

TRẮC NGHIỆM VẬN DỤNG CAO

HÀM SỐ VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

VẤN ĐỀ 1. TẬP XÁC ĐỊNH-TẬP GIÁ TRỊ

Câu 1. Tìm tất cả giá trị của a để tập giá trị của hàm số $y = \frac{x+a}{x^2+1}$ chứa đoạn $[0;1]$.

- A. $a \in \square$. B. $a \geq 2$. C. $a \geq \frac{3}{4}$. D. $a < 2$.

Lời giải

Chọn C

$$y = \frac{x+a}{x^2+1} \Leftrightarrow yx^2 - x + y - a = 0$$

Tập giá trị của hàm số chứa đoạn $[0;1] \Leftrightarrow$ với mọi $y \in [0;1]$ thì phương trình trên luôn có nghiệm.

Với $y = 0$ ta có phương trình $x + a = 0 \Leftrightarrow x = -a$. Do đó phương trình luôn có nghiệm.

Với $0 < y \leq 1$ thì phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow 1 - 4y(y-a) \geq 0 \Leftrightarrow 4y^2 - 1 \leq 4ay \Leftrightarrow \frac{4y^2 - 1}{4y} \leq a$.

Yêu cầu bài toán tương đương với $\max_{(0;1]} \frac{4y^2 - 1}{4y} \leq a$.

Ta có
$$\frac{4y^2 - 1}{4y} = y - \frac{1}{4y} = (y-1) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4y}\right) + \frac{3}{4} = (y-1)\left(1 + \frac{1}{4y}\right) + \frac{3}{4} \leq \frac{3}{4} \forall y \in (0;1]$$

Kết luận $a \geq \frac{3}{4}$.

Câu 2. Hàm số $y = \sqrt{9-3|x|} + \frac{x}{\sqrt{9x^2-1}}$ có tập xác định D_1 , hàm số $y = \frac{\sqrt{x+2}}{x|x|+4}$ có tập xác định D_2 .

Khi đó số phần tử của tập $A = \square \cap (D_1 \cap D_2)$ là:

- A. 4. B. 5. C. 6. D. 7.

Lời giải

Chọn A

$$y = \sqrt{9-3|x|} + \frac{x}{\sqrt{9x^2-1}}$$

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} 9-3|x| \geq 0 \\ 9x^2-1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} < x \leq 3 \Rightarrow D_1 = \left[\frac{1}{3}, 3\right)$$

$$y = \frac{\sqrt{x+2}}{x|x|+4}$$

Hàm số xác định khi:

$$\begin{cases} x+2 \geq 0 \\ x|x|+4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow -2 < x \leq 0 \\ \begin{cases} x > 0 \\ x^2+4 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow D_2 = (-2; +\infty)$$

$$\Rightarrow A = \square \cap (D_1 \cap D_2) = \{-1; 1; 2; 3\}$$

Vậy tập hợp A gồm 4 phần tử.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$ xác định với mọi $x \in [0; 2]$ khi $m \in [a; b]$.

Giá trị $a+b = ?$

A. 2.

B. 3.

C. 4.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = \sqrt{x+2m-1} + \sqrt{4-2m-\frac{x}{2}}$$

Hàm số

xác định khi:

$$\begin{cases} x \geq 1-2m \\ x \leq 8-4m \end{cases}$$

Hàm số xác định trên $[0; 2]$ nên

$$1-2m \leq 0 \leq 2 \leq 8-4m \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2} \Rightarrow m \in \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow a+b = 2$$

Câu 4. Cho $(P_m): y = x^2 - 2mx + m^2 + m$. Biết rằng (P_m) luôn cắt đường phân giác góc phần tư thứ nhất tại hai điểm A, **B.** Gọi A_1, B_1 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Ox, A_2, B_2 lần lượt là hình chiếu của A, B lên Oy. Có bao nhiêu giá trị của m khác 0, -1 để tam giác OB_1B_2 có diện tích gấp 4 lần diện tích tam giác OA_1A_2

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 2mx + m^2 + m = x \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+1 \end{cases}$$

*TH1:

$$A(m; m) \Rightarrow A_1(m; 0); A_2(0; m)$$

$$B(m+1; m+1) \Rightarrow B_1(m+1; 0); B_2(0; m+1)$$

$$S_{OB_1B_2} = 4S_{OA_1A_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}(m+1)^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ m=\frac{-1}{3} \end{cases}$$

Khi đó

*TH2:

$$B(m; m) \Rightarrow B_1(m; 0); B_2(0; m)$$

$$A(m+1; m+1) \Rightarrow A_1(m+1; 0); A_2(0; m+1)$$

$$S_{OB_1B_2} = 4S_{OA_1A_2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}m^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}(m+1)^2 \Leftrightarrow \begin{cases} m=-2 \\ m=\frac{-2}{3} \end{cases}$$

Khi đó

Vậy có 4 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Câu 5. Tìm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để hàm số sau có tập xác định là $\mathbb{R}$

$$y = \frac{2018x + 2019}{\sqrt{(m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4}}$$

A. 2

B. 3

C. 4

D. 5

Lời giải

Chọn C

Hàm số có TXĐ là $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi

$$f(x) = (m-1)x^2 + 2(m-1)x + 4 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Với m = 1, ta có f(x) = 4 > 0, mọi x thuộc $\mathbb{R}$. Do đó m = 1 thỏa mãn

$$m \neq 1, f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)^2 - 4(m-1) < 0 \end{cases}$$

Với

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ (m-1)(m-5) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ 1 < m < 5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 < m < 5$$

Vậy có 4 số nguyên $m \in \{1, 2, 3, 4\}$ thỏa mãn hàm số có TXĐ là $\mathbb{R}$.

Câu 6. Cho hàm số $y = \sqrt{(m+1)x + 2m + 3}$, m là tham số. Có bao nhiêu giá trị nguyên m để hàm số đã cho xác định trên đoạn $[-3; -1]$?

A. 2.

B. 3.

C. 1.

D. Vô số.

Lời giải

Chọn B

+ Hàm số xác định trên $[-3; -1]$ khi và chỉ khi $f(x) = (m+1)x + 2m + 3 \geq 0, \forall x \in [-3; -1]$.

+ Nhận xét: Đồ thị hàm số $y = f(x)$ trên $[-3; -1]$ là đoạn thẳng AB với

$A(-3; -m)$, $B(-1; m+2)$. Do đó $f(x) \geq 0, \forall x \in [-3; -1]$ khi và chỉ khi đoạn AB không có

điểm nào nằm phía dưới trục hoành

Vậy có 3 giá trị nguyên của m là $m \in \{-2; -1; 0\}$.

- Câu 7.** Tìm m để các hàm số $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}$ xác định với mọi x thuộc khoảng $(0; +\infty)$.
- A. $m \leq -1$. B. $-2 \leq m \leq 2$. C. $m \leq 0$. D. $m \leq 1$.

Lời giải

Chọn **A**.

Hàm số xác định khi
$$\begin{cases} x-m \geq 0 \\ 2x-m-1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} (*)$$

- Nếu $m \geq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \geq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq m$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = [m; +\infty)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset [m; +\infty) \Leftrightarrow m \leq 0$: không thỏa mãn $m \geq 1$.

- Nếu $m \leq \frac{m+1}{2} \Leftrightarrow m \leq 1$ thì $(*) \Leftrightarrow x \geq \frac{m+1}{2}$.

Khi đó tập xác định của hàm số là $D = \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right)$.

Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow (0; +\infty) \subset \left[\frac{m+1}{2}; +\infty\right) \Leftrightarrow \frac{m+1}{2} \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$: thỏa mãn điều kiện $m \leq 1$.

Vậy $m \leq -1$ thỏa yêu cầu bài toán.

- Câu 8.** Tìm m để hàm số $y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$.

- A. $m \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$. B. $m \in [-3; 0]$.
- C. $m \in [-3; 0] \cup [0; 1]$. D. $m \in [-4; 0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$.

Lời giải

Chọn **D**

*Gọi D là tập xác định của hàm số
$$y = \frac{2\sqrt{x-2m+3}}{3(x-m)} + \frac{x-2}{\sqrt{-x+m+5}}$$

$$*x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-2m+3 \geq 0 \\ x-m \neq 0 \\ -x+m+5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2m-3 \\ x \neq m \\ x < m+5 \end{cases}$$

*Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-2m+3}}{x-m} + \frac{3x-1}{\sqrt{-x+m+5}}$ xác định trên khoảng $(0; 1)$

$$\Leftrightarrow (0;1) \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 2m-3 \leq 0 \\ m+5 \geq 1 \\ m \notin (0;1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2} \\ m \geq -4 \\ \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-4;0] \cup \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

- Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = \sqrt{16-x^2} + \sqrt{2017x+2018m}$ (m là tham số). Để tập xác định của hàm số chỉ có đúng một phần tử thì $m = \frac{a}{b}$ ($a \wedge b, b \neq 0$) với $\frac{a}{b}$ tối giản. Tính $a+b$.
- A.** - 3025. **B.** 3025. **C.** 5043. **D.** -5043.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện xác định của hàm số là $\begin{cases} 16-x^2 \geq 0 \\ 2017x+2018m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4 \leq x \leq 4 \\ x \geq -\frac{2018m}{2017} \end{cases}$

Tập xác định của hàm số chỉ có đúng một phần tử $\Leftrightarrow [-4;4] \cap \left[-\frac{2018m}{2017}; +\infty\right) = \emptyset$ chỉ có đúng một phần tử

$\Leftrightarrow -\frac{2018m}{2017} = 4 \Leftrightarrow m = -\frac{4034}{1009}$

Nên $a+b = -3025$.

- Câu 10.** Cho hàm số $y = \sqrt{1-|2x^2+mx+m+15|}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số xác định trên đoạn $[1;3]$.
- A.** 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định trên đoạn $[1;3]$ khi

$$1-|2x^2+mx+m+15| \geq 0, \forall x \in [1;3] \Leftrightarrow |2x^2+mx+m+15| \leq 1, \forall x \in [1;3] \quad (1)$$

Bài toán được chuyển về việc tìm m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1;3]$.

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1;3]$

$\Rightarrow$ Nghiệm đúng với $x=1, x=2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2m+17| \leq 1 \\ |3m+23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m+17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy với $m = -8$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1;3]$.

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |2x^2-8x+7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2-8x+7 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Vậy, với $m = -8$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 11. Tìm m để hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4m+3}}{x-2m} + \frac{3x-1}{\sqrt{5+2m-x}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$.

