot D \cdot h$ trong đó D là khoảng cách giữa hai điểm của parabol nằm trên Ox và h là khoảng cách từ đỉnh xuống trục Ox.

Suy ra $h=\dfrac{3S}{2D}=\dfrac{3\cdot\dfrac{1600}{3}}{2\cdot 40}=20$.

Gọi I là đỉnh của parabol $(P):y=ax^2+bx+c$ đi qua $C(0;60)$, có đỉnh $I(20;40)$

Suy ra $\begin{cases}c=60\\400a+20b+c=40\\-\dfrac{b}{2a}=20\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\dfrac{1}{20}\\b=-2\\c=60\end{cases}$.

$\Rightarrow (P):y=\dfrac{1}{20}x^2-2x+60$.

I' là đỉnh của (C)

II' đi qua $I(20;40)$ và $\perp AB$.

Suy ra phương trình $II':1(x-20)+1(y-40)=0\Leftrightarrow x+y-60=0$.

Gọi $H=AB\cap II'$ thì tọa độ H thỏa mãn hệ phương trình

$\begin{cases}x-y-10=0\\x+y-60=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=35\\y=25\end{cases}\Rightarrow H(35;25)$.

H là trung điểm của II'

Suy ra $\begin{cases}x_{I'}=2x_H-x_I=50\\y_{I'}=2y_H-y_I=10\end{cases}\Rightarrow I'(50;10)$.

C' là điểm đối xứng của C qua H.

Suy ra $C'(70;-10)$.

$(C):x=my^2+ny+p$ đi qua $C'(70;-10)$ và có đỉnh $I'(50;10)$

$\Rightarrow\begin{cases}100m-10n+p=70\\20m+n=0\\100m+10n+p=50\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=\dfrac{1}{20}\\n=-1\\p=55\end{cases}$.

$(C):x=\dfrac{1}{20}y^2-y+55$

Phương trình tung độ giao điểm của DE và (C) là

$80=\dfrac{1}{20}y^2-y+55\Rightarrow y=10+10\sqrt{6}$

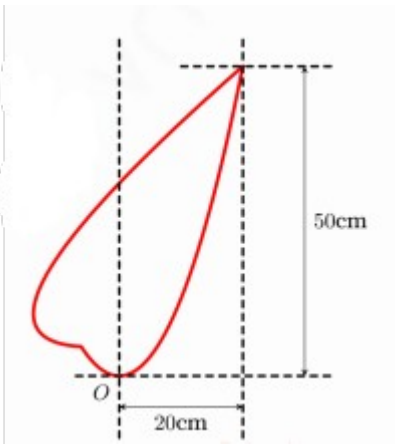
$S_{(C)}=\displaystyle\int_0^{10+10\sqrt{6}}\left(80-\left(\frac{1}{20}y^2-y+55\right)\right)dy\approx 773\ (\text{cm}^2)$.

Số hộp sơn vàng cần là $\dfrac{773}{30}\approx 26$ (hộp sơn), số hộp sơn xanh cần là $\dfrac{\dfrac{1600}{3}}{30}\approx 18$ (hộp sơn).

Số tiền cần là

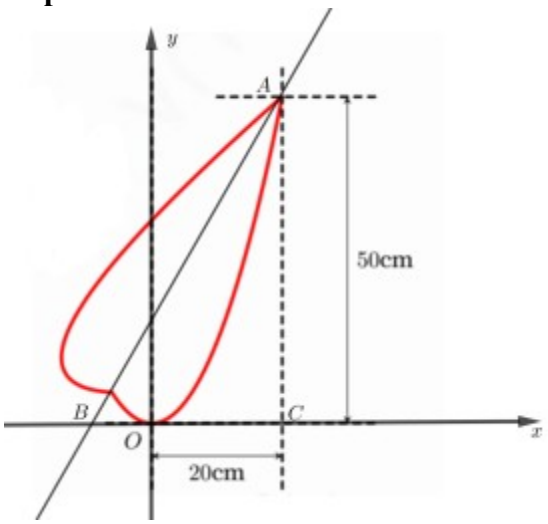
$26\cdot 30\,000+18\cdot 50000=1680000$ (đồng) $=1,68$ (triệu đồng).

Câu 20. Sau khi đọc xong truyện ngắn rất cảm động "Chiếc lá cuối cùng" của nhà văn O.Henry, bạn An muốn thiết kế hình ảnh một chiếc lá để gửi đến chị em Johnsy và Sue. Chiếc lá là một hình phẳng được giới hạn bởi hai phần parabol giống nhau. Biết một parabol có đỉnh là điểm O và trục đối xứng của hình phẳng này là một đường thẳng tạo với phương ngang góc 60°. Với các kích thước được cho như hình vẽ, hãy tính diện tích của chiếc lá. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị của cm^2)



Lời giải

Đáp án: 745.



Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.

Vì parabol có đỉnh là điểm $O(0;0)$ và đi qua điểm $A(20;50)$ nên phương trình parabol là: $y=\frac{1}{8}x^2$.

Xét tam giác ABC: $\cot 60^\circ=\frac{BC}{AC}\Leftrightarrow BC=\frac{50\sqrt{3}}{3}$ cm.

Suy ra tọa độ điểm $B\left(-\frac{50\sqrt{3}}{3}+20;0\right)$.

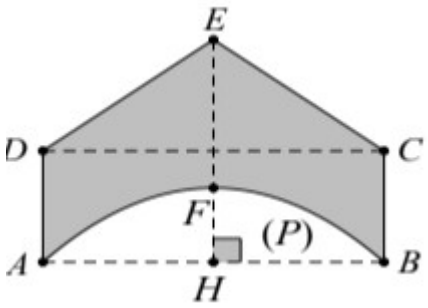
Phương trình đường thẳng AB: $y=\sqrt{3}x+50-20\sqrt{3}$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của parabol $y=\frac{1}{8}x^2$ và đường thẳng AB: $\sqrt{3}x+50-20\sqrt{3}=\frac{1}{8}x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=20\\x=-20+8\sqrt{3}\end{array}\right.$.

Vậy diện tích của chiếc lá là

$S = 2.\int_{-20+8\sqrt{3}}^{20}\left(\sqrt{3}x + 50 - 20\sqrt{3} - \frac{1}{8}x^2\right)dx \approx 745$ (cm^2).

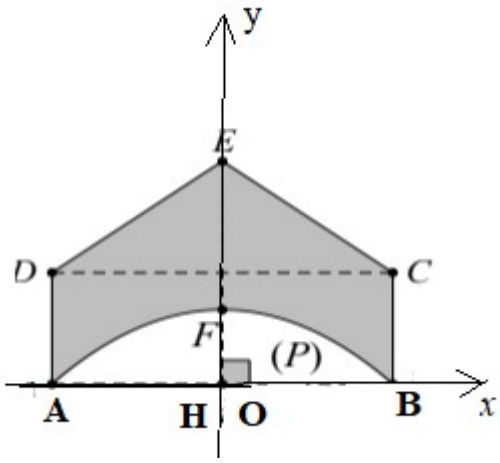
Câu 21. Bác An lên kế hoạch làm một cái biển quảng cáo phẳng, có thiết kế là phần được tô màu đậm trong hình vẽ bên. Đường cong (P) là một parabol có đỉnh là điểm F, có trục đối xứng là FH và đi qua các điểm A, B. Tứ giác $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 8\,m,\ BC = 3\,m,\ EH = 6\,m,\ FH = 2\,m$. Bác An kí hợp đồng với công ty X với đơn giá là $1,1$ triệu đồng/ $1\,m^2$. Hỏi số tiền mà bác An phải trả sau khi làm xong cái biển quảng cáo là bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: $27,9$

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ, một đơn vị trên trục là 1m, khi đó từ các giả thiết ta có:



$H(0;0), A(-4;0), B(4;0), C(4;3), D(-4;3), E(0;6), F(0;2)$

Đường thẳng DE đi qua D và E nên có phương trình là $y = \frac{3}{4}x + 6$

Đường thẳng CE đi qua C và E nên có phương trình là $y = -\frac{3}{4}x + 6$

Parabol (P) có phương trình dạng $y = ax^2 + 2$ đi qua $B(4;0)$ nên $a = -\frac{1}{8}$. Suy ra phương trình của parabol là $y = -\frac{1}{8}x^2 + 2$.

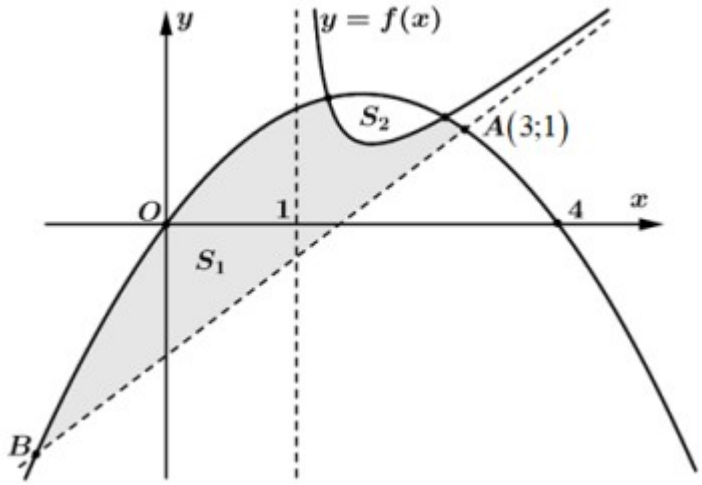
Diện tích phần tô đậm bằng

$$\int_{-4}^{0}\left[\frac{3}{4}x + 6 - \left(\frac{1}{8}x^2 + 2\right)\right]dx + \int_{0}^{4}\left[-\frac{3}{4}x + 6 - \left(\frac{1}{8}x^2 + 2\right)\right]dx$$

$$= \int_{-4}^{0}\left[\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + 4\right]dx + \int_{0}^{4}\left[-\frac{3}{4}x - \frac{1}{8}x^2 + 4\right]dx = \frac{76}{3}\ m^2$$

Số tiền bác An phải trả là $\frac{76}{3}\text{x}1,1\approx 27,9$ triệu đồng.

Câu 22. Cho hàm số bậc hai trên bậc nhất $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{4x-d}$ và parabol (P) có đồ thị như hình vẽ. Hàm số $y=f(x)$ có đường tiệm cận đứng $x=1$ và đường tiệm cận xiên cắt parabol tại điểm $A(3;1)$. Ký hiệu các diện tích hình phẳng S_1,S_2 lần lượt là các phần diện tích được tô đậm và không tô màu như hình vẽ. Biết rằng giá trị $S_1+S_2=\frac{32}{3}$ và $f(4)=\frac{7}{4}$. Tính giá trị của S_2 (Kết quả làm tròn đến chữ số hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: $0,94$.

Gọi điểm $B(x_2;y_2)$

Sử dụng công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường thẳng và parabol, ta có:

$$\frac{(x_1-x_2)^3}{6}=S_1+S_2=\frac{32}{3}\Leftrightarrow(x_1-x_2)^3=64\Leftrightarrow x_1-x_2=4\Leftrightarrow\begin{cases}x_1=3\\x_2=-1\end{cases}$$

Phương trình parabol $(P):y=ax(x-4)$ đi qua điểm $A(1;3)$ nên suy ra $a=-\frac{1}{3}$

Khi đó phương trình parabol (P) là $y=-\frac{1}{3}x(x-4)$ khi đó $B\left(-1;-\frac{5}{3}\right)$

Khi đó phương trình đường thẳng AB cũng là đường tiệm cận xiên của hàm số $y=f(x)$ có phương trình là $y=\frac{2}{3}x-1$.

Đồ thị hàm số có đường tiệm cận đứng là đường thẳng $x=1$ nên suy ra $d=4$

Ta có $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{4x-d}=\frac{\left(\frac{2}{3}x-1\right)(4x-4)+k}{(4x-4)}$ mà $f(4)=\frac{7}{4}$ nên $k=1$

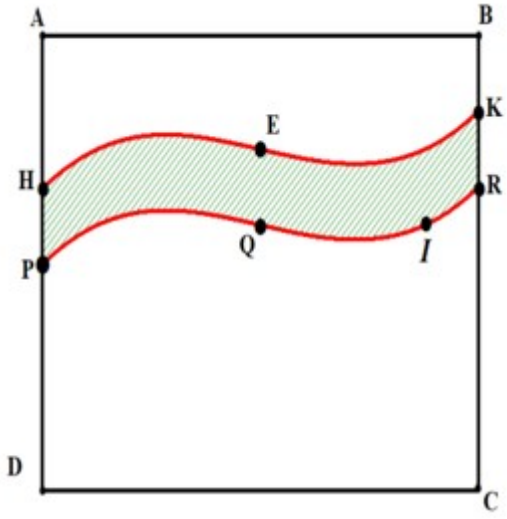
Vậy $f(x)=\frac{ax^2+bx+c}{4x-d}=\frac{\left(\frac{2}{3}x-1\right)(4x-4)+1}{(4x-4)}=\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{1}{(4x-4)}$

Phương trình hoành độ giao điểm giữa $y=f(x)$ và parabol là:

$$\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{1}{(4x-4)}=-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x \Leftrightarrow -4x^3+12x^2+4x-15=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2,89868083208=a \\ x=1,18919299296=b \\ x=-1,08787382504(loai) \end{array}\right.$$

Vậy $S_2=\int_a^b\left[\left(\frac{2}{3}x-1\right)+\frac{1}{(4x-4)}-\left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{4}{3}x\right)\right]dx\approx 0,94$

Câu 23. Kiến trúc sư thiết kế một con đường để chia khu đất hình chữ nhật $ABCD$ với $AB=40\,\text{m}$, $AD=60\,\text{m}$ thành hai phần (hai lề đường là các đường cong HEK và $PQIR$). Trong đó phần giới hạn bởi đường cong HEK và các đoạn AH, AB, BK là sân chơi, phần giới hạn bởi đường cong $PQIR$ và các đoạn PD, DC, CR để trồng hoa (tham khảo hình vẽ). Nếu gắn một hệ trục tọa độ vuông góc có trục hoành, trục tung lần lượt cùng phương với các đường thẳng AB, AD thì đường cong $PQIR$ là một phần của đồ thị hàm số bậc ba $y=f(x)$. Đường cong HEK nhận được bằng cách tịnh tiến đường cong $PQIR$ theo phương thẳng đứng lên phía trên $10\,\text{m}$. Biết $AP=30\,\text{m}$, $BR=20\,\text{m}$, điểm Q cách các cạnh AB, AD lần lượt $25\,\text{m}$ và $20\,\text{m}$, điểm I cách các cạnh AB, AD lần lượt $25\,\text{m}$ và $35\,\text{m}$. Gọi S_1 là diện tích phần sân chơi và S_2 là diện tích phần trồng hoa. Tính $\frac{S_1}{S_2}$ (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

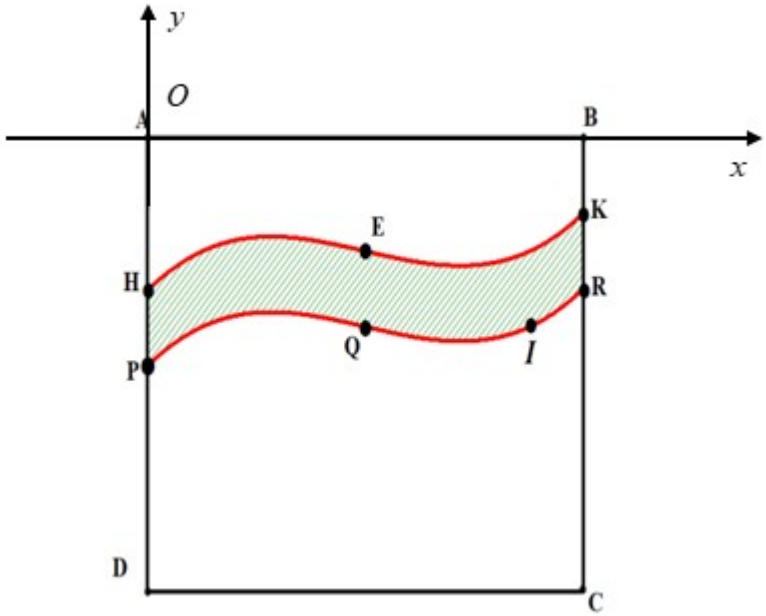


Lời giải

Đáp án: 0,43.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho trục Ox trùng với cạnh AB, trục Oy trùng với cạnh AD. Khi đó ta có $A(0;0)$, $P(0;-30)$, $Q(20;-25)$, $I(35;-25)$, $R(40;-20)$.

Gọi đường cong $PQIR$ có phương trình là $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, từ đó ta có hệ phương trình



$$\begin{cases} d=-30 \\ 8000a+400b+20c+d=-25 \\ 42875a+1225b+35c+d=-25 \\ 64000a+1600b+40c+d=-20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{700} \\ b=-\dfrac{3}{35} \\ c=\dfrac{39}{28} \\ d=-30 \end{cases}$$

Ta suy ra đường cong $PQIR$ là đồ thị hàm số $y=f(x)=\dfrac{1}{700}x^3-\dfrac{3}{35}x^2+\dfrac{39}{28}x-30$

Và đường cong HEK là đồ thị hàm số $y=g(x)=\dfrac{1}{700}x^3-\dfrac{3}{35}x^2+\dfrac{39}{28}x-20$

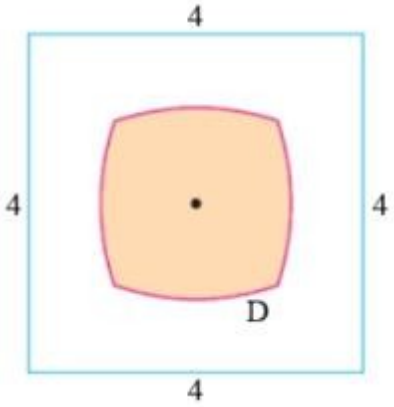
Diện tích phần sân chơi $S_1=\int_0^{40}\left[-g(x)\right]dx=\int_0^{40}\left[-\left(\dfrac{1}{700}x^3-\dfrac{3}{35}x^2+\dfrac{39}{28}x-20\right)\right]dx=600\,\text{m}^2$

Diện tích phần trồng hoa là

$$S_2=\int_0^{40}\left[f(x)+60\right]dx=\int_0^{40}\left[\frac{1}{700}x^3-\frac{3}{35}x^2+\frac{39}{28}x-30+60\right]dx=1400\,\text{m}^2.$$

Vậy tỉ số $\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{600}{1400}=\dfrac{3}{7}\approx 0,43$.

Câu 24. Hình vẽ dưới đây cho biết một miền D (được tô đậm) nằm trong hình vuông cạnh bằng 4, miền D này gồm những điểm có khoảng cách tới tâm hình vuông nhỏ hơn hoặc bằng khoảng cách tới cạnh gần nhất của hình vuông.

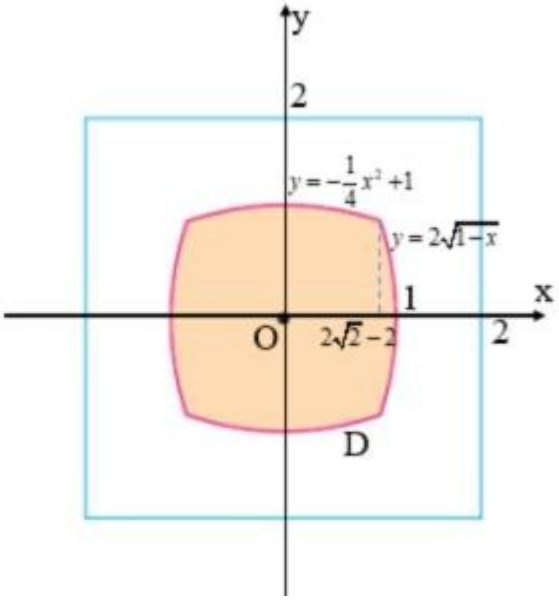


Tính diện tích miền D, với kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất.

Lời giải

Đáp án: $3,5$.

Từ định nghĩa "tập hợp các điểm cách đều 1 điểm và 1 đường thẳng (điểm không thuộc đường thẳng) là một đường parabol", ta suy ra miền D được giới hạn bởi 4 đường parabol có tiêu điểm là tâm hình vuông và đường chuẩn là cạnh của hình vuông.

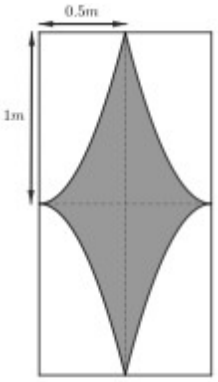


Dựng hệ toạ độ như hình vẽ, tìm phương trình các đường parabol rồi dựa vào ứng dụng của tích phân tính được diện tích miền D là:

$$S=4\left[\int_0^{2\sqrt{2}-2}\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)\mathrm{d}x+\int_{2\sqrt{2}-2}^{1}\left(2\sqrt{1-x}\right)\mathrm{d}x\right]=\frac{64\sqrt{2}-80}{3}\approx 3,5$$

.

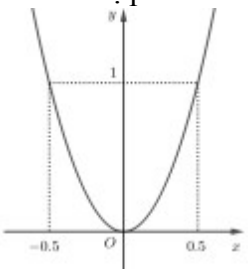
Câu 25. Nhà bác Ba có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật với chiều dài $2m$ và chiều rộng $1m$. Hai mặt của mỗi cánh cửa được thiết kế như hình vẽ dưới đây. Trong đó, phần được tô đậm được sơn màu xanh, phần còn lại được sơn màu trắng. Mỗi phần sơn màu trắng có đường biên cong là một phần của parabol có đỉnh nằm trên cạnh của hình chữ nhật. Biết rằng chi phí để sơn màu xanh là 120 nghìn đồng$/m^2$ và chi phí sơn màu trắng là 110 nghìn đồng$/m^2$. Hỏi, để sơn toàn bộ số cửa sắt trên, bác Ba phải tốn bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm theo đơn vị triệu đồng).



Lời giải

Đáp án: 3.63.

Xét đồ thị parabol trên hệ trục tọa độ Oxy như sau:

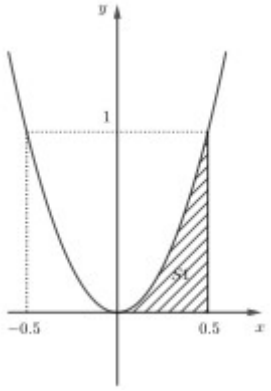


Gọi parabol có phương trình là: $y=ax^2+bx+c$

Parabol đi qua các điểm có tọa độ $(-0.5;1),(0.5;1),(0;0)$, nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} c=0 \\ a.0.5^2+b.0.5=1 \\ a.\left(-0.5^2\right)+b.(-0.5)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=0 \\ a=4 \\ b=0 \end{cases}.$$

Vậy ta có phương trình parabol $y=4x^2$.



Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y=4x^2, y=0, x=0, x=0.5$ là:

$$S_1=\int_0^{0.5}4x^2dx=\frac{1}{6}$$

Diện tích của phần tô đậm được sơn màu xanh của mỗi mặt cánh cửa là $S_2=4.S_1=4.\frac{1}{6}=\frac{2}{3}$.

Diện tích của phần không tô đậm tô đậm được sơn màu trắng của mỗi mặt cánh cửa là $S_3=1.2-S_2=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$.

Có tất cả 8 cánh cửa sắt hình chữ nhật, mỗi cánh có 2 mặt, vậy có tất cả 16 mặt như hình vẽ.

Vậy tổng diện tích phần tô đậm được sơn màu xanh là: $16S_2=16.\frac{2}{3}=\frac{32}{3}\left(m^2\right)$

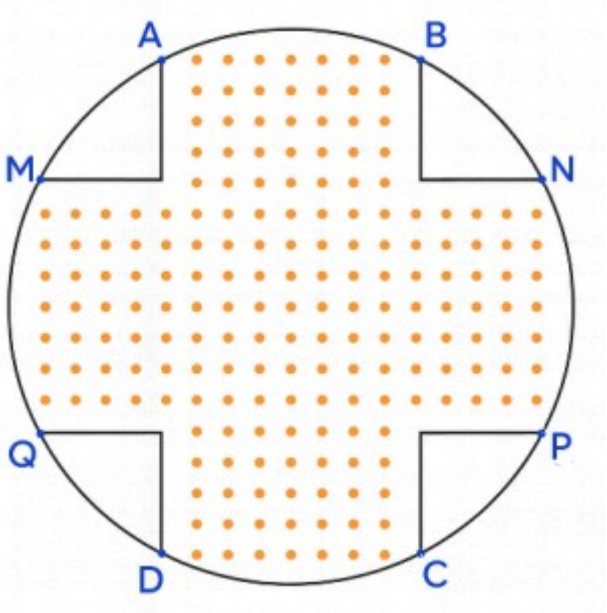
Tổng diện tích phần không tô đậm được sơn màu trắng là: $16S_3=16.\frac{4}{3}=\frac{64}{3}\left(m^2\right)$

Tổng chi phí để sơn màu xanh là: $\frac{32}{3}.120=1280$ (nghìn đồng) $=1.28$ (triệu đồng)

Tổng chi phí để sơn màu trắng là: $\frac{64}{3}.110\approx 2346$ (nghìn đồng) ≈ 2.35 (triệu đồng)

Tổng chi phí sơn là: $1.28+2.35=3.63$ (triệu đồng).

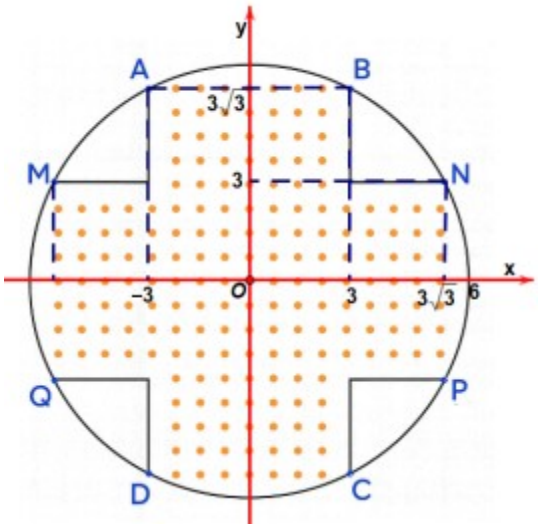
Câu 26. Một mảnh vườn hoa dạng hình tròn có bán kính bằng $6m$. Phần đất trồng hoa là phần tô trong hình vẽ bên. Biết hai hình chữ nhật $ABCD$, $MNPQ$ có $AB=MQ=6m$ và kinh phí trồng hoa là 100000 đồng$/m^2$. Tính số tiền cần để trồng hoa? (đơn vị: triệu đồng, kết quả là tròn đến hàng phần chục).



Lời giải

Đáp án: $33,1$.

Chọn hệ tọa độ Oxy sao cho như hình vẽ



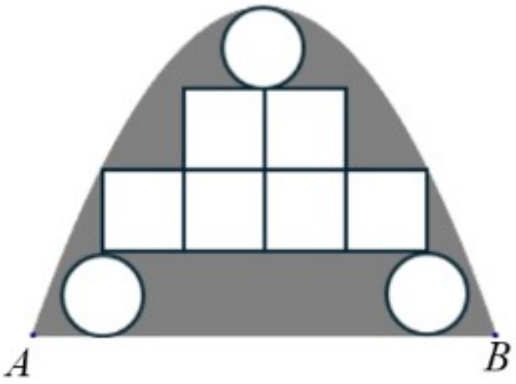
Khi đó phương trình đường tròn tâm O bán kính bằng 6 là $x^2+y^2=36$

Diện tích phần trồng hoa là

$$S=\pi.6^2-4\int_{3}^{3\sqrt{3}}\left(\sqrt{36-x^2}-3\right)dx\approx 101,75\ \left(m^2\right)$$

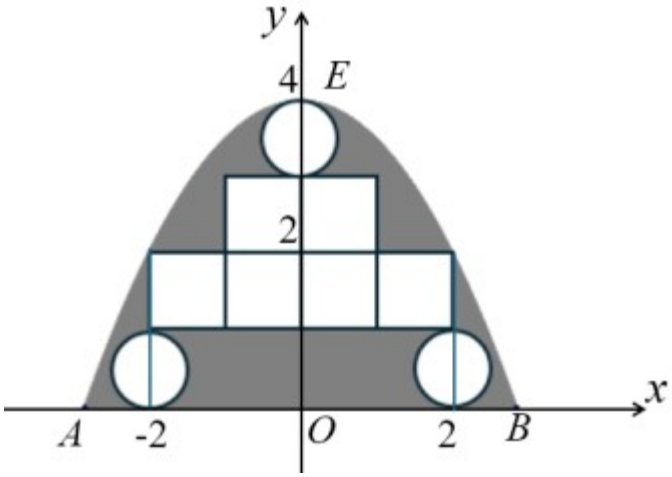
Số tiền cần để trồng hoa là $S.0,1\approx 10,2$ (triệu đồng)

Câu 27. Một cửa vòm có dạng hình parabol được lắp các tấm kính hình tròn đường kính $1\,m$ và các tấm kính hình vuông có cạnh $1\,m$ như hình vẽ. Phần còn lại của cửa được sơn màu trang trí với mức giá 1,2 triệu đồng $/m^2$. Chi phí sơn màu là bao nhiêu triệu đồng (kết quả làm tròn đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: $8,1$.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Gọi phương trình Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

$$\Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = 2 \\ 4a - 2b + c = 2 \\ c = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = 0 \\ c = 4 \end{cases}$$

Do Parabol qua các điểm $(0;4)$;$(2;2)$ và $(-2;2)$ nên ta có .

$y = -\dfrac{1}{2}x^2 + 4$.

Parabol cắt trục hoành tại hai điểm A, B có hoành độ là nghiệm của phương trình $-\dfrac{1}{2}x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2\sqrt{2} \\ x = -2\sqrt{2} \end{array} \right.$.

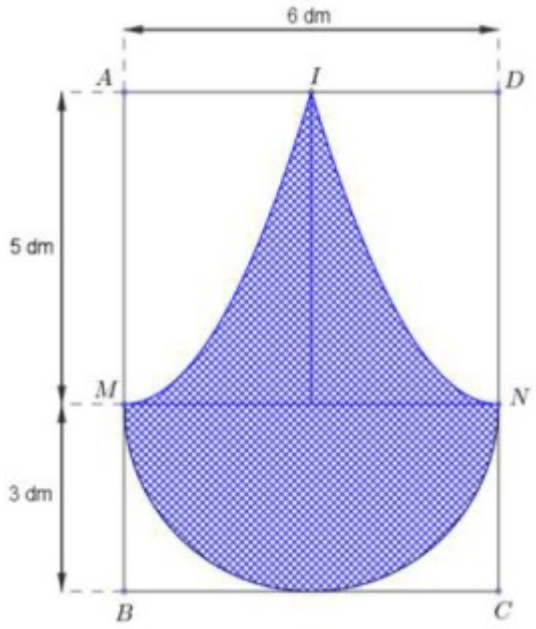
Diện tích vòm cửa là $S = \int\limits_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(-\dfrac{1}{2}x^2 + 4 \right) \mathrm{d}x = \left(\dfrac{-x^3}{6} + 4x \right) \Big|_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} = \dfrac{32\sqrt{2}}{3}$.

Diện tích các tấm kính bằng: $6 + 3\pi \left(\dfrac{1}{2} \right)^2$.

Suy ra diện tích phần còn lại là: $S = \dfrac{32\sqrt{2}}{3} - 6 - \dfrac{3\pi}{4}$.

Giá tiền sơn là $\left(\frac{32\sqrt{2}}{3}-6-\frac{3\pi}{4}\right)1,2\approx 8,1$ triệu.

Câu 28. Để trang trí một bảng gỗ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=8\,\text{dm}$ và chiều rộng $AD=6\,\text{dm}$, người ta thiết kế một logo là hình phẳng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính $MN=6\,\text{dm}$, tiếp xúc với BC, hai đường cong IM, IN là một phần của các đường parabol có trục đối xứng lần lượt là AB, CD với I là trung điểm của AD (tham khảo hình vẽ).



Phần logo được sơn màu xanh với chi phí 50000 đồng/ $1\,\text{dm}^2$ và phần còn lại của bảng gỗ được sơn màu trắng với chi phí 30000 đồng/ $1\,\text{dm}^2$. Hỏi cần bỏ ra bao nhiêu nghìn đồng để trang trí bảng gỗ trên (kết quả làm tròn đến hàng đơn vị)?