A. $\begin{cases} -2 \leq m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4} \end{cases}$ **B.** $-2 \leq m \leq 0$ **C.** $\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4}$ **D.** $\begin{cases} -2 < m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m < \frac{3}{4} \end{cases}$

Lời giải

Chọn A

Gọi D là tập xác định của hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4m+3}}{x-2m} + \frac{3x-1}{\sqrt{5+2m-x}}$.

$$x \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x-4m+3 \geq 0 \\ x-2m \neq 0 \\ 5+2m-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4m-3 \\ x \neq 2m \\ x < 2m+5 \end{cases}$$

Hàm số $y = \frac{\sqrt{x-4m+3}}{x-2m} + \frac{3x-1}{\sqrt{5+2m-x}}$ xác định trên khoảng $(0;1)$

$$\Leftrightarrow (0;1) \subset D \Leftrightarrow \begin{cases} 4m-3 \leq 0 \\ 2m \notin (0;1) \\ 2m+5 \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{4} \\ m \leq 0 \text{ hay } m \geq \frac{1}{2} \\ m \geq -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 0 \\ \frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{4} \end{cases}$$

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của tham số m để hàm số $y = \sqrt{x+m} - \frac{1}{2x-m+1}$ xác định trên $(1;2) \cup [4;+\infty)$?

A. 6. **B.** 7. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn C

$$\begin{cases} x+m \geq 0 \\ 2x-m+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -m \\ x \neq \frac{m+1}{2} \end{cases}$$

•Điều kiện xác định của hàm số là:

$$(1;2) \cup [4;+\infty)$$

•Hàm số xác định trên

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -m \leq 1 \\ \frac{m-1}{2} \leq 1 \\ 2 \leq \frac{m-1}{2} < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -1 \\ m \leq 3 \\ 5 \leq m < 9 \end{cases} \Leftrightarrow m \in [-1;3] \cup [5;9)$$

mà m là các số nguyên dương $\Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 5; 6; 7; 8\}$.

Câu 13. Gọi S là tập tất cả các giá trị nguyên dương của m sao cho hàm số $y = \sqrt{-m^2x^2 + 2|m|x + 3}$ xác định trên $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$. Khi đó số các phần tử của S là.

A. 0 **B.** 2 **C.** 4 **D.** 5

Hướng dẫn đáp án

Ta có

$$-m^2x^2 + 2|m|x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -(|m|x - 1)^2 + 4 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow |(|m|x - 1)| \leq 2 \Leftrightarrow -2 \leq (|m|x - 1) \leq 2$$

$$-1 \leq |m|x \leq 3$$

Nhấy thấy nếu $m = 0$ thì luôn thỏa mãn.

Nếu $m \neq 0$, ta có $-\frac{1}{|m|} \leq x \leq \frac{3}{|m|}$.

Để hàm số xác định trên $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \Leftrightarrow (\frac{1}{3}; \frac{2}{3}) \subset [-\frac{1}{|m|}; \frac{3}{|m|}]$. Ta có $\frac{-1}{|m|} < 0, \forall m \neq 0$ nên

$\frac{2}{3} \leq \frac{3}{|m|} \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq \frac{9}{2} \\ m \neq 0 \end{cases}$. Vậy các giá trị nguyên dương của m là: 1, 2, 3, 4. Do đó số phần tử của S là 5.

Lưu ý:

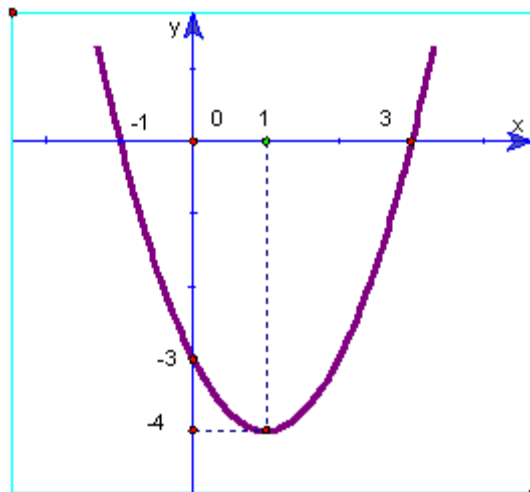
Một số học sinh vẫn mắc phải sai lầm là chọn cả phần tử 0 nên cho đáp án D

$$\begin{cases} \frac{-1}{|m|} = \frac{1}{3} \\ \frac{3}{|m|} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Một số học sinh khác ép cho kết luận không tồn tại m, chọn **A.**

Câu 14. Cho hàm số $f(x)$ có đồ thị như hình vẽ. Giá trị nguyên lớn nhất của m để hàm số

$y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - 2m + 2}}$ có TXĐ là $\square$.



A. $m = -2$.

B. $m = -1$.

C. $m = -4$.

D. $m = 0$.

Lời giải

Chọn A

$$y = \frac{1}{\sqrt{f(x) - 2m + 2}}$$

+) Hàm số xác định là $\square$ khi và chỉ khi :

$$f(x) - 2m + 2 > 0, \forall x \in \square$$

$$\Leftrightarrow 2m - 2 < \min f(x)$$

$$\min f(x) = -4$$

Từ đồ thị hàm số ta có

$$\Rightarrow 2m - 2 < -4 \Rightarrow m < -1$$

Vậy giá trị nguyên lớn nhất của m là : $m = -2$.

Câu 15. Tìm số giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2019]$ để hàm số $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}$ xác định $\forall x \in (0; +\infty)$.

A. 4038.

B. 2018.

C. 2019.

D. 2020.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [m; +\infty) \cap \left[\frac{m+1}{2}; +\infty \right)$$

Điều kiện xác định:

$$\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ \frac{m+1}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$$

Hàm số xác định

Vậy có 2018 giá trị nguyên của m cần tìm.

Câu 16. Tìm m để hàm số $y = \sqrt{x-m} + \sqrt{2x-m-1}$ xác định $\forall x \in (0; +\infty)$.

A. $m < -1$.

B. $m \leq -1$.

C. $m \geq -1$.

D. $m > -1$.

Lời giải

Chọn B

$$\begin{cases} x \geq m \\ x \geq \frac{m+1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in [m; +\infty) \cap \left[\frac{m+1}{2}; +\infty \right)$$

Điều kiện xác định:

$$m \leq 1 \Rightarrow [m; +\infty) \cap \left[\frac{m+1}{2}; +\infty \right) = \left[\frac{m+1}{2}; +\infty \right)$$

+ Nếu

$$\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow (0; +\infty) \subset \left[\frac{m+1}{2}; +\infty \right) \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 1 \\ \frac{m+1}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq -1$$

Hàm số xác định

$$m > 1 \Rightarrow [m; +\infty) \cap \left[\frac{m+1}{2}; +\infty \right) = [m; +\infty)$$

+ Nếu

$$\forall x \in (0; +\infty) \Leftrightarrow (0; +\infty) \subset [m; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m \leq 0 \end{cases} \Rightarrow m \in \emptyset$$

Hàm số xác định

Vậy $m \leq -1$.

- Câu 17.** Cho hàm số $y = \frac{2mx + 4}{\sqrt{x^2 + 2mx + 2018m + 2019}} + \sqrt{mx^2 + 2mx + 2020}$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$. Hỏi tập S có bao nhiêu phần tử?
- A.** 2018. **B.** 2019. **C.** 2020. **D.** 2021.

Lời giải

Chọn B

Để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} x^2 + 2mx + 2018m + 2019 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ mx^2 + 2mx + 2020 \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

+) Nếu $m = 0$ ta thấy $y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 2019}} + \sqrt{2020}$ luôn xác định trên $\mathbb{R}$

Vậy $m = 0$ thỏa mãn yêu cầu đề bài (1)

+) Nếu $m \neq 0$ để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ thì $\begin{cases} m^2 - 2018m - 2019 < 0 \\ m > 0 \\ m^2 - 2020m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m < 2019 \\ m > 0 \\ 0 \leq m \leq 2020 \end{cases}$
 $\Leftrightarrow 0 < m < 2019$ (2)

Kết hợp (1)(2) ta được $0 \leq m < 2019$ thỏa mãn

Vậy ta có 2019 số nguyên m để hàm số xác định trên $\mathbb{R}$

- Câu 18.** Cho hàm số $y = \sqrt{1 - |2x^2 + mx + m + 15|}$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để hàm số xác định trên đoạn $[1; 3]$.
- A.** 1. **B.** 2.
C. 3. **D.** 4.

Lời giải

Chọn A

Hàm số xác định trên đoạn $[1; 3]$ khi

$$1 - |2x^2 + mx + m + 15| \geq 0, \forall x \in [1; 3] \Leftrightarrow |2x^2 + mx + m + 15| \leq 1, \forall x \in [1; 3] \quad (1)$$

Bài toán được chuyển về việc tìm m để bất phương trình (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1; 3]$.

Điều kiện cần: Bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [1; 3]$

$\Rightarrow$ Nghiệm đúng với $x = 1, x = 2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |2m+17| \leq 1 \\ |3m+23| \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq 2m+17 \leq 1 \\ -1 \leq 3m+23 \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9 \leq m \leq -8 \\ -8 \leq m \leq -\frac{22}{3} \end{cases} \Leftrightarrow m = -8.$$

Vậy với $m = -8$ là điều kiện cần để (1) nghiệm đúng với $\forall x \in [1; 3]$.

Điều kiện đủ: Với $m = -8$, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow |2x^2 - 8x + 7| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq 2x^2 - 8x + 7 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 8x + 8 \geq 0 \\ 2x^2 - 8x + 6 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)^2 \geq 0 \\ x^2 - 4x + 3 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 3.$$

Vậy, với $m = -8$ thỏa mãn điều kiện đầu bài.

Câu 19. Cho hàm số $y = \sqrt{x^4 - x^2 + 1} + mx\sqrt{2x^4 + 2}$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số có tập xác định là tập số thực $\mathbb{R}$.

A. $m \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ B. $m \in \left[-\frac{1}{4}; \frac{1}{4}\right]$ C. $m \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$ D. $m \in [-1; 1]$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số đã cho có tập xác định là $\mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 - x^2 + 1 + mx\sqrt{2x^4 + 2} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 2\left(\sqrt{x^4 + 1}\right)^2 + 2m(\sqrt{2}x)\sqrt{x^4 + 1} - (\sqrt{2}x)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2m \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4 + 1}} - \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4 + 1}}\right)^2 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4 + 1}}\right)^2 - 2m \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4 + 1}} - 2 \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Đặt $t = \frac{\sqrt{2}x}{\sqrt{x^4 + 1}}$ thì $|t| = \frac{|\sqrt{2}x|}{\sqrt{x^4 + 1}} = \sqrt{\frac{2x^2}{x^4 + 1}} \leq 1$, đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $x^2 = 1$.

(1) trở thành $t^2 - 2mt - 2 \leq 0, \forall t \in [-1; 1] \quad (2)$

Xét hàm số $f(t) = t^2 - 2mt - 2$. Đây là hàm số bậc hai có hệ số $a = 1 > 0$ nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1) \leq 0 \\ f(1) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2m - 1 \leq 0 \\ 2m + 1 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{-\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}}$$

Câu 20. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m trên đoạn $[-2018; 2018]$ để hàm số

$y = \sqrt{x - m + 2} - \frac{x}{\sqrt{-x + 1 - 2m}}$ xác định trên $[0; 1)$.

A. 2018.

B. 2019.

C. 4036.

D. 4037.

Lời giải

Chọn B

Điều kiện xác định:
$$\begin{cases} x \geq m-2 \\ x < 1-2m \Leftrightarrow x \in (-\infty; 1-2m) \cap [m-2; +\infty) \end{cases}$$

Hàm số xác định trên $[0; 1)$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-2 < 1-2m \\ m-2 \leq 0 \\ 1-2m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 \\ m \leq 2 \\ m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \leq 0$$

Vậy có ²⁰¹⁹ giá trị ^m nguyên thỏa YCBT.

Câu 21: Tìm số giá trị k nguyên để hàm số $y = \sqrt{2x-3k+4} + \frac{x-k}{x+k-1}$ xác định trên khoảng $(0; +\infty)$.

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Điều kiện:
$$\begin{cases} 2x-3k+4 \geq 0 \\ x+k-1 \neq 0 \end{cases}$$

khoảng $(0; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} -k+1 \leq 0 \\ \frac{3k-4}{2} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow k \in \left[1; \frac{4}{3}\right]$.

Hàm số xác định trên

VẤN ĐỀ 2 SỰ BIẾN THIÊN, TÍNH CHẴN, LẺ, TUẦN HOÀN

Câu 1. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 1 - m$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A. 3 B. 5 C. 8 D. Vô số

Lời giải

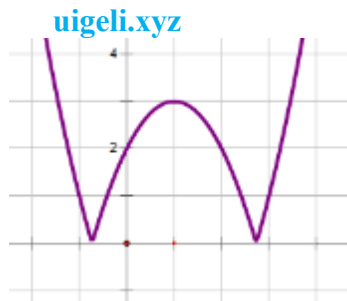
Xét $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 1 - m$, $\Delta' = m^2 + 3m$

TH1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-3; 0]$

$y = |f(x)| = f(x)$ đồng biến trên $(m+1; +\infty)$

Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ khi $m+1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow m \in [-3; -2]$

TH2: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$. Khi đó $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$)



Để hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ ta có

$$+) x_1 \leq -1 < 1 \leq m+1 \Rightarrow m \geq 0$$

$$x_1 \leq -1 \Leftrightarrow m+1 - \sqrt{m^2 + 3m} \leq -1 \Leftrightarrow m+2 \leq \sqrt{m^2 + 3m} \Leftrightarrow m \leq -4 \Rightarrow m \in \emptyset$$

$$+) x_2 \leq -1 \Leftrightarrow m+1 + \sqrt{m^2 + 3m} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 3m} \leq -m-2 \quad (\Rightarrow m < -3)$$

$$\Leftrightarrow m \geq -4 \Rightarrow m \in [-4; -3)$$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m.

Đáp án A.

Câu 2. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m+1$, với m là tham số thực **C.**

Có bao nhiêu số tự nhiên $m < 2018$ để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(2; 4)$?

A. 2016.

B. 2018.

C. 2015.

D. 2017.

Giải

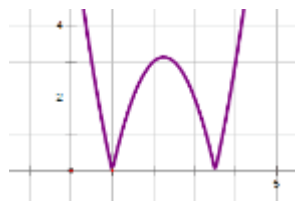
Xét $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m+1$, $\Delta' = m^2 \geq 0$, $\forall m$

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$

$y = |f(x)| = f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Rightarrow$ thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0 \Rightarrow m > 0$. Khi đó $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1 = 1$; $x_2 = 2m+1$ ($x_1 < x_2$)

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên các khoảng $(1; m+1)$ và $(2m+1; +\infty)$



Để hàm số đồng biến trên $(2; 4)$ ta có

$$+) 1 \leq 2 < 4 \leq m+1 \Rightarrow m \geq 3$$

$$+) 2m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq \frac{1}{2}$$

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m.

Đáp án A.

Câu 3. Tịnh tiến đồ thị (C) của hàm số $y = f(x) = \frac{x^2 + 4x + 5}{x+2}$ sang phải bao nhiêu đơn vị để được đồ thị của hàm số lẻ trên tập xác định của nó?

A. -2.

B. 2.

C. 4.

D. -4.

Lời giải

Chọn B

Tính tiền $(C): y = f(x) = x + 2 + \frac{1}{x+2}$ sang phải a đơn vị được đồ thị (G) có phương trình là

$$y = g(x) = f(x - a) = x - (a - 2) + \frac{1}{x - (a - 2)}$$

Hàm $y = g(x)$ là hàm số lẻ $\Leftrightarrow$ tập xác định của nó là tập đối xứng

$$\Leftrightarrow a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 2$$

Thử lại, $a = 2$ ta được $y = g(x) = x + \frac{1}{x}$ là hàm số lẻ trên $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Đáp án: B_ tính tiền (C) sang phải 2 đơn vị.

Câu 4.

Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $f(x) = \frac{x^2(x^2 - 2) + (2m^2 - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1} - m}$ là hàm số chẵn.

A. 0.

B. $P = 1$.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn C

Điều kiện: $\sqrt{x^2 + 1} \neq m \quad (*)$

Ta có
$$f(-x) = \frac{x^2(x^2 - 2) - (2m^2 - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1} - m}$$

$\forall x \in (*)$ thì $-x \in (*)$ nên để hàm số là hàm số chẵn thì $f(-x) = f(x)$

$$\frac{x^2(x^2 - 2) - (2m^2 - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1} - m} = \frac{x^2(x^2 - 2) + (2m^2 - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1} - m}$$

$$\Leftrightarrow 2(2m^2 - 2)x = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

Với $m = 1$ ta có hàm số $f(x) = \frac{x^2(x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$ là hàm số chẵn.

Với $m = -1$ ta có hàm số $f(x) = \frac{x^2(x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$ là hàm số chẵn.

Vậy $m = \pm 1$.

Câu 5.

Cho hàm số $y = f(x) = mx^2 + 2(m - 6)x + 2$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m sao cho hàm f nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.

A. 1.

B. 3.

C. 2.

D. vô số.

Lời giải

Chọn B

Hàm số $y = f(x) = mx^2 + 2(m-6)x + 2$ có $D = \square$.

Khi $m = 0 \Rightarrow y = f(x) = -12x + 2 \Rightarrow$ hàm f nghịch biến trên $\square$ nên f nghịch biến trên $(-\infty; 2)$.

Khi $m \neq 0$, ta có $y = f(x)$ là hàm số bậc hai nên có đồ thị là Parabol.

Lúc đó, hàm f nghịch biến trên $(-\infty; 2) \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \frac{-2(m-6)}{2m} \geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 2$.

Vậy $0 \leq m \leq 2$ nên có 3 giá trị nguyên của tham số m .

Câu 6. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = f(x) = |x+1| - |x+m|$ là hàm lẻ?
A. 1. **B.** 0. **C.** 2. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Lời giải

Hàm số là lẻ $\Leftrightarrow f(-x) = -f(x)$ với $\forall x \in R$

Xét với $x = 0$, suy ra: $f(-0) = -f(0) \Leftrightarrow f(0) = 0$

Suy ra: $f(0) = |0+1| - |m+0| = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$

Thử lại:

Với $m = 1 \rightarrow$ hàm số: $y = f(x) = |x+1| - |x+1| = 0$ thỏa mãn hàm lẻ.

Với $m = -1 \rightarrow$ hàm số: $y = f(x) = |x+1| - |x-1|$. Dễ dàng kiểm tra được thỏa mãn hàm lẻ.

Vậy có hai giá trị nguyên của tham số m thỏa mãn bài toán.

Chọn đáp án C.

Câu 7. Biết rằng hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x + 1$ đồng biến trên $\square$. Đặt $A = \left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3 + 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)$ và $B = \frac{8}{(x^2+1)^3} + \frac{4}{x^2+1}$. Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $A > B$. **B.** $A \geq B$. **C.** $A < B$. **D.** $A \leq B$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $\frac{x^2+3}{x^2+1} = 1 + \frac{2}{x^2+1} > \frac{2}{x^2+1}$.

Vì hàm số $y = f(x) = x^3 + 2x + 1$ đồng biến trên $\square$ nên

$f\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right) > f\left(\frac{2}{x^2+1}\right) \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right)^3 + 2\left(\frac{x^2+3}{x^2+1}\right) > \frac{8}{(x^2+1)^3} + \frac{4}{x^2+1} \Rightarrow A > B$.

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 1 - m$

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(-1; 1)$?

A. 3

B. 5

C. 8

D. Vô số

Giải

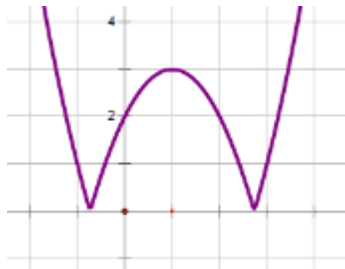
Xét $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 1 - m$, $\Delta' = m^2 + 3m$

TH1: $\Delta' \leq 0 \Leftrightarrow m \in [-3; 0]$

$y = |f(x)| = f(x)$ đồng biến trên $(m+1; +\infty)$

Hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ khi $m+1 \leq 1 \Leftrightarrow m \leq -2 \Rightarrow m \in [-3; -2]$

TH2: $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; -3) \cup (0; +\infty)$. Khi đó $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1; x_2$ ($x_1 < x_2$)



Để hàm số đồng biến trên $(-1; 1)$ ta có

+) $x_1 \leq -1 < 1 \leq m+1 \Rightarrow m \geq 0$

$x_1 \leq -1 \Leftrightarrow m+1 - \sqrt{m^2 + 3m} \leq -1 \Leftrightarrow m+2 \leq \sqrt{m^2 + 3m} \Leftrightarrow m \leq -4 \Rightarrow m \in \emptyset$

+) $x_2 \leq -1 \Leftrightarrow m+1 + \sqrt{m^2 + 3m} \leq -1 \Leftrightarrow \sqrt{m^2 + 3m} \leq -m-2 \quad (\Rightarrow m < -3)$

$\Leftrightarrow m \geq -4 \Rightarrow m \in [-4; -3)$

Vậy có 3 giá trị nguyên của m .

Đáp án A.

Câu 9. Cho hàm số $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1$

Có bao nhiêu số tự nhiên $m < 2018$ để hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên khoảng $(2; 4)$?

A. 2016

B. 2018

C. 2015

D. 2017

Giải

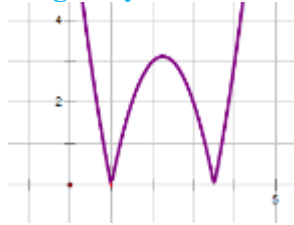
Xét $f(x) = x^2 - 2(m+1)x + 2m + 1$, $\Delta' = m^2 \geq 0, \forall m$

TH1: $\Delta' = 0 \Leftrightarrow m = 0$

$y = |f(x)| = f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty) \Rightarrow$ thỏa mãn.