Lời giải

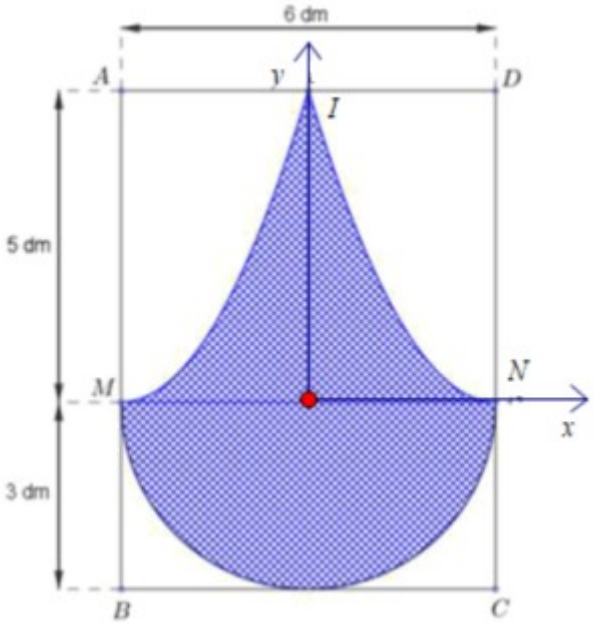
Đáp án: 1923.

Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ bằng $6.8=48\,\text{dm}^2$.

Diện tích của nửa đường tròn đường kính MN bằng $S=\frac{1}{2}\pi R^2=\frac{1}{2}\pi.3^2=\frac{9}{2}\pi\,\text{dm}^2$.

Ta xác định phương trình của parabol.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:



Gọi phương trình parabol có đỉnh N là $y=ax^2+bx+c$, theo bài ra ta có:

$$\begin{cases} y(0)=5 \\ y(3)=0 \\ \dfrac{-b}{2a}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=5 \\ 9a+3b+c=0 \\ 6a+b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{5}{9} \\ b=\dfrac{-10}{3} \\ c=5 \end{cases}$$

Vậy $y=\dfrac{5}{9}x^2-\dfrac{10}{3}x+5$.

Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi $y=\dfrac{5}{9}x^2-\dfrac{10}{3}x+5$, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;x=3$ bằng: $S_1=\int\limits_0^3\left(\dfrac{5}{9}x^2-\dfrac{10}{3}x+5\right)\mathrm{d}x=5\left(\mathrm{dm}^2\right)$.

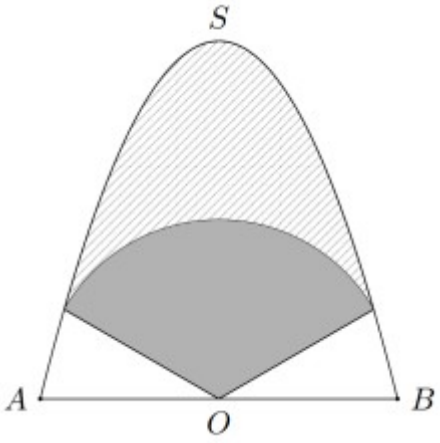
Do tính đối xứng nên hình phẳng giới hạn bởi parabol có đỉnh M, trục đối xứng AB, trục hoành và hai đường thẳng $x=0;x=3$ có diện tích bằng $5\left(\mathrm{dm}^2\right)$.

Tổng diện tích phần bảng gỗ sơn màu xanh là: $\left(\dfrac{9}{2}\pi+10\right)\mathrm{dm}^2$.

Diện tích của phần bảng gỗ sơn màu trắng là: $S'=48-\left(\dfrac{9}{2}\pi+10\right)=\left(38-\dfrac{9}{2}\pi\right)\mathrm{dm}^2$.

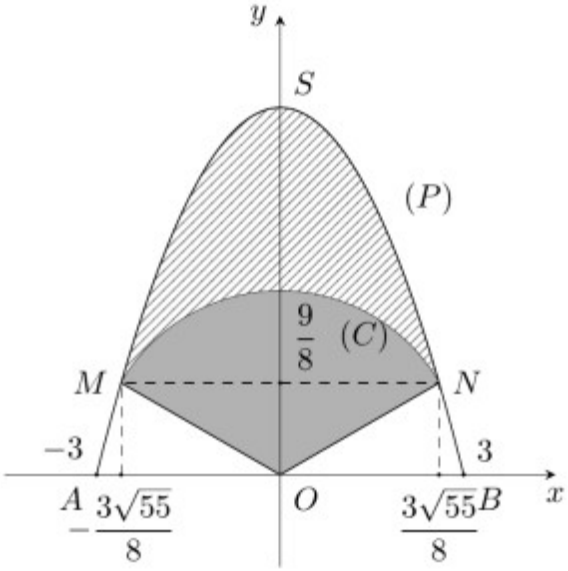
Chi phí cần bỏ ra là: $\left(\dfrac{9}{2}\pi+10\right).50000+\left(38-\dfrac{9}{2}\pi\right).30000\approx 1923$ (nghìn đồng).

Câu 29. Để chuẩn bị quảng bá sản phẩm, người ta trang trí tấm pano dạng parabol như hình vẽ, biết $OS=8\ m$, $AB=6\ m$ với O là trung điểm của AB. Tấm pano được chia thành ba phần để trang trí với mức chi phí khác nhau: phần trên là phần kẻ sọc giá 100000 đồng/m², phần giữa là hình quạt tâm O bán kính $3\ m$ được tô đậm giá 200000 đồng/m², phần còn lại giá 150000 đồng/m². Tính tổng chi phí để trang trí tấm pano (đơn vị triệu đồng, kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

Đáp án: $4,44$.



Chọn hệ trục Oxy với tia Ox trùng với tia OB, tia Oy trùng với tia OS như hình vẽ.

Khi đó ta có: $A(-3;0)$, $B(3;0)$, $S(0;8)$.

Suy ra parabol có phương trình là: $y=-\frac{8}{9}x^2+8$ (P).

Rìa của hình quạt là cung tròn của đường tròn (C) có phương trình:

$x^2+y^2=9 \Leftrightarrow y=\pm\sqrt{9-x^2}$.

Hoành độ điểm N là nghiệm phương trình

$-\frac{8}{9}x^2+8=\sqrt{9-x^2}, 0<x<3$

$\Leftrightarrow x=\pm\frac{3\sqrt{55}}{8}$.

Ta có $y_N=-\frac{8}{9}x_N^2+8=\frac{9}{8}$.

Suy ra $N\left(\frac{3\sqrt{55}}{8};\frac{9}{8}\right)$.

Phương trình ON: $y=\frac{3}{\sqrt{55}}x$.

Vì tấm pano đối xứng qua trục Oy nên ta có:

Diện tích phần kẻ sọc: $S_1 = 2.\int_0^{\frac{3\sqrt{55}}{8}} \left(-\frac{8}{9}x^2+8-\sqrt{9-x^2}\right)dx \approx 17,94$ m^2.

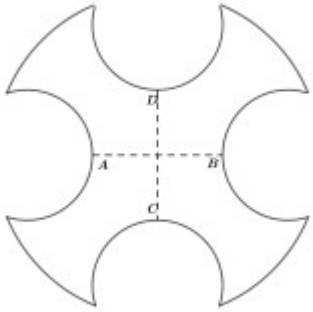
Diện tích phần tô đậm: $S_2 = 2.\int_0^{\frac{3\sqrt{55}}{8}} \left(\sqrt{9-x^2}-\frac{3}{\sqrt{55}}.x\right)dx \approx 10,68$ m^2.

Diện tích phần còn lại: $S = \int_{-3}^{3}\left(-\frac{8}{9}x^2+8\right)dx-(S_1+S_2) \approx 3,38$ m^2.

Tổng chi phí để trang trí tấm pano là

$100S_1+200S_2+150S \approx 4440$ (nghìn đồng) $\approx 4,44$ (triệu đồng).

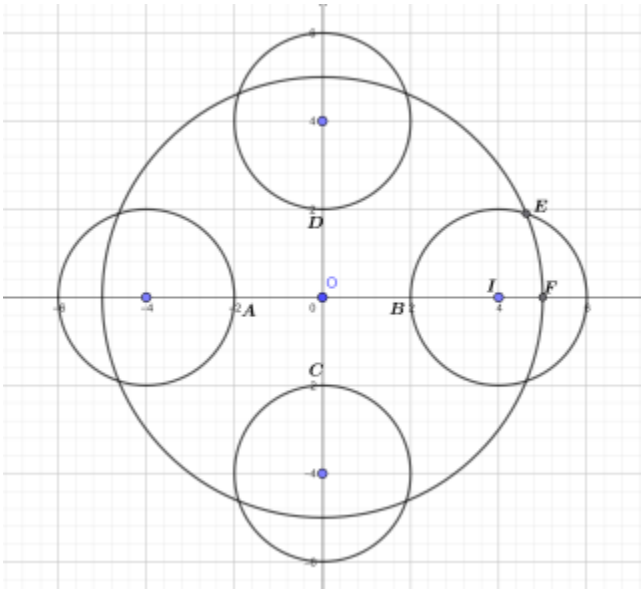
Câu 30. Trong cơ khí chế tạo, một chi tiết máy hình đĩa tròn có dạng như hình vẽ bên, nhận AB và CD làm các trục đối xứng. Người ta cần phủ sơn cả hai mặt của chi tiết. Biết rằng đường tròn lớn có bán kính *5 dm*, các đường tròn nhỏ đều có bán kính bằng *2 dm*, $AB = CD = 4\,dm$ và chi phí sơn là 103.000 đồng/m². Chi phí để sơn hoàn thiện chi tiết máy bằng bao nhiêu nghìn đồng (kết quả được làm tròn đến hàng đơn vị)?



Lời giải

Đáp án: 82.

Dựa vào đề bài ta có hình vẽ như sau với hệ trục Oxy tương ứng:



Như vậy ta cần tính diện tích của hình $(O;5)$: $x^2+y^2=25$ trừ đi diện tích của 4 phần hình tròn nằm trên trong đường tròn.

Ta đi xét một (I,IB), dễ thấy đường tròn này có tâm $I(4;0)$ và bán kính $R=2$ và phương trình đường tròn này là $(x-4)^2+y^2=4$

Gọi E và F lần lượt là giao của (O) với (I) và trục Ox (như hình vẽ)

Suy ra $E\left(\frac{37}{8};\sqrt{25-\left(\frac{37}{8}\right)^2}\right)$ và $F(5,0)$

Diện tích của một nửa phần hình tròn nằm bên trong (O) được giới hạn bởi một phần của (I): $y=\sqrt{4-(x-4)^2}$, một phần của (O): $y=\sqrt{25-x^2}$, và trục Ox

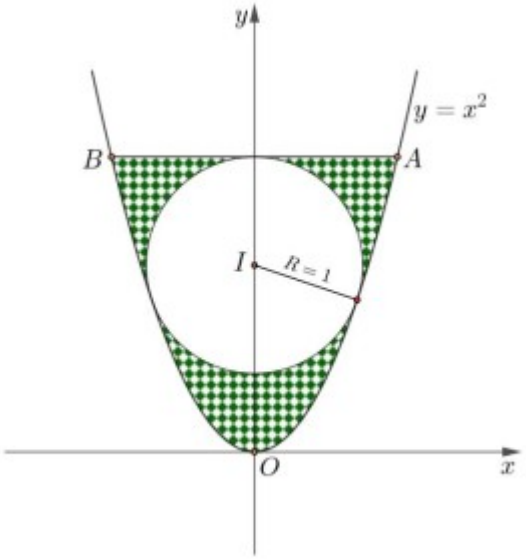
Suy ra diện tích của 4 phần hình tròn nằm bên trong (O) là:

$$M=4.\left(2.\left(\int_{2}^{\frac{37}{8}}\sqrt{4-(x-4)^2}\,dx+\int_{\frac{37}{8}}^{5}\sqrt{25-x^2}\,dx\right)\right)$$

Diện tích 2 mặt cần sơn của chi tiết máy là: $2.(\pi.5^2-M)$

Vậy chi phi để sơn chi tiết máy là: $1,03.2.(\pi.5^2-M)\approx 82$ (nghìn đồng)

Câu 31. Một khoảng sân của một ngôi nhà có hình dạng là một phần của parabol, nếu chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ bên dưới thì parabol có phương trình là $y=x^2$. Chủ nhà muốn thiết kế một hồ nuôi cá cảnh có dạng hình tròn bán kính $1m$, hình tròn được thiết kế tiếp xúc với 2 nhánh của parabol, phía trên của hình tròn ngăn bởi một bức tường mỏng tiếp xúc với hình tròn. Phần đất còn lại của khoảng sân giới hạn bởi đường tròn, 2 nhánh của parabol và bức tường được thiết kế trồng hoa (phần gạch sọc trong hình). Tính diện tích mà chủ nhà thiết kế để trồng hoa, biết rằng đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét. (Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm).



Lời giải

+ Gọi $I(0,y_0)$ suy ra: $(C):x^2+(y-y_0)^2=1\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=y_0+\sqrt{1-x^2}\\y=y_0-\sqrt{1-x^2}\end{array}\right.$

+ Do $Parabol$ luôn tiếp xúc nửa dưới của đường tròn nên ta có

$$\begin{cases}y_0-\sqrt{1-x^2}=x^2\\\left(y_0-\sqrt{1-x^2}\right)'=\left(x^2\right)'\end{cases}\Rightarrow x^2=\frac{3}{4}\Rightarrow y_0=\frac{5}{4}$$

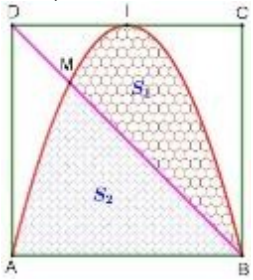
+ (AB) có phương trình: $y=\frac{9}{4}$ và $A\left(\frac{3}{2};\frac{9}{4}\right),B\left(\frac{-3}{2},\frac{9}{4}\right)$

$$S=\int_{\frac{-3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(\frac{9}{4}-x^2\right)dx-1^2.\pi\approx 1,36.$$

Khi đó: Diện tích cần tìm là:

Đáp số: $1,36$.

Câu 32. Một biển quảng cáo có dạng hình vuông $ABCD$ cạnh bằng 4m và I là trung điểm của đoạn thẳng CD. Trên tấm biển đó có đường parabol đỉnh I đi qua A,B và cắt đường chéo BD tại M (*tham khảo hình vẽ*).

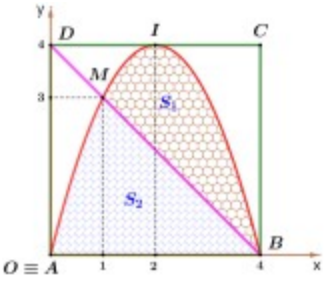


Chi phí sơn phần tô hình tổ ong (có diện tích S_1) là $200\,000$ đồng $/\text{m}^2$, chi phí sơn phần tô đậm (có diện tích S_2) là $150\,000$ đồng $/\text{m}^2$ và phần còn lại là $120\,000$ đồng $/\text{m}^2$. Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là bao nhiêu nghìn đồng?

Lời giải

Đáp số: 2465 (nghìn đồng)

• Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



• Khi đó $BD: y=-x+4$ và Parabol $(P): y=ax^2+bx+c$ qua ba điểm $A \equiv O(0;0), B(4;0), I(2;4)$ nên có dạng: $y=-x^2+4x$.

• $M(1;3)$ là giao điểm của BD và (P).

• Suy ra: $S_1=\int_1^4 \left|\left(-x^2+4x\right)-\left(-x+4\right)\right|\text{d}x=\frac{9}{2}\left(\text{m}^2\right)$ và $S_2=\int_0^4 \left|-x^2+4x\right|\text{d}x-\frac{9}{2}=\frac{37}{6}\left(\text{m}^2\right)$.

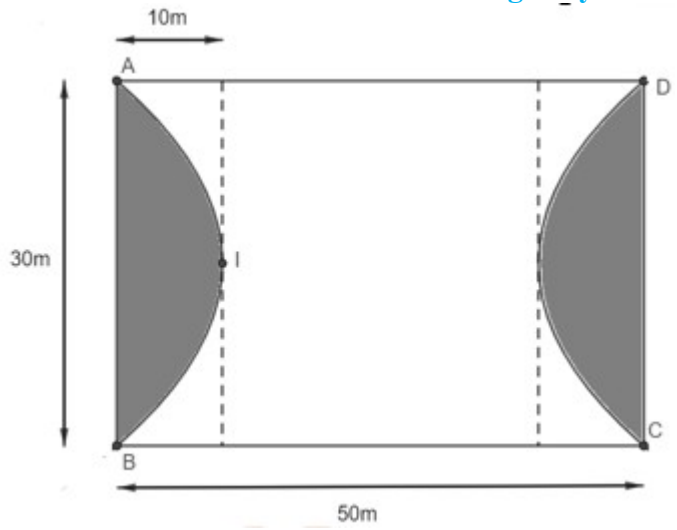
Diện tích còn phần còn lại là $S_3=4^2-\int_0^4 \left|-x^2+4x\right|\text{d}x=\frac{16}{3}\left(\text{m}^2\right)$.

• Số tiền cần chi trả để sơn tấm biển quảng cáo là:

$$200\,000\cdot S_1+150\,000\cdot S_2+120\,000\cdot S_3=200\,000\cdot\frac{9}{2}+150\,000\cdot\frac{37}{6}+120\,000\cdot\frac{16}{3}=2\,465\,000$$

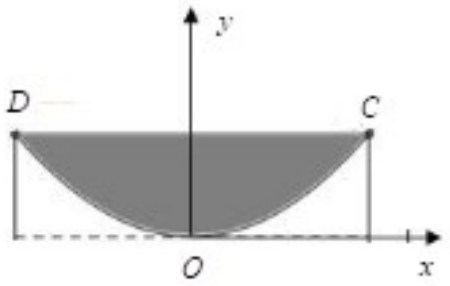
đồng.

Câu 33. Kiến trúc sư thiết kế một khu vui chơi có dạng hình chữ nhật với chiều rộng $30m$ và chiều dài $50m$. Trong đó, phần tô màu đậm trồng cỏ nhung Nhật, phần còn lại trải thảm cỏ nhân tạo. Mỗi phần trồng cỏ nhung Nhật có đường biên cong là một phần của parabol với đỉnh I thuộc trục đối xứng của hình chữ nhật và khoảng cách từ đỉnh I đến trung điểm của cạnh AB bằng $10m$ (xem hình minh họa). Biết giá cỏ nhung Nhật là $140\,000$ đồng/m², giá cỏ nhân tạo là $100\,000$ đồng/m². Tính tổng số tiền để trồng và trải thảm cỏ hết khu vui chơi theo đơn vị triệu đồng.



Lời giải

Đáp số: 166.



Xét hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Gọi phương trình parabol (P) có dạng: $y=ax^2+bx+c$.

Khi đó (P) đi qua gốc O, điểm $C(15;10)$ và $D(-15;10)$.

Ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} c=0 \\ 225a+15b+c=10 \\ 225a-15b+c=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{2}{45} \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}.$$

Vậy (P): $y=\dfrac{2}{45}x^2$.

Khi đó:

Diện tích hình chữ nhật là: $S=50.30=1500\left(m^2\right)$.

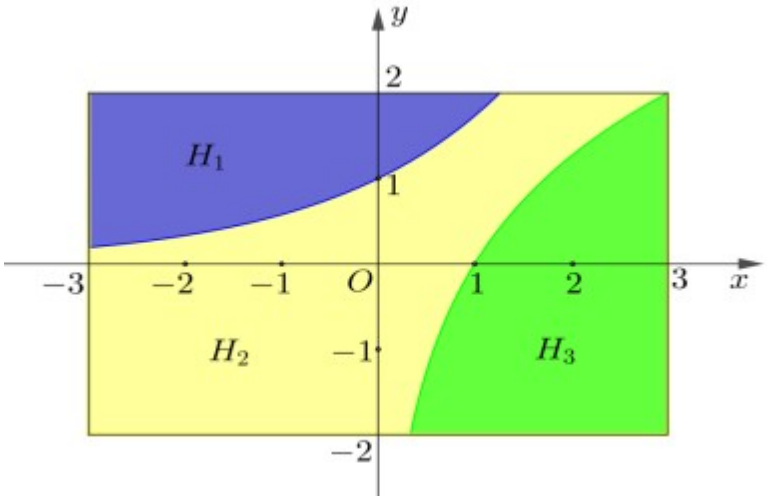
Diện tích trồng cỏ nhung Nhật là: $S_1=2.\int\limits_{-15}^{15}\left(10-\dfrac{2}{45}x^2\right)dx=400\left(m^2\right)$.

Diện tích trải thảm nhân tạo là: $S_2=S-S_1=1500-400=1100\left(m^2\right)$.

Tổng số tiền để trồng và trải thảm cỏ hết khu vui chơi là:

$400.140000+1100.100000=166000000$ (đồng) $=166$ (triệu đồng).

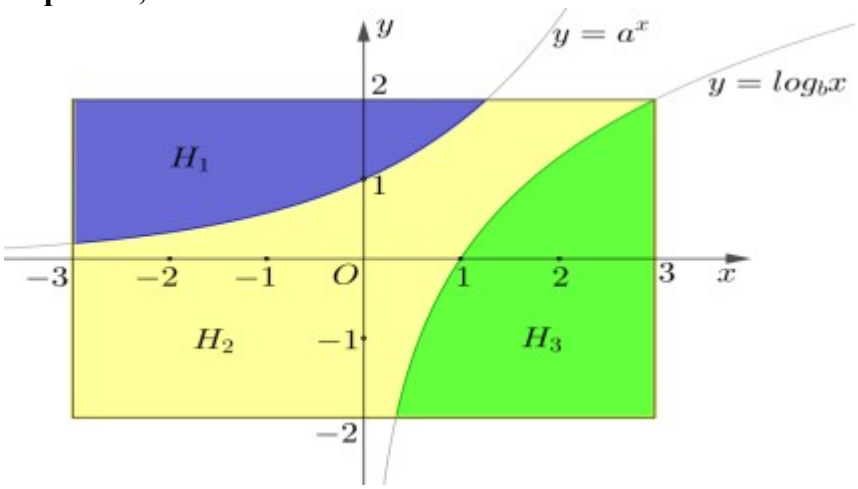
Câu 34. Một bức tường hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước lần lượt là $6\ m$ và $4m$ được bạn Minh trang trí bằng cách vẽ hai đồ thị hàm số $f(x)=a^x\ (0<a\neq 1)$ và $g(x)=\log_b x\ (0<b\neq 1)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$. Bức tường được chia làm 3 phần (tham khảo hình vẽ).



Phần H_1 được sơn màu xanh da trời, phần H_2 sơn màu vàng và phần H_3 được sơn màu xanh lá cây. Bạn Minh cần mua các hộp sơn mà mỗi hộp chỉ sơn được một màu tương ứng với các màu mà bạn Minh định sơn. Biết rằng mỗi hộp sơn chỉ sơn được tối đa $3\ m^2$ tường, giá một hộp sơn màu xanh da trời là 120000 đồng, giá một hộp sơn màu xanh lá cây là 140000 đồng, giá một hộp sơn màu vàng là 160000 đồng. Cửa hàng chỉ bán số các hộp sơn là các số nguyên dương. Bạn Minh cần bao nhiêu triệu đồng để sơn bức tường đó?

Lời giải

Đáp án: 1,3.



Đồ thị hàm số $f(x)=a^x\ \ (0<a\neq 1)$ và đồ thị hàm số $g(x)=\log_b x\ \ (0<b\neq 1)$ đối xứng nhau qua đường thẳng $y=x$ nên $a=b$.

Ta thấy: Đồ thị hàm số $g(x)=\log_b x$ đi qua điểm $B(3;2)$ nên suy ra $b=\sqrt{3}$.

Vậy bạn Minh đã vẽ hai đồ thị của hàm số $f(x)=\sqrt{3}^x$ và $g(x)=\log_{\sqrt{3}} x$.

Ta có:

$$\sqrt{3}^x=2 \Leftrightarrow x=\log_{\sqrt{3}}2 \Rightarrow S_{H_1}=\int_{-3}^{\log_{\sqrt{3}}2}\left(2-\sqrt{3}^x\right)dx\approx 5,23\ m^2.$$

Do đó cần mua 2 hộp sơn để sơn phần H_1 với số tiền là $2.0,12=0,24$ (triệu đồng).

$$\log_{\sqrt{3}}x=-2 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3} \Rightarrow S_{H_3}=\int_{\frac{1}{3}}^{3}\left(\log_{\sqrt{3}}x+2\right)dx\approx 7,15\ m^2.$$

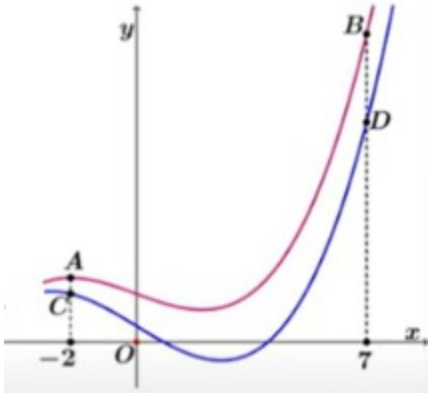
Do đó cần mua 3 hộp sơn để sơn phần H_3 với số tiền là $3.0,14=0,42$ (triệu đồng).

$S_{H_2} = S_{HCN} - S_{H_1} - S_{H_3} \approx 6,4 - 5,23 - 7,15 \Rightarrow S_{H_2} \approx 11,62\ m^2$.

Do đó cần mua 4 hộp sơn để sơn phần H_2 với số tiền là $4.0,16 = 0,64$ (triệu đồng).

Vậy số tiền bạn Minh cần dùng để sơn bức tường đó là: $0,24 + 0,42 + 0,64 = 1,3$ (triệu đồng).

Câu 35. Hưởng ứng chính sách hiện đại hóa nông thôn, người dân ở khu phố A đồng lòng cùng nhau góp tiền để bê tông một đường đi trong khu phố (phần được tô đậm trong hình vẽ).



Biết rằng khi chọn hệ trục tọa độ Oxy với đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là $10\,\text{m}$, các đường cong AB, CD là mép đường được cho bởi đồ thị hàm số $f(x) = \frac{1}{32}x^3 - \frac{3}{8}x + \frac{3}{2}$ và $g(x) = \frac{1}{32}x^3 - \frac{5}{8}x + \frac{1}{2}$, đồng thời lớp bê tông được đổ dày $16\,\text{cm}$ và giá tiền $1\,\text{m}^3$ bê tông là 1080000 đồng. Tính số tiền (đơn vị triệu đồng) cần dùng để đổ bê tông con đường đó (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp số: 253

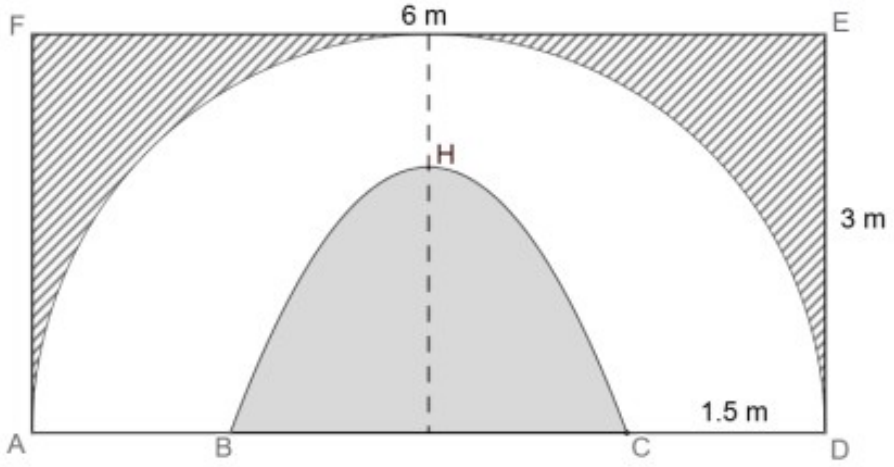
Diện tích của hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số đã cho là: $S = \int_{-2}^{7} \left(f(x) - g(x) \right) \mathrm{d}x = \int_{-2}^{7} \left[\frac{1}{32}x^3 - \frac{3}{8}x + \frac{3}{2} - \left(\frac{1}{32}x^3 - \frac{5}{8}x + \frac{1}{2} \right) \right] \mathrm{d}x = \frac{117}{8}$ (đvdt).

Do đơn vị độ dài trên mỗi trục tọa độ là $10\,\text{m}$ nên diện tích thực tế của con đường là $S_1 = \frac{117}{8}.10^2 = \frac{2925}{2}\left(\text{m}^2\right)$.

Thể tích khối bê tông cần đổ là: $V = S.h = \frac{2925}{2}.0,16 = 234\left(\text{m}^3\right)$.

Số tiền cần dùng để đổ bê tông con đường đó là: $234.1,08 \approx 253$ triệu đồng.

Câu 36. Bác Bình muốn nhờ thợ trang trí một bức tường hình chữ nhật $ADEF$ với kích thước $EF = 6m,\ \ DE = 3m$ sao cho cân xứng hai nửa. Phần gạch chéo là hình giới hạn bởi đường gấp khúc $AFED$ và nửa đường tròn đường kính AD, được thuê sơn với đơn giá 250000 đồng mỗi mét vuông. Phần màu trắng giới hạn bởi nửa đường tròn đường kính AD và một đường parabol (có đỉnh H cách đường thẳng AB một khoảng bằng $2m$ và đi qua hai điểm B, C nằm trên cạnh AD thỏa mãn $AB = CD = 1,5m$) được thuê trang trí bằng bức phù điêu đắp bằng xi măng với đơn giá 1950000 đồng mỗi mét vuông (tham khảo hình vẽ). Hỏi bác Bình phải trả bao nhiêu triệu đồng để trang trí bức tường như vậy (kết quả làm tròn đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: $20,7$.

Ta có $S_{ADEF} = 6.3 = 18\left(m^2\right)$

Diện tích nửa đường tròn đường kính AD là $S_1 = \frac{1}{2}\pi 3^2 = \frac{9\pi}{2}\left(m^2\right)$

Chi phí cho phần gạch chéo là $F_1 = \left(18 - \frac{9\pi}{2}\right).0,25$ (triệu đồng)

Xét hệ trục tọa độ Oxy sao cho $D(3;0), E(3;3) \Rightarrow H(0;2), C(1,5;0)$

Parabol nhận đỉnh là H và đi qua B,C có phương trình dạng $y = ax^2 + 2$ thỏa mãn $a\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{8}{9}$

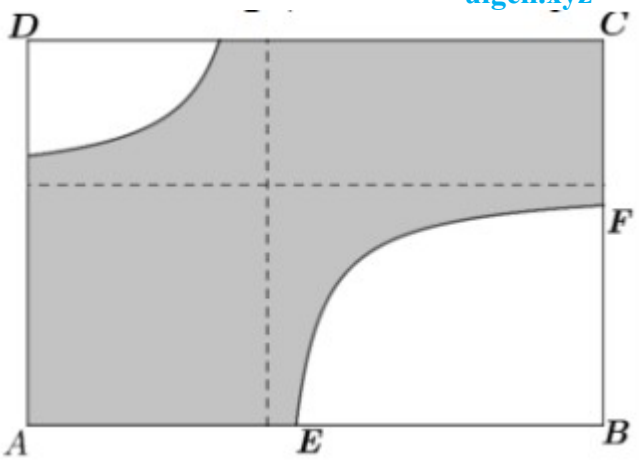
$\Rightarrow (P): y = -\frac{8}{9}x^2 + 2$

Diện tích phần giới hạn bởi parabol và AD là $S_2 = \int_{-1,5}^{1,5}\left(-\frac{8}{9}x^2 + 2\right)dx = 4\left(m^2\right)$

Chi phí cho phần đắp phù điêu là $F_2 = \left(S_1 - S_2\right).1,95 = \left(\frac{9\pi}{2} - 4\right).1,95$ (triệu đồng)

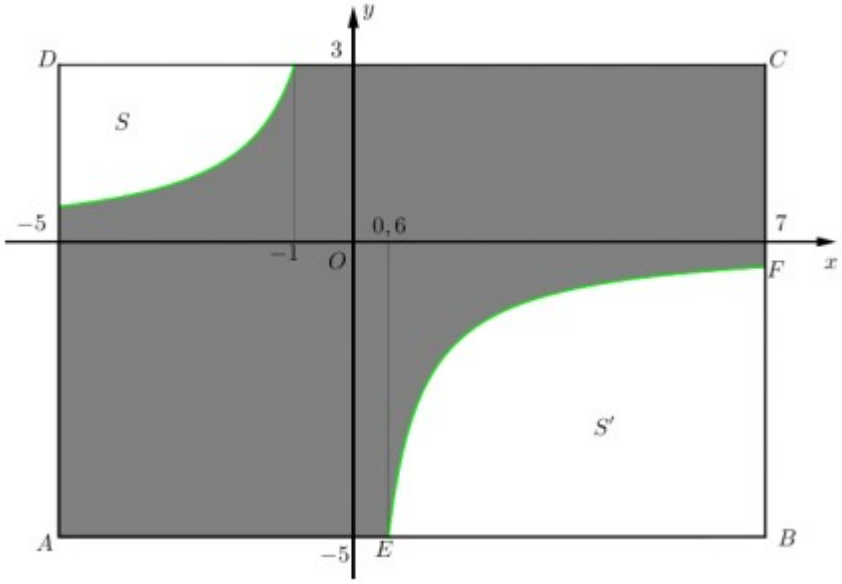
Vậy tổng chi phí là $F_1 + F_2 = \left(18 - \frac{9\pi}{2}\right).0,25 + \left(\frac{9\pi}{2} - 4\right).1,95 \approx 20,7$ (triệu đồng).

Câu 37. Một công ti đang thiết kế một bảng quảng cáo hình chữ nhật $ABCD$ có kích thước $AB = 12m$ và $AD = 8m$. Phần trung tâm của bảng sẽ được in nội dung quảng cáo, được mô tả là phần tô đậm (xem hình minh họa). Hai đường cong trong hình là một phần của đồ thị hàm số có dạng $y = \frac{ax+b}{cx+d}$, đường tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của đồ thị hàm số này đều cách điểm A một khoảng bằng 5 m. Đồ thị giao với cạnh AB tại điểm E thỏa mãn $\frac{AE}{AB} = \frac{7}{15}$. Diện tích phần in nội dung quảng cáo là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)?



Lời giải

Đáp số: 73,5.



Gán hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Đồ tị hàm số có TCD là: $x=0, TCN$ là: $y=0$ nên ta có: $\begin{cases} d=0 \\ a=0 \end{cases} \Rightarrow y=\dfrac{b}{cx}$.

Ta có: $\dfrac{AE}{AB}=\dfrac{7}{15} \Leftrightarrow AE=\dfrac{7}{15}\cdot AB=\dfrac{7}{15}\cdot 12=5,6 \Rightarrow E(0,6;-5)$.

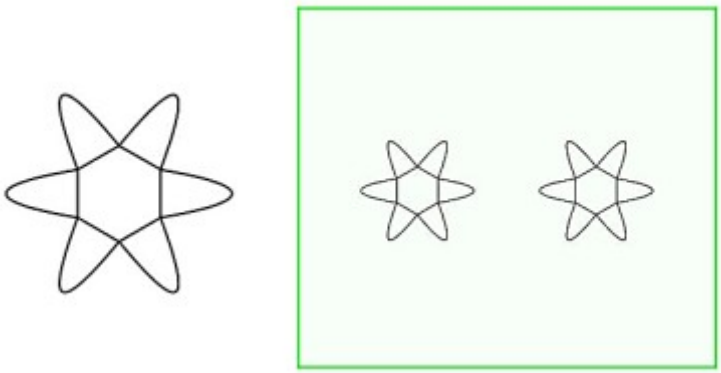
Đồ thị hàm số đi qua điểm $E(0,6;-5)$ nên $-5=\dfrac{b}{c\cdot 0,6} \Leftrightarrow \dfrac{b}{c}=-3 \Rightarrow y=-\dfrac{3}{x}$.

Ta có: $S=\int_{-5}^{-1}\left(5+\dfrac{3}{x}\right)dx=20-3\ln 5, S'=\int_{0,6}^{7}\dfrac{3}{x}dx=3\ln\dfrac{35}{3}$.

Diện tích phần in nội dung quảng cáo bằng:

$S_{ABCD}-S-S'=12.8-(20-3\ln 5)-3\ln\dfrac{35}{3}\approx 73,5(dvdt)$.

Câu 38. Để trang trí một bức tường hình chữ nhật có kích thước $3m$ ´ $4m$ trong phòng, bạn Hoa vẽ lên tường một hình như sau: Trên mỗi cạnh của một hình lục giác đều có cạnh $2dm$, vẽ một cánh hoa hình parabol. Đỉnh của parabol cách cạnh $3dm$ và nằm phía ngoài hình lục giác đều. Đường parabol đi qua hai đầu mút của mỗi cạnh hình lục giác (tham khảo hình vẽ).



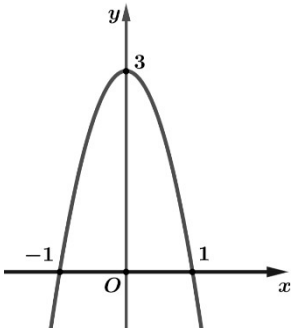
Hỏi bạn Hoa có thể vẽ tối đa bao nhiêu hình có cùng kích thước như vậy lên bức tường cần trang trí?

Lời giải

Đáp án: 34

Diện tích của hình lục giác đều cạnh bằng $2dm$ là: $6.\frac{2^2\sqrt{3}}{4}=6\sqrt{3}$.

Gắn trục tọa độ Oxy cho một cánh hoa. Diện tích của một cánh hoa là diện tích phẳng hình phẳng dưới hạn bởi đồ thị đồ thị hàm số $(P):y=ax^2+bx+c$ sao cho (P) có đỉnh $I(0;3)$ và cắt trục hoành tại hai điểm $(-1;0)$ và $(1;0)$.



Phương trình parabol (P) là: $y=-3x^2+3$.

Diện tích một cánh hoa được trang trí là: $S=\int_{-1}^{2}|-3x^2+3|dx=4dm^2.$

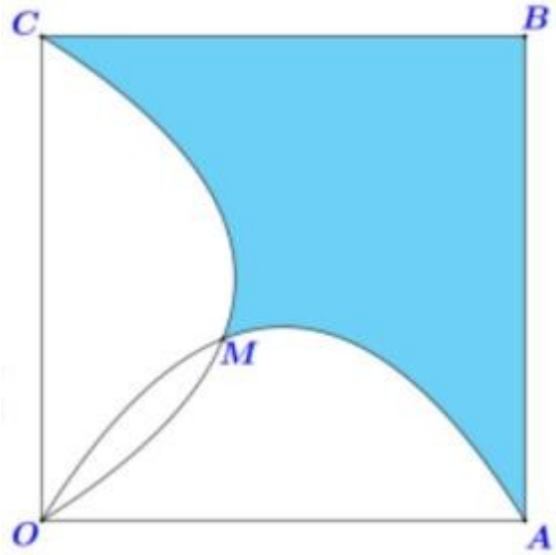
Diện tích của một bông hoa được trang trí là: $6\sqrt{3}+6.4=24+6\sqrt{3}\,dm^2$

Diện tích bức tường hình chữ nhật có kích thước $3m\times 4m$ là: $3.4=12m^2=1200dm^2$.

Tỉ lệ diện tích của bức tường hình chữ nhật và diện tích một bông hoa là: $\frac{1200}{24+6\sqrt{3}}\approx 34,89$

Vậy bạn Hoa có thể trang trí tối đa 34 hình có cùng kích thước như vậy lên bức tường cần trang trí.

Câu 39. Cho hình vuông OABC cạnh bằng 8, điểm M nằm trong hình vuông sao cho khoảng cách từ M đến các cạnh OA, OC cùng bằng 3. Parabol (P_1) đi qua các điểm O,A,M, Parabol (P_2) đi qua các điểm O,C,M. Tính diện tích phần tô đậm (hình vẽ bên). (kết quả làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).



Lời giải

Cho hệ trục tọa độ Oxy sao cho tia Ox trùng tia OA, tia Oy trùng tia OB.

Gọi S_1 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P_1), y=0$;

S_2 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P_2), x=0$;

S_3 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường (P_1) và (P_2).

Từ hình vẽ ta thấy diện tích hình phẳng cần tìm là $S=S_{OABC}-\left[S_1+S_2-S_3\right]$ (*)

Gọi phương trình (P_1) là $y=ax^2+bx+c$.

Vì (P_1) đi qua $O(0;0), M(3;3), A(8;0)$ nên $\begin{cases} c=0 \\ 9a+3b+c=3 \\ 64a+8b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{1}{5} \\ b=\dfrac{8}{5} \\ c=0. \end{cases}$

Suy ra $y=-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x$.

Ta thấy (P_1) và (P_2) đối xứng qua OM nên

$$S_1=S_2=\int_0^8\left(-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x\right)\mathrm{d}x=\frac{256}{15}$$

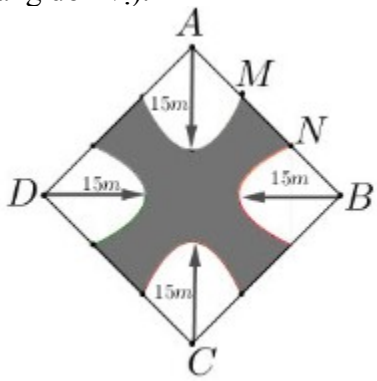
Gọi S_4 là diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $(P_1), OM: y=x$, do tính chất đối xứng nên

$$S_3=2S_4=2\int_0^3\left[\left(-\frac{1}{5}x^2+\frac{8}{5}x\right)-x\right]\mathrm{d}x=\frac{9}{5}$$

Thay và (*) ta được $S=64-\left(\frac{256}{15}+\frac{256}{15}-\frac{9}{5}\right)=\frac{95}{3}\approx 32$.

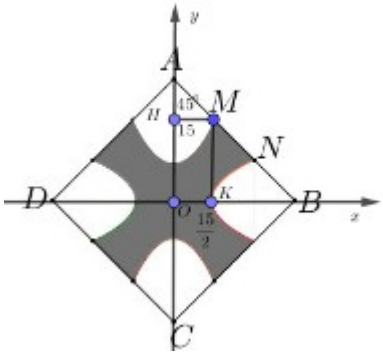
Câu 40. Kiến trúc sư thiết kế một khu sinh hoạt cộng đồng có dạng hình vuông $ABCD$ có độ dài đường chéo $AC=45\,\mathrm{m}$. Trong đó, phần được tô màu đậm là sân chơi, phần còn lại để trồng hoa. Mỗi

phần trồng hoa có đường biên cong là một phần của parabol với các đỉnh thuộc một trục đối xứng của hình vuông, khoảng cách từ đỉnh đó đến đỉnh tương ứng của hình vuông bằng $15\,\text{m}$. Bản thiết kế khu sinh hoạt nhận tâm hình vuông $ABCD$ làm tâm đối xứng và trên hình bên ta có $AM = MN = NB$. Để trang trí cho phần sân chơi tốn 500 nghìn đồng $/1\,\text{m}^2$, để trồng hoa tốn 200 nghìn đồng $/1\,\text{m}^2$. Tổng số tiền cần dùng là bao nhiêu triệu đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 349



Gắn hệ tọa độ Oxy như hình vẽ: $A\left(0;\frac{45}{2}\right), B\left(\frac{45}{2};0\right), C\left(0;-\frac{45}{2}\right), D\left(-\frac{45}{2};0\right)$.

Do hình vuông $ABCD$ có $AC = 45\,\text{m}$ nên độ dài cạnh hình vuông là: $AB = \frac{AC}{\sqrt{2}} = \frac{45}{\sqrt{2}}\,\text{m}$.

Diện tích hình vuông $ABCD$ là: $S_{ABCD} = AB^2 = \frac{45^2}{2} = 1012{,}5\,\text{m}^2$.

Vì $AM = MN = NB$ nên $AM = MN = NB = \frac{AB}{3} = \frac{15\sqrt{2}}{2}\,\text{m}$.

Độ dài cạnh $AH = AM.\cos 45^0 = \frac{15}{2}$, $OH = OA - AH = \frac{45}{2} - \frac{15}{2} = 15$; $HM = AM.\sin 45^0 = \frac{15}{2}$.

Vậy tọa độ của điểm $M = \left(\frac{15}{2};15\right)$.

Parabol đi qua điểm M và có đỉnh là điểm $E\left(0;\frac{15}{2}\right)$ có phương trình dạng: $(P): y = ax^2 + \frac{15}{2}$ (1)

Thay tọa độ điểm $M\left(\frac{15}{2};15\right)$ vào (1) ta được: $15 = a.\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \frac{15}{2} \Leftrightarrow a = \frac{2}{15}$.

Vậy phương trình parabol $(P): y=\frac{2}{15}x^2+\frac{15}{2}$.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi (P), đường thẳng $y=15$, trục Oy và đường thẳng $x=\frac{15}{2}$ là: $S_1=\int_0^{\frac{15}{2}}\left[15-\left(\frac{2}{15}x^2+\frac{15}{2}\right)\right]dx=\int_0^{\frac{15}{2}}\left[\frac{15}{2}-\frac{2x^2}{15}\right]dx=\frac{15}{2}x\Big|_0^{\frac{15}{2}}-\frac{2x^3}{45}\Big|_0^{\frac{15}{2}}=37,5\ \text{m}^2$.

Diện tích tam giác ΔAHM là: $S_2=S_{AHM}=\frac{1}{2}.AH.HM=\frac{1}{2}.\frac{15}{2}.\frac{15}{2}=28,125\,\text{m}^2$.

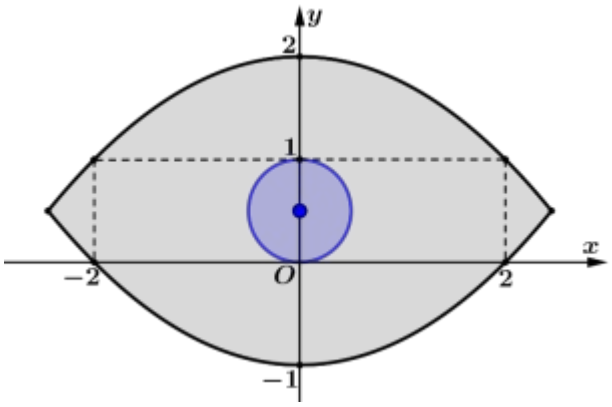
Diện tích trồng hoa là: $S_{HOA}=8.(S_1+S_2)=8.(37,5+28,125)=525\ \text{m}^2$

Diện tích sân chơi là: $S_{SAN}=S_{ABCD}-S_{HOA}=1012,5-525=487,5\ \text{m}^2$.

Tổng số tiền cần dùng là: $487,5.500000+525.200000=348750000$ đ

Vậy số tiền cần dùng để trang trí sân và trồng hoa là 349 triệu đồng.

Câu 41. Bạn An thực hiện thiết kế một logo hình con mắt cho một phòng khám nhãn khoa. Logo là một hình phẳng giới hạn bởi hai parabol $y=f(x)$ và $y=g(x)$ có các kích thước như hình vẽ dưới đây (phần được tô màu đen) và một hình tròn có bán kính bằng $0,5$ dm ở giữa là phần con ngươi (phần được tô màu xanh), đơn vị trên mỗi trục tọa độ là decimet. Biết rằng chi phí để sơn phần con ngươi hình tròn màu xanh là 25000 đồng/dm^2 và chi phí để sơn phần còn lại màu đen là 20000 đồng/dm^2. Chi phí để sơn logo trên là bao nhiêu nghìn đồng? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 200.

Gọi phương trình parabol $y=f(x)$ là $f(x)=ax^2+bx+c$ với $a\neq 0$ đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(2;1),(0;2),(-2;1)$.

Lập hệ phương trình ba ẩn, từ đó suy ra được $\begin{cases}a=-\frac{1}{4}\\ b=0\\ c=2\end{cases}$ nên $f(x)=-\frac{1}{4}x^2+2$

Gọi phương trình parabol $y=g(x)$ là $g(x)=mx^2+nx+p$ với $m\neq 0$ đi qua các điểm có tọa độ lần lượt là $(-2;0),(0;-1),(2;0)$.

Lập hệ phương trình ba ẩn, từ đó suy ra được $\begin{cases} m=\frac{1}{4} \\ n=0 \\ p=-1 \end{cases}$ nên $g(x)=\frac{1}{4}x^2-1$

Phương trình hoành độ giao điểm: $f(x)=g(x)\Leftrightarrow -\frac{1}{4}x^2+2=\frac{1}{4}x^2-1\Leftrightarrow \frac{1}{2}x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\sqrt{6}$

Diện tích hình tròn được sơn màu xanh là: $S_1=\pi r^2=\pi(0,5)^2=0,25\pi$ (dm^2)

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường thẳng $y=f(x)$ và $y=g(x)$ là:

$$S_2=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left|f(x)-g(x)\right|\mathrm{d}x=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left|\left(-\frac{1}{4}x^2+2\right)-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right|\mathrm{d}x$$

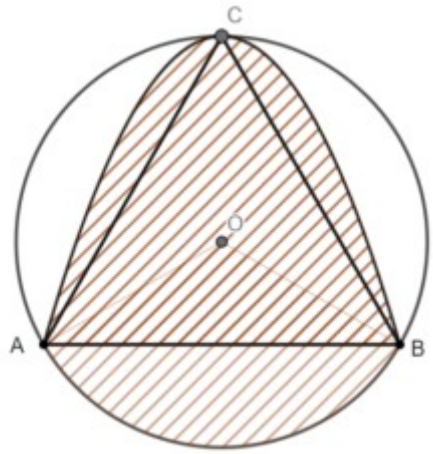
Diện tích phần sơn được tô màu đen là: $S_3=S_2-S_1=\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left|\left(-\frac{1}{4}x^2+2\right)-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right|\mathrm{d}x-0,25\pi$

Chi phí để sơn logo là:

$$T=0,25\pi.25\,000+\left(\int_{-\sqrt{6}}^{\sqrt{6}}\left|\left(-\frac{1}{4}x^2+2\right)-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right|\mathrm{d}x-0,25\pi\right).20000\approx 249$$

nghìn đồng.

Câu 42. Một hoa văn hình tròn tâm O, ngoại tiếp tam giác đều ABC có cạnh $AB=2\sqrt{3}\ cm.$ Đường cong qua ba điểm A,B,C là một phần của parabol (xem hình vẽ).

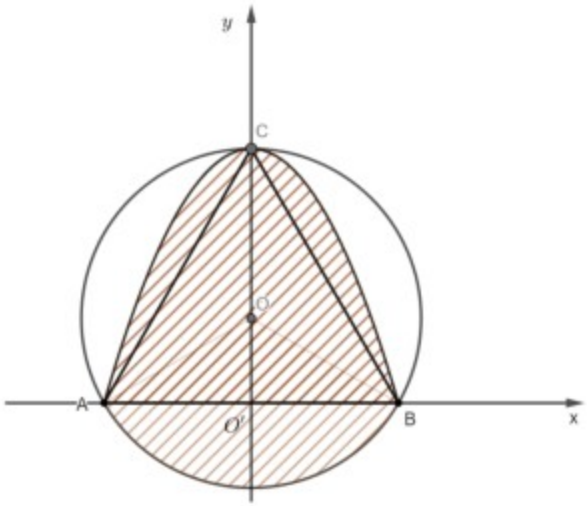


Tính diện tích của phần hình phẳng giới hạn bởi đường tròn và parabol (phần không gạch) theo đơn vị cm^2 (kết quả làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).

Lời giải

Đáp án: 3,18

Gắn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó $A\left(-\sqrt{3};0\right), B\left(\sqrt{3};0\right), C\left(0;3\right).$

Parabol đi qua ba điểm $A\left(-\sqrt{3};0\right), B\left(\sqrt{3};0\right), C\left(0;3\right)$ nên parabol có phương trình là $y=-x^2+3.$

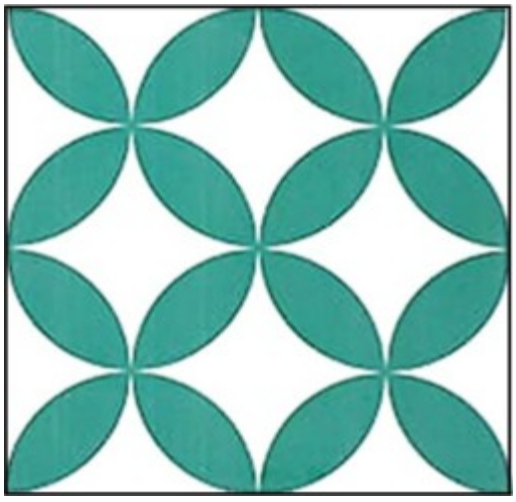
Đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC có tâm $O\left(0;1\right)$ và bán kính $R=2$ nên có phương trình là $x^2+\left(y-1\right)^2=4$.

Suy ra $y=1-\sqrt{4-x^2}$ (Phần nằm dưới trục hoành).

Diện tích phần gạch là $S=\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}-x^2+3-\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)dx$

Do đó diện tích phần không gạch là $S'=\pi.2^2-S=3,18\left(cm^2\right).$

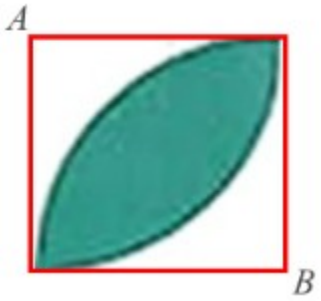
Câu 43. Viên gạch men dùng để lát nền nhà là một hình vuông có cạnh bằng 80 cm (xem hình bên dưới). Mỗi viên gạch có 4 bông hoa, mỗi bông hoa gồm 4 cánh hoa. Mỗi cánh hoa (phần màu xanh) là phần giao nhau của hai hình tròn có cùng bán kính và khoảng cách giữa hai tâm là $20\sqrt{2}$ cm.



Ước tính ở công đoạn tráng men, phần màu xanh có chi phí 50 nghìn đồng trên một mét vuông, còn phần màu trắng có chi phí 30 nghìn đồng trên một mét vuông. Tính chi phí (đơn vị: tỉ đồng) của công đoạn tráng men này, khi cơ sở dự định sản xuất 100000 viên gạch như thế (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm).

Lời giải

Đáp số: 2,65



Xét $\frac{1}{16}$ viên gạch men (vùng hình vuông chứa một cánh hoa).

Vì phần cánh hoa (màu xanh) là phần giao nhau của các đường tròn có khoảng cách giữa các tâm là $20\sqrt{2}$ nên một cánh hoa là phần giao của hai phần tư hình tròn tâm A, B (hình vẽ), có bán kính $r = 20$.

Mỗi phần tư hình tròn tâm A, B có diện tích $S = \frac{1}{4}\pi \cdot 20^2$.

Diện tích hình vuông có AB là đường chéo: $S_v = 20^2$.

Suy ra diện tích của một cánh hoa là $2S - S_v = \frac{1}{2}\pi \cdot 20^2 - 20^2 = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 20^2$.

Do đó

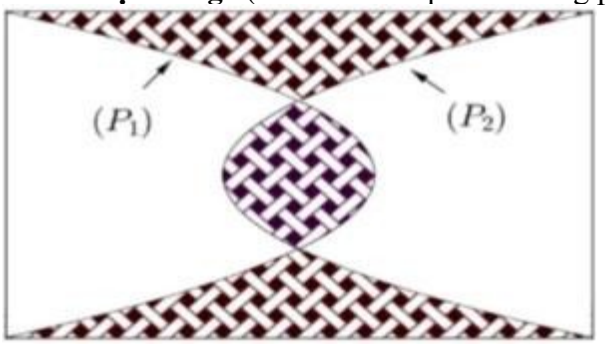
Diện tích phần màu xanh là $S_1 = 16\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \cdot 20^2$ (cm^2).

Diện tích phần màu trắng $S_2 = 80^2 - S_1$ (cm^2).

Số tiền tráng men một viên gạch là $T = 5S_1 + 3S_2 = 26\,506,19298$ đồng.

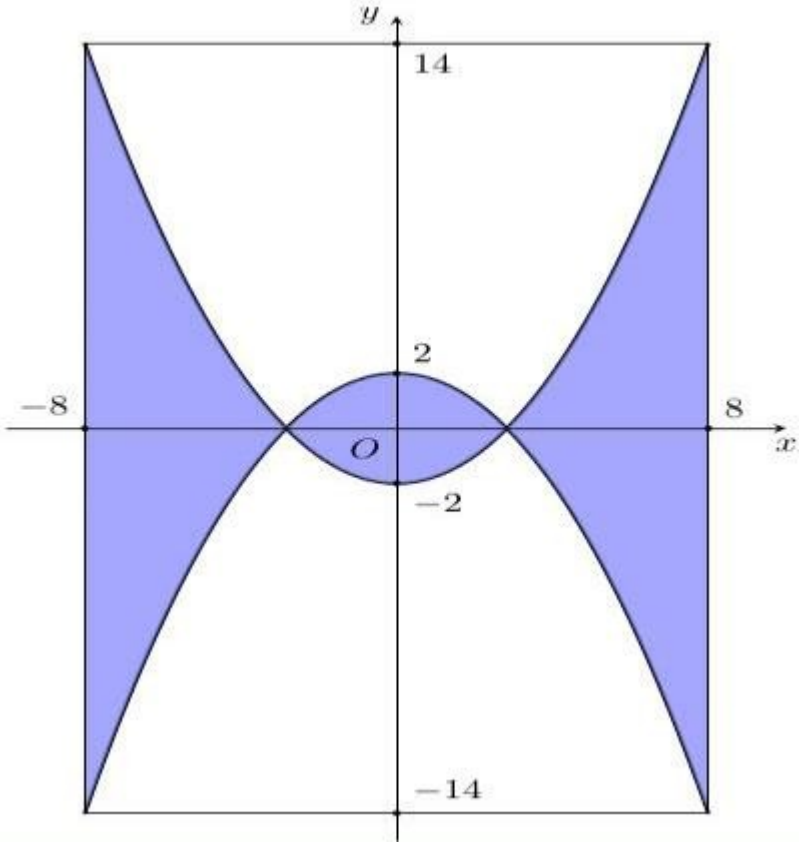
Để sản xuất $100\,000$ viên gạch thì số tiền tráng men là $100\,000T = 2\,650\,619\,298(\text{đồng}) \approx 2,65(\text{tỷ đồng})$.

Câu 44. Trang trí một sân hình chữ nhật kích thước 28m x 16m, trong đó hai Parabol (P_1) đối xứng với (P_2) qua đường thẳng đi qua hai trung điểm của chiều dài sân (hình vẽ), khoảng cách giữa hai đỉnh Parabol bằng 4m. Chi phí trang trí cho phần hoa văn là 180 ngàn đồng trên một mét vuông, phần trắng là 160 ngàn đồng trên một mét vuông. Tổng chi phí trang trí cho sân là bao nhiêu **triệu đồng**? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Đáp án: 74.4



Đặt hình chữ nhật vào hệ tọa độ Oxy sao cho tâm hình chữ nhật trùng với góc tọa độ, chiều dài của hình chữ nhật vuông góc với trục Ox.

Theo đề bài ta có Parabol (P_1) đi qua các điểm $A(0;-2), B(-8;14), C(8;14)$

$$\begin{cases} c=-2 \\ 64a-8b=16 \\ 64a+8b=16 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-2 \\ b=0 \\ a=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

Từ đây ta có hệ phương trình

Suy ra $(P_1): y=\frac{1}{4}x^2-2$

Suy ra $(P_2): y=-\frac{1}{4}x^2+2$

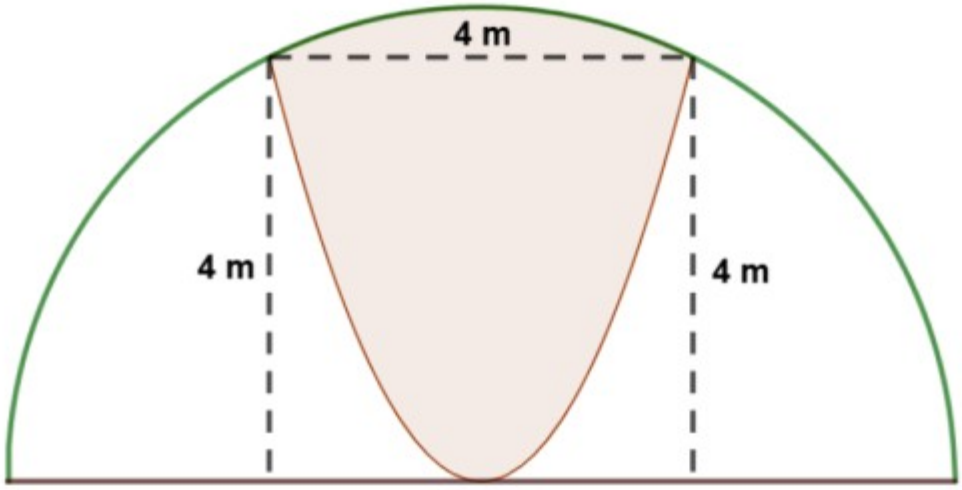
Gọi S_1, S_2 lần lượt là diện tích phần hoa văn và diện tích phần trắng

$$S_1 = 2\int_{-8}^{-2\sqrt{2}} \left|\frac{1}{2}x^2-4\right| dx + \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left|\frac{1}{2}x^2-4\right| dx$$

Ta có: $S_2 = 16.28 - S_1$

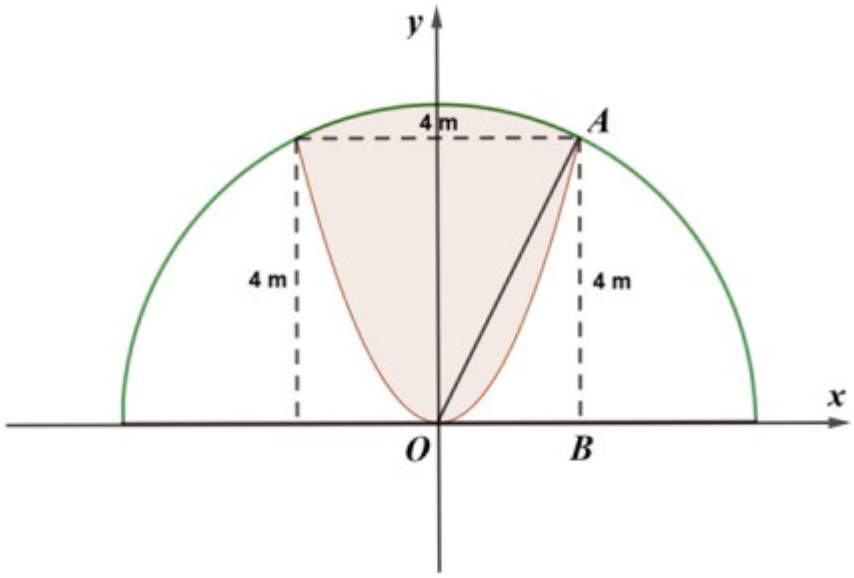
Tổng chi phí trang trí là $180.000S_1 + 160.000S_2 =$ 74.4 (triệu đồng)

Câu 45. Khuôn viên nhà bạn Thùy Dương có dạng nửa hình tròn, trên đó người thiết kế phần để trồng hoa có dạng của một cánh hoa hình parabol có đỉnh trùng với tâm và có trục đối xứng vuông góc với đường kính của nửa hình tròn, hai đầu mút của cánh hoa nằm trên nửa đường tròn và cách nhau một khoảng bằng 4 m. Phần còn lại của khuôn viên dành để trồng cỏ Nhung Nhật. Biết các kích thước cho như hình vẽ, chi phí trồng hoa và cỏ Nhung Nhật tương ứng là 250.000 đồng/m^2 và 150.000 đồng/m^2. Hỏi chi phí để trồng hoa và trồng cỏ Nhung Nhật trong khuôn viên đó hết bao nhiêu triệu đồng (làm tròn kết quả đến hàng phần chục)?



Lời giải

Đáp án: 5,9



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Xét parabol có đỉnh là gốc tọa độ và đi qua điểm $(2;4)$: Phương trình (P) có dạng: $y = ax^2$

Vì $A(2;4) \in (P)$ nên $4 = a.2^2 \Leftrightarrow a = 1 \Rightarrow (P): y = x^2$.

Xét ΔOAB vuông tại B, theo định lý Pythagore ta có:

$OA^2 = AB^2 + OB^2 = 4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20 \Rightarrow R = OA = 2\sqrt{5}$

Phương trình đường tròn (C) có tâm O, bán kính $R = 2\sqrt{5}$ là: $x^2 + y^2 = 20$.

$\Rightarrow |y| = \sqrt{20 - x^2}$

Diện tích phần trồng hoa là: $S_1 = \int_{-2}^{2} \left(\sqrt{20 - x^2} - x^2\right) dx$.

Diện tích trồng cỏ Nhung Nhật là: $S_2 = \frac{\pi R^2}{2} - S_1 = 10\pi - S_1$.

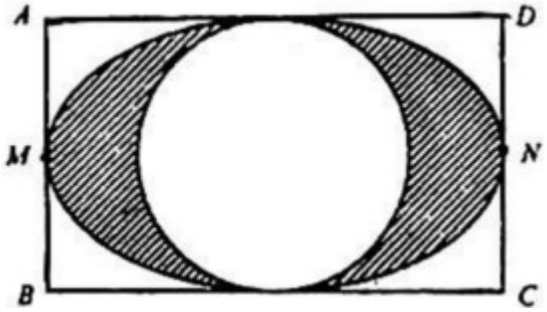
Tổng chi phí để trồng hoa và trồng cỏ Nhung Nhật trong khuôn viên đó là:

$250000.S_1 + 150000.S_2 = 250000.S_1 + 150000.(10\pi - S_1) \approx 5906351$ (đồng) $\approx 5,9$ (triệu đồng).