TH2: $m \neq 0 \Rightarrow m > 0$. Khi đó $f(x)$ có 2 nghiệm $x_1 = 1; x_2 = 2m + 1$ ($x_1 < x_2$)

Hàm số $y = |f(x)|$ đồng biến trên các khoảng $(1; m+1)$ và $(2m+1; +\infty)$



Để hàm số đồng biến trên $(2;4)$ ta có

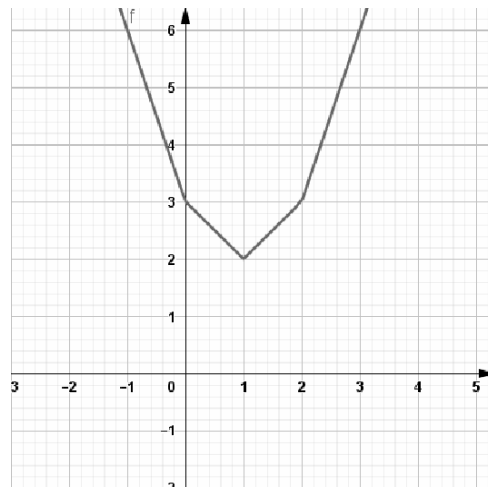
$$+) 1 \leq 2 < 4 \leq m+1 \Rightarrow m \geq 3$$

$$+) 2m+1 \leq 2 \Leftrightarrow m \leq 1/2$$

Vậy có 2016 giá trị nguyên của m .

Đáp án A.

Câu 10. Hàm số $f(x)$ có tập xác định $\mathbb{R}$ và có đồ thị như hình vẽ



Mệnh đề nào sau đây sai?

A. Hàm số đồng biến trên khoảng $(1;4)$.

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng $(-3;0)$.

C. $f(2) + f(5) = 15$.

D. $f(10) < 26$.

Lời giải

Chọn D

Nhìn hình ta thấy đáp án A và B đều đúng.

Với $x \geq 2$ đồ thị hàm số là một đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm $(2;3)$ và $(3;6)$

Dễ dàng tìm được phương trình đường thẳng đó có phương trình là $y = 3x - 3$

$$\Rightarrow f(2) + f(5) = 3 + 15 - 3 = 15 \Rightarrow \text{đáp án C đúng.}$$

$$\Rightarrow f(10) = 3 \cdot 10 - 3 = 27 \Rightarrow \text{đáp án D sai.}$$

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 - 2) + (2m^2 - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1} - m}$$

Câu 11. Tìm m để hàm số: là hàm số chẵn.

A. 1.

B. -1.

C. $\{1; -1\}$.

D. $\{-1; 0; 1\}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{ĐKXD: } \sqrt{x^2 + 1} \neq m (*)$$

Giả sử hàm số chẵn suy ra $f(-x) = f(x)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$$f(-x) = \frac{x^2(x^2 - 2) - (2m^2 - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1} - m}$$

Ta có

Suy ra $f(-x) = f(x)$ với mọi x thỏa mãn điều kiện (*)

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x^2 - 2) - (2m^2 - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1} - m} = \frac{x^2(x^2 - 2) + (2m^2 - 2)x}{\sqrt{x^2 + 1} + m} \quad \text{với mọi } x \text{ thỏa mãn điều kiện (*)}$$

$$\Leftrightarrow 2(2m^2 - 2)x = 0 \quad \text{với mọi } x \text{ thỏa mãn điều kiện (*)}$$

$$\Leftrightarrow 2m^2 - 2 = 0 \Leftrightarrow m = \pm 1$$

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

* Với $m = 1$ ta có hàm số là

$$\text{ĐKXD: } \sqrt{x^2 + 1} \neq 1 \Leftrightarrow x \neq 0$$

$$\text{Suy ra TXĐ: } D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Để thấy với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ta có $-x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

Do đó

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

* Với $m = -1$ ta có hàm số là

$$\text{TXĐ: } D = \mathbb{R}$$

Để thấy với mọi $x \in \mathbb{R}$ ta có $-x \in \mathbb{R}$ và $f(-x) = f(x)$

$$f(x) = \frac{x^2(x^2 - 2)}{\sqrt{x^2 + 1} + 1}$$

Do đó

Vậy $m = \pm 1$ là giá trị cần tìm.

Câu 12. Với giá trị nào của m thì hàm số $y = x^4 + (m^2 - 4)x^3 + (m + 2)x + 1$ là hàm số chẵn?

A. $m = -2$.

B. $m = 0$.

C. $m = 2$.

D. $m = 2, m = -2$.

Lời giải

Chọn A

TXĐ: $D = \mathbb{R}$, do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Ta có hàm số là chẵn nếu:

$$y(-x) = y(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow x^4 + (m^2 - 4)x^3 + (m + 2)x + 1 = x^4 - (m^2 - 4)x^3 - (m + 2)x + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} m^2 - 4 = 0 \\ m + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -2$$

Khi đó:

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + x - 1$ có đồ thị là (C) , biết rằng khi tịnh tiến liên tiếp (C) song song với trục Ox một khoảng có độ dài là $|a|$ rồi tiếp tục tịnh tiến song song với trục Oy một khoảng có độ dài là $|b|$ ta được đồ thị của hàm số $g(x) = 2x^2 - 3x + 3$. Khi đó ta có tổng của $a + b$ bằng :

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 8.

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết ta có : $g(x) = f(x+a) + b \Leftrightarrow 2(x+a)^2 + (x+a) - 1 + b = 2x^2 - 3x + 3$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + (4a+1)x + 2a^2 + a + b - 1 = 2x^2 - 3x + 3$$

Bằng việc đồng nhất hệ số ta suy ra :

$$\begin{cases} 2 = 2 \\ 4a + 1 = -3 \\ 2a^2 + a + b - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow a + b = 2$$

$$y = f(x) = \frac{m\sqrt{2+x} + (m^2 - 2)\sqrt{2-x}}{(m^2 - 1)x}$$

Cho hàm số

Câu 14. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{1}{(m^2 - 1)x}$ có đồ thị là (C_m) .

Số giá trị của m để (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$D = [-2; 2] \setminus \{0\}$$

Hàm số có tập xác định là:

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

. Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ là hàm chẵn.

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{2+x} + (m^2-2)\sqrt{2-x}}{(m^2-1)x} = \frac{m\sqrt{2-x} + (m^2-2)\sqrt{2+x}}{(m^2-1)(-x)}, (m \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow -m\sqrt{2+x} - (m^2-2)\sqrt{2-x} = m\sqrt{2-x} + (m^2-2)\sqrt{2+x}$$

$$\Leftrightarrow (m^2 + m - 2) \left(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x} \right) = 0, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1(L) \\ m = -2 \end{cases}$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Biết rằng $\Delta_m : y = (2m - 1)x + m^2 + 4$ luôn tiếp xúc với parabol (P) cố định và

Câu 15. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{m\sqrt{2+x} + (m^2-2)\sqrt{2-x}}{(m^2-1)x}$ có đồ thị là (C_m) .

Số giá trị của m để (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là:

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$D = [-2; 2] \setminus \{0\}$$

Hàm số có tập xác định là:

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ là hàm chẵn.

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{2+x} + (m^2-2)\sqrt{2-x}}{(m^2-1)x} = \frac{m\sqrt{2-x} + (m^2-2)\sqrt{2+x}}{(m^2-1)(-x)}, (m \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow -m\sqrt{2+x} - (m^2-2)\sqrt{2-x} = m\sqrt{2-x} + (m^2-2)\sqrt{2+x}$$

$$\Leftrightarrow (m^2+m-2)(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}) = 0, \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1(L) \\ m=-2 \end{cases}$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Biết rằng $\Delta_m: y = (2m-1)x + m^2 + 4$ luôn tiếp xúc với parabol (P) cố định và

$$y = f(x) = \frac{m\sqrt{2+x} + (m^2-2)\sqrt{2-x}}{(m^2-1)x}$$

Câu 16. Cho hàm số có đồ thị là (C_m) .

Số giá trị của m để (C_m) nhận trục Oy làm trục đối xứng là:

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$D = [-2; 2] \setminus \{0\}$$

Hàm số có tập xác định là:

$$\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

Đồ thị hàm số nhận trục Oy làm trục đối xứng khi và chỉ khi hàm số $y = f(x)$ là hàm chẵn.

$$\Leftrightarrow f(-x) = f(x), \forall x \in D$$

$$\Leftrightarrow \frac{m\sqrt{2+x} + (m^2-2)\sqrt{2-x}}{(m^2-1)x} = \frac{m\sqrt{2-x} + (m^2-2)\sqrt{2+x}}{(m^2-1)(-x)}, (m \neq \pm 1)$$

$$\Leftrightarrow -m\sqrt{2+x} - (m^2-2)\sqrt{2-x} = m\sqrt{2-x} + (m^2-2)\sqrt{2+x}$$

$$\Leftrightarrow (m^2+m-2)(\sqrt{2-x} + \sqrt{2+x}) = 0, \forall x \in D$$

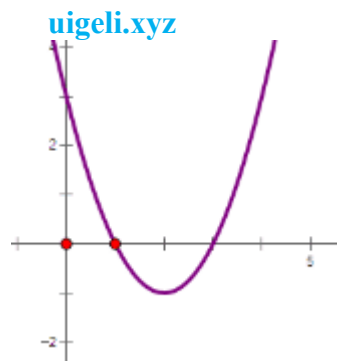
$$\Leftrightarrow m^2+m-2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=1(L) \\ m=-2 \end{cases}$$

Vậy có một giá trị của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Biết rằng $\Delta_m: y = (2m-1)x + m^2 + 4$ luôn tiếp xúc với parabol (P) cố định và

VẤN ĐỀ 3 ĐỒ THỊ VÀ ỨNG DỤNG

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $ax^2 + b|x| + c = m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt.
A. 2. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 5.

Lời giải

Chọn B

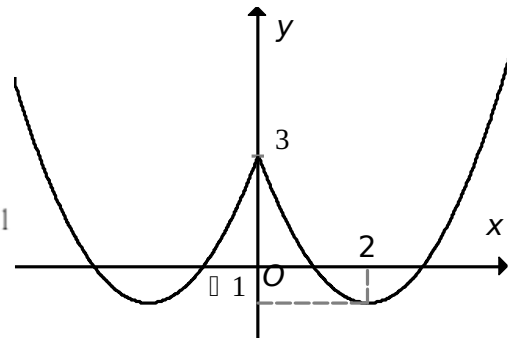
Phương trình có dạng $x^2 - 4|x| + 3 = m + 1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$.