Vậy chi phí để trồng hoa và trồng cỏ Nhung Nhật trong khuôn viên nhà bạn Thùy Dương gần bằng 5,9 triệu

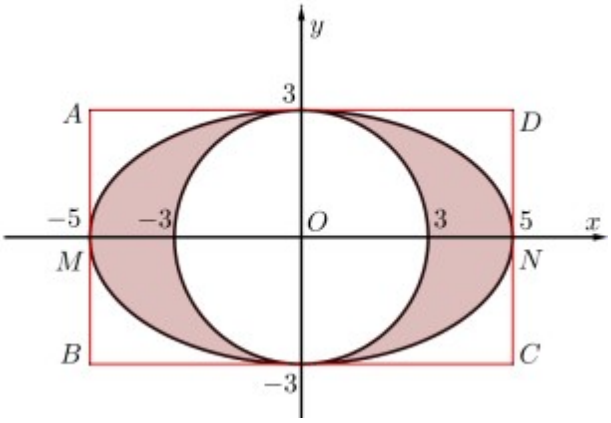
đồng.

Câu 46. Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần gạch chéo trong hình vẽ) quanh trục MN. Biết rằng $ABCD$ là hình chữ nhật với $AB=6cm, AD=10cm$ và M,N lần lượt là trung điểm của AB, CD. Hai đường cong là đường Elip có hình chữ nhật cơ sở là $ABCD$ và đường tròn tiếp xúc với hai cạnh AD và BC (tham khảo hình vẽ). Tính thể tích của vật trang trí đó (*kết quả làm tròn đến hàng phần chục theo đơn vị* cm^3).



Lời giải

Đáp án: 75.



Gắn vào hình chữ nhật $ABCD$ hệ trục tọa độ Oxy với gốc O trùng với giao hai đường chéo, các điểm M,N nằm trên Ox (tham khảo hình vẽ).

Do MN là trục đối xứng của miền (R) nên khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) quanh trục MN trùng với khối tròn xoay được tạo thành khi quay phần (R) nằm phía trên MN quanh MN.

Gọi V_1, V_2, V tương ứng là thể tích của các khối tròn xoay được tạo thành khi quay Elips (E), hình tròn (C) và miền (R) quanh MN (hay quanh Ox), ta có $V=V_1-V_2$.

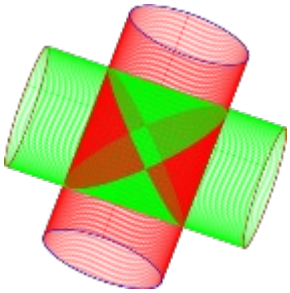
Elip (E) có các bán trục $a=\frac{1}{2}AD=5, b=\frac{1}{2}AB=3$ nên có phương trình $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

Ta có $V_1=\pi\int\limits_{-5}^{5}9\left(1-\frac{x^2}{25}\right)dx=\pi\left(9x-\frac{9}{25}x^3\right)\Big|_{-5}^{5}=60\pi\ (cm^3)$.

Hình tròn (C) có tâm tại O, bán kính $R=3$ khi quay quanh MN tạo thành khối cầu tâm O, bán kính bằng 3. Do đó $V_2=\frac{4}{3}\pi.3^3=36\pi\ (cm^3)$.

Vậy thể tích của vật trang trí đó là: $V=V_1-V_2=24\pi\ \square\ 75(cm^3)$.

Câu 47. Cho hai khối trụ có bán kính đáy bằng 3 và có trục là hai đường thẳng cắt nhau và vuông góc với nhau (xem hình vẽ).

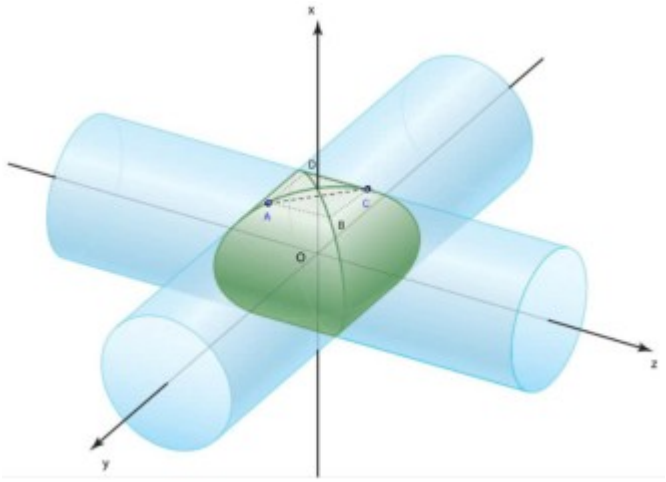


Gọi (H) là phần giao nhau của hai khối trụ đó. Tính thể tích của (H).

Lời giải

Đáp án: 144.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Mặt phẳng vuông góc với tia Ox tại điểm có hoành độ x, cắt hình (H) theo thiết diện là một hình vuông có cạnh AB.

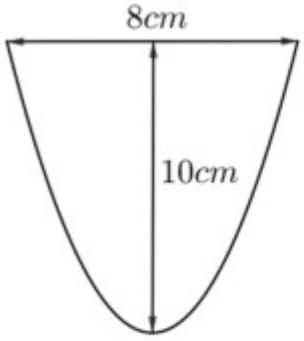
Ta có $\left(\frac{1}{2}AB\right)^2 = R^2 - x^2 = 9 - x^2 \Rightarrow AB^2 = 36 - 4x^2$.

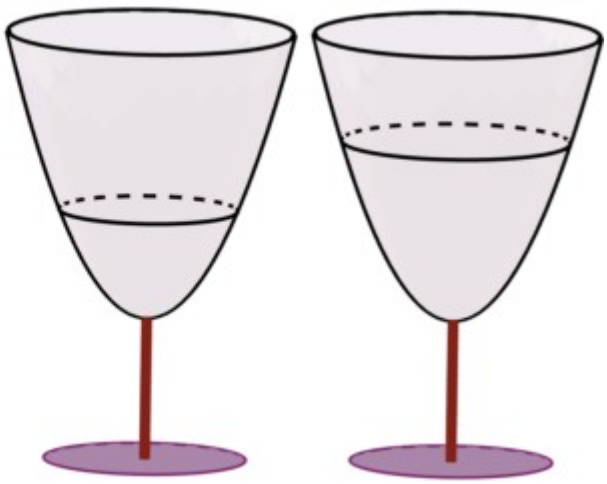
Vậy nên diện tích thiết diện là

$S(x) = AB^2 = 36 - 4x^2$

Thể tích của (H) là $V = 2\int_0^3 S(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^3 \left(36 - 4x^2\right)\mathrm{d}x = 144(\text{d.v.t.t}).$

Câu 48. Một ly thủy tinh có hình dạng phần chứa nước là một hình parabol tròn xoay. Hình dạng này được tạo ra bằng cách quay một phần của đường parabol quanh trục đối xứng của nó. Biết phần chứa nước của ly có chiều cao tính từ đáy ly lên đến miệng ly là $10\,\text{cm}$, đường kính miệng ly là $8\,\text{cm}$ (chỉ tính phần chứa nước, không tính phần thủy tinh).

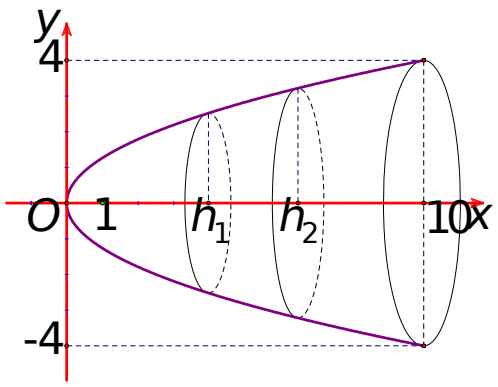




Ban đầu, người ta đổ vào ly một lượng nước có thể tích bằng $\frac{1}{4}$ thể tích của ly khi nó chứa đầy nước. Sau đó, người ta đổ thêm vào ly một lượng nước có thể tích bằng với lượng nước đã đổ ban đầu. Hỏi sau khi đổ thêm, chiều cao của mực nước trong ly đã tăng thêm bao nhiêu centimet so với lúc ban đầu (làm tròn đến hàng phần trăm)?

Lời giải

Đáp án: 2,07.



Ta có:

$(P): y^2 = 2px$

$x = 10, y = 4 \Rightarrow p = \frac{4}{5} \Rightarrow (P): y^2 = \frac{8}{5}x$

Thể tích nước trong ly:

$$V = \pi \int_0^{10} y^2 dx = \pi \int_0^{10} \frac{8}{5} x dx = \frac{4\pi x^2}{5}\Big|_0^{10} = 80\pi.$$

Chiều cao của nước ban đầu:

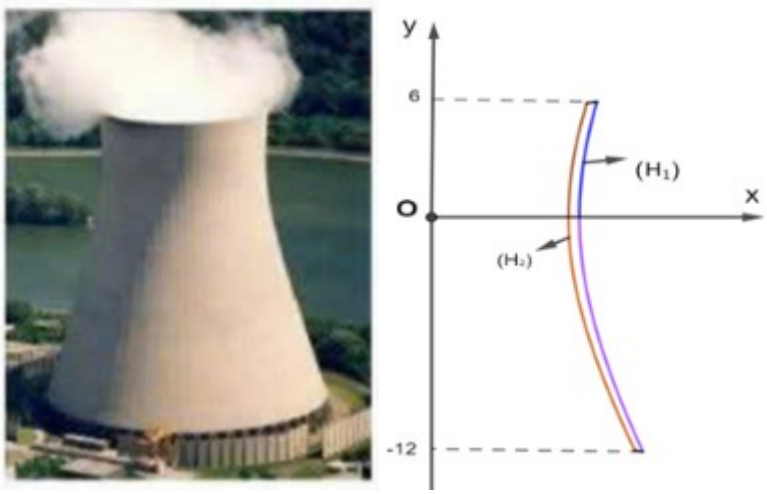
$$\pi \int_0^{h_1} \frac{8}{5} x dx = \frac{1}{4}.80\pi \Leftrightarrow \frac{4h_1^2}{5} = 20 \Leftrightarrow h_1 = 5.$$

Chiều cao của mực nước sau khi đổ thêm:

$$\pi \int_0^{h_2} \frac{8}{5} x dx = 2.\frac{1}{4}.80\pi \Leftrightarrow \frac{4h_2^2}{5} = 40 \Leftrightarrow h_2 = 5\sqrt{2}.$$

Chiều cao của mực nước tăng thêm so với ban đầu: $h = h_2 - h_1 = 5\sqrt{2} - 5 \approx 2,07$ (cm).

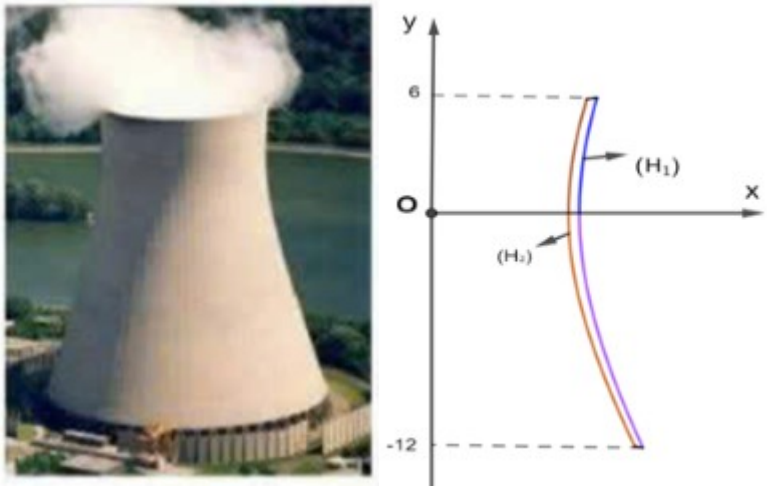
Câu 49. Lớp vỏ của một lò phản ứng hạt nhân bằng kim loại và được tạo bởi hình phẳng (S) giới hạn bởi nhánh bên phải trục tung của các đường hypebol (H_1), (H_2) và hai đường thẳng $y = -12, y = 6$ khi quay quanh trục Oy (tham khảo hình vẽ).



Biết (H_1) đi qua điểm $(\sqrt{35};0)$ có tiêu cự bằng $10\sqrt{7}$, (H_1) đi qua điểm $(\sqrt{30};0)$ có tiêu cự bằng $10\sqrt{6}$ và đơn vị trên các trục toạ độ bằng mét. Thể tích khối kim loại cần sử dụng để làm vỏ lò phản ứng hạt nhân bằng bao nhiêu mét khối? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 283.



+ Giả sử (H_1) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a_1^2}-\frac{y^2}{b_1^2}=1$, (H_2) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{a_2^2}-\frac{y^2}{b_2^2}=1$

Vì (H_1) có tiêu cự bằng $10\sqrt{7}$ suy ra $c_1=5\sqrt{7}\Rightarrow a_1^2+b_1^2=175.$ Mặt khác (H_1) đi qua $(\sqrt{35};0)$ suy ra $a_1^2=35\Rightarrow b_1^2=140.$ Vậy $(H_1):\frac{x^2}{35}-\frac{y^2}{140}=1.$

Từ đó ta có thể xem nhánh bên phải của (H_1) là hàm số $x=g(y)=\frac{1}{2}\sqrt{y^2+140}$ (hàm số theo biến y).

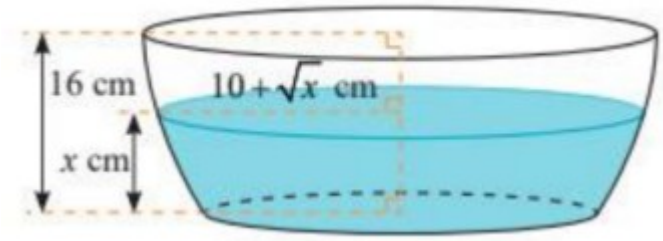
Tương tự: (H_2) có tiêu cự bằng $10\sqrt{6}$ suy ra $c_2=5\sqrt{6}\Rightarrow a_2^2+b_2^2=150.$ Mặt khác (H_2) đi qua $(\sqrt{30};0)$ suy ra $a_2^2=30\Rightarrow b_2^2=120.$ Vậy $(H_2):\frac{x^2}{30}-\frac{y^2}{120}=1.$

Từ đó ta có thể xem nhánh bên phải của (H_2) là hàm số $x=h(y)=\frac{1}{2}\sqrt{y^2+120}$ (hàm số theo biến y).

Đặt thể tích khối kim loại cần sử dụng để làm vỏ lò phản ứng hạt nhân bằng V. Từ đó ta có: $V=\pi\int_{-12}^{6}\left(g^2(y)-h^2(y)\right)dy=\pi\int_{-12}^{6}\left[\frac{1}{4}\left(y^2+140\right)-\frac{1}{4}\left(y^2+120\right)\right]dy$

$\Leftrightarrow V=\pi\int_{-12}^{6}(35-30)dy=5\pi\int_{-12}^{6}dy=90\pi\approx 283\left(m^3\right)$.

Câu 50. Nếu cắt chậu nước có hình dạng như hình bên bằng mặt phẳng song song và cách mặt đáy $x\ (\text{cm})\ (0\le x\le 16)$ thì mặt cắt là hình tròn có bán kính $R=10+\sqrt{x}\ (\text{cm})$. Tìm x (đơn vị cm, làm tròn kết quả đến hàng phần trăm) để dung tích nước trong chậu bằng $\frac{1}{2}$ thể tích của chậu?



Lời giải

Đáp án: 8,94.

Diện tích mặt cắt của chậu là $S(x)=\pi.\left(10+\sqrt{x}\right)^2=\pi.\left(100+x+20\sqrt{x}\right)$

Thể tích của chậu là $V=\int_0^{16}S(x)dx=\pi.\left(100x+\frac{x^2}{2}+20.\frac{2}{3}.\sqrt{x^3}\right)\Big|_0^{16}=\frac{7744}{3}\pi$.

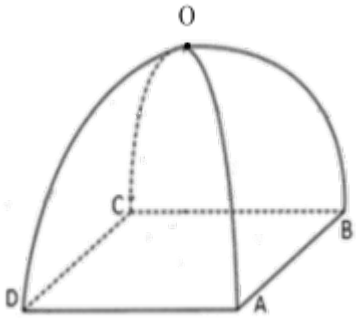
Dung tích nước trong chậu là

$$V_{nước}=\int_0^{x}S(x)dx=\pi.\left(100x+\frac{x^2}{2}+\frac{40}{3}.\sqrt{x^3}\right)$$

Để dung tích nước trong chậu bằng $\frac{1}{2}$ thể tích của chậu thì

$$\pi.\left(100x+\frac{x^2}{2}+\frac{40}{3}.\sqrt{x^3}\right)=\frac{3872}{3}\pi\Leftrightarrow 100x+\frac{x^2}{2}+\frac{40}{3}.\sqrt{x^3}=\frac{3872}{3}\Leftrightarrow x\approx 8,94$$

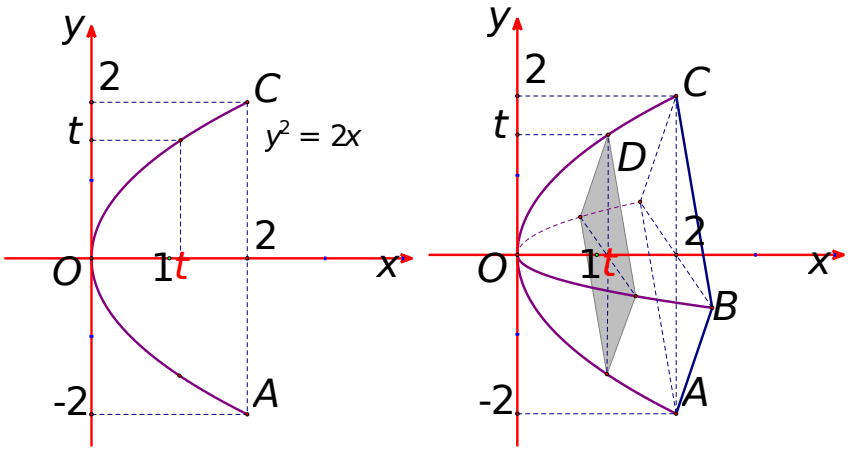
Câu 51. Một lều cắm trại có dạng như hình vẽ dưới, khung lều được tạo thành từ hai parabol giống nhau có chung đỉnh O và thuộc hai mặt phẳng vuông góc nhau (một parabol đi qua A,O,C và một parabol đi qua B,D,O), bốn chân tạo thành hình vuông $ABCD$ có cạnh là $2\sqrt{2}\ (\text{m})$, chiều cao tính từ đỉnh lều là $2\ (\text{m})$. Biết mặt cắt của lều khi cắt bởi một mặt phẳng song song với mặt phẳng $(ABCD)$ luôn là một hình vuông. Tính thể tích của lều (đơn vị là m^3).



Lời giải

Đáp án: 8.

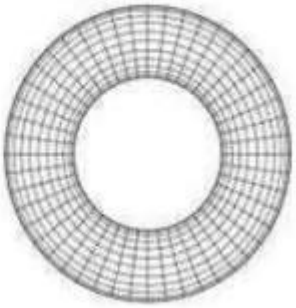
Ta có: $AB=2\sqrt{2}\Rightarrow AC=4$. Chọn hệ trục Oxy như hình vẽ.



Khi đó, mặt cắt tại $x = t$ là hình vuông có diện tích $S(t) = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{2t}\right)^2 = 4t.$

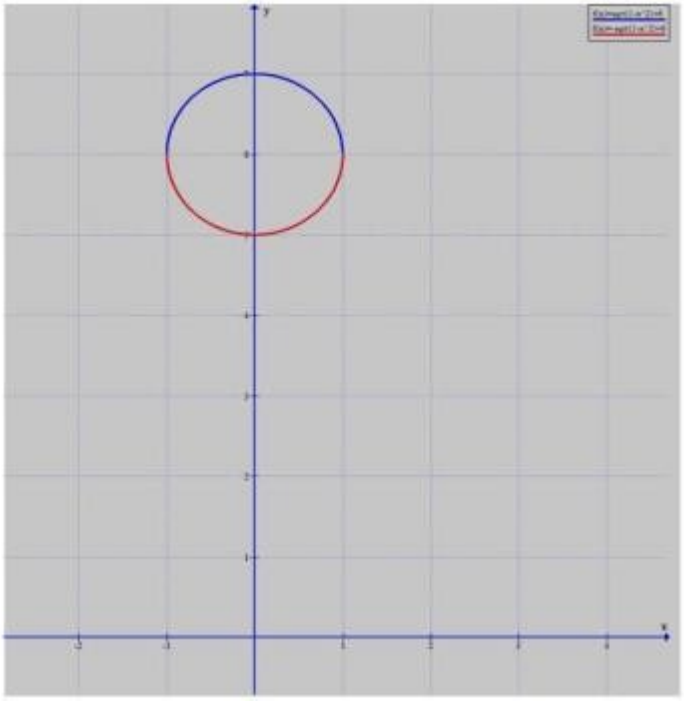
Vậy thể tích của lều là $V = \int_0^2 S(t)\mathrm{d}t = \int_0^2 4t\mathrm{d}t = \left[2t^2\right]_0^2 = 8\ \mathrm{m}^3.$

Câu 52. **Chuyên Hoàng Văn Thụ - Hòa Bình 2025)** Trong các làng nghề chế tạo đá mỹ nghệ, người ta làm được nhiều đồ trang sức bằng đá rất đẹp. Một người thợ thủ công chế tạo vòng đeo tay hình tròn bằng đá xanh, biết rằng bán kính vòng ngoài của vòng là $7cm$, bán kính vòng trong là $5cm$ (hình vẽ). Tính thể tích của chiếc vòng (theo đơn vị đo là cm^3 và làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Đáp án: 118.



Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Gốc tọa độ là tâm của chiếc vòng, Trục Ox là trục đối xứng của vòng, Oy đi qua tâm một thiết diện cắt ngang của vòng. Khi đó phương trình đường tròn thiết diện là

$$(C): x^2+(y-6)^2=1 \Leftrightarrow y=6\pm\sqrt{1-x^2}$$

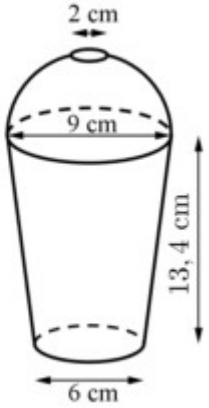
Vòng được tạo ra bằng cách quay đường tròn $(C): x^2+(y-6)^2=1$ quanh trục Ox

Thể tích của chiếc vòng là:

$$V_{Ox}=\pi\left[\int_{-1}^{1}\left(6+\sqrt{1-x^2}\right)^2dx-\int_{-1}^{1}\left(6-\sqrt{1-x^2}\right)^2dx\right]=\pi\int_{-1}^{1}24\sqrt{1-x^2}dx=12\pi^2\approx 118\left(cm^3\right)$$

.

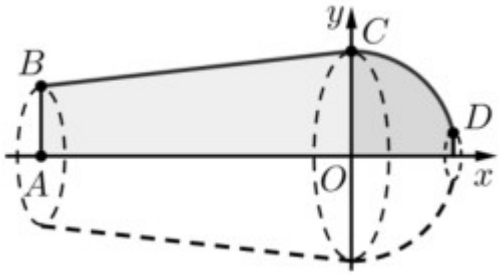
Câu 53. Một ly trà sữa dạng hình nón cụt, có đường kính đáy ly 6cm, đường kính miệng ly 9cm, chiều cao $13,4\text{cm}$, ở miệng ly có sử dụng một nắp đậy có hình dạng nửa mặt cầu và ở đỉnh của nửa mặt cầu này có một hình tròn có đường kính 2cm để cắm ống hút, mặt phẳng chứa hình tròn này song song với mặt phẳng chứa miệng ly (tham khảo hình vẽ sau).



Thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là bao nhiêu cm^3? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 791.



Chọn hệ trục Oxy (đơn vị trên trục là centimet) với trục Ox đi qua tâm của 2 đáy hình nón cụt và gốc tọa độ O trùng với tâm của đáy lớn như hình vẽ trên.

Khi đó toạ độ các điểm A,B,C lần lượt là $A(-13,4;0), B(-13,4;3), C(0;4,5)$.

Gọi phương trình đường thẳng đi qua BC có dạng $y=ax+b$. Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases}-13,4a+b=3\\0a+b=4,5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{15}{134}\\b=\dfrac{9}{2}\end{cases}$$

Phương trình đường thẳng BC là $y=\dfrac{15}{134}x+\dfrac{9}{2}$

Khi đó thể tích của phần thân ly trà sữa chưa bao gồm nắp là

$$V_1=\pi\int\limits_{-13,4}^{0}\left(\frac{15}{134}x+\frac{9}{2}\right)^2\mathrm{dx}=\frac{3819\pi}{20}\,(1)$$

Điểm C,D thuộc phương trình đường tròn tâm $O(0;0),R=4,5$ có dạng: $x^2+y^2=\frac{81}{4}$

Thay $y=1$, ta được: $x=\sqrt{\frac{81}{4}-1}=\frac{\sqrt{77}}{2}\Rightarrow D\left(\frac{\sqrt{77}}{2};1\right)$

Suy ra $y=\sqrt{\frac{81}{4}-x^2}$

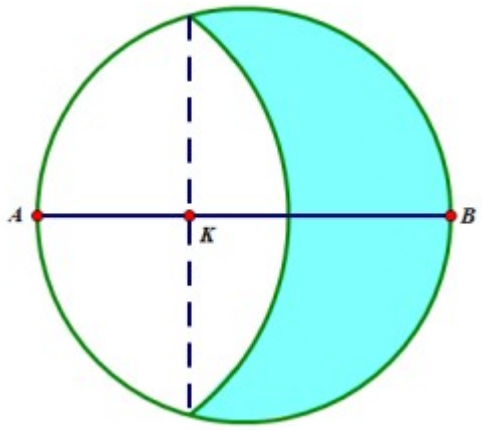
Khi đó thể tích nắp của ly trà sữa là

$$V_2=\int\limits_{0}^{\frac{\sqrt{77}}{2}}\left(\sqrt{\frac{81}{4}-x^2}\right)^2\mathrm{dx}=\frac{83\pi\sqrt{77}}{12}\,(2)$$

Từ (1) và (2) thể tích bên trong của ly bao gồm cả thể tích của nắp là

$$V=V_1+V_2=\frac{3819\pi}{20}+\frac{83\pi\sqrt{77}}{12}\approx 791\left(\mathrm{cm}^3\right)$$

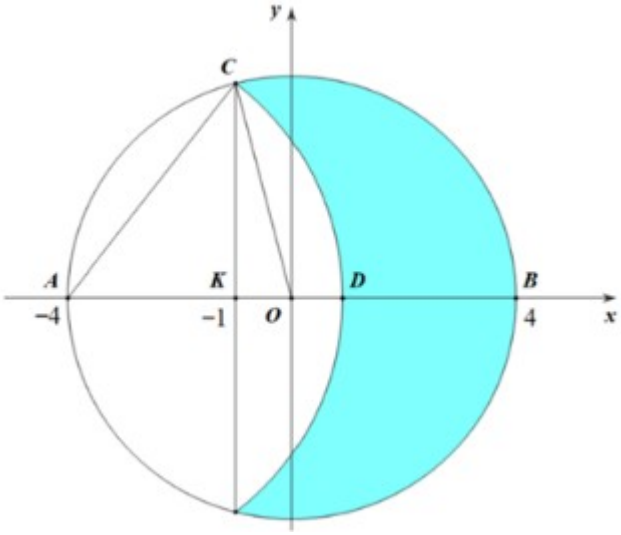
Câu 54. Một khối tròn xoay được tạo thành khi quay hình phẳng (H) (phần màu xám trong hình vẽ) quanh trục AB.



Miền (H) được giới hạn bởi đường tròn đường kính AB và cung tròn tâm A. Biết $AB=8\mathrm{cm}$ và điểm K trong hình vẽ thỏa mãn $AK=3\,\mathrm{cm}$. Thể tích của khối tròn xoay đó bằng bao nhiêu cm^3 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị).

Lời giải

Đáp án: 135.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ, $A(-4;0)$, $B(4;0)$, $K(-1;0)$.

Gọi C là điểm trên cung tròn tâm A sao cho $KC \perp AB$, $OK = 1 \Rightarrow CK = \sqrt{OC^2 - OK^2} = \sqrt{16-1^2} = \sqrt{15}$

$\Rightarrow AC = \sqrt{AK^2 + CK^2} = \sqrt{3^2+15} = 2\sqrt{6} \Rightarrow OD = 2\sqrt{6} - 4 \Rightarrow D\left(2\sqrt{6}-4;0\right)$.

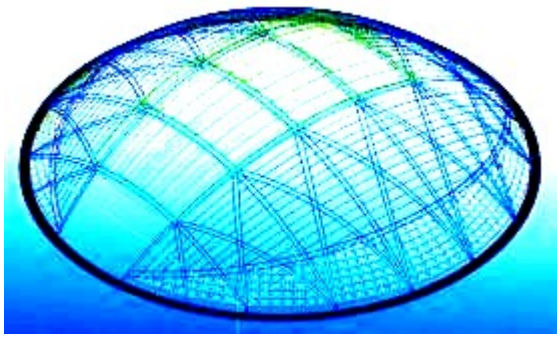
Phương trình đường tròn đường kính AB: $x^2 + y^2 = 16$

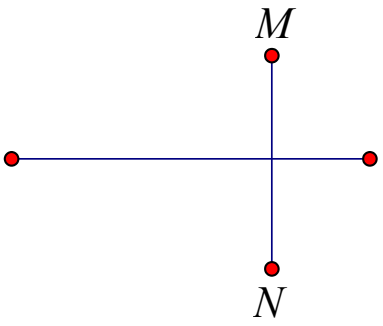
$\Rightarrow$ nửa trên trục Ox có phương trình: $y = \sqrt{16-x^2}$.

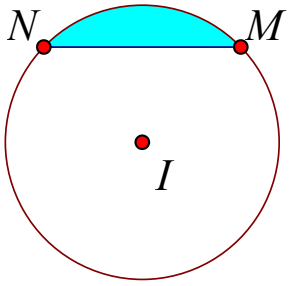
Phương trình đường tròn tâm A, bán kính AC: $(x+4)^2 + y^2 = 24 \Rightarrow y = \sqrt{24-(x+4)^2}$

Thể tích vật thể tròn xoay được tạo thành là $V = \pi \int_{-1}^{4} \left(\sqrt{16-x^2}\right)^2 dx - \int_{-1}^{2\sqrt{6}-4} \left(\sqrt{24-(x+4)^2}\right)^2 dx \approx 135 \text{cm}^3$

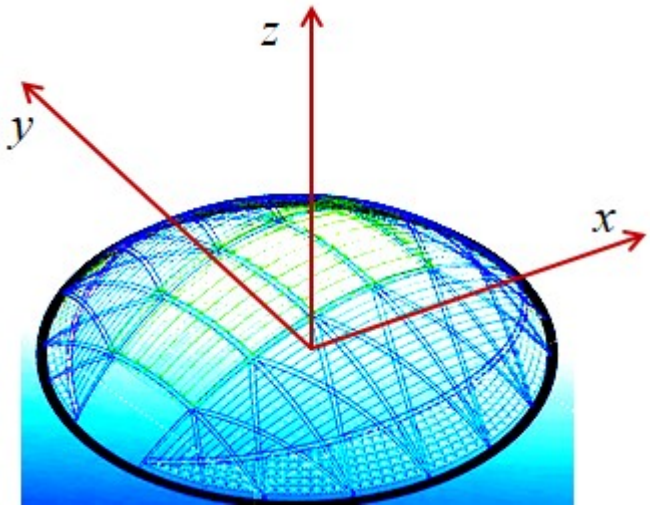
Câu 55. Sân vận động Sport Hub (Singapore) là sân có mái vòm kỳ vĩ nhất thế giới. Đây là nơi diễn ra lễ khai mạc Đại hội thể thao Đông Nam Á được tổ chức tại Singapore năm 2015. Nền sân là một elip (E) có trục lớn dài $150m$, trục bé dài $90m$ (hình vẽ). Nếu cắt sân vận động theo một mặt phẳng vuông góc với trục lớn của (E) và cắt elip ở M, N (hình vẽ) thì ta được thiết diện luôn là một phần của hình tròn có tâm I (phần tô đậm trong hình 4) với MN là một dây cung và góc $MIN = 90^0$. Để lắp máy điều hòa không khí thì các kỹ sư cần tính thể tích phần không gian bên dưới mái che và bên trên mặt sân, coi như mặt sân là một mặt phẳng và thể tích vật liệu là mái không đáng kể. Biết rằng cách tính công suất cần đủ là $200\ BTU/m^3$. Hỏi cần ít nhất bao nhiêu chiếc điều hòa công suất 50000 BTU?

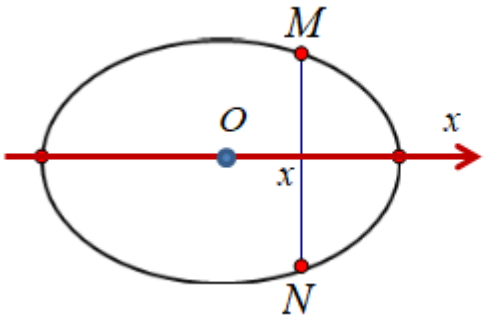


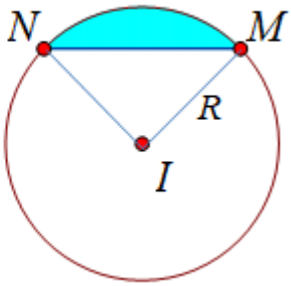




Lời giải







Chọn hệ trục như hình vẽ

Ta cần tìm diện tích của $S(x)$ thiết diện.

Gọi $d(O,MN)=x$

$(E):\dfrac{x^2}{75^2}+\dfrac{y^2}{45^2}=1.$

$$MN=2y=2\sqrt{45^2\left(1-\frac{x^2}{75^2}\right)}=90\sqrt{1-\frac{x^2}{75^2}}$$

Lúc đó

$$\Rightarrow R=\frac{MN}{\sqrt{2}}=\frac{90}{\sqrt{2}}.\sqrt{1-\frac{x^2}{75^2}}\Rightarrow R^2=\frac{90^2}{2}.\left(1-\frac{x^2}{75^2}\right)$$

$$S(x)=\frac{1}{4}\pi R^2-\frac{1}{2}R^2=\left(\frac{1}{4}\pi-\frac{1}{2}\right)R^2=(\pi-2)\frac{2025}{2}.\left(1-\frac{x^2}{75^2}\right).$$

Vậy thể tích khoảng không bên dưới mái che và bên trên mặt sân là

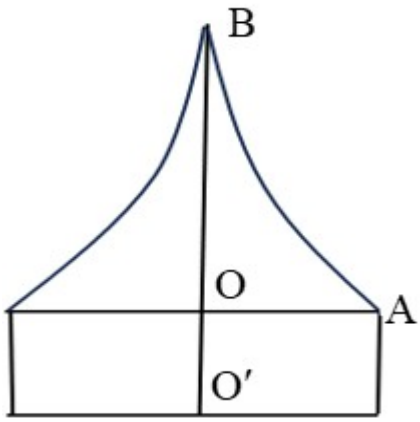
$$V=\int_{-75}^{75}(\pi-2)\frac{2025}{2}.\left(1-\frac{x^2}{75^2}\right)\approx 115586m^3.$$

Số chiếc điều hòa cần lắp là

$115586.200:50000=462,344$

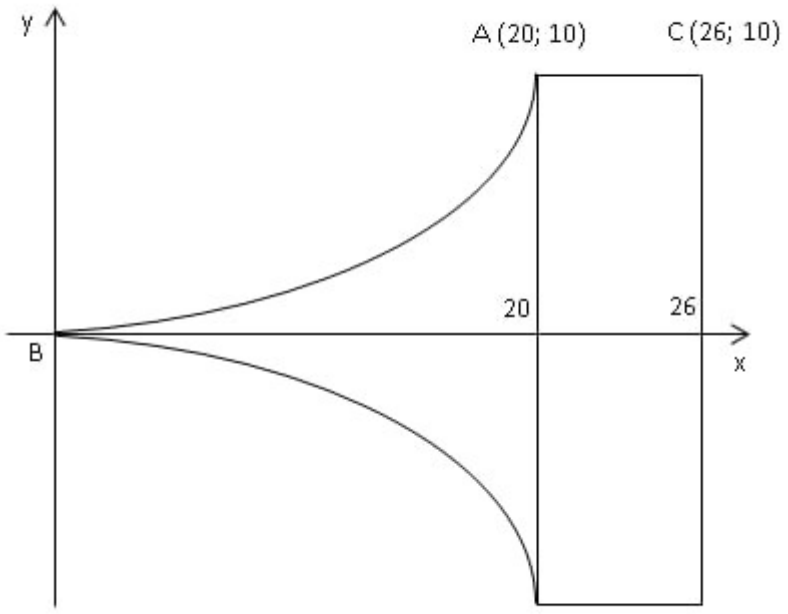
Vậy cần 463 chiếc điều hòa.

Câu 56. Chuẩn bị cho đêm hội diễn văn nghệ chào đón năm mới, nhóm bạn Lan đã làm một chiếc mũ "cách điệu" cho ông già Noel có dáng một khối tròn xoay. Mặt cắt qua trục của chiếc mũ như hình vẽ bên dưới. Biết rằng $OO'=6cm$, $OA=10cm$, $OB=20cm$, đường cong AB là một phần của parabol có đỉnh là điểm B. Tính thể tích của chiếc mũ (làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Parabol (P) đi qua 2 điểm A,B và có B là đỉnh $\Rightarrow (P)$ đi qua $A(20;10)$ và $B(0;0)$

Ta có $(P):y=ax^2+bx+c$.

Vì (P) qua $B(0;0)\Rightarrow c=0.$

Vì (P) qua $A(20;10)\Rightarrow 10=20^2a+20b\ (1)$.

Mà B là đỉnh của parabol (P) nên $\frac{-b}{2a}=0\Rightarrow b=0.$

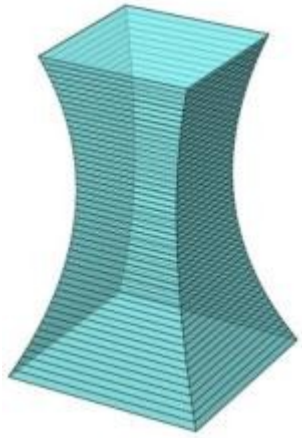
Thay $b=0$ vào (1) $\Rightarrow a=\frac{1}{40}$.

$\Rightarrow (P):y=\frac{x^2}{40}$.

$\Rightarrow V=\pi\int_0^{20}\left(\frac{x^2}{40}\right)^2dx+\pi\int_{20}^{26}(10)^2dx=1000\pi\approx 3142\left(cm^3\right)$.

Vậy thể tích của chiếc mũ là: $3142\left(cm^3\right)$.

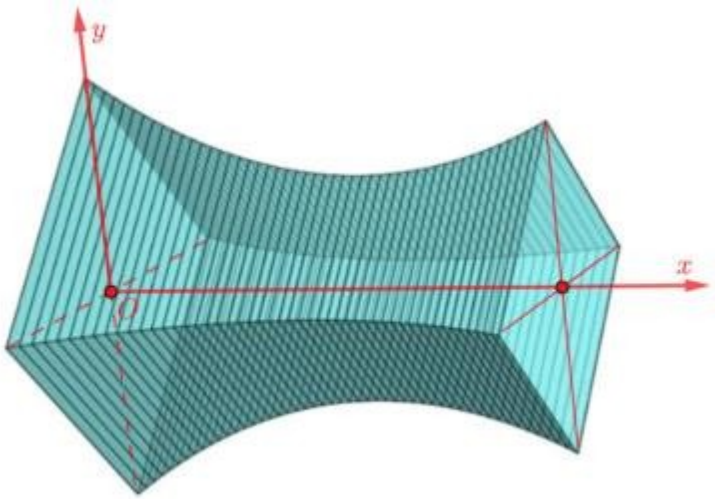
Câu 57. Một kiến trúc sư chịu trách nhiệm thiết kế một tòa nhà cao 30 mét. Mặt cắt ngang tại mọi độ cao, vuông góc với trục thẳng đứng, luôn là một hình vuông (xem hình vẽ).



Mặt đáy tòa nhà là hình vuông có cạnh $L_0=26$ m, mặt đỉnh là hình vuông có cạnh $L_{30}=20$ m. Mặt cắt ngang tại vị trí hẹp nhất của tòa nhà: Hình vuông có cạnh $L_{min}=13,75$ m. Mặt cắt của tòa nhà theo mặt phẳng đứng chứa đường chéo đáy có dạng là hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong parabol đối xứng nhau qua trục thẳng đứng đi qua tâm đáy của tòa nhà. Tính thể tích của tòa nhà đó (làm tròn đến hàng đơn vị, đơn vị tính: mét khối).

Lời giải

Đáp án: 8976



Chọn hệ trục toạ độ *Oxy* như hình vẽ.

Gọi $L(x)$ là hàm biến thiên của độ dài đường chéo mặt cắt của toà nhà tại độ cao *x*.

Theo đề ta có, $L(x)$ là một parabol đi qua ba điểm $(0;13\sqrt{2}),(30;10\sqrt{2}),\left(x_o;\frac{55\sqrt{2}}{8}\right)$, trong đó x_o là vị trí toà nhà có cạnh cạnh $L_{mm}=13,75$ m.

$L(x)=a(x-x_o)^2+\frac{55\sqrt{2}}{8}$.

Ta có hệ: $\begin{cases} L(0)=a(0-x_o)^2+\frac{55\sqrt{2}}{8}=13\sqrt{2} \\ L(30)=a(30-x_o)^2+\frac{55\sqrt{2}}{8}=10\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x_o)^2=\frac{49\sqrt{2}}{8} \\ a(30-x_o)^2=\frac{25\sqrt{2}}{8} \end{cases}$

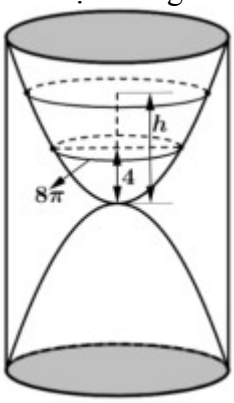
$\Rightarrow \frac{x_o^2}{(30-x_o)^2}=\frac{49}{25} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_o=105(L) \\ x_o=17,5\ (TM) \Rightarrow a=\frac{\sqrt{2}}{50} \end{array}\right.$

Suy ra $L(x)=\frac{\sqrt{2}}{50}(x-17,5)^2+\frac{55\sqrt{2}}{8}$

Do đó, diện tích thiết diện là $S(x)=2\left[L(x)\right]^2=2\left[\frac{\sqrt{2}}{50}(x-17,5)^2+\frac{55\sqrt{2}}{8}\right]^2$.

Vậy thể tích của toà nhà là $V=\int_0^{30}S(x)\,dx=\int_0^{30}2\left[\frac{\sqrt{2}}{50}(x-17,5)^2+\frac{55\sqrt{2}}{8}\right]^2 dx\approx 8976m^3$.

Câu 58. Một chiếc đồng hồ cát như hình vẽ gồm hai phần đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang và đặt trong một hình trụ. Thiết diện thẳng đứng qua trục của nó là hai parabol chung đỉnh và đối xứng nhau qua mặt phẳng nằm ngang. Ban đầu lượng cát dồn hết ở phần trên của đồng hồ thì chiều cao của mực cát bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bên đó (xem hình vẽ). Cát chảy từ trên xuống dưới với tốc độ $v(t)=0,2t+13$ (cm^3/phút). Khi chiều cao của cát còn 4cm thì bề mặt trên cùng của cát tạo thành một đường tròn có chu vi bằng 8π cm. Biết sau 20 phút thì cát chảy hết xuống phần bên dưới của đồng hồ. Hỏi chiều cao của khối trụ bên ngoài bằng bao nhiêu centimet? (*Nếu kết quả là số thập phân thì làm tròn đến hàng đơn vị*).



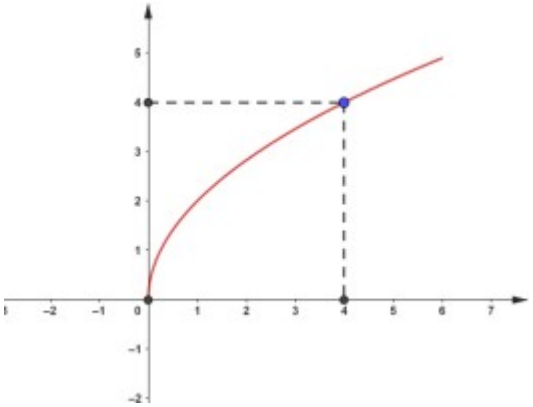
Lời giải

Đáp số: 21.

Thể tích cát ban đầu là: $\int_0^{20}v(t)\,dt=\int_0^{20}0,2t+13\,dt=300\ cm^3$.

Bán kính đường tròn đáy parabol tròn xoay khi chiều cao cát còn 4cm là: $\frac{8\pi}{2\pi}=4$.

Xét parabol $(P): y = a\sqrt{x}$ đi qua điểm $A(4;4)$ như hình vẽ



Ta có: $A(4;4) \in (P) \Rightarrow 4 = a\sqrt{4} \Rightarrow a = 2$. Suy ra $(P): y = 2\sqrt{x}$.

Khi đó thể tích parabol tròn xoay tạo ra bằng cách xoay hình phẳng giới hạn bởi parabol (P), trục Ox và hai đường thẳng $x = 0$, $x = h$ quanh trục Ox là:

$$V = \pi \int_0^h \left(2\sqrt{x}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{4\pi x^2}{2}\Big|_0^h = 2\pi h^2$$ (đvtt).

Suy ra: $2\pi h^2 = 300 \Rightarrow h = \sqrt{\frac{150}{\pi}}$

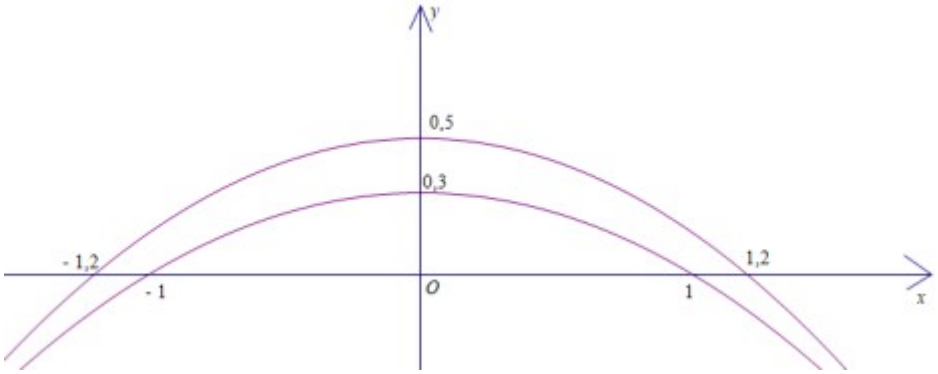
Vậy chiều cao khối trụ bên ngoài là: $2.\left(\frac{3}{2}.\sqrt{\frac{150}{\pi}}\right) \approx 21 cm$.

Câu 59. Một nhà máy nhiệt điện sử dụng 90 máng Parabol thu nhiệt năng lượng mặt trời có cùng kích thước, bề mặt cong đều nhau (tham khảo hình vẽ).

Mỗi máng có chiều rộng $2\,\mathrm{m}$, bề dày của khối silic làm mặt máng là $2\,\mathrm{dm}$, chiều dài $3\,\mathrm{m}$. Đặt máng tiếp giáp mặt đất có điểm cao nhất của khối silic làm mặt máng so với mặt đất là $5\,\mathrm{dm}$. Khi đó thể tích của khối silic làm 90 mặt máng bằng bao nhiêu m^3?

Lời giải

Đáp án: 108



Xét hệ trục Oxy như hình vẽ.

Khi đó đường Parabol tương ứng với vành trên và vành dưới của máng lần lượt là $(P_1): f(x)=ax^2+b$ và $(P_2): g(x)=mx^2+n$.

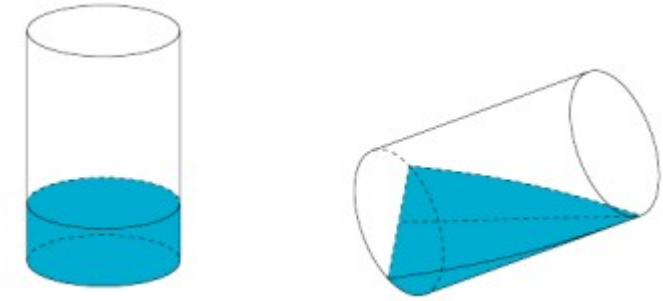
Ta có (P_1) đi qua các điểm $(0;0,5)$ và $(-1,2;0) \Rightarrow f(x)=-\frac{25}{72}x^2+0,5$.

(P_2) đi qua các điểm $(0;0,3)$ và $(-1;0) \Rightarrow g(x)=-\frac{3}{10}x^2+0,3$.

Diện tích mặt cắt của máng $S=\int_{-1,2}^{1,2} f(x)\mathrm{d}x-\int_{-1}^{1} g(x)\mathrm{d}x=0,4$.

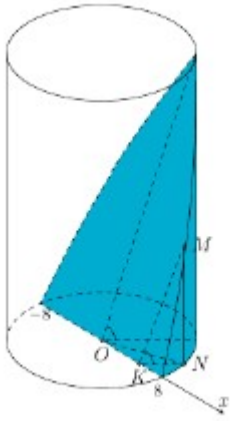
Thể tích khối silic $V=90.\int_{0}^{3} S(x)\,\mathrm{d}x=108\left(\mathrm{m}^3\right)$.

Câu 60. Một cốc thủy tinh có dạng hình trụ đang đựng một lượng nước, bán kính trong lòng đáy cốc là 8 cm, chiều cao trong lòng cốc là 10 cm. Tính thể tích lượng nước trong cốc (*đơn vị* cm^3), biết khi nghiêng cố nước vừa lúc khi nước chạm miệng cốc thì ở đáy cốc mực nước trùng với đường kính của đáy cốc (*làm tròn kết quả đến hàng đơn vị*).



Lời giải

Đáp án: 427.



Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ.

Đặt $OK = x$ $(0 < x < 8)$

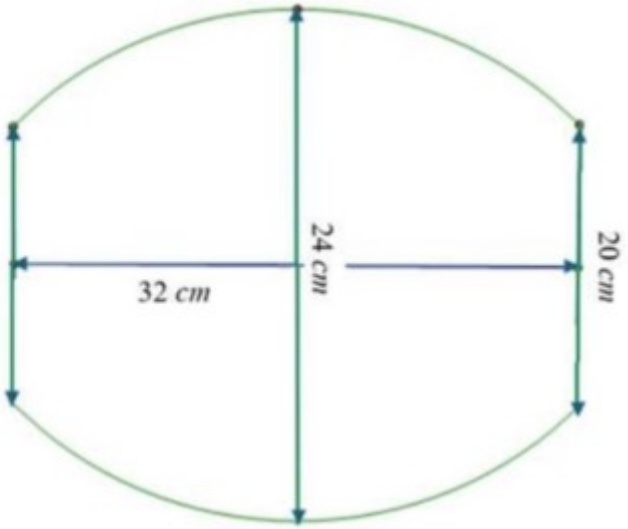
$KN = \sqrt{64 - x^2}$

Xét tam giác KMN, ta có $\tan MKN = \dfrac{10}{8} = \dfrac{MN}{\sqrt{64 - x^2}} \Rightarrow MN = \dfrac{5}{4}\sqrt{64 - x^2}$.

$\Rightarrow S_{MKN} = \dfrac{1}{2} KN \cdot MN = \dfrac{1}{2}\sqrt{64 - x^2} \cdot \dfrac{5}{4}\sqrt{64 - x^2} = \dfrac{5}{8}\left(64 - x^2\right)$.

Vậy $V = \dfrac{5}{8}\int_{-8}^{8}\left(64 - x^2\right)\mathrm{d}x \approx 427$ (cm^3).

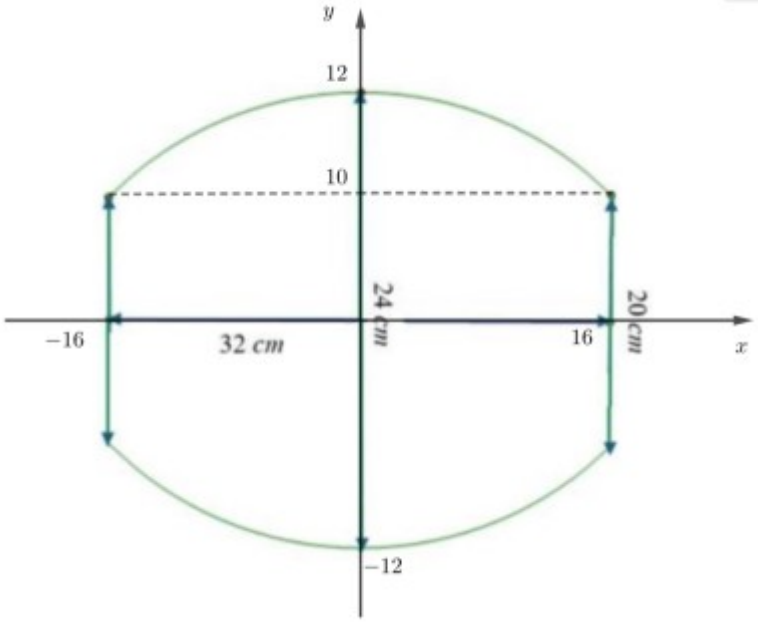
Câu 61. Một thùng chứa rượu có dạng hình tròn xoay với đường sinh là một cung của đường tròn, hai đáy là hai hình tròn bằng nhau và có đường kính bằng $20cm$, khoảng cách giữa hai đáy bằng $32cm$, đường kính lớn nhất của thân thùng là $24cm$ (biết các kích thước đã trừ lớp vỏ thùng, tham khảo hình vẽ). Hỏi phần không gian bên trong thùng chứa rượu đỏ có thể tích bằng bao nhiêu lít? (kết quả lấy đến chữ số hàng phần chục và không làm tròn).



Lời giải

Đáp án: $12,9$.

Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ:



Gọi phương trình đường tròn phía trên trục hoành là: $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0\left(a^2 + b^2 = 0\right)$

Đường tròn đi qua các điểm có tọa độ: $(0;12),(16;10),(-16;10)$ nên ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 0+144-24b+c=0 \\ 256+100-32a-20b+c=0 \\ 256+100+32a-20b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24b-c=144 \\ 32a+20b-c=356 \\ -32a+20b-c=356 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-53 \\ c=1416 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn là: $x^2+y^2+106y-1416=0$ hay $x^2+(y+53)^2=4225=65^2$

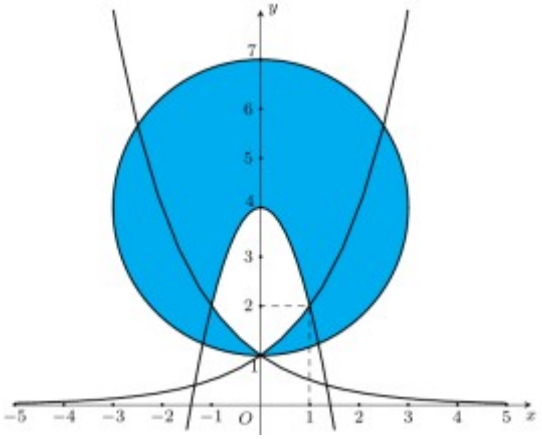
Xét nửa đường tròn phía trên trục hoành có phương trình: $y=\sqrt{4225-x^2}-53$

Vậy thể tích của bình rượu chính là thể tích khối tròn xoay tạo bởi phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\sqrt{4225-x^2}-53$, trục hoành và hai đường thẳng $x=-16$, $x=16$ quay quanh trục Ox.

$$V=\pi\int_{-16}^{16}\left(\sqrt{4225-x^2}-53\right)^2dx$$
$$=12957cm^3=12,957dm^3=12,957 \text{ (lít)}$$

Kết quả lấy đến chữ số hàng phần chục và không làm tròn thì là $12,9$ lít.

Câu 62. Cho các đồ thị hàm số: $y=a^x$, $y=a^{-x}$, $y=Ax^2+Bx+C$, $a>1$, $A,B,C\in\mathbb{R}$ và đường tròn (C). Gọi (D) là miền phẳng được tô đậm (*hình vẽ*). Quay miền (D) quanh trục Ox ta được một vật thể tròn xoay có thể tích bằng bao nhiêu (*kết quả làm tròn đến hàng đơn vị*)?



Lời giải

Đáp án: 652.

Đồ thị hàm số $y=a^x$ đi qua điểm $(1;2)$ nên ta có $a^1=2\Leftrightarrow a=2$, ta được hàm số $y=2^x, y=2^{-x}$.

Đồ thị (P) của hàm số $y=Ax^2+Bx+C$ đi qua điểm $(1;2)$, có đỉnh $(0;4)$ nên ta có

$$\begin{cases} A+B+C=2 \\ C=4 \\ -\dfrac{B}{2A}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-2 \\ B=0 \\ C=4 \end{cases}.$$

Suy ra $(P):y=-2x^2+4$.

Đường tròn (C) có tâm $(0;4)$, bán kính bằng 3 nên có phương trình $x^2+(y-4)^2=9$.

Ta có $x^2+(y-4)^2=9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} y=4+\sqrt{9-x^2} \\ y=4-\sqrt{9-x^2} \end{array}\right.$.

Quay hình tròn (C) quanh Ox ta được vật thể tròn xoay có thể tích bằng

$$V_1=\pi\int_{-3}^{3}\left[\left(4+\sqrt{9-x^2}\right)^2-\left(4-\sqrt{9-x^2}\right)^2\right]dx=16\pi\int_{-3}^{3}\sqrt{9-x^2}dx\approx 710,611517$$

.

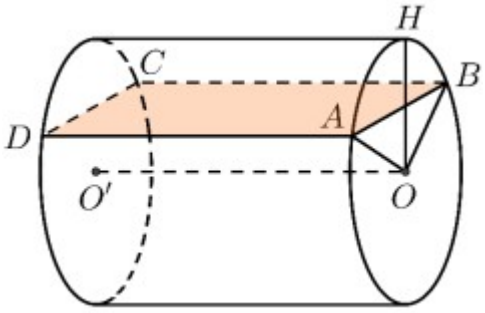
Thể tích vật thể tròn xoay sinh bởi phần diện tích giới hạn bởi đồ thị (P) và hai đồ thị $y=2^x, y=2^{-x}$ (phần không tô màu) bằng

$$V_2=2\pi\int_{0}^{1}\left[\left(-2x^2+4\right)^2-\left(2^x\right)^2\right]dx\approx 58,450111$$

.

Vậy thể tích vật thể cần tìm là $V=V_1-V_2\approx 710,611517-58,450111\approx 652$.

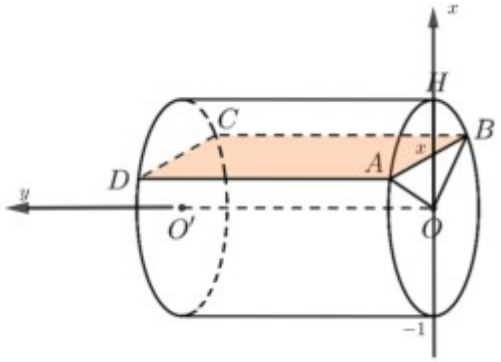
Câu 63. Một bồn hình trụ đang chứa dầu, được đặt nằm ngang, có chiều dài bồn là 5m, có bán kính đáy 1m. Người ta đã rút dầu trong bồn tương ứng với 0,5m của đường kính đáy. Tính thể tích của lượng dầu còn lại trong bồn theo đơn vị m^3.(làm tròn đến hàng phần chục)



Lời giải

Đáp án: 12,6.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Thiết diện cắt trục Ox tại điểm có hoành độ là x.

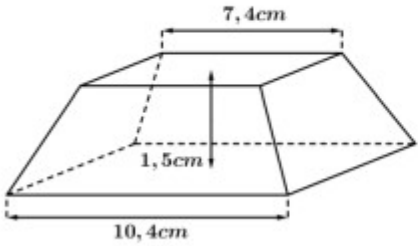
Khi đó, ta có $AB=2\sqrt{1-x^2}$.

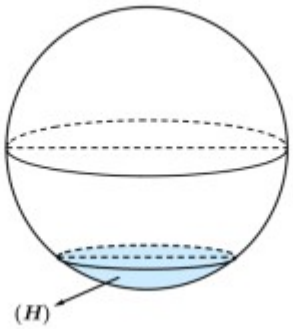
Suy ra diện tích hìn chữ nhật $ABCD$ bằng $5\cdot 2\sqrt{1-x^2}=10\sqrt{1-x^2}$.

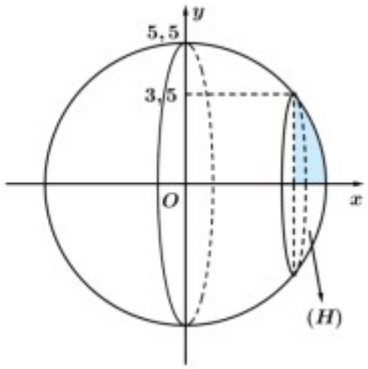
Vậy thể tích lượng dầu còn lại trong bồn là

$$V=10\int_{-1}^{0,5}\sqrt{1-x^2}\,dx=12,6$$ (m^3).

Câu 64. Để đặt được một vật trang trí trên mặt bàn, người ta thiết kế một chân đế như sau. Lấy một khối gỗ có dạng khối chóp cụt tứ giác đều với độ dài hai cạnh đáy lần lượt bằng $7,4cm$ và $10,4cm$, bề dày khối gỗ bằng $1,5cm$. Sau đó khoét bỏ đi một phần của khối gỗ sao cho phần đó có dạng vật thể H, ở đó H nhận được bằng cách cắt khối cầu bán kính $5,5cm$ bởi một mặt phẳng cắt mà mặt cắt là hình tròn bán kính $3,5cm$ *(xem hình dưới)*







Thể tích của khối chân đế bằng bao nhiêu centimét khối *(không làm tròn kết quả các phép tính trung gian, chỉ làm tròn kết quả cuối cùng đến hàng phần mười)*

Lời giải

Đáp án: 94,7.

Xét trên mặt phẳng tọa độ Oxy có đường tròn tâm gốc tọa độ O, bán kính $5,5cm$ là đường tròn thiết diện lớn nhất cắt khối cầu đề cho. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua tâm O của khối cầu và (Q) là mặt phẳng song song với (P) sao cho cách khối cầu 1 khoảng là a và biết rằng đường tròn giao tuyến tạo bởi (Q) có bán kính bằng $3,5cm$.

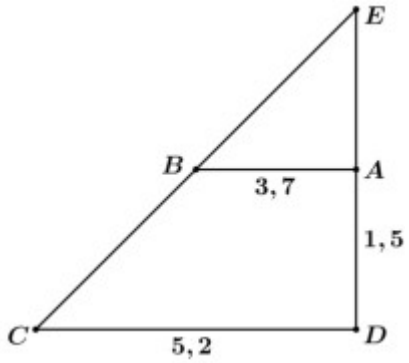
Khi ấy a là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm giữa đường tròn $(C): y = \sqrt{5,5^2 - x^2}$ và đường thẳng $y = 3,5$. Tức ta có phương trình sau:

$$\sqrt{5,5^2 - x^2} = 3,5 \Leftrightarrow x = \sqrt{5,5^2 - 3,5^2} = 3\sqrt{2}$$

Nhận thấy vật thể H để khoét vào khối chóp cụt có dạng là chỏm cầu có bán kính bằng $3,5\,cm$, khi ấy chiều cao của chỏm này chính bằng $h = 5,5 - a = 5,5 - 3\sqrt{2}\,(cm) < 1,5cm$ (hợp lệ)

Khi ấy thể tích (H) là: $$V_a = \pi \int_{3\sqrt{2}}^{5,5} \left(\sqrt{5,5^2 - x^2}\right)^2 dx = A\left(cm^3\right) \quad (1)$$

Tại khối chóp cụt, ta thực hiện cắt một mặt phẳng qua đường cao khối chóp và vuông góc với hai đáy, khi ấy ta mô hình hóa được mặt cắt là hình thang vuông $ABCD$ như hình vẽ dưới (trong đó A, D lần lượt là tâm mặt đáy bé và đáy lớn của chóp cụt)



Gọi $E = AD \cap BC$,

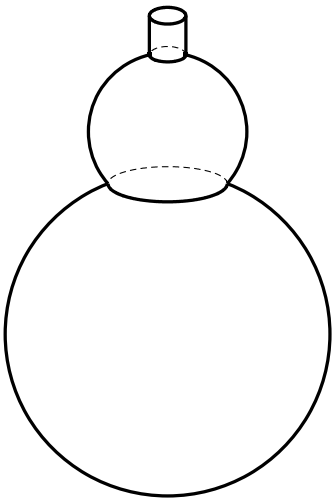
theo định lí Thales ta có: $$\frac{EA}{ED} = \frac{AB}{CD} \Leftrightarrow \frac{EA}{EA + 1,5} = \frac{3,7}{5,2} \Leftrightarrow EA = 3,7\left(cm\right)$$

Suy ra $ED = EA + AD = 5,2cm$. Gọi V_1 là thể tích khối chóp đều đáy là hình vuông cạnh $7,4cm$ và đường cao $EA = 3,7cm$ và V_2 là thể tích khối chóp đều đáy là hình vuông cạnh $10,4\,cm$ và đường cao $ED = 5,2cm$ thì khi ấy thể tích khối chóp cụt bằng:

$$V_b = V_2 - V_1 = \frac{1}{3}\left((10,4)^2.5,2 - (7,4)^2.3,7\right) = 119,94\left(cm^3\right) \quad (2)$$

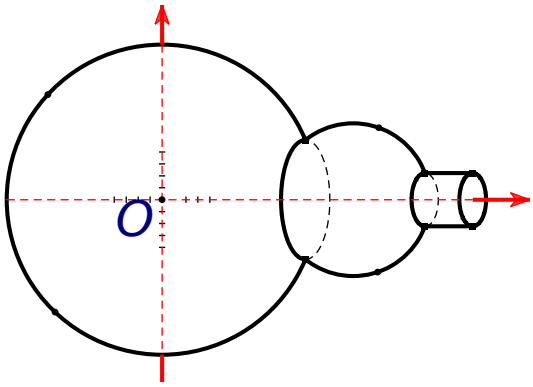
Từ (1) và (2) ta suy ra thể tích khối chân đế là $V_a - V_b = 119,94 - A = 94,7\left(cm^3\right)$

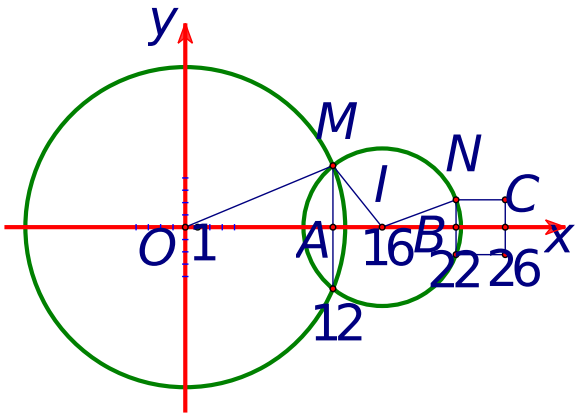
Câu 65. Người ta cắt hai hình cầu có bán kính lần lượt là $R = 13$ cm và $r = \sqrt{41}$ cm để làm hồ lô đựng rượu như hình vẽ bên. Biết đường tròn giao của hai hình cầu có bán kính $r' = 5$ cm và nút đựng rượu là một hình trụ có bán kính đáy bằng $\sqrt{5}$ cm, chiều cao bằng 4 cm. Giả sử độ dày vỏ hồ lô không đáng kể. Hỏi hồ lô đựng được bao nhiêu lít rượu? (kết quả làm tròn đến phần mười).