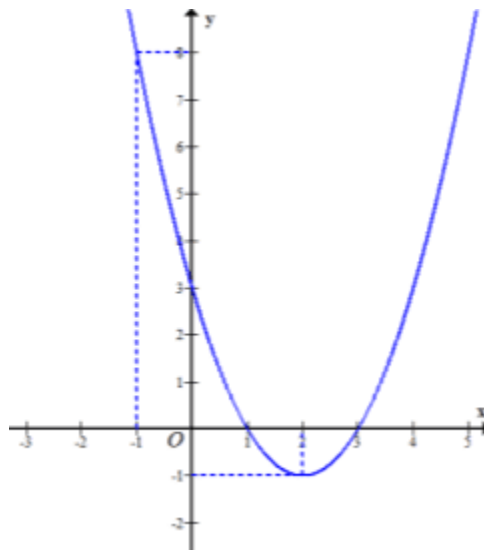
Dựa vào đồ thị ta có phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2$$



Câu 2. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị là đường cong trong hình vẽ dưới đây



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(|x|+1)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt thuộc đoạn $[-2; 2]$. Số phần tử của S là

A. 7. **B.** 8. **C.** 3. **D.** 4.

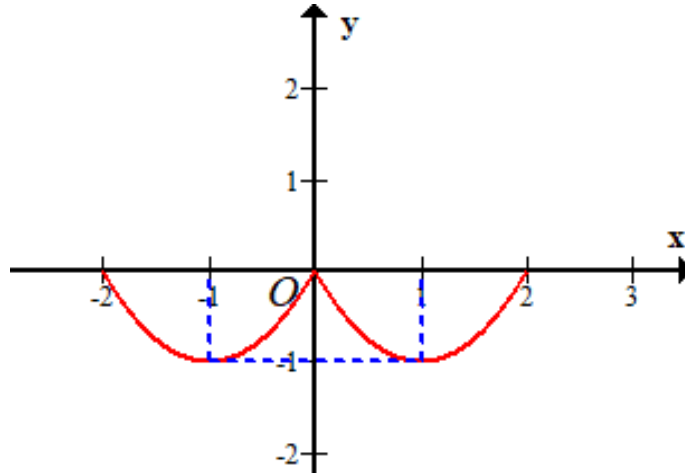
Lời giải

Chọn D

Gọi (P) là đồ thị hàm số $y = f(x)$

Vẽ đồ thị (P_1) của đồ thị hàm số $y = f(x+1)$ bằng cách: Tịnh tiến đồ thị (P) của hàm số $y = f(x)$ theo phương của trục hoành sang trái 1 đơn vị.

Vẽ đồ thị (P_2) của hàm số $y = f(|x|+1)$ bằng cách: Giữ nguyên đồ thị (P_1) nằm bên phải trục tung rồi lấy đối xứng phần đó chính phần đồ thị đó qua trục tung, ta được đồ thị (P_2) của hàm số $y = f(|x|+1)$. Do đó, ta có đồ thị hàm số $y = f(|x|+1)$



Đặt $t = f(|x|+1)$, với $x \in [-2; 2] \Rightarrow t \in [-1; 0]$.

Ta có phương trình $f(t) = m$ (1).

Nếu $t = 0$ cho ta ba nghiệm phân biệt $x \in [-2; 2]$.

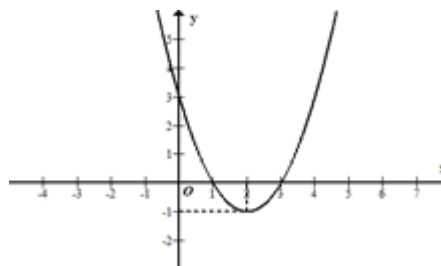
Nếu $t = -1$ cho ta hai nghiệm phân biệt $x \in [-2; 2]$.

Nếu $t \in (-1; 0)$ thì mỗi giá trị của t cho ta bốn nghiệm phân biệt $x \in [-2; 2]$.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ phương trình (1) có đúng 1 nghiệm $t \in (-1; 0) \Leftrightarrow f(0) < m < f(-1) \Leftrightarrow 3 < m < 8$.

Vậy S có tất cả 4 phần tử.

Câu 3. Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có đồ thị như hình vẽ bên. Gọi $S = (n; p)$ là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $2ax^2 + 2b|x| + 2c + m - 6 = 0$ có bốn nghiệm phân biệt. Tính $2019n + 200p$.



A. 8000.

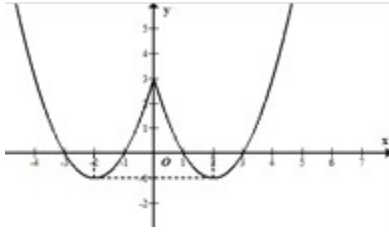
B. 1600.

C. 16000.

D. 800.

Lời giải

Chọn B



$$2ax^2 + 2b|x| + 2c + m - 6 = 0 \Leftrightarrow ax^2 + 2b|x| + c = -\frac{m}{2} + 3$$

Đồ thị hàm số $y = ax^2 + b|x| + c$ như hình vẽ bên

Từ đồ thị hàm số ta thấy:

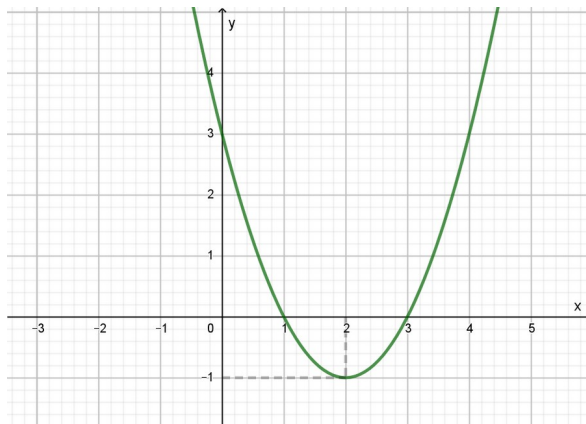
Điều kiện để có 4 nghiệm phân biệt là

$$-1 < -\frac{m}{2} + 3 < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 8.$$

Su ra $n = 0; p = 8$.

$$\text{Vậy } 2019n + 200p = 1600.$$

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) (như hình vẽ). Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0$ có 6 nghiệm phân biệt?



A. $m = 4$.

B. $m = 3$.

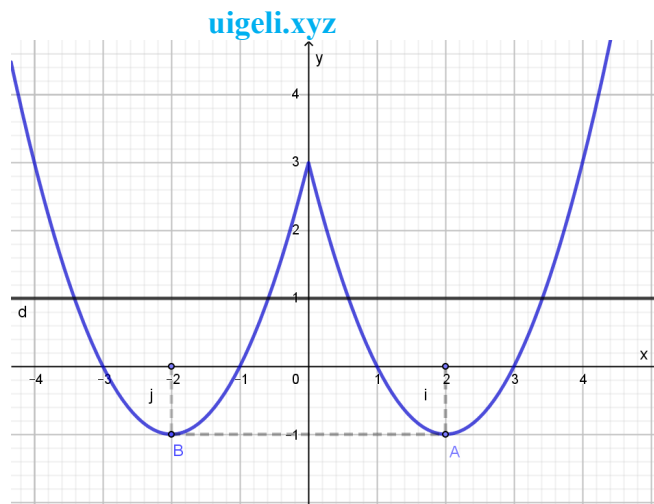
C. $m = 2$.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn B

* Vẽ đồ thị hàm số (C') của hàm số $y = f(|x|)$: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy , bỏ đi phần đồ thị (C) bên trái trục Oy và lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía bên phải trục Oy qua trục Oy .



* Ta có $f^2(|x|) + (m-2)f(|x|) + m-3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(|x|) = -1 \\ f(|x|) = 3-m \end{cases}$.

* Từ đồ thị (C') , ta có:

- Phương trình $f(|x|) = -1$ có hai nghiệm là $x = 2, x = -2$.

- Yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow$ phương trình $f(|x|) = 3-m$ có bốn nghiệm phân biệt khác $\pm 2 \Leftrightarrow$ Đường thẳng $d: y = 3-m$ cắt đồ thị (C') tại bốn điểm phân biệt khác A, B

$\Leftrightarrow -1 < 3-m < 3 \Leftrightarrow 0 < m < 4$. Suy ra $m \in \{1, 2, 3\}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (C) . Giả sử $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng $d: y = 4x - 15$ là nhỏ nhất. Tính $S = x_0 + y_0$.

A. 4.

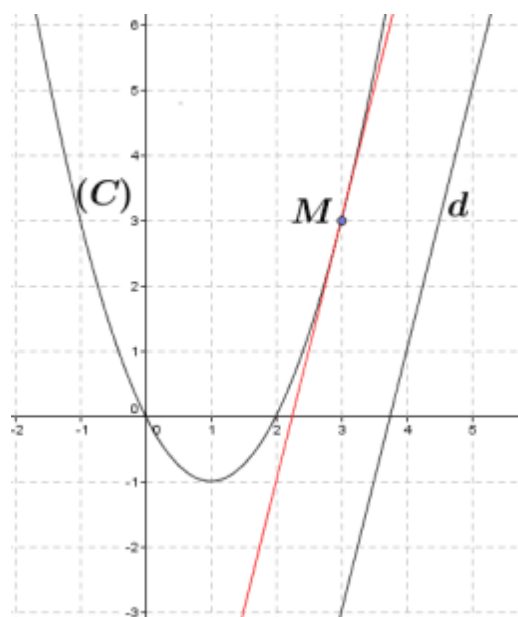
B. 6.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn B



Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) sao cho Δ song song với đường thẳng $d: y = 4x - 15$.

Δ có phương trình là $y = 4x - 9$.

Giao điểm của Δ và (C) là $M(3;3)$.
 $M(3;3)$ là điểm cần tìm.

Do đó $S = x_0 + y_0 = 6$.

- Câu 6.** Cho parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$, biết (P) đi qua điểm A(1;5) và các điểm cố định của họ parabol $(P_m): y = (m-1)x^2 + x - 3m + 1$. Tính tổng $T = 2a + b + c$.
A. 1. **B.** 2 **C.** 6 **D.** 4

Lời giải

Cách 1: Gọi $(x_0; y_0)$ là các điểm cố định của (P_m) .

Khi đó:

$$\begin{aligned} y_0 &= (m-1)x_0^2 + x_0 - 3m + 1, \forall m \in R \\ \Leftrightarrow m(x_0^2 - 3) - x_0^2 + x_0 + 1 - y_0 &= 0, \forall m \in R \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ -x_0^2 + x_0 + 1 - y_0 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ y_0 = x_0 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \sqrt{3}; y_0 = \sqrt{3} - 2 \\ x_0 = -\sqrt{3}; y_0 = -\sqrt{3} - 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Vì (P) đi qua A và đi qua các điểm cố định của (P_m) nên ta có hệ:

$$\begin{cases} a + b + c = 5 \\ 3a + \sqrt{3}b + c = \sqrt{3} - 2 \\ 3a - \sqrt{3}b + c = -\sqrt{3} - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 1 \\ c = 7 \end{cases} \Rightarrow T = 2$$

Chọn B

Cách 2: Gọi $(x_0; y_0)$ là các điểm cố định của (P_m) .

$$\begin{aligned} y_0 &= (m-1)x_0^2 + x_0 - 3m + 1, \forall m \in R \\ \Leftrightarrow m(x_0^2 - 3) - x_0^2 + x_0 + 1 - y_0 &= 0, \forall m \in R \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ -x_0^2 + x_0 + 1 - y_0 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2 - 3 = 0 \\ y_0 = x_0 - 2 \end{cases} \Rightarrow y_0 = k(x_0^2 - 3) + x_0 - 2 \end{aligned}$$

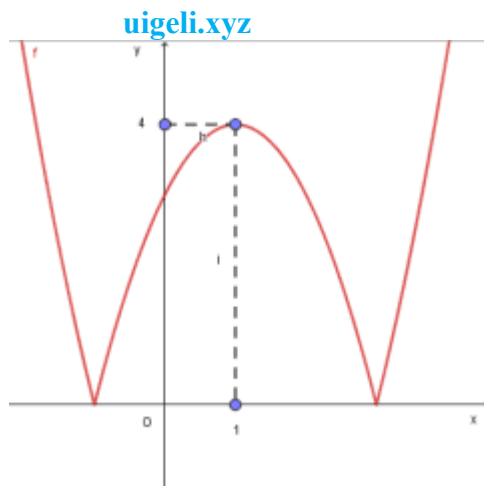
Vì (P) luôn đi qua các điểm cố định của họ (P_m) nên phương trình parabol (P) có dạng:
 $y = k(x^2 - 3) + x - 2$

(P) đi qua A(1;5) nên ta có

$$\begin{aligned} 5 &= k(1^2 - 3) + 1 - 2 \Leftrightarrow k = -3 \Rightarrow (P): y = -3(x^2 - 3) + x - 2 \Leftrightarrow y = -3x^2 + x + 7 \\ \Rightarrow a &= -3; b = 1; c = 7 \Rightarrow a + b + c = 5 \end{aligned}$$

Chọn B

- Câu 7.** Hàm số $y = |x^2 + bx + c|$ có đồ thị như hình vẽ.



Khi đó $S = b - c$ bằng

A. $S = 1$.

B. $S = 2$.

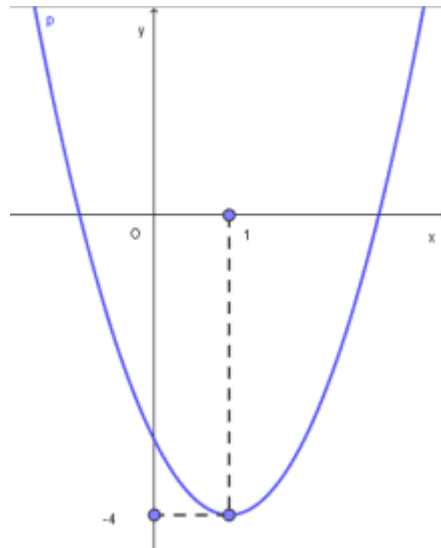
C. $S = 3$.

D. $S = 4$.

Lời giải

Chọn A

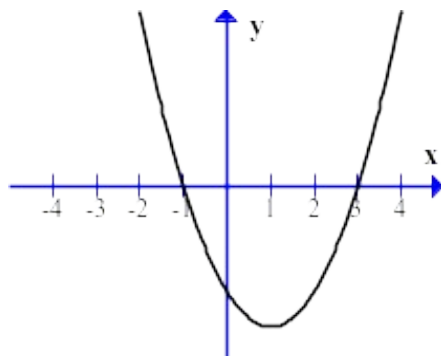
Từ đồ thị hàm số $y = |x^2 + bx + c|$ như hình trên, ta suy ra đồ thị hàm số $y = x^2 + bx + c$ như sau



Suy ra parabol $y = x^2 + bx + c$ có đỉnh $I(1; -4)$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2} = 1 \\ 1 + b + c = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2 \\ c = -3 \end{cases} \Rightarrow S = b - c = 1.$$

Câu 8. Cho hàm số $y = f(x)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$ và đồ thị như hình vẽ



Biểu thức $f(x^2 - 1)$ nhận giá trị dương trên

- A.** $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ **B.** $(-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$ **C.** $(-2; 2)$ **D.** $(-1; 3)$

Lời giải

Chọn A

$$f(x^2 - 1) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 1 < -1 \\ x^2 - 1 > 3 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 > 4 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$$

Câu 9. Cho hai parabol: $(P_1): y = x^2 - mx + n; (P_2): y = (1 - m)x^2 + 2(m + 1)x - 6$ ($m \neq 1$). Có bao nhiêu cặp số $(m; n)$ để hai parabol trên không có cùng trục đối xứng nhưng đi qua đỉnh của nhau?

- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Hoành độ hai đỉnh của $(P_1); (P_2)$ thứ tự là $\frac{m}{2}; \frac{m+1}{m-1}$. Theo yêu cầu đề bài chúng phải phân biệt và là hai nghiệm của phương trình hoành độ:

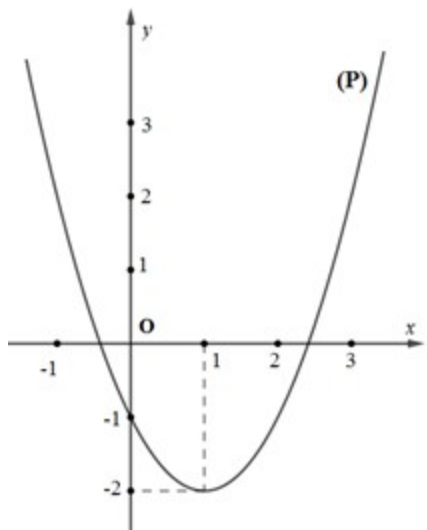
$$\frac{m}{2} + \frac{m+1}{m-1} = \frac{3m+2}{m} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m^2 - 3m - 2 = 0 \end{cases} (*)$$

Từ đó theo định lý Viet ta có

Mà $\frac{m}{2} = \frac{m+1}{m-1} \Leftrightarrow (*)$ nên ta chỉ có giá trị duy nhất của m thỏa mãn là $m = 2$, suy ra $n = 0$

Chọn B

Câu 10. Cho đồ thị hàm số $y = x^2 - 2x - 1$ (P) (hình vẽ bên).



Dựa vào đồ thị (P) xác định số giá trị nguyên dương của m

để phương trình $x^2 - 2x + 2m - 2 = 0$ có nghiệm $x \in [-1; 2]$

- A.** 0.
B. 1.
C. 2.
D. 3.

Chọn B

Phương trình $x^2 - 2x + 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 1 = 1 - 2m$ (*)

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị $y = x^2 - 2x - 1$ và đường thẳng $y = 1 - 2m$

Quan sát đồ thị hàm số, ta thấy:

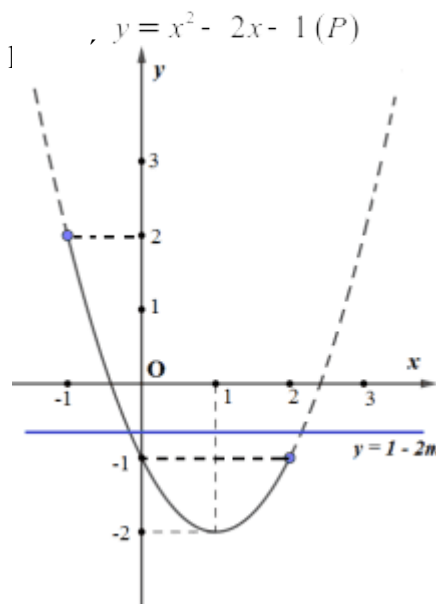
với $x \in [-1; 2]$ thì $y \in [-2; 2]$.

Do đó, để phương trình (*) có nghiệm thì

$$-2 \leq 1 - 2m \leq 2 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{3}{2}$$

Mà m là số nguyên dương $\Rightarrow m = 1$

Vậy có duy nhất 1 giá trị nguyên dương của m thỏa mãn yêu cầu đề bài.



Câu 11. Cho hai đường thẳng $d_1: y = mx - 4$ và $d_2: y = -mx - 4$. Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên dương của m để tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành có diện tích lớn hơn hoặc bằng 8. Tính tổng các phần tử của tập S .

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy rằng d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại điểm $A(0; -4)$ nằm trên trục tung.

Nếu $m = 0$ thì d_1 và d_2 là hai đường thẳng trùng nhau nên d_1, d_2 và trục Ox không tạo thành tam giác (không thỏa mãn ycbt).

Do đó $m \neq 0$, giả sử d_1 cắt Ox tại $B\left(\frac{4}{m}; 0\right)$, d_2 cắt Ox tại $C\left(-\frac{4}{m}; 0\right)$.

Tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành là tam giác ABC .

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |x_B - x_C| = 2 \cdot \frac{8}{|m|} = \frac{16}{|m|}$$

Diện tích tam giác tạo thành là:

$$S_{\Delta ABC} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{16}{|m|} \geq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Ta có

Suy ra $S = \{1; 2\}$. Vậy tổng các phần tử của tập S bằng 3.

+ Nếu được nên có hình vẽ thì hay hơn

+ Do đó $m \neq 0$, giả sử d_1 cắt Ox tại $B\left(\frac{4}{m}; 0\right)$, d_2 cắt Ox tại $C\left(-\frac{4}{m}; 0\right)$.