Lời giải

Đáp án: 10,2



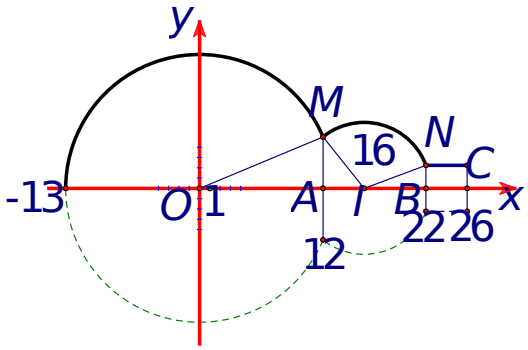


Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ. Ta có:

$OM = R = 13, AM = r' = 5 \Rightarrow OA = 12 \Rightarrow A(12;0).$

$IM = r = \sqrt{41}, AM = r' = 5 \Rightarrow AI = \sqrt{41-5^2} = 4 \Rightarrow I(16;0)$

$IN = r = \sqrt{41}, BN = r_T = \sqrt{5} \Rightarrow IB = \sqrt{41-5} = 6 \Rightarrow B(22;0), C(26;0).$



Ta có:

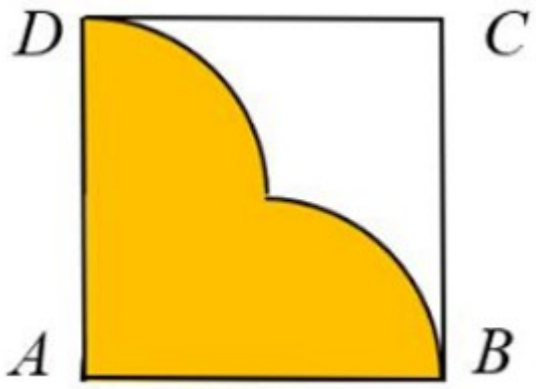
$$(C_1): x^2+y^2=13^2 \Rightarrow y^2=169-x^2 \Rightarrow V_1=\pi\int_{-13}^{12}(169-x^2)\mathrm{d}x=\frac{8750\pi}{3}.$$

$$(C_2): (x-16)^2+y^2=\sqrt{41}^2 \Rightarrow y^2=41-(x-16)^2 \Rightarrow V_2=\pi\int_{12}^{22}\left[41-(x-16)^2\right]\mathrm{d}x=\frac{950\pi}{3}.$$

$$V_3=\pi\int_{22}^{26}\sqrt{5}^2\mathrm{d}x=20\pi.$$

Vậy $$V=V_1+V_2+V_3=\frac{9760\pi}{3}\approx 10220,65\ \mathrm{cm}^3\approx 10,2\ \mathrm{dm}^3.$$

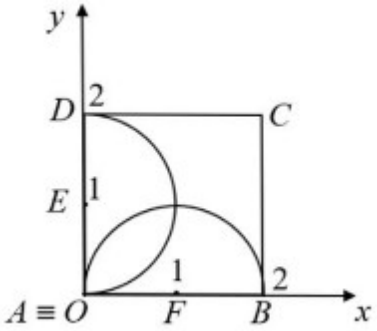
Câu 66. Một vật trang trí có dạng một khối tròn xoay được tạo thành khi quay miền (R) (phần được tô màu trong hình vẽ bên) quanh trục AB. Miền (R) được giới hạn bởi các cạnh AB, AD của hình vuông $ABCD$ và các cung phần tư của các đường tròn bán kính bằng 1 cm với tâm lần lượt là trung điểm của các cạnh AD, AB.Tính thể tích của vật trang trí đó, làm tròn kết quả đến hàng phần mười.



Lời giải

Trả lời: 12,3

Chọn trục Ox chứa điểm B, trục Oy chứa điểm D, và gốc tọa độ O trùng điểm A (như hình vẽ).



Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AD, AB. Khi đó $E(0;1), F(1;0)$.

+ Phương trình đường tròn có tâm $E(0;1)$ và đường kính $AD=2$ là: $x^2+(y-1)^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm E là: $y=1+\sqrt{1-x^2}$

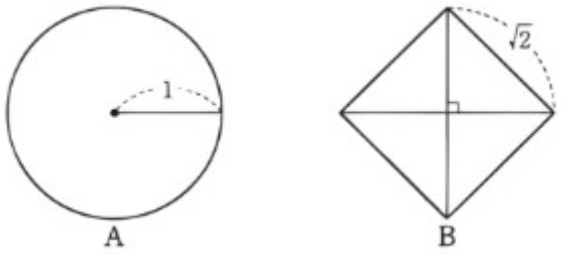
+ Phương trình đường tròn có tâm $F(1;0)$ và đường kính $AB=2$ là: $(x-1)^2+y^2=1$.

Suy ra phương trình cung trên của đường tròn tâm F là: $y=\sqrt{1-(x-1)^2}$

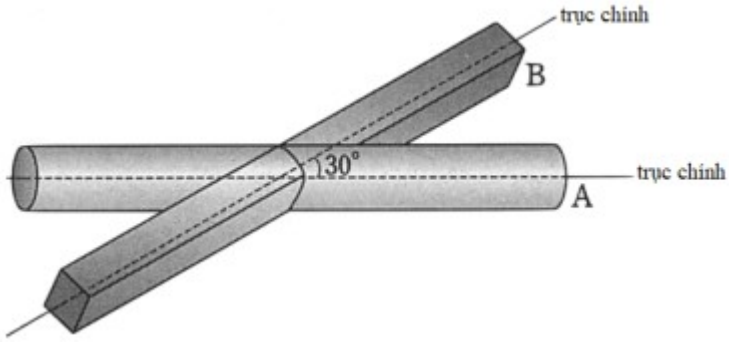
Vậy, thể tích vật trang trí là:

$$V=\pi\int_0^1\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)^2\cdot dx+\pi\int_1^2\left(1-(x-1)^2\right)\cdot dx\approx 12,3\left(cm^3\right)$$

Câu 67. Cho một thanh gỗ hình trụ A có đáy là hình tròn bán kính 1, và một thanh gỗ hình lăng trụ đứng B có đáy là hình vuông cạnh $\sqrt{2}$ như hình vẽ.



Hai thanh gỗ có trục chính cắt nhau và tạo với nhau một góc 30°.

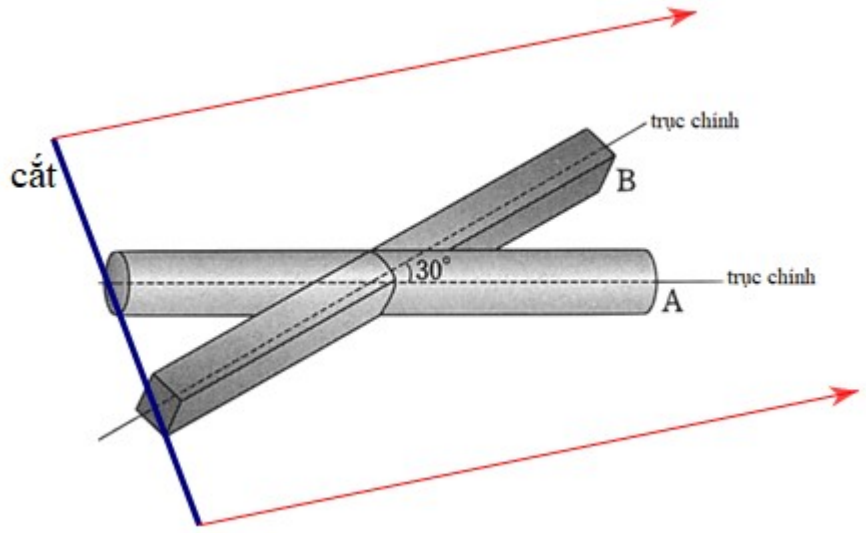


Trong hai đường chéo của tiết diện vuông góc với trục của thanh gỗ B, có một đường chéo vuông góc với mặt phẳng chứa trục của cả hai thanh gỗ, còn đường chéo còn lại thì nằm trong mặt phẳng đó. Khi đó, phần thể tích chung của hai thanh gỗ là $a\pi + b.$ Hãy tính giá trị của biểu thức $10a + 3b$, biết rằng a và b là các số hữu tỉ.

Lời giải

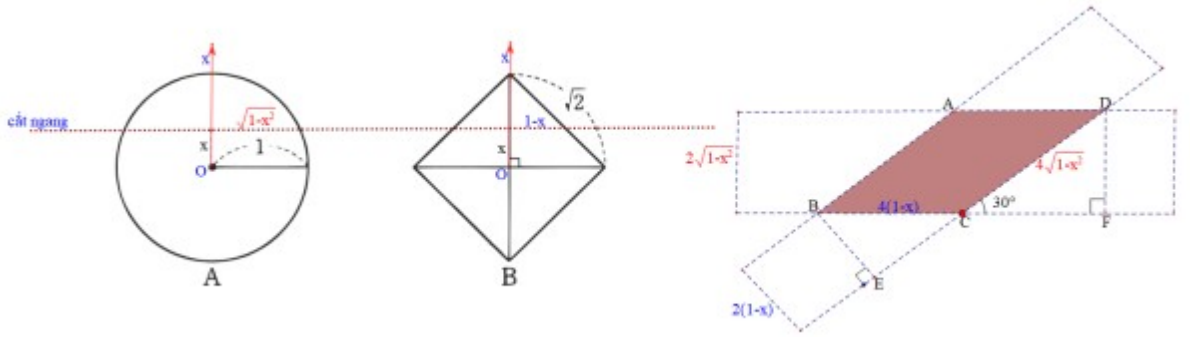
Trả lời: 24

Đầu tiên, ta sẽ thực hiện 1 lát cắt ngang vuông góc với "đường chéo vuông góc với mặt phẳng chứa trục của cả hai thanh gỗ"



Ta gọi O là giao của 2 trục chính. Giả sử lát cắt ngang này, cắt trục Ox tại điểm có hoành độ bằng x với $x \in [0;1]$.

Khi đó ta được hình sau:



Khi đó, ta cắt thanh gỗ A có chiều rộng là $2\sqrt{1-x^2}$ và thanh gỗ B có chiều rộng là $2(1-x)$.

Còn $ABCD$ là tứ giác là hình bình hành do lát cắt tạo thành vào phần chung của A và B.

$$S(x) = \frac{1}{2}.4(1-x).4\sqrt{1-x^2}$$

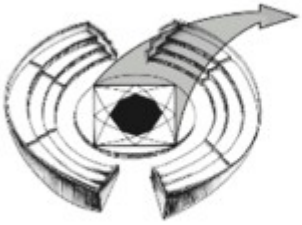
Dễ dàng tìm được diện tích tứ giác này là

Vậy thể tích cần tìm là

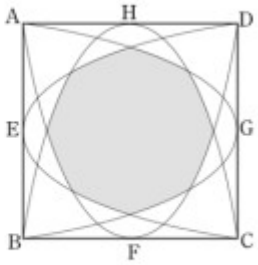
$$V = 2\int_0^1 \left(\frac{1}{2}.4(1-x).4\sqrt{1-x^2}\right)dx = 16\int_0^1 \left((1-x)\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$$= 16\left[\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx - \int_0^1 x\sqrt{1-x^2}\,dx\right] = 16\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right) = 4\pi - \frac{16}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -\frac{16}{3} \end{cases} \Rightarrow 10a + 3b = 24$$

Câu 68. Hình 1 là một tác phẩm dự thi của nhà thiết kế sân khấu trong một cuộc thi thiết kế sân khấu ngoài trời tổ chức tại một quảng trường. Khi mở rộng sân khấu trung tâm, ta được Hình 2. Quá trình thiết kế sân khấu trung tâm được mô tả như sau:



Hình 1



Hình 2

Bước 1. Vẽ hình vuông $ABCD$ có độ dài cạnh bằng 2, và lấy trung điểm của bốn cạnh lần lượt là E, F, G, H.

Bước 2. Vẽ đồ thị của các hàm bậc hai đi qua ba điểm B, C, H và hàm bậc hai đi qua ba điểm F, D, A.

Bước 3. Tương tự như Bước 2, vẽ đồ thị của các hàm bậc hai đi qua ba điểm A, B, G và ba điểm C, D, E

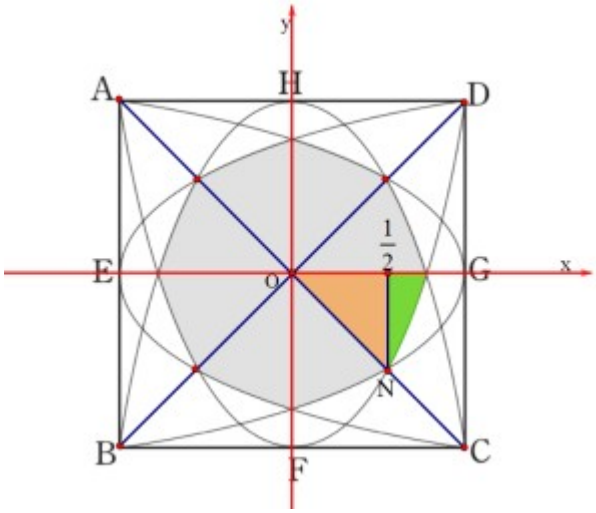
Biết rằng: Diện tích phần tô đen trong Hình 2 được cho bởi công thức: $\dfrac{p\sqrt{2}+q}{3}$

Hãy tính giá trị của $p-q$. (Với p, q là các số nguyên.)

Lời giải

Trả lời: 15

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình vẽ:



Gốc tọa độ O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD

Trục $Ox \equiv EG; Oy \equiv HF$

Khi đó ta dễ suy ra được: $AC: y = -x$ và đồ thị hàm số bậc hai đi qua F, D, A là: $y = 2x^2 - 1$

Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng AC và đồ thị hàm số bậc hai đi qua F, D, A ta được:

$$2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ta gọi S_1 là diện tích vùng được tô màu xanh như hình trên, khi đó:

$$S_1 = \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \left(1 - 2x^2\right) dx = \left(x - \frac{2}{3}x^3\right)\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{3} - \frac{5}{12}$$

Diện tích phần tô màu cam trong hình trên là: $S_2=\frac{1}{8}$

Vậy diện tích tô màu đen như hình 2 là $S=8\left(S_1+S_2\right)=8\left(\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{5}{12}+\frac{1}{8}\right)=\frac{8\sqrt{2}-7}{3}\Rightarrow\begin{cases}p=8\\q=7\end{cases}$

Vậy $p-q=15$

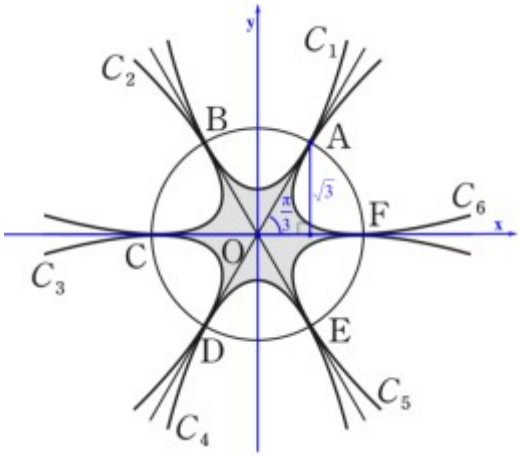
Câu 69. Cho đường tròn tâm O, bán kính bằng 2. Trên đường tròn, lấy 6 điểm chia đều đường tròn, lần lượt là A,B,C,D,E,F. Vẽ cung tròn C_1 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OA và OB, đi qua hai điểm A và B. Tương tự, vẽ cung tròn C_2 tiếp xúc với hai đoạn thẳng OB và OC, đi qua hai điểm B và C. Tiếp tục bằng cách tương tự, ta vẽ các cung tròn C_3,C_4,C_5,C_6 tiếp xúc với các cặp đoạn thẳng liên tiếp tạo bởi các điểm trên.

Hỏi: Diện tích phần được bao bởi 6 cung tròn C_1 đến C_6 là bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

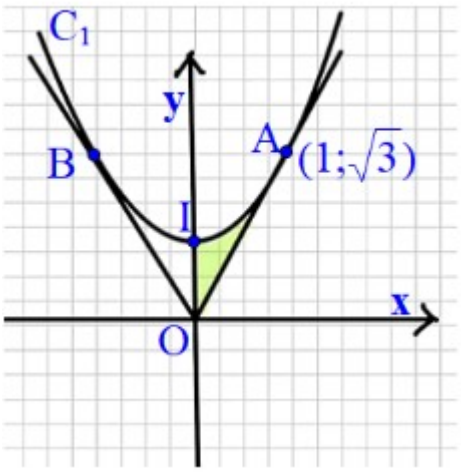
Trả lời: 3,46

Gắn hệ trục tọa độ như hình vẽ



Ta dễ có được góc $AOF=\frac{\pi}{3}$ suy ra đường thẳng $OA:y=\sqrt{3}x$ do đó điểm $A\left(1;\sqrt{3}\right)$

Để tiện tính toán: Ta xét riêng diện tích tô đậm được tạo bởi cung tròn C_1 với hai đoạn thẳng $OA;OB$



Dễ thấy được đường cong C_1 là đồ thị hàm số parabol đối xứng qua trục Oy. Do đó hàm số parapol đó có dạng: $y=ax^2+b$ và đồ thị hàm số này đi qua điểm A,B.

Ta có: $\begin{cases} a+b=\sqrt{3} \\ 2a=\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ b=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$. Vậy $(C_1): y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x^2+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Khi đó diện tích tô đậm được tạo bởi cung tròn C_1 với hai đoạn thẳng $OA; OB$ là:

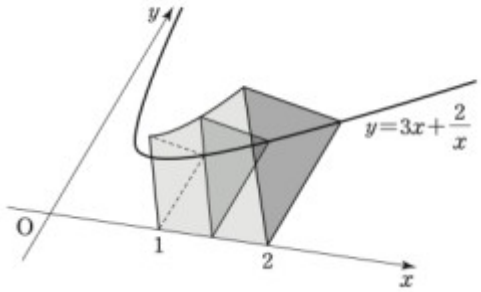
$$S_1=2\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx$$

Suy ra diện tích phần được bao bởi 6 cung tròn C_1 đến C_6 là

$$S=6S_1=12\int_0^1\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-\sqrt{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)dx=2\sqrt{3}\approx 3,46$$

Câu 70. Cho khối V có đáy là miền phẳng bị giới hạn bởi:

- Đồ thị hàm số $y=3x+\dfrac{2}{x}, x>0$
- Trục Ox
- Hai đường thẳng $x=1$ và $x=2$.



Khi đó, mỗi tiết diện của khối V cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox đều là một tam giác đều.

Hỏi: Thể tích của khối V bằng bao nhiêu? (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

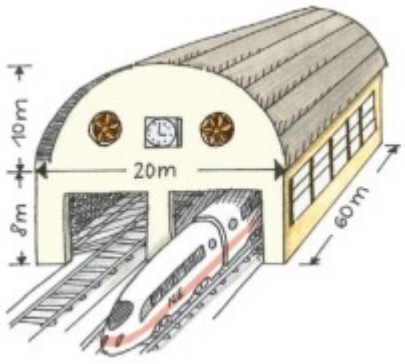
Lời giải

Trả lời: 15

Diện tích của tam giác đều là $S(x)=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(9x^2+12+\dfrac{4}{x^2}\right)$

Vậy $V=\int_1^2 S(x)dx=\int_1^2\frac{\sqrt{3}}{4}\left(9x^2+12+\frac{4}{x^2}\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(3x^3+12x-\frac{4}{x}\right)\Big|_1^2=\frac{35\sqrt{3}}{4}\approx 15$

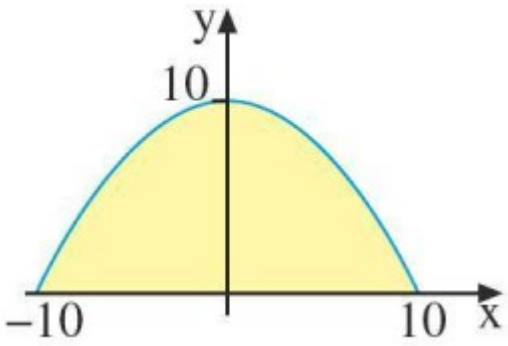
Câu 71. Một sảnh ga có thông số như hình dưới, được thông gió bằng hai quạt, mỗi quạt có lưu lượng khoảng $80\,m^3/$ phút.



Hỏi: Cần bao nhiêu phút để trao đổi toàn bộ không khí trong sảnh? Mái sảnh là kết cấu gỗ dạng parabol.

Trả lời: 110

Chọn hệ trục tọa độ Oxy như hình (trục Ox ngang, trục Oy thẳng đứng).



- Phương trình parabol của mái

Gọi $y = f(x) = ax^2 + c$.

Điều kiện:

- $f(0) = 10 \Rightarrow c = 10$.
- $f(10) = 0$ (vì nửa bề rộng sảnh là 10 m)

$\Rightarrow a \cdot 10^2 + 10 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{10}$.

Vậy $y = f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 10$

- Diện tích tiết diện ngang của sảnh

Tiết diện gồm hai phần:

- HCN đáy: $20 \times 8 = 160\,m^2$.
- Phần dưới parabol phía trên trục Ox (lấy đối xứng hai bên):

$$S_1 = 2\int_0^{10} f(x)dx = 2\left[-\frac{1}{30}x^3 + 10x\right]\Big|_0^{10} = 2\left(-\frac{1000}{30} + 100\right) = 133,3\,m^2$$

Tổng diện tích mặt trước: $S = 160 + 133,3 = 293,3\,m^2$

- Thể tích không khí của sảnh

Chiều dài sảnh $= 60\,m$,

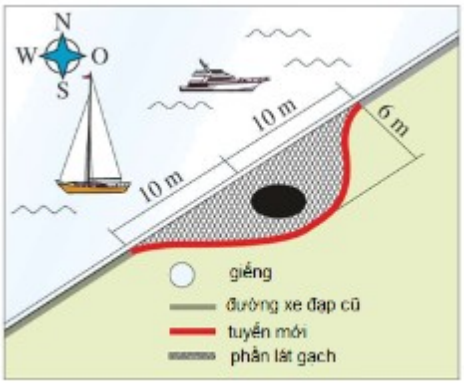
$V = S \cdot 60 = 293,3 \cdot 60 \approx 17600\,m^3$.

- Thời gian trao đổi hết không khí

Hai quạt: $v = 2 \cdot 80 = 160\,m^3$ / phút.

Thời gian: $t = \frac{V}{v} = \frac{17600}{160} = 110$ phút

Câu 72. Dọc bờ nước có một đường xe đạp. Trên một đoạn dài 20 m, người ta muốn thay bằng tuyến mới đi vòng một cái giếng (đường kính 2 m). Các đoạn nối phải trơn (chuyển tiếp êm).

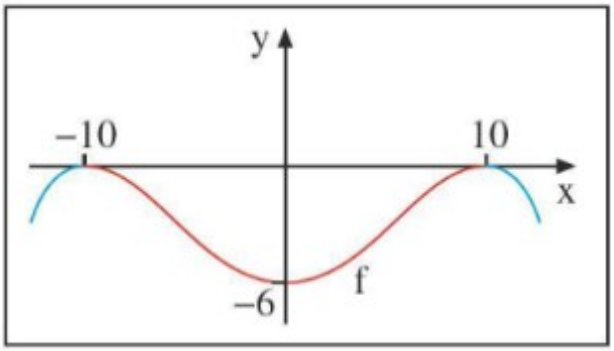


Diện tích phần tô màu cần lát giữa bờ và tuyến mới là bao nhiêu mét vuông (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)

Lời giải

Trả lời: 61

1) Chọn mô hình hàm



Đặt hệ trục Oxy thuận tiện như hình; do hình dạng đối xứng qua trục Oy và cần chuyển tiếp trơn vào trục Ox, ta chọn đa thức bậc 4: $f(x)=ax^4+bx^2+c,\quad f'(x)=4ax^3+2bx$

Các điểm đặc trưng:

- Điểm thấp nhất $T(0;-6)$.
- Đỉnh phải $H(10;0)$ (chuyển tiếp trơn vào trục Ox); đỉnh trái đối xứng.

Suy ra các điều kiện:

$f(0)=-6\Rightarrow c=-6$,

$f'(0)=0$ (đúng do đối xứng),

$f(10)=0\Rightarrow 10000a+100b-6=0$,

$f'(10)=0\Rightarrow 4000a+20b=0$.

Giải hệ: $a=-0,0006, b=0,12, c=-6$.

Vậy $f(x)=-0,0006x^4+0,12x^2-6$

2) Diện tích phần lát

Diện tích nửa phải (từ 0 đến 10) được cho bởi tích phân:

$$A_1=\int_0^{10} f(x)dx=\left[-0,00012x^5+0,04x^3-6x\right]\Big|_0^{10}$$
$$=-12+40-60=-32$$

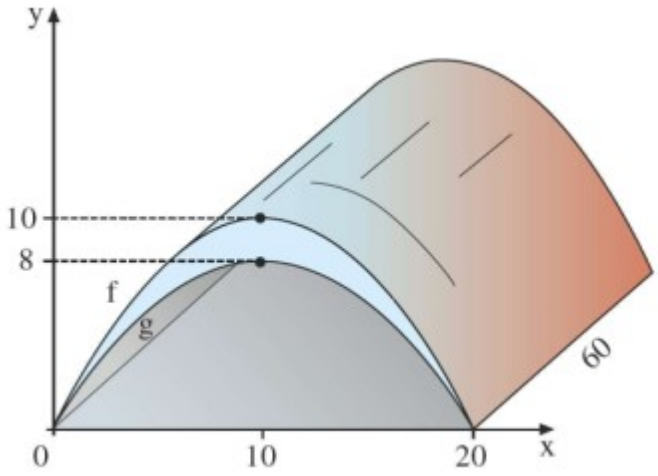
Giá trị âm chỉ do quy ước phía dưới trục Ox; nửa diện tích là $32\,m^2$.

Đối xứng qua $Oy\Rightarrow$ tổng diện tích hình tô (chưa trừ giếng): $A=2\cdot 32=64\,m^2$.

Trừ diện tích miệng giếng (bán kính $r=1m$): $S_g=\pi r^2\approx 3,14\,m^2$.

Vậy diện tích cần lát: $S_{\text{lát}}=64-3,14\approx 61\,m^2$.

Câu 73. Mái của một nhà thi đấu rộng 20 m và dài 60 m được kéo theo dạng vòm parabol. Hỏi thể tích không khí tăng thêm là bao nhiêu mét khối nếu chọn chiều cao đỉnh mái 10 m thay vì phương án ban đầu 8 m ?



Lời giải

Trả lời: 1600

Ta chỉ cần tính diện tích phần chênh lệch giữa hai đường mái (mới và cũ) trong mặt cắt ngang, rồi nhân với chiều dài 60 m để ra thể tích tăng.

1) Xác định phương trình hai parabol

Giả sử (trong hệ trục như hình) parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$.

- Với mái cao 10 m:

Điều kiện: $f(0) = 0, f(10) = 10, f(20) = 0$.

Giải hệ thu được $a = -\frac{1}{10}, b = 2, c = 0$.

$$f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 2x$$

- Với mái cao 8 m:

Điều kiện: $g(0) = 0, g(10) = 8, g(20) = 0$.

Giải ra $a = -\frac{2}{25}, b = \frac{8}{5}, c = 0$.

$$g(x) = -\frac{2}{25}x^2 + \frac{8}{5}x.$$

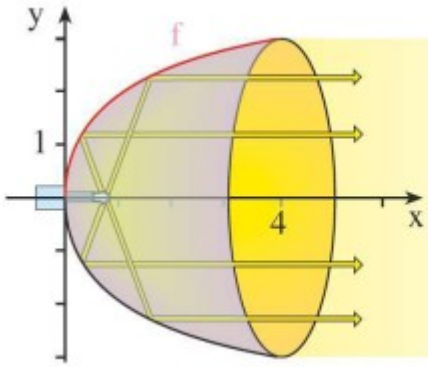
2) Diện tích phần chênh lệch trong mặt cắt

$$A = \int_0^{20} \left(f(x) - g(x) \right) dx = \int_0^{20} \left(-\frac{1}{50}x^2 + \frac{2}{5}x \right) dx = \left[-\frac{1}{150}x^3 + \frac{1}{5}x^2 \right]_0^{20} = \frac{80}{3} m^2$$

3) Thể tích tăng thêm $V = A \cdot 60 = \frac{80}{3} \cdot 60 = 1600\, m^3.$

Kết luận: Chọn mái cao 10 m thay vì 8 m làm thể tích không khí tăng thêm $1600\, m^3$.

Câu 74. Một đèn pha dạng parabol có đường biên (mặt cắt) cho bởi $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$



Chiều dài chóa là 4 cm. Hỏi: thể tích không khí bên trong là bao nhiêu cm^3? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 56,6

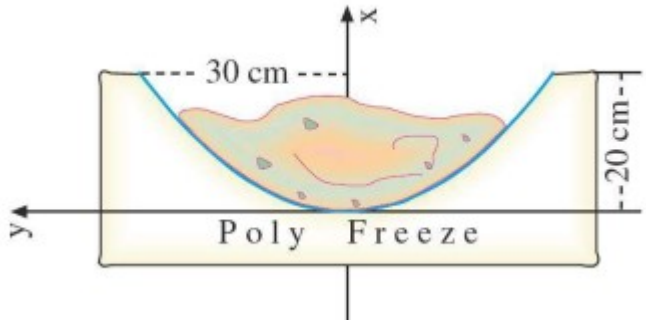
Thể tích khối tròn xoay quanh trục Ox :

$$V = \pi\int_0^4 (f(x))^2 dx = \pi\int_0^4 \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}\right)^2 dx = \pi\int_0^4 \frac{9}{4}x dx$$

$$= \pi\left[\frac{9}{8}x^2\right]\Big|_0^4 = \pi\cdot\frac{9}{8}\cdot 16 = \pi\cdot 18 \approx 56,6 cm^3$$

Ghi chú: Nếu quay đồ thị quanh trục thẳng đứng thay vì trục Ox, ta cũng tính được thể tích khối tròn xoay, nhưng cần chọn hệ trục sao cho trục Ox hướng lên trên.

Câu 75. Một thùng làm kem có mặt cắt dạng parabol như hình. Biết phương trình đường biên có dạng $f(x) = a\sqrt{x}$, hỏi dung tích của thùng bằng bao nhiêu lít.



Lời giải

Trả lời: 28,3

$$f(20) = 30 \Rightarrow a\sqrt{20} = 30 \Rightarrow a = \frac{15}{\sqrt{5}} = 3\sqrt{5}$$

Từ hình vẽ: .