Theo tôi câu này nên bỏ từ giả sử

Câu 12. Gọi (H) là tập hợp các điểm $M(x; y)$ thỏa mãn hệ thức $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{4y^2 + 4y + 1} = 6$, trục Ox chia hình (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 trong đó S_1 là phần diện tích nằm phía trên trục hoành. Tỉ số $\frac{S_1}{S_2}$ là:

A. $\frac{25}{47}$.

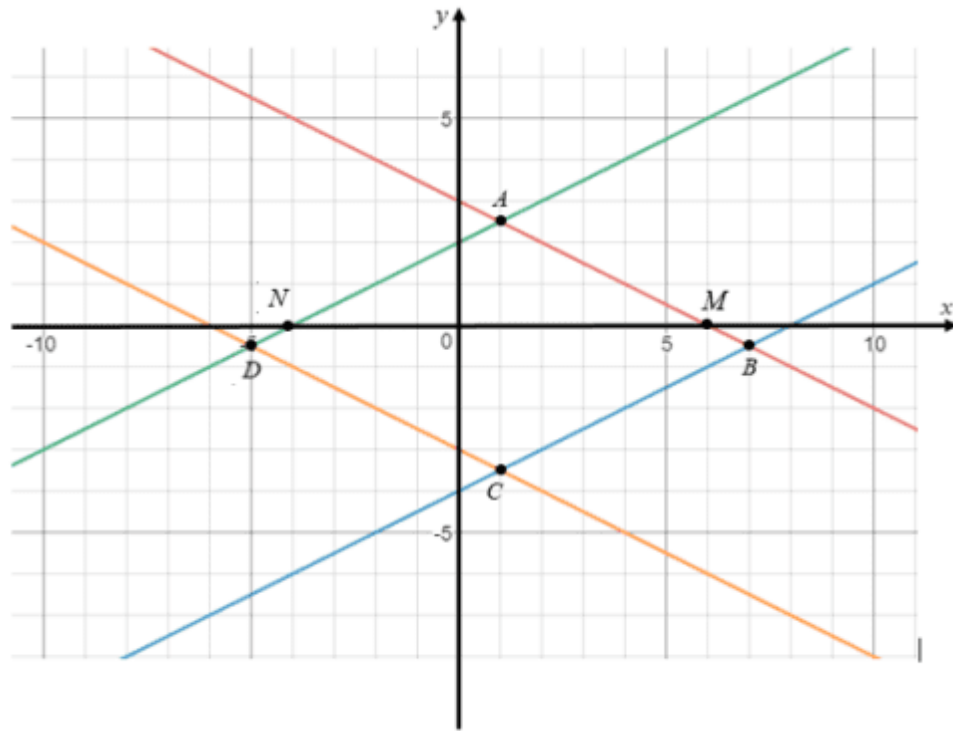
B. $\frac{47}{25}$.

C. $\frac{25}{36}$.

D. $\frac{25}{144}$.

Lời giải

Chọn A



Hệ thức $\sqrt{x^2 - 2x + 1} + \sqrt{4y^2 + 4y + 1} = 6 \Leftrightarrow |x - 1| + |2y + 1| = 6$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 6 \text{ vs } x \geq 1; y \geq -\frac{1}{2} \\ x - 2y = 8 \text{ vs } x \geq 1; y \leq -\frac{1}{2} \\ -x + 2y = 4 \text{ vs } x \leq 1; y \geq -\frac{1}{2} \\ -x - 2y = 6 \text{ vs } x \leq -1; y \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Hình (H) là hình thoi $ABCD$ với điểm $A\left(1; \frac{5}{2}\right), B\left(7; \frac{1}{2}\right), C\left(1; -\frac{7}{2}\right), D\left(-5; \frac{1}{2}\right)$

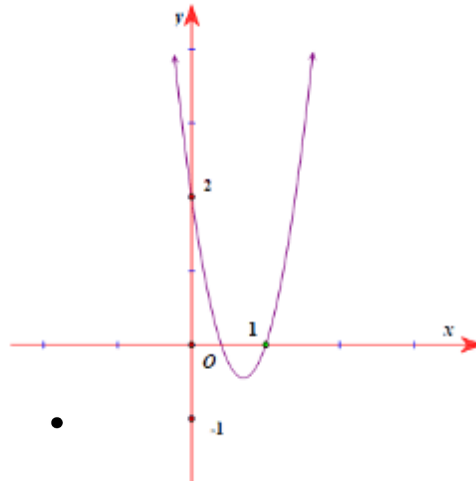
Tọa độ điểm $M(6; 0), N(-4; 0)$

Để thấy $BD = 12, AC = 6 \Rightarrow S_{(H)} = S_{ABCD} = \frac{1}{2} AC \cdot BD = 36$

Diện tích tam giác AMN : $S_{AMN} = \frac{1}{2} \cdot MN \cdot |y_A| = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

Như vậy $S_1 = \frac{25}{2}, S_2 = 36 - \frac{25}{2} = \frac{47}{2} \Rightarrow \frac{S_1}{S_2} = \frac{25}{47}$.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, có đồ thị như hình vẽ.



Số nghiệm thực của phương trình $\frac{4f(|x|) - 1}{f(|x|) + 1} = 2$ là?

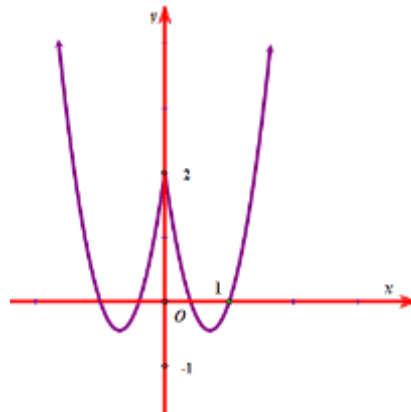
A. 0. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Lời giải

Họ và tên tác giả: Trần Đông Phong Tên FB: Phong Do

Chọn D

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x)$, suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$



Ta có: $f(|x|) + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Do đó phương trình $\frac{4f(|x|) - 1}{f(|x|) + 1} = 2 \Leftrightarrow 4f(|x|) - 1 = 2(f(|x|) + 1) \Leftrightarrow f(|x|) = \frac{3}{2}$ (1).

Số nghiệm của phương trình (1) là số giao điểm của đồ thị $y = f(|x|)$ với đường thẳng $y = \frac{3}{2}$.

Dựa vào đồ thị ta thấy phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt.

Vậy phương trình đã cho có bốn nghiệm.

Câu 14. Tính tổng bình phương các giá trị của m để phương trình $x^2 - 2x = 1 - m - |x - 1|$ có nghiệm duy nhất.

A. $P = 1$.

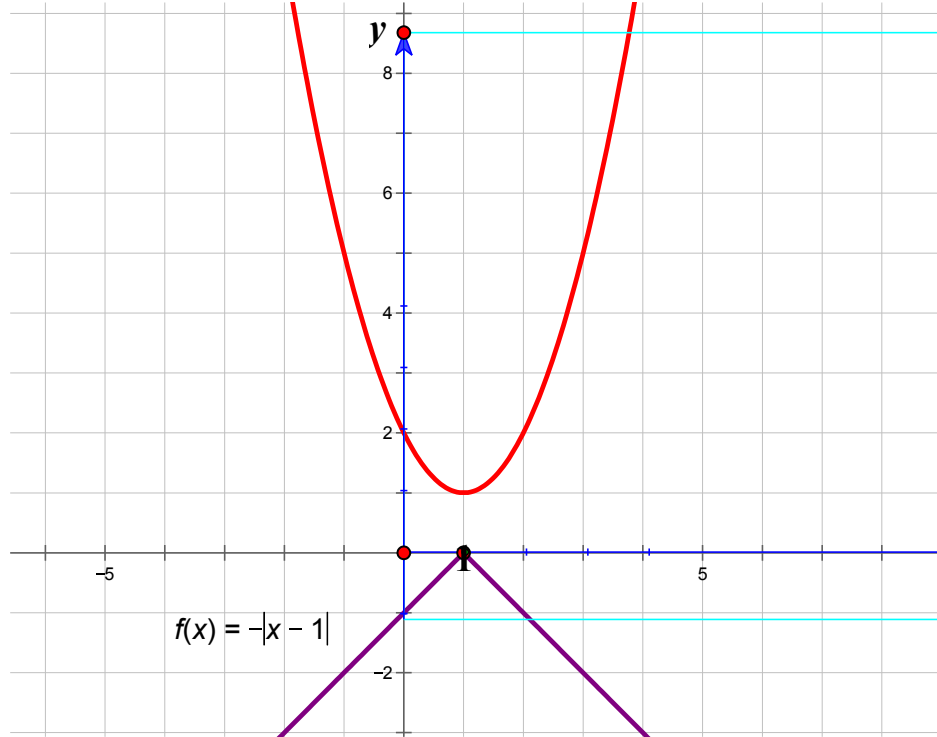
B. $P = 4$.

C. $P = 5$.

D. $P = \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

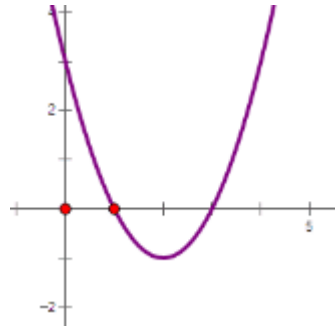


Biến đổi phương trình $x^2 - 2x + m - 1 = -|x - 1|$.

Mà số nghiệm là số giao điểm của hai đồ thị $y = x^2 - 2x + m - 1$ và $y = -|x - 1|$ trong đó $(P): y = x^2 - 2x + m - 1$ có trục đối xứng $x = 1$ nên muốn có nghiệm duy nhất thì $(1; 0)$ phải là đỉnh của (P) . Suy ra $m = 2$.

Câu 15.

Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị sau



Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để $ax^2 + b|x| + c = m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt.

- A. 2. B. 3. C. 4. D. 5.

Lời giải

Chọn B

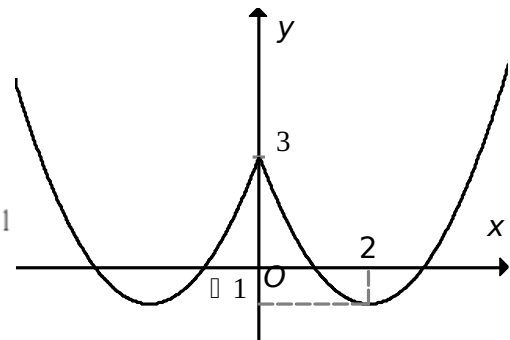
Phương trình có dạng $x^2 - 4|x| + 3 = m + 1$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = x^2 - 4|x| + 3$.

Dựa vào đồ thị ta có phương trình $x^2 - 4|x| + 3 = m + 1$ có bốn nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3$$

$$\Leftrightarrow -2 < m < 2$$



Câu 16. Cho phương trình $|-x^2 + 2|x| + 3| - 2m + 1 = 0$. Giá trị m để phương trình có bốn nghiệm

- A. 2. B. 1.
C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$|-x^2 + 2|x| + 3| - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow |-x^2 + 2|x| + 3| = 2m - 1$$

Số nghiệm của phương trình chính là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = |-x^2 + 2|x| + 3|$ và đường thẳng $y = 2m - 1$. Xét hàm số $y = |-x^2 + 2|x| + 3|$

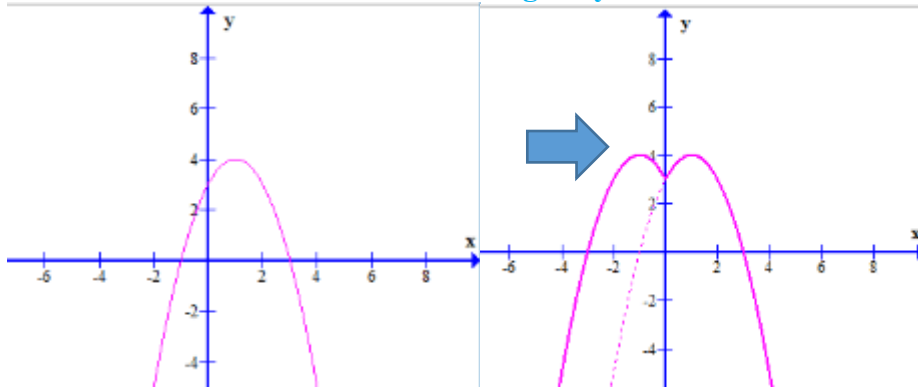
Vẽ từ trong ra ngoài

+Vẽ đồ thị $y = -x^2 + 2x + 3$ (C)

+Vẽ đồ thị $y_1 = f(|x|)$ có đồ thị (C₁)

- Giữ nguyên phần đồ thị của (C) nằm bên phải trục tung.