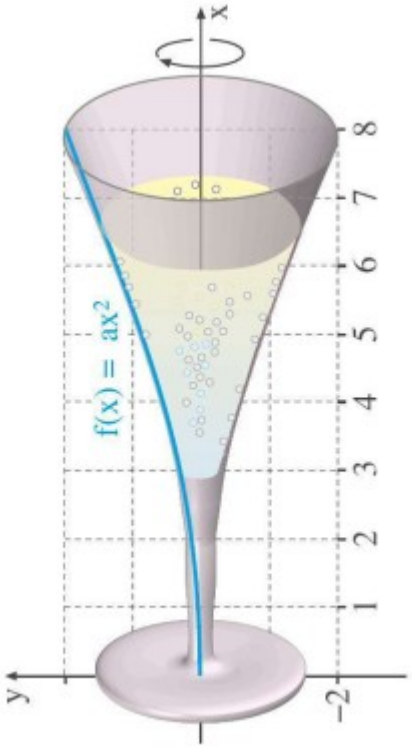
Vậy $f(x) = 3\sqrt{5}\sqrt{x}$.

Thể tích khối tròn xoay:

$$V = \pi\int_0^{20} (f(x))^2 dx = \pi\int_0^{20} (3\sqrt{5})^2 x dx = \pi\int_0^{20} 45x dx$$

$$= \pi\cdot\left[\frac{45}{2}x^2\right]\Big|_0^{20} = \pi\cdot 9000 \approx 28274,33 cm^3 \approx 28,3 \text{ lít.}$$

Câu 76. Ly ở hình dưới chứa được bao nhiêu thể tích (đơn vị cm^3). Biết đường bao mép ly là một parabol bậc hai dạng $f(x) = ax^2$. Lưu ý: trục Ox hướng lên trên. (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



Xác định phương trình parabol

Từ hình thấy điểm $P(8;2)$ nằm trên parabol, nên $f(8)=2 \Rightarrow 64a=2 \Rightarrow a=\frac{1}{32}$.

Vậy $f(x)=\frac{1}{32}x^2$.

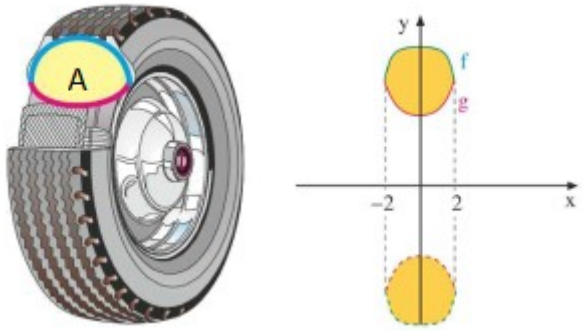
Tính thể tích khối tròn xoay

Mực chất lỏng trải từ $x=3$ đến tối đa $x=8$. Thể tích chất lỏng trong ly là

$$V = \pi\int_3^8 (f(x))^2 dx = \pi\int_3^8 \left(\frac{1}{32}x^2\right)^2 dx = \pi\int_3^8 \frac{1}{1024}x^4 dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{5120}x^5\right]\Big|_3^8 \approx 20\,cm^3$$

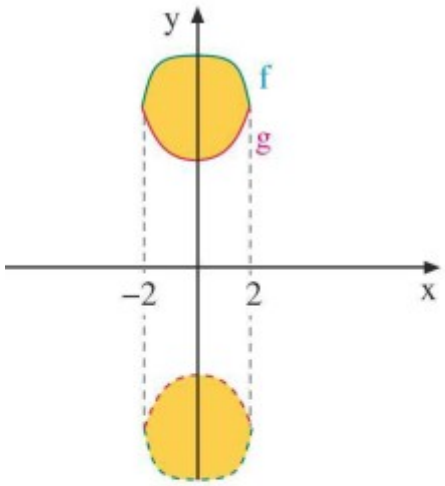
Câu 77. Không khí trong lốp có thể xem là một vật thể thu được khi quay tiết diện của lốp quanh trục Ox. Bên dưới là miền A bị chặn phía trên bởi $f(x)=-\frac{1}{16}x^4+4$ và phía dưới bởi $g(x)=\frac{1}{4}x^2+2$ trên đoạn $[-2;2]$. Khi quay miền A quanh trục Ox, ta được thể tích không khí trong lốp. Hãy tính thể tích đó bằng bao nhiêu dm^3 (làm tròn kết quả đến hàng đơn vị)



(Quy ước: 1 đơn vị $=1dm$.)

Lời giải

Trả lời: 113



1. Thể tích V_f do đường biên trên quay quanh trục x:

$$V_f = \pi\int_{-2}^{2}(f(x))^2\,dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(-\frac{1}{16}x^4+4\right)^2 dx$$

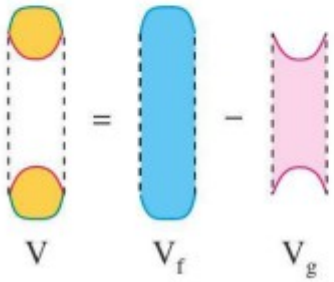
$$= \pi\left[\frac{1}{256}\frac{x^9}{9}-\frac{1}{2}\frac{x^5}{5}+16x\right]\Bigg|_{-2}^{2} \approx 182,35dm^3$$

2. Thể tích V_g do đường biên dưới quay quanh trục x:

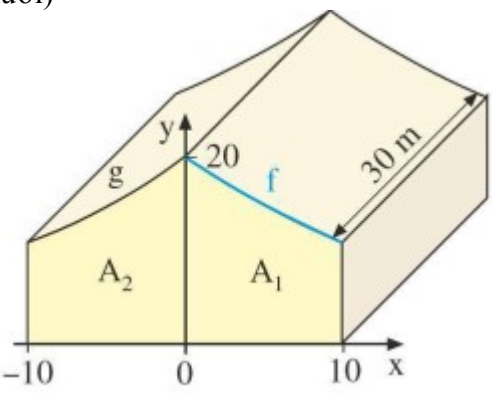
$$V_g = \pi\int_{-2}^{2}(g(x))^2\,dx = \pi\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{4}x^2+2\right)^2 dx$$

$$= \pi\left[\frac{1}{16}\frac{x^5}{5}+\frac{x^3}{3}+4x\right]\Bigg|_{-2}^{2} \approx 69,53dm^3$$

3. Thể tích không khí trong lớp (miền kẹp giữa hai đường) là hiệu: $V = V_f - V_g \approx 113dm^3$.



Câu 78. Thể tích không khí của chiếc lều hội chợ trong hình là bao nhiêu ML (megalit) (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Biết biên dạng mái lều được cho bởi hai hàm biên: $f(x) = 20\cdot e^{-\frac{1}{40}x}$, $g(x) = 20\cdot e^{\frac{1}{40}x}$

Lời giải

Trả lời: 10,6

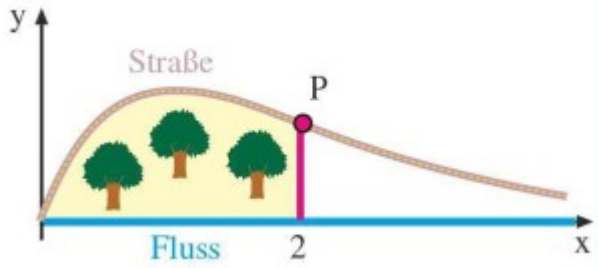
$$A_1 = \int_0^{10} 20e^{-\frac{1}{40}x}\,dx = \left[-800e^{-\frac{1}{40}x}\right]\Bigg|_0^{10} \approx 176,96\,m^2$$

Diện tích nửa phải:

Mặt cắt đối xứng nên $A = A_1 + A_2 = 2A_1 \approx 353,92\,m^2$

Thể tích không khí: $V = A\cdot 30 \approx 353,92\cdot 30 \approx 10617,6\,m^3 \approx 10,6\,\text{ML}$

Câu 79. Con đường có phương trình $f(x) = x\cdot e^{1-x}$. Con sông nằm dọc trục Ox. Miền đất trồng cây ăn quả được giới hạn bởi đồ thị của $f(x)$, trục Ox và đường thẳng đứng qua điểm P có hoành độ $x = 2$ (xem hình).



Quy ước 1 đơn vị $=100m$.

Mỗi cây cần $20m^2$. Hỏi trồng được bao nhiêu cây?

Biết $F(x)=(-1-x)e^{1-x}$ là một nguyên hàm của $f(x)$.

Lời giải

Trả lời: 805

Diện tích miền cần tính

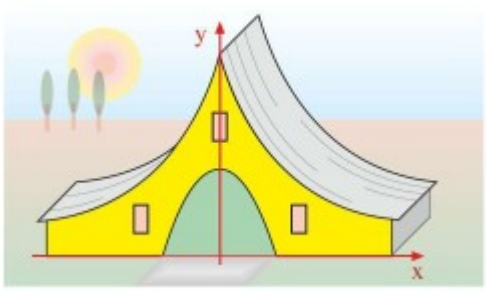
$$A = \int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 xe^{1-x}dx = \left[(-1-x)e^{1-x}\right]_0^2$$

$$= -\frac{3}{e} + e \approx 1,61$$

Đổi ra m^2: $A \approx 1,61 \cdot (100)^2 = 16100m^2$.

Số cây trồng được: $B = \frac{16100}{20} = 805$ cây.

Câu 80. Mái chùa đối xứng qua trục, có biên dạng $f(x)=6\cdot e^{-0,5x}+1, \quad 0\le x\le 6$



Cổng chùa dạng parabol, rộng 4 m và cao 3 m.

Mỗi cửa sổ kích thước $1m\times 0,5m$.

Mặt tiền phía trước của mặt sẽ được sơn màu vàng dày $0,1mm$.

Hỏi: Cần bao nhiêu lít nước sơn? (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)

Lời giải

Trả lời: 2,5

Ta cần diện tích mặt tiền trừ diện tích cổng và ba cửa sổ.

1) Diện tích mặt tiền $A_1 = 2\int_0^6 \left(6e^{-0,5x}+1\right)dx = 2\left[-12e^{-0,5x}+x\right]_0^6 \approx 34,81m^2$

2) Phương trình, diện tích cổng

Giả sử $g(x)=ax^2+b$. Điều kiện: $g(0)=3\Rightarrow b=3, g'(0)=0, g(2)=0\Rightarrow a=-\frac{3}{4}$.

Vậy $g(x)=-\frac{3}{4}x^2+3$.

Diện tích cổng: $A_2 = 2\int_0^2 \left(-\frac{3}{4}x^2+3\right)dx = 2\left[-\frac{1}{4}x^3+3x\right]_0^2 = 8m^2$

Ba cửa sổ, mỗi cái $0,5m^2 \Rightarrow 1,5m^2$.

Vậy diện tích cần sơn vàng $A = A_1 - A_2 - 1,5 = 34,81-8-1,5 = 25,31m^2$.

4) Thể tích nước sơn:

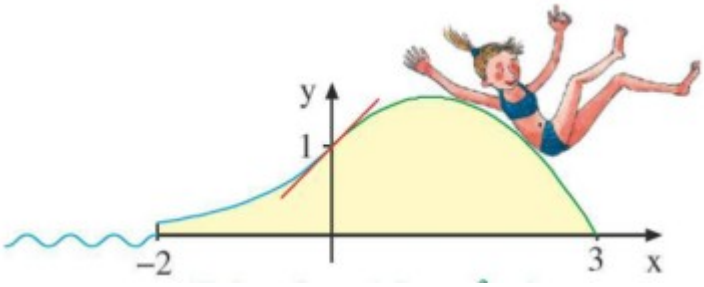
$25,31m^2 = 253100cm^2$, dày $0,1mm = 0,01cm$.

$V = A\cdot$ dày $= 253100\cdot 0,01 = 2531cm^3 (\approx 2,5$ lít $)$.

Câu 81. Ở bể bơi thành phố sẽ xây một cầu trượt nước mới. Cầu trượt dài 5 m và có thể trượt từ cả hai phía. Những người thận trọng trượt về bên trái, nơi mép trượt được cho bởi $f(x)=e^x$

Những người ưa mạo hiểm trượt về bên phải, nơi mép trượt cao và dốc hơn, mô hình bởi $g(x)=-\frac{4}{9}x^2+x+1$

Tại $x=0$ hai đường cong nối trơn với nhau (không gãy, không góc nhọn). (Đơn vị x, y tính bằng mét.)



Hai thành bên của cầu trượt được ốp nhựa. Cần bao nhiêu m^2 nhựa?

Lời giải

Trả lời: 8,75

Diện tích ốp nhựa (một bên)

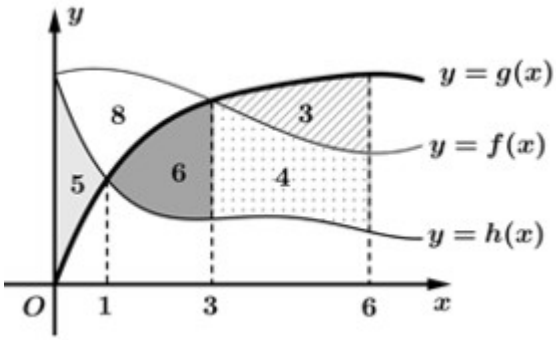
Trái: $A_t=\int_{-2}^{0}e^x dx=e^0-e^{-2}\approx 0,86\ m^2$.

Phải: $A_g=\int_0^3\left(-\frac{4}{9}x^2+x+1\right)dx=\left[-\frac{4}{27}x^3+\frac{1}{2}x^2+x\right]\Big|_0^3=3,50\ m^2$.

Tổng một bên: $A_{1\text{ bên}}=0,86+3,50=4,36\ m^2$.

Hai bên: $A=2\cdot 4,36=8,72\ m^2$.

Câu 82. Cho ba hàm số $y=f(x), y=g(x)$ và $y=h(x)$ có đồ thị như hình vẽ.



Diện tích mỗi miền được ghi bằng số trong hình.

Tính $\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^6[f(x)-g(x)]dx$

Lời giải

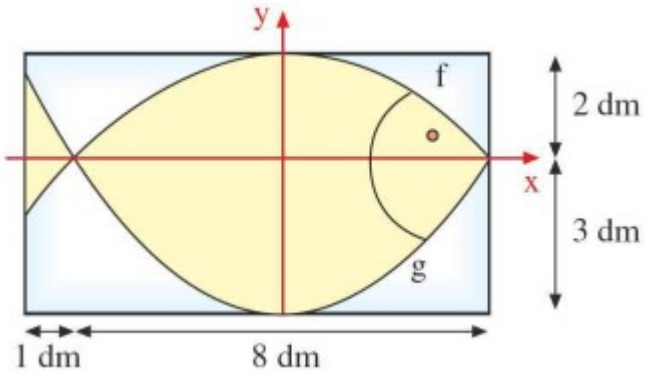
Trả lời: -3

$\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^6[f(x)-g(x)]dx$

$=\int_1^6[h(x)-g(x)]dx+\int_0^3[f(x)-g(x)]dx+\int_3^6[f(x)-g(x)]dx$

$=-(6+4+3)+(5+8)-3=-3$

Câu 83. Mac Fish muốn làm logo trong suốt dán lên cửa sổ. Nhà thiết kế đưa bản vẽ như hình. (đơn vị trên mỗi trục toạ độ là decimét). Diện tích logo là bao nhiêu dm^2. Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Lời giải

Trả lời: 28

Dựa vào đồ thị, ta có diện tích logo là diện tích được giới hạn bởi hai đường parabol $y=f(x), y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=4, x=-5$.

Quan sát đồ thị, ta thấy

+) Parabol $y=f(x)=ax^2+bx+c$ đi qua 3 điểm $A(0;2), B(4;0), C(-4;0)$

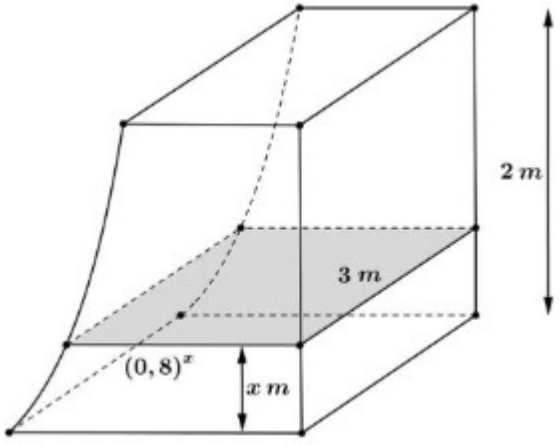
$$\Rightarrow \begin{cases} c=2 \\ 16a+4b+c=0 \\ 16a-4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=2 \\ b=0 \\ a=\dfrac{-1}{8} \end{cases} \Rightarrow f(x)=-\frac{1}{8}x^2-2$$

+) Parabol $y=g(x)=cx^2+dx+e$ đi qua 3 điểm $M(0;-3), N(4;0), E(-4;0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e=-3 \\ 16c+4d-3=0 \\ 16c-4d-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e=-3 \\ c=\dfrac{3}{16} \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow g(x)=\frac{3}{16}x^2-3.$$

Vậy diện tích logo bằng $\int_{-5}^{4}|f(x)-g(x)|\,dx=\int_{-5}^{4}\left|\frac{5}{16}x^2-5\right|dx=\frac{1345}{48}=28,02\left(dm^2\right)$

Câu 84. Một khối bê tông có chiều cao 2 mét được đặt trên mặt đất. Nếu cắt khối bê tông bởi một mặt phẳng nằm ngang và cách mặt đất x mét $(0\le x\le 2)$ thì được mặt cắt là một hình chữ nhật có chiều dài 3 m và chiều rộng bằng $(0,8)^x$ mét (tham khảo hình vẽ).



Tính thể tích (đơn vị m^3) của khối bê tông đó (làm tròn kết quả đến hàng phàn trăm).

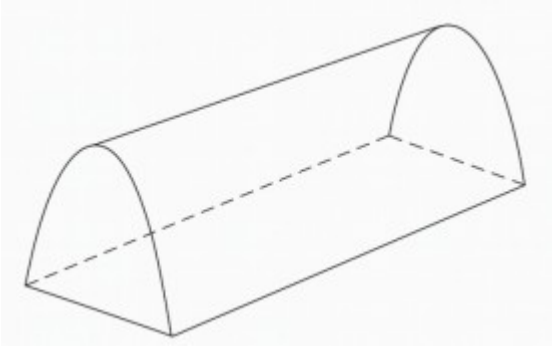
Trả lời: 4,84

Ta có diện tích của mặt cắt là $S(x)=3.0,8^x\left(m^2\right)$

Coi trục Ox là trục thẳng đứng vuông góc với mặt đất. Khi đó, ta thấy khối bê tông bị giới hạn bởi 2 mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại các điểm $x=0, x=2; S(x)$ là diện tích thiết diện của vật thể bị cắt bởi mặt phẳng vuông góc với trục Ox tại điểm $x(0\le x\le 2)$. Và $S(x)$ là hàm số liên tục trên đoạn $[a;b]$.

Vậy $V=\int_0^2 S(x)dx=\int_0^2 3\cdot 0,8^x\,dx\approx 4,84.$

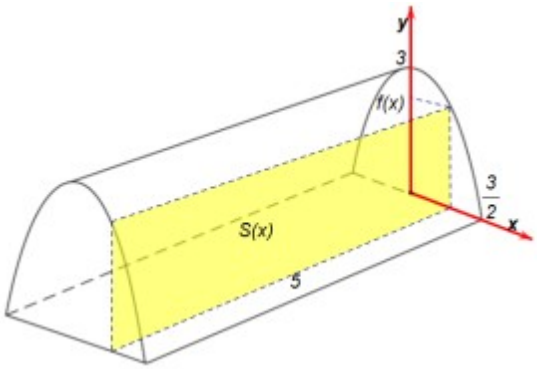
Câu 85. Nhân dịp đi dã ngoại, lớp 12A dự kiến dựng một cái trại các khung xương có dạng hình parabol như hình vẽ. Nền của lều trại là một hình chữ nhật có kích thước bề ngang 3 mét, chiều dài 5 mét, đỉnh trại cách nền 3 mét. Thể tích phần không gian bên trong lều trại bằng bao nhiêu mét khối?



Lời giải

Trả lời: 30

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, hình dạng khung trại là parabol có phương trình $y=f(x)=ax^2+bx+c$, vì đỉnh trại cao 3 m và bề ngang rộng 3 m nên parabol đi qua điểm $(0;3)$ và $\left(\frac{3}{2};0\right)$.



Ta có $:\begin{cases} b=0 \\ 3=c \\ 0=a\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^2+c \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} b=0 \\ a=-\frac{4}{3} \\ c=3 \end{cases}$

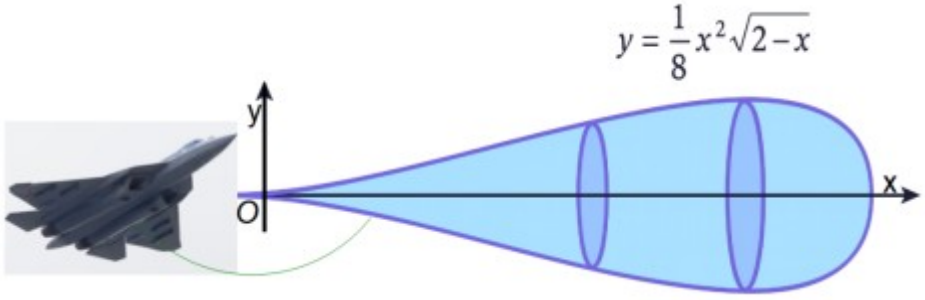
Suy ra parabol có phương trình $y=f(x)=-\frac{4}{3}x^2+3$.

Mỗi mặt phẳng vuông góc Ox tại điểm có hoành độ $x, 0\le x\le h$ cắt khối chót theo mặt cắt là hình chữ nhật có độ dài các cạnh lần lượt là 5 và $|f(x)|$, có diện tích $S(x)=5.|f(x)|$, với $-\frac{3}{2}\le x\le\frac{3}{2}$.

Vậy thể tích phần không gian trong trại là $V=\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}5.|f(x)|\,dx=5.\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}\left|-\frac{4}{3}x^2+3\right|dx=30\,m^3$.

Câu 86. Bình chứa nhiên liệu của một chiếc máy bay phản lực được mô tả trong không gian là một khối tròn xoay thu được khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=\frac{1}{8}x^2\sqrt{2-x}$ với $(0\le x\le 2)$ và

trục Ox quanh trục Ox (x tính theo đơn vị m). Thể tích của bình chứa bằng $\frac{a\pi}{b}m^3$ với $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản. Khi đó $a+b$ bằng

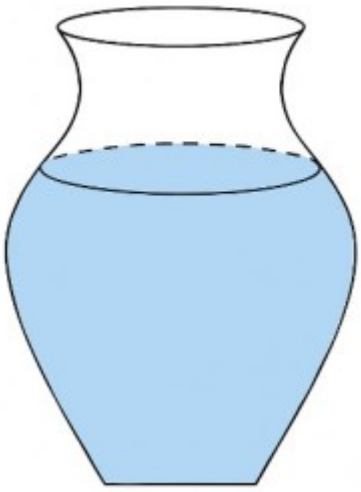


Lời giải

Trả lời: 31

Thể tích của bình chứa là $V=\int_0^2 \pi\left(\frac{1}{8}x^2\sqrt{2-x}\right)^2 dx=\frac{\pi}{30}\left(m^3\right)$. Do đó, $a=1$ và $b=30$ nên $a+b=31$.

Câu 87. Một bình hoa có dạng khối tròn xoay với chiều cao là 25 cm (tham khảo hình vẽ). Khi cắt bình hoa theo một mặt phẳng vuông góc với trục của nó thì ta luôn được thiết diện là một hình tròn có bán kính $R=\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}(dm)$ với $x\in\left[0;\frac{5}{2}\right]$ là khoảng cách từ mặt cắt tới mặt đáy của bình hoa (tính theo đơn vị dm). Lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình chiếm tỉ lệ bao nhiêu phần trăm so với thể tích của bình hoa? (Kết quả làm tròn đến hàng đơn vị).



Lời giải

Trả lời: 92

Diện tích của mặt cắt vuông góc với trục tại vị trí cách mặt đáy của bình hoa một khoảng $x(dm)$ là:

$$S(x)=\pi R^2=\pi\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}\right)^2\left(dm^2\right)$$

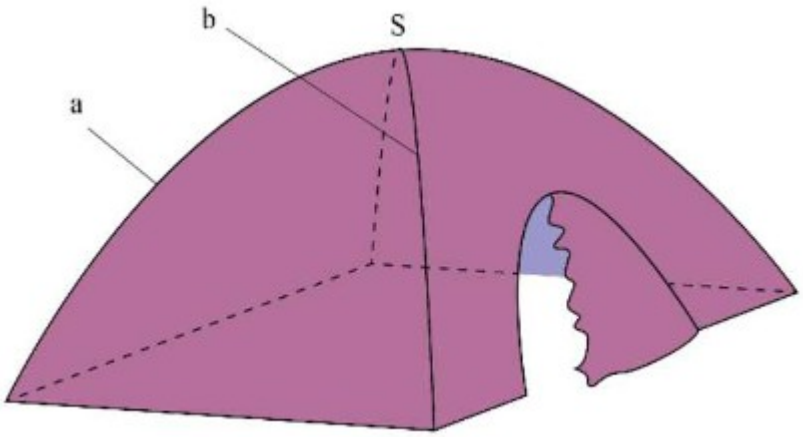
Lượng nước đổ đầy bình hoa là: $V=\int_0^{\frac{5}{2}}S(x)dx=\pi\int_0^{\frac{5}{2}}\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}\right)^2dx\approx 3,66\left(dm^3\right)$

Lượng nước đổ vào bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình là:

$$V_1=\int_0^{\frac{5}{3}}S(x)dx=\pi\int_0^{\frac{5}{3}}\left(\frac{4}{9}x^3-\frac{5}{3}x^2+\frac{4}{3}x+\frac{25}{36}\right)^2dx\approx 3,37\left(dm^3\right)$$

Vậy tỉ lệ phần trăm lượng nước cần đổ vào bình để mức nước trong bình cao bằng $\frac{2}{3}$ chiều cao của bình so với thể tích của bình hoa là $\frac{V_1}{V}\cdot 100$.

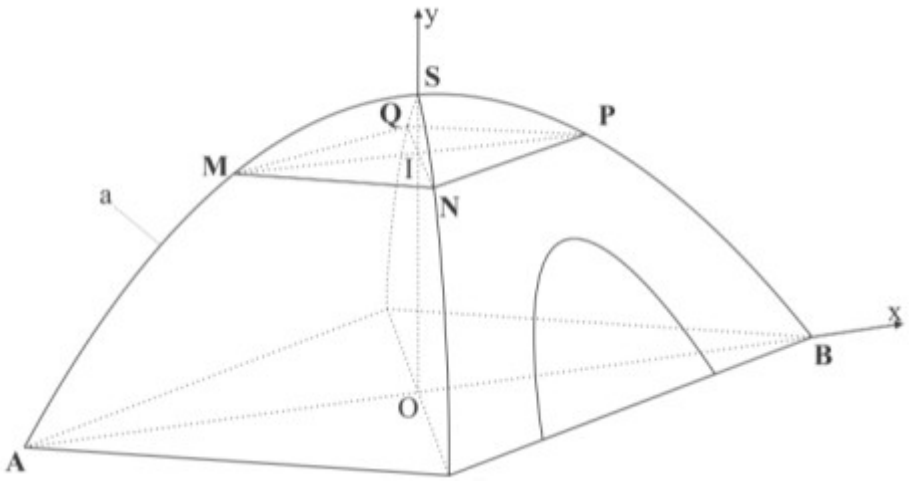
Câu 88. Một chiếc lều vải du lịch dạng hình cong như hình vẽ. Khung chính bao gồm đáy là hình vuông cạnh 2 m và hai xương dây a, b nằm trên các đường parabol đỉnh S. Biết chiều cao của lều là $SO = 1,35\,m, O$ là tâm của đáy. Tính thể tích chiếc lều theo đơn vị m^3. Viết kết quả dưới dạng số thập phân.



Lời giải

Trả lời: 2,7.

Gắn hệ trục như hình vẽ.



Ta tính được $OA = OB = \sqrt{2}$.

Gọi phương trình của đường thẳng a là $y = ax^2 + bx + c, \quad (a < 0)$.

Ta có a đi qua các điểm $A(-\sqrt{2};0), B(\sqrt{2};0), S\left(0;\frac{27}{20}\right)$.

Suy ra ta có hệ $\begin{cases} 2a - \sqrt{2}b + c = 0 \\ 2a + \sqrt{2}b + c = 0 \\ c = \frac{27}{20} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{27}{40} \\ b = 0 \\ c = \frac{27}{20} \end{cases} \Rightarrow y = -\frac{27}{40}x^2 + \frac{27}{20}$.

Gọi $I(0;y), y \in \left[0;\frac{27}{20}\right)$.

Mặt phẳng vuông góc Oy tại I cắt hình đa cho theo 1 thiết diện là hình vuông $MNPQ$ có diện tích $S(y)$.

Theo giả thiết trên các điểm M,N,P,Q cùng có tung độ bằng y. Mà hai điểm M,P thuộc đường a có phương trình $y=-\frac{27}{40}x^2+\frac{27}{20}$.

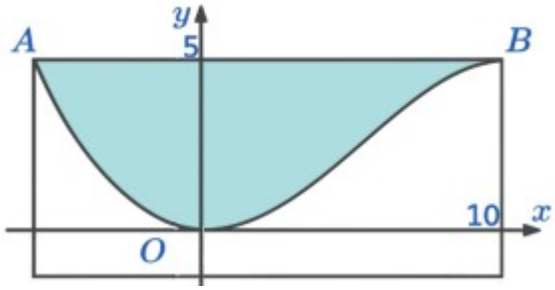
Suy ra

$$x^2=\frac{54-40y}{27}\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{54-40y}}{3\sqrt{3}}\Rightarrow M\left(-\frac{\sqrt{54-40y}}{3\sqrt{3}};y\right),P\left(\frac{\sqrt{54-40y}}{3\sqrt{3}};y\right)\Rightarrow MP=\frac{2\sqrt{54-40y}}{3\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow MN=\frac{\sqrt{108-80y}}{3\sqrt{3}}\Rightarrow S(y)=MN^2=\frac{108-80y}{27}.$$

Suy ra thể tích chiếc lều là $V=\int_0^{\frac{27}{20}}S(y)dy=\int_0^{\frac{27}{20}}\frac{108-80y}{27}dy=2,7\left(m^3\right)$.

Câu 89. Hình bên minh hoạ mặt cắt đứng của một con kênh đặt trong hệ trục toạ độ Oxy. Đáy của con kênh là một đường cong AOB cho bởi hàm số bậc ba có dạng $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$. Hãy tính diện tích hình phẳng tô đậm trong hình vẽ, biết đơn vị trên mỗi trục tọa độ là mét và đồ thị hàm số $y=f(x)$ nhận gốc toạ độ O và điểm B là các điểm cực trị. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị của m^2.



Trả lời: 42

Hàm số $y=f(x)=ax^3+bx^2+cx$ mà $f'(0)=0\Rightarrow c=0$

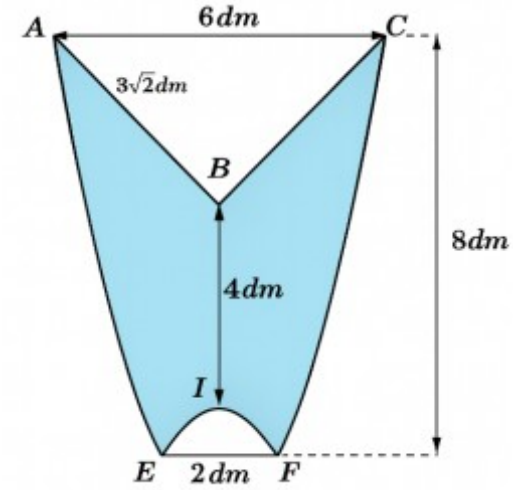
$$\begin{cases}f'(10)=300a+20b=0\\f(10)=5\Leftrightarrow 1000a+100b=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{-1}{100}\\b=\frac{3}{20}\end{cases}$$

Mặt khác

$$f(x)=\frac{-1}{100}x^3+\frac{3}{20}x^2=5\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-5\\x=10\end{array}\right.\Rightarrow S=\int_{-5}^{10}[5-f(x)]dx\approx 42m^2$$

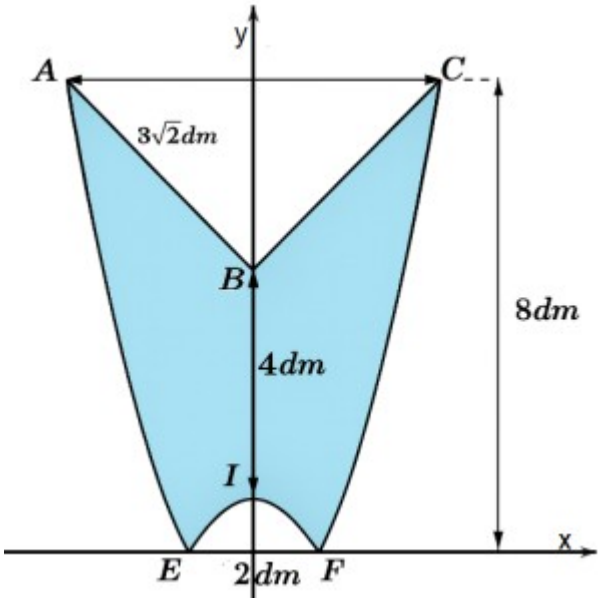
Do đó.

Câu 90. Ông A làm một logo bằng tấm nhựa phẳng, có hình dạng là một hình có trục đối xứng. Biết đường viền AE,CF ở hai bên là hai nhánh của một parabol và phần lõm EIF phía dưới đáy cũng là một parabol, hai nhánh phía trên là hai đoạn thẳng như hình bên dưới. Cho biết $AC=6dm, AB=3\sqrt{2}dm, EF=2dm$ và khoảng cách giữa AC và EF bằng 8 dm. Hỏi diện tích của logo đó bằng bao nhiêu dm^2. Viết kết quả dưới dạng số thập phân. Viết kết quả làm tròn đến hàng phần mười.



Trả lời: 24,3

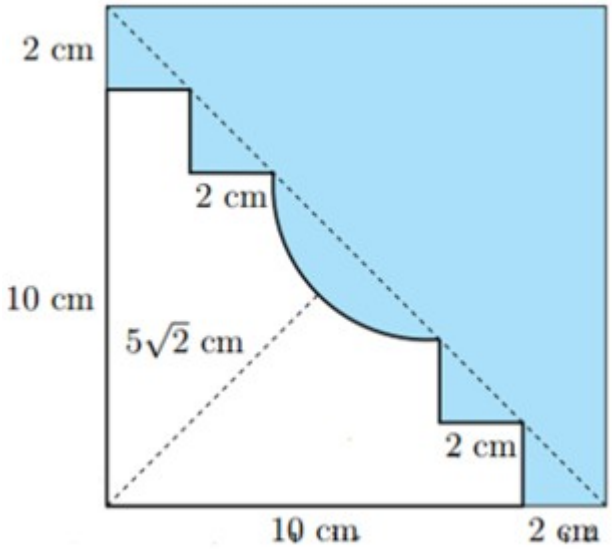
Xét hệ toạ độ Oxy như hình vẽ.



Khi đó nửa bên phải trục tung là hình phẳng (H) giới hạn bởi các đường: $y=x^2-1, y=x+5, y=-x^2+1, x=0$

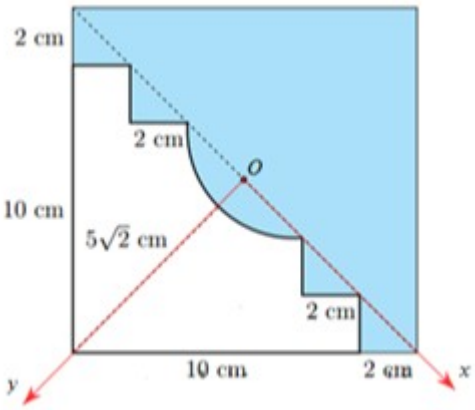
Ta có: $S=2S_H=2\left(\int_0^1\left[x+5-\left(1-x^2\right)\right]dx+\int_1^3\left[x+5-\left(x^2-1\right)\right]dx\right)\approx 24,33\,dm^2$.

Câu 91. Từ một miếng tôn hình vuông, người thợ làm chậu cảnh đã tạo mẫu và cắt đi phần hình phẳng không tô đậm trên hình, phần tô đậm được giữ lại làm khuôn quay thành các đôn để đặt các chậu hoa. Tính diện tích hình phẳng đã bị cắt bỏ (đơn vị cm^2) biết đường cong trong hình là một parabol có đỉnh nằm trên đường chéo của hình vuông (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Trả lời: 58,7

Chọn hệ trụ như hình vẽ suy ra phương trình Parabol có dạng $y = a(x-2\sqrt{2})(x+2\sqrt{2})$.

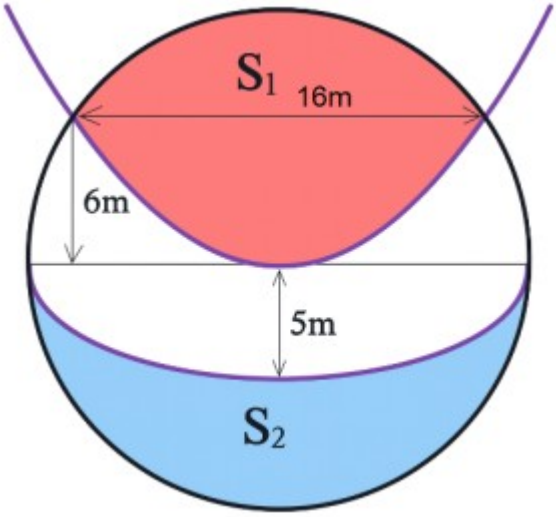


Đỉnh Parabol có tọa độ là $(0;\sqrt{2})$ thuộc Parabol suy ra $a = -\dfrac{1}{4\sqrt{2}}$.

Diện tích phần Parabol là $\dfrac{1}{4\sqrt{2}}\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}}\left(8-x^2\right)dx = \dfrac{16}{3}$

Diện tích cần tìm là $S = \dfrac{12^2}{2} - 4.2 - \dfrac{16}{3} = \dfrac{176}{3} cm^2$. Chọn **D**.

Câu 92. Khu vườn nhà ông Ba có dạng hình tròn, bán kính 10 m. Ông Ba dự định trồng hoa Hồng ở khu vực S_1 và hoa Ly ở khu vực hình bán nguyệt S_2. Với S_1 là phần diện tích giới hạn bởi đường parabol đi qua tâm hình tròn và S_2 là phần diện tích giới hạn bởi nửa đường elip không chứa tâm hình tròn (kích thước như hình vẽ). Biết rằng kinh phí trồng hoa Hồng là 100.000 đồng/ m^2, kinh phí trồng hoa Ly là 150.000 đồng $/m^2$. Hỏi ông Ba phải mất bao nhiêu triệu đồng để trồng hoa lên hai dải đất đó (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Lời giải

Trả lời: 22,7

Phương trình parabol đi qua tâm hình tròn là $y=\frac{3}{32}x^2$ và phương trình đường tròn là $x^2+y^2=100$.

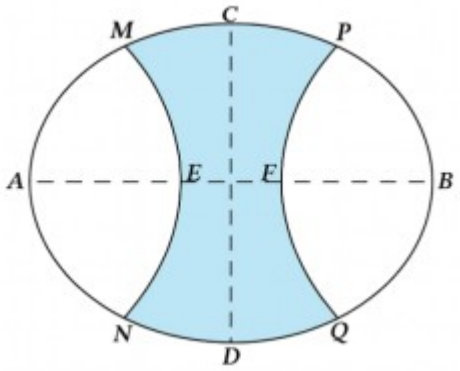
Diện tích dải đất trồng hoa Hồng là diện tích hình phẳng được giới hạn bởi parabol (P), hình tròn (C) và hai đường thẳng $x=-8, x=8$. Khi đó $S_1=\int_{-8}^{8}\left|\sqrt{100-x^2}-\frac{3x^2}{32}\right|dx \xrightarrow{\text{casio}} S_1=108,73\,m^2$.

Xét nữa hình tròn chứa hình bán nguyệt, ta thấy nữa hình tròn tạo bởi hình bán nguyệt và nữa hình elip với hình elip có độ dài hai bán trục $a=5, b=10 \Rightarrow S_{(E)}=\pi ab=50\pi\,m^2$.

Vậy diện tích hình bán nguyệt là $S_2=\frac{S_{(C)}-S_{(E)}}{2}=\frac{10^2\pi-50\pi}{2}=25\pi\,m^2$.

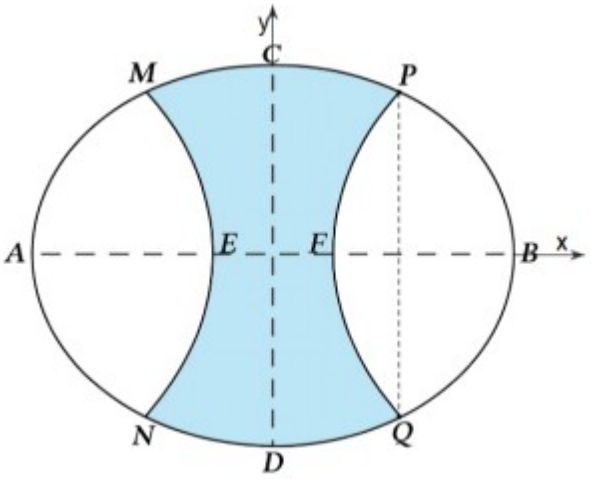
Tổng số tiền ông Ba cần phải chi để trồng hoa là $T=100000S_1+150000\cdot S_2\approx 22,7$ triệu đồng.

Câu 93. Vườn hoa của một trường học có hình dạng được giới hạn bởi một đường elip có bốn đỉnh A,B,C,D và hai đường parabol có các đỉnh lần lượt là E,F (phần tô đậm của hình vẽ). Hai đường parabol có cùng trục đối xứng AB, đối xứng nhau qua trục CD, hai parabol cắt elip tại các điểm M,N,P,Q. Biết $AB=8\,m, CD=6\,m, MN=PQ=3\sqrt{3}\,m, EF=2\,m$. Chi phí để trồng hoa trên vườn là $300.000/m^2$. Hỏi số tiền trồng hoa cho cả vườn là bao nhiêu triệu đồng. Kết quả làm tròn đến hàng phần trăm



Trả lời: 4,81

Chọn hệ trục tọa độ với gốc tọa độ là trung điểm của EF (xem hình vẽ)



Khi đó (E) có độ dài trục lớn $AB = 2a = 8 \Rightarrow a = 4$

Độ dài trục bé $CD = 2b = 6 \Rightarrow b = 3$.

Phương trình (E) là: $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

Parabol có phương trình $x = my^2 + 1$ (vì điểm $F(1;0)$)

Do $PQ = 3\sqrt{3} \Rightarrow P\left(x_0; \frac{3\sqrt{3}}{2}\right)(x_P > 0)$, mà $P \in (E)$ nên ta có: $\frac{x_0^2}{16} + \frac{\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2}{9} = 1 \Rightarrow x_0 = 2$

Mặt khác Parabol đi qua $P \Rightarrow 2 = a \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 1 \Rightarrow a = \frac{4}{27}$.

Xét phần hình phẳng thuộc góc phần tư thứ nhất khi đó đường cong (E) có phương trình $x = 4\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$

Parabol có phương trình $x = \frac{4}{27}y^2 + 1$

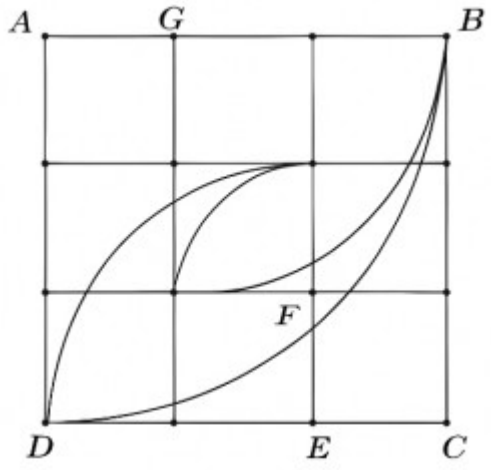
Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = 0, y = 3\sqrt{3}, x = 4\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$ và $x = \frac{8}{27}y^2$ là:

$$S_1 = \int_0^{3\sqrt{3}} \left(4\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} - \frac{4y^2}{27} - 1\right) dy$$

Diện tích elip là: $S = \pi ab = 12\pi$.

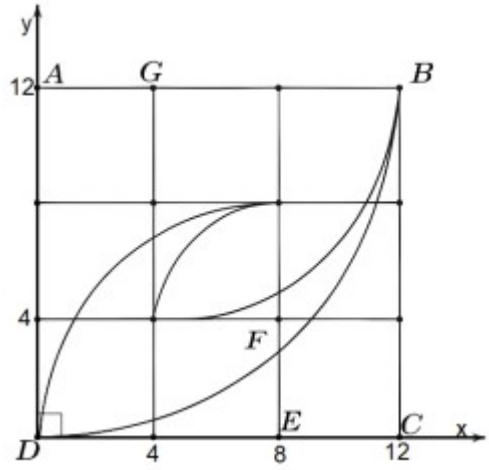
Diện tích phần tô đậm là: $S_T = S - 4S_1 \xrightarrow{CASIO} S_{(T)} \approx 16,03 m^2 \Rightarrow T = 300.000 S_{(T)} \approx \mathbf{4,81}$ triệu đồng.

Câu 94. "Bài toán tính diện tích hình càng cua". Từ bảng gỗ hình vuông $ABCD$ độ dài cạnh 12 cm, người ta chia hình vuông này thành 9 hình vuông nhỏ bằng nhau rồi vẽ một hình càng cua được giới hạn bởi các cung phần tư của các đường tròn tâm A, E, F, G (xem hình vẽ). Tính diện tích hình càng cua theo đơn vị cm^2 (phần tô đậm trong hình vẽ). Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Lời giải

Điền đáp án: 37



Đặt hệ trục tọa độ như hình vẽ ta có tọa độ các điểm: $A(0;12);B(12;12);C(12;0);D(0;0);E(8;0);G(4;12);F(8;4)$

Phương trình đường tròn tâm A có bán kính $R=12$

$(C_A):x^2+(y-12)^2=144\Rightarrow y=12-\sqrt{144-x^2}$

Phương trình đường tròn tâm E có bán kính $R=8$

$(C_E):(x-8)^2+y^2=64\Rightarrow y=\sqrt{64-(x-8)^2}$

Phương trình đường tròn tâm G có bán kính $R=8$

$(C_G):(x-4)^2+(y-12)^2=64\Rightarrow y=12-\sqrt{64-(x-4)^2}$

Phương trình đường tròn tâm F có bán kính $R=4$

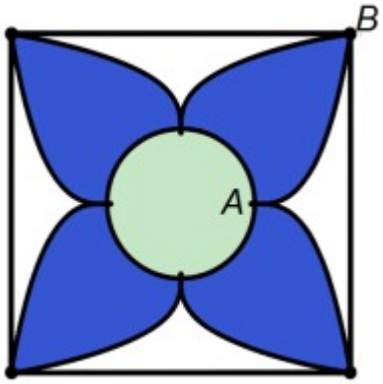
$(C_F):(x-8)^2+(y-4)^2=16\Rightarrow y=4+\sqrt{16-(x-8)^2}$

$$S=\int_0^4\left(\sqrt{64-(x-8)^2}-12+\sqrt{144-x^2}\right)dx+\int_4^8\left(\sqrt{64-(x-8)^2}-4-\sqrt{16-(x-8)^2}\right)dx$$

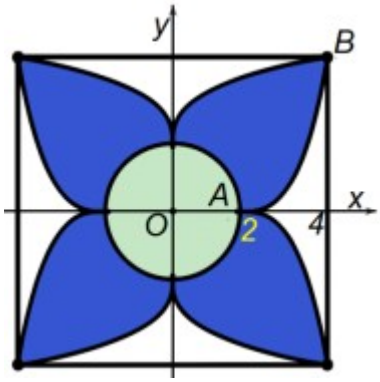
$$+\int_4^{12}\left(12-\sqrt{64-(x-4)^2}-12+\sqrt{144-x^2}\right)dx$$

≈ 37

Câu 95. Vào ngày 8/3, từ một tấm bìa hình vuông cạnh $8(dm)$, An dùng các đồ thị của hàm số $y=f(x)$ và $x=f(y)$ để vẽ hoa tặng mẹ, nhụy hoa được vẽ bằng đường tròn có tâm là tâm hình vuông và bán kính bằng $2(dm)$. Khi đặt trong hệ tọa độ Oxy thì điểm $A(2;0)$ và đường cong AB là một phần của đồ thị hàm đa thức bậc ba $y=f(x)=\frac{1}{2}x^3+ax^2+bx+c$. Biết rằng tỷ lệ phần tô đậm chiếm $\frac{3}{4}$ diện tích hình vuông. Tính abc.



Trả lời: 72.



Diện tích hình vuông của hình vẽ là: $8.8 = 64\left(dm^2\right)$

Dựa vào đồ thị hình vẽ ta có: $A(2;0); B(4;4)$.

Lại có $y = f(x) = \frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c$ đi qua $A(2;0); B(4;4)$ nên ta có:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cdot 8 + a\cdot 4 + b\cdot 2 + c = 0 \\ \frac{1}{2}\cdot 64 + a\cdot 16 + b\cdot 4 + c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b + c = -4 \\ 16a + 4b + c = -28 \end{cases} \quad (1)$$

Ta có diện tích phần trắng là $8.\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c\right)dx$

Vậy diện tích phần in đậm là: $S_{indam} = S_{hv} - S_{ptrang} = 64 - 8\cdot\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c\right)dx$

Theo bài cho ta có: $\frac{S_{indam}}{S_{hv}} = \frac{64 - 8\cdot\int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c\right)dx}{64} = \frac{3}{4}$

$$\Rightarrow \int_2^4 \left(\frac{1}{2}x^3 + ax^2 + bx + c\right)dx = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{3}ax^3 + \frac{1}{2}bx^2 + cx\Big|_2^4 = 2$$

$$\Leftrightarrow 30 + \frac{56}{3}a + 6b + 2c = 2(2)$$

Từ (1) (2) suy ra: $\begin{cases} a = -3 \\ b = 6 \\ c = -4 \end{cases}$.

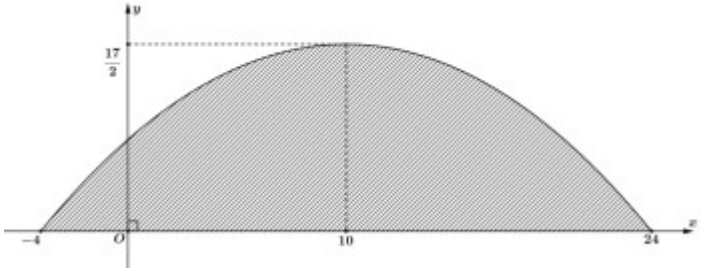
Vậy $abc = 72$.

Câu 96. Một quả bóng bầu dục theo quy định được sử dụng trong giải bầu dục quốc gia có kích thước $28(cm)$ từ đầu này đến đầu kia và đường kính $17(cm)$ ở phần dày nhất (quy định có phép thay đổi một chút về các kích thước này) (Nguồn: NFL).

Hình dạng của một quả bóng bầu dục có kích thước nói trên có thể được tạo thành khi quay phần diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$, trục hoành và các đường thẳng $x=-4; x=24$, trong đó x tính bằng centimet (cm). Thể tích (đơn vị: cm^3, kết quả làm tròn đến hàng đơn vị) của quả bóng bầu dục có kích thước nói trên bằng bao nhiêu?

Lời giải

Trả lời: 3390

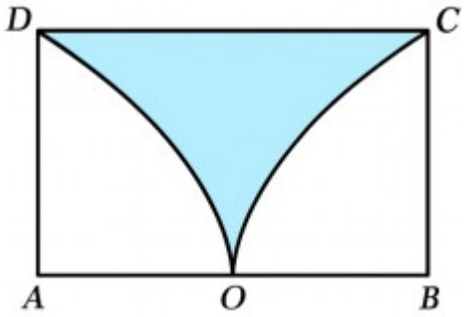


Ta thấy đồ thị hàm số $f(x)=ax^2+bx+c$ đi qua các điểm $(-4;0),(24;0)$ và $\left(10;\frac{17}{2}\right)$ nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases}(-4)^2a+(-4)b+c=0\\ 24^2a+24b+c=0\\ 10^2a+10b+c=\frac{17}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{17}{392}\\ b=\frac{85}{98}\\ c=\frac{204}{49}\end{cases}$$

Vậy thể tích của quả bóng bầu dục trên là: $V=\pi\int_{-4}^{24}\left(-\frac{17}{392}x^2+\frac{85}{98}x+\frac{204}{49}\right)^2dx=\frac{16284}{15}\pi\approx 3390\left(cm^3\right)$

Câu 97. Từ hình chữ nhật $ABCD$ có chiều dài $AB=8\,cm$ và chiều rộng $BC=4\,cm$, người ta cắt bỏ miền (R) được giới hạn bởi cạnh CD của hình chữ nhật và hai nửa đường thẳng parabol có chung đỉnh là trung điểm cạnh AB, chúng lần lượt đi qua hai đầu mút C,D của hình chữ nhất đó (phần tô đậm như hình vẽ). Phần còn lại cho quay quanh trục AB để tạo nên một đồ vật làm trang trí, thể tích của vật trang trí đó bằng bao nhiêu cm^3. Viết kết quả làm tròn đến hàng đơn vị.



Lời giải

Trả lời: 201

Phương trình Parabol OC có dạng: $y^2 = ax$

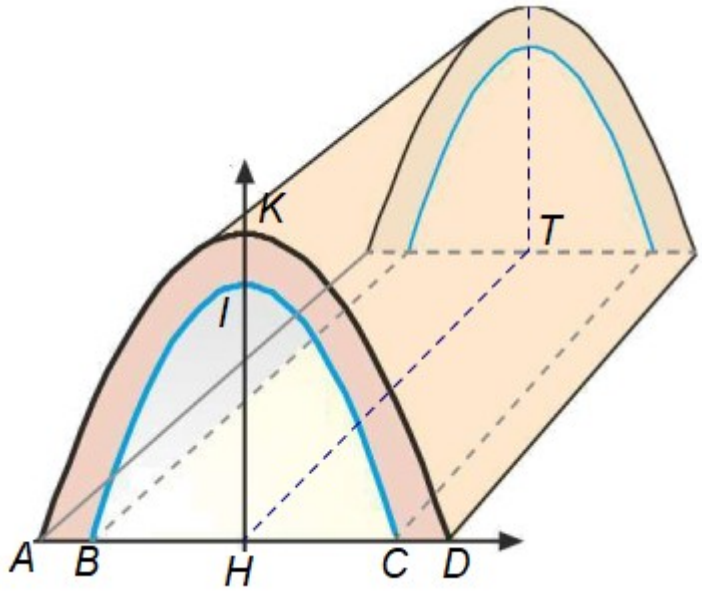
Mặt khác Parabol đi qua điểm $C(4;4) \Rightarrow 4^2 = 4a \Rightarrow a = 4$

Khi đó phương trình đường cong OC là $y = \sqrt{4x}$.

Thể tích của vật thể thu được là: $V = 2\left(\pi\int_0^4 (\sqrt{4x})^2\,dx\right) = 64\pi \approx 201\left(cm^3\right)$.

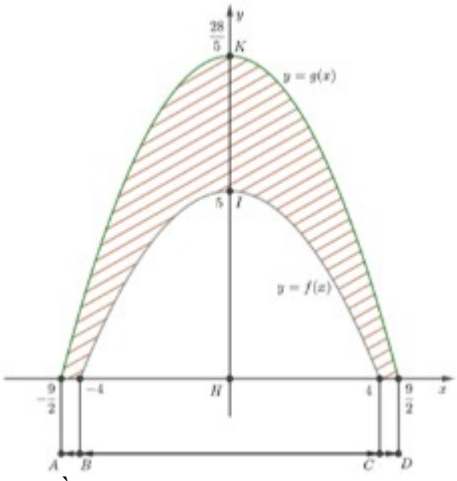
Câu 98. Trên một tuyến đường thẳng có một đoạn phải đi xuyên qua một quả núi nhỏ, do đó người ta đã tạo một hầm chui để thuận tiện cho các phương tiện giao thông di chuyển, vòm của hầm chui được đổ bê tông có dạng như hình vẽ dưới đây

với $BC = 8(m); IH = 5(m); IK = 0,6(m); AB = CD = 0,5(m); HT = 10(m)$. Biết khi cắt vòm của hầm chui bằng mặt phẳng vuông góc với trục của tuyến đường ta luôn có thiết diện là một hình phẳng được giới hạn bởi hai parabol và giao tuyến của mặt cắt với mặt đường. Hỏi cần bao nhiêu mét khối bê tông để đổ vòm của hầm chui. (làm tròn kết quả đến hàng phần mười)



Trả lời: 69,3

Gọi S là diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai parabol và giao tuyến của mặt cắt với mặt đường. Thể tích vòm của hầm chui được đổ bê tông là: $V = S.HT = 10S$. Gắn phần diện tích vào hệ trục tọa độ Oxy, ta có đồ thị như hình vẽ.



Từ đồ thị, ta xác định được hai hàm số parabol:

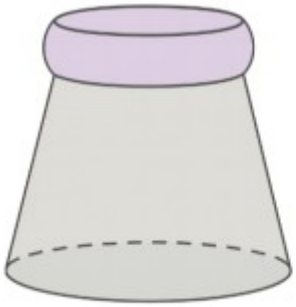
$$g(x)=k\left(x^2-\frac{81}{4}\right)\xrightarrow{g(0)=\frac{28}{5}}k=-\frac{112}{405}\Rightarrow g(x)=-\frac{112}{405}\left(x^2-\frac{81}{4}\right)$$

$$f(x)=h\left(x^2-16\right)h=-\frac{5}{16}\Rightarrow h(x)=-\frac{5}{16}\left(x^2-16\right)$$

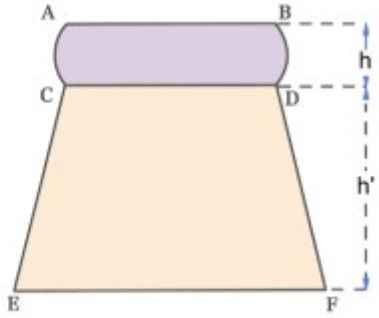
$$\Rightarrow S=\int_{\frac{-9}{2}}^{\frac{9}{2}}g(x)dx-\int_{-4}^{4}f(x)dx=\int_{\frac{-9}{2}}^{\frac{9}{2}}\left(-\frac{112}{405}\left(x^2-\frac{81}{4}\right)\right)dx-\int_{-4}^{4}\left(-\frac{5}{16}\left(x^2-16\right)\right)dx=\frac{104}{15}.$$

Vậy thể tích của vòm là: $V=\frac{104}{15}\cdot 10=\frac{208}{3}\approx 69,3\left(m^3\right)$.

Câu 99. Ông An có một cái bình đựng rượu, thân bình có hai phần: phần phía dưới là hình nón cụt, phần trên là hình cầu bị cắt bỏ 2 đầu chỏm (hình 1).



Hình 1



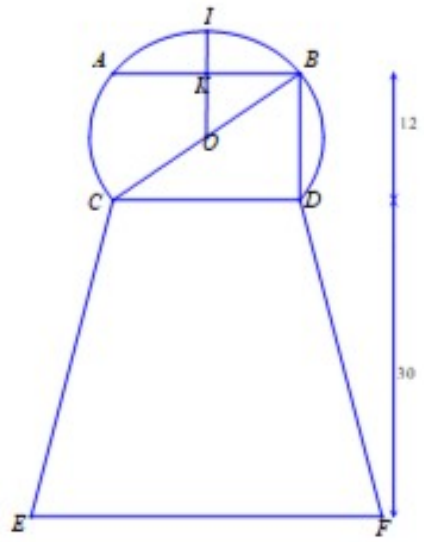
Hình 2

Thiết diện qua trục của bình như hình 2.

Biết $AB=CD=16\,cm, EF=30\,cm, h=12\,cm, h'=30\,cm$ và giá mỗi lít rượu là 100000 đồng. Hỏi số tiền ông An cần để đổ đầy bình rượu là bao nhiêu triệu đồng (giả sử độ dày của vỏ bình rượu không đáng kể)? (làm tròn kết quả đến hàng phần trăm)

Lời giải

Trả lời: 1,62



Ta có: $CB=\sqrt{CD^2+DB^2}=20$, Gọi O,K,I lần lượt là tâm mặt cầu, trung điểm của cạnh AB và cung AB. Ta có bán kính mặt cầu $R=\dfrac{CB}{2}=10, IK=4$.

Thể tích khối nón cụt $V_1=\dfrac{1}{3}\pi.30\left(15^2+15.8+8^2\right)=4090\pi$.

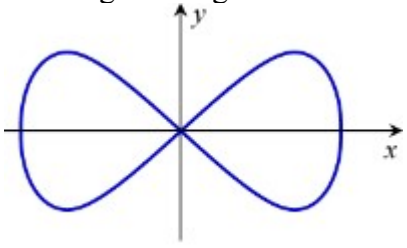
Thể tích khối cầu: $V_c=\dfrac{4000\pi}{3}$

Thể tích chỏm cầu: $V'=2\cdot\pi\cdot16\left(10-\dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{832\pi}{3}$.

Thể tích bình rượu bằng: $V=V_1+V_c-V'=4090\pi+\dfrac{4000\pi}{3}-\dfrac{832\pi}{3}=\dfrac{15438\pi}{3}\approx16166.64\left(cm^3\right)\approx16,2(l)$

Vậy, số tiền ông An cần để đổ đầy bình rượu gần bằng: $16,2\times100.000=1,62$ (triệu đồng).

Câu 100. Trong Công viên Toán học có những mảnh đất mang hình dáng khác nhau. Mỗi mảnh được trồng một loài hoa và nó được tạo thành bởi một trong những đường cong đẹp trong toán học. Ở đó có một mảnh đất mang tên Bernoulli, nó được tạo thành từ đường Lemmiscate có phương trình trong hệ tọa độ Oxy là $16y^2=x^2\left(25-x^2\right)$ như hình vẽ bên dưới (đơn vị trên trục là mét). Biết chi phí để trồng hoa trên mảnh đất Bernoulli là 150 nghìn đồng/m^2. Số tiền cần dùng để trồng hoa trên mảnh đất này bằng bao nhiêu nghìn đồng?



Lời giải

Đáp án: 6250.

Ta có $y=0\Leftrightarrow x^2\left(25-x^2\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm5\end{array}\right.$.

Suy ra đường Lemmiscate cắt trục hoành tại ba điểm là $A(-5;0)$, $O(0;0)$ và $B(5;0)$.

Từ phương trình $16y^2=x^2\left(25-x^2\right)\Leftrightarrow y^2=\dfrac{1}{16}x^2\left(25-x^2\right)$

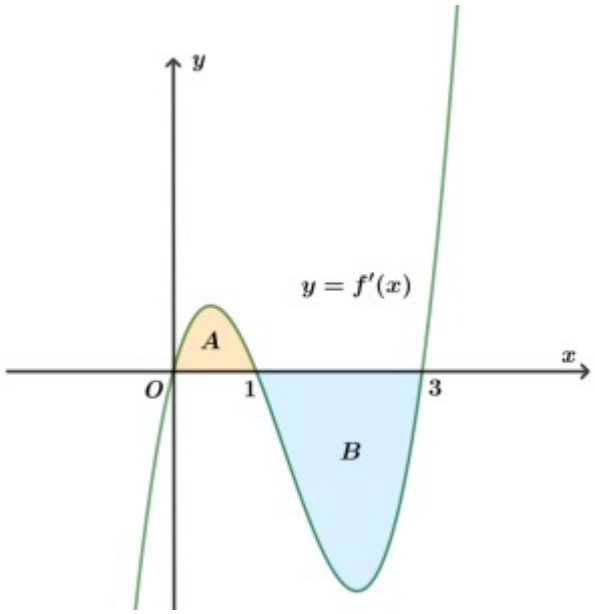
Suy ra $y=\pm\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}$.

Xét góc phần tư thứ nhất, đường Lemmiscate có phương trình là $y=\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2};x\in[0;5]$

Khi đó $S_{(1)}=\int_0^5\frac{1}{4}x\sqrt{25-x^2}\,dx=\frac{125}{12}\Rightarrow S=4S_{(1)}=\frac{125}{3}\left(m^2\right)$.

Số tiền cần dùng để trồng hoa trên mảnh đất này là: $\frac{125}{3}.150=6250$ nghìn đồng

Câu 101. Cho hàm số $y=f(x)$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ là đường cong trong hình dưới. Biết rằng diện tích của các phần hình phẳng A và B lần lượt là $S_A=4$ và $S_B=10$. Tính giá trị của $f(3)$, biết giá trị của $f(0)=2$.



Lời giải

Đáp số: -4.

Ta có:

Hình phẳng A được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, trục tung $x=0$ và đường thẳng $x=1$ nên diện tích hình phẳng A là:

$$S_A=\int_0^1\left|f'(x)\right|dx=\int_0^1 f'(x)\,dx=f(x)\Big|_0^1=f(1)-f(0)$$

$$\Rightarrow f(1)=S_A+f(0)=4+2=6.$$

Lại có:

Hình phẳng B được giới hạn bởi đồ thị hàm số $y=f'(x)$, trục hoành $y=0$, đường thẳng $x=1$ và đường thẳng $x=3$ nên diện tích hình phẳng B là:

$$S_B=\int_1^3\left|f'(x)\right|dx=-\int_1^3 f'(x)\,dx=-f(x)\Big|_1^3=-\left[f(3)-f(1)\right]=-f(3)+f(1).$$

Suy ra $f(3)=f(1)-S_B=6-10=-4$.

Vậy $f(3)=-4$.