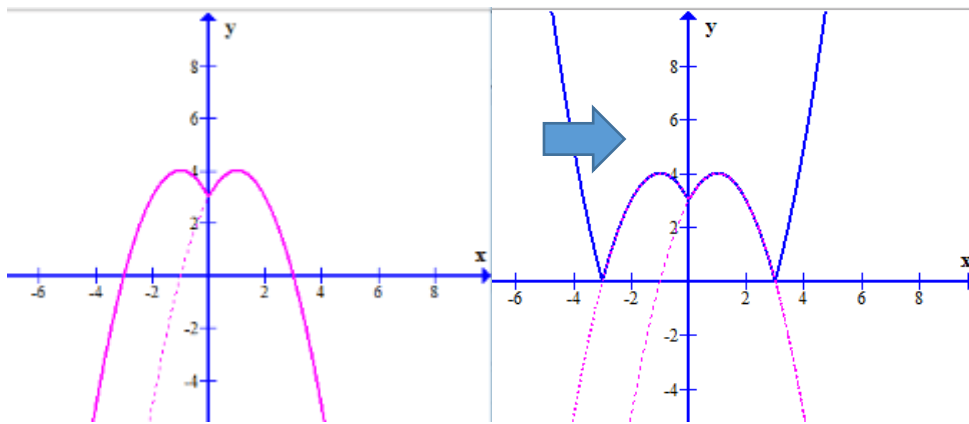
- Lấy đối xứng qua trục tung phần đồ thị (C) nằm bên phải trục tung.



+ Vẽ đồ thị hàm số $y_2 = |y_1|$ có đồ thị (C_2)

- Giữ nguyên đồ thị của (C_1) nằm trên trục hoành.

- Lấy đối xứng qua trục hoành phần đồ thị (C_1) nằm dưới trục hoành.



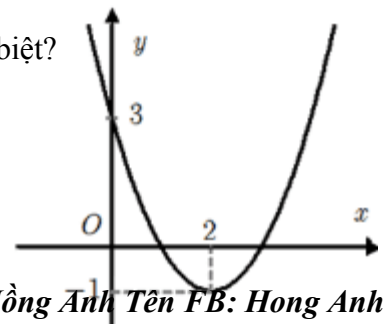
$$\begin{cases} 0 < 2m - 1 < 3 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2} < m < 2 \\ m = \frac{5}{2} \end{cases}$$

Từ đồ thị dễ phương trình có bốn nghiệm khi nguyên.

. Vậy có 1 giá trị

Câu 17: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để phương trình $f(|x - 2018|) = |m - 2018|$ có đúng hai nghiệm phân biệt?

- A. $m \in (-\infty; 2015] \cup [2021; +\infty)$.
 B. $m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty) \cup \{2017; 2019\}$.
 C. $m \in (2015; 2021)$.
 D. $m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty)$.



Họ và tên tác giả : Đỗ Thị Hồng Anh Tên FB: Hong Anh

Lời giải

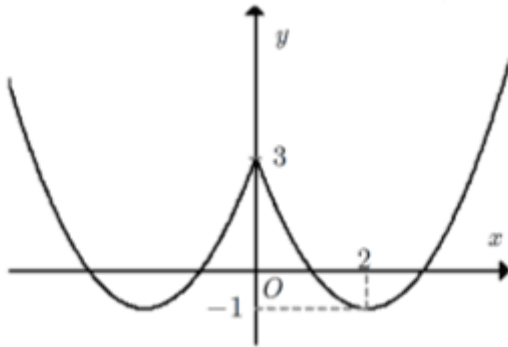
Chọn D

Đặt $t = |x - 2018|, t \geq 0$, phương trình $f(|x - 2018|) = |m - 2018|$ (1) trở thành : $f(t) = |m - 2018|$ (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có hai nghiệm trái dấu hoặc có nghiệm kép dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m-2018| > 3 \\ |m-2018| = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty)$$



VẤN ĐỀ 4 SỰ TƯƠNG GIAO

$$y = ax^2 + bx + c$$

Câu 1. Cho Parabol (P): có đỉnh I.

Biết (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B và tam giác ABI vuông cân. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng?

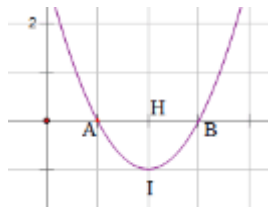
A. $b^2 - 4ac - 4 = 0$

B. $b^2 - 4ac + 6 = 0$

C. $b^2 - 4ac - 16 = 0$

D. $b^2 - 4ac - 8 = 0$

Giải



ĐK để (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt: $\Delta > 0$

Khi đó hoành độ của A, B là: $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$; $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$AB = |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Tọa độ I là: $I\left(\frac{-b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên Ox thì H là trung điểm AB và $IH = \left| \frac{-\Delta}{4a} \right|$

YCBT $\left| \frac{-\Delta}{4a} \right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|} \Leftrightarrow \frac{\Delta^2}{16a^2} = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \Delta = 4$

Câu 2. Biết đồ thị hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) có điểm chung duy nhất với đường thẳng $y = 2$ tại hai điểm có hoành độ lần lượt là -1 và 5 . Tính $P = a + b + c$.

- A. 1. B. 0. C. -1. D. -2.

Lời giải

Chọn D

Gọi (P): $y = ax^2 + bx + c$, ($a \neq 0$)

Ta có:

+) (P) đi qua hai điểm $(-1; 2); (5; 2)$ nên ta có
$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ 25a + 5b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -4a \\ c = 2 - 5a \end{cases}$$

+) (P) có một điểm chung với đường thẳng $y = -2,5$ nên
$$\frac{-\Delta}{4a} = -2,5 \Leftrightarrow 36a^2 - 18a = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}, \quad b = -2; c = -\frac{1}{2}.$$
 Do đó:

Vậy **Chọn D**

Câu 3. Cho parabol (P) $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ biết:

(P) đi qua $M(4; 3)$ cắt Ox tại $N(3; 0)$ và Q sao cho $DINQ$ có diện tích bằng 1 biết hoành độ điểm Q nhỏ hơn 3 với I là đỉnh của (P). Tính $a + b + c$

- A. 1. B. -2. C. 0. D. -1

Lời giải

Chọn C

Vì (P) đi qua $M(4; 3)$ nên $3 = 16a + 4b + c$ (1)

Mặt khác (P) cắt Ox tại $N(3; 0)$ suy ra $0 = 9a + 3b + c$ (2), (P) cắt Ox tại Q nên $Q(t; 0)$, $t < 3$

$$\begin{cases} t + 3 = -\frac{b}{a} \\ 3t = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Theo định lý Viét ta có

Ta có $S_{DINQ} = \frac{1}{2} IH \cdot NQ$ với H là hình chiếu của I lên trục hoành

Do $IH = \left| -\frac{D}{4a} \right|$, $NQ = 3 - t$ nên $S_{DINQ} = 1 \Rightarrow \left| -\frac{D}{4a} \right| \cdot (3 - t) = 1$

$$\hat{U} \left(3 - t \right) \left| \frac{2}{a} - \frac{c}{a} \right| = \left| \frac{2}{a} \right| \hat{U} \left(3 - t \right) \left| \frac{(t+3)^2}{4} - 3t \right| = \left| \frac{2}{a} \right| \hat{U} \left(3 - t \right)^3 = \frac{8}{|a|} \quad (3)$$

Từ (1) và (2) ta có $7a + b = 3 \hat{U} b = 3 - 7a$ suy ra $t + 3 = -\frac{3-7a}{a} \hat{U} \frac{1}{a} = \frac{4-t}{3}$

Thay vào (3) ta có $(3-t)^3 = \frac{8(4-t)}{3} \hat{U} 3t^3 - 27t^2 + 73t - 49 = 0 \hat{U} t = 1$

Suy ra $a = 1 \vee b = -4 \vee c = 3$.

Vậy (P) cần tìm là $y = x^2 - 4x + 3$.

$$y = x^2 + mx + 13$$

Câu 4. Cho đồ thị hàm số (P) trong đó x là ẩn, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu

giá trị của $m \in \mathbb{R}$ sao cho khoảng cách từ gốc 0 của hệ trục tọa độ đến đỉnh của Parabol (P) bằng 5.

3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** có vô số giá trị.

A.

Lời giải

Đáp án B

$$\begin{cases} x = -\frac{m}{2} \\ y = \frac{52-m^2}{4} \end{cases} \quad (*)$$

Tọa độ đỉnh I của (P) là:

$$OI = 5 \Leftrightarrow \left(\frac{-m}{2} \right)^2 + \left(\frac{52-m^2}{4} \right)^2 = 25$$

Khoảng cách từ điểm gốc tọa độ đến I:

$$\Leftrightarrow m^4 - 100m^2 + 2304 = 0 \text{ Đặt } t = m^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 100t + 2304 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 64 \\ t = 36 \end{cases} \Rightarrow m = \{\pm 8; \pm 6\}$$

Câu 5. Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 4$ có đồ thị (d) và đường thẳng $d: y = 2mx - m^2$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16$.

- A.** 1. **B.** 3. **C.** 4. **D.** 6.

Lời giải.

Chọn A.

+ Pt hoành độ giao điểm của (d) và (P) là: $x^2 - 2(m+1)x + m^2 + 4 = 0$ (1)

+ Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ là x_1, x_2 thì pt (1) có $\Delta' > 0$

$$\Leftrightarrow (m+1)^2 - (m^2 + 4) > 0 \Leftrightarrow m > \frac{3}{2} \quad (2) \quad \begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = m^2 + 4 \end{cases} \text{Theo Vi-et ta có:}$$

$$\text{Từ yêu cầu ta có } x_1^2 + 2(m+1)x_2 \leq 3m^2 + 16 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + x_2)x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow (2m+2)^2 - m^2 - 4 \leq 3m^2 + 16$$

$$\Leftrightarrow 8m \leq 16$$

$$\Leftrightarrow m \leq 2$$

$$\text{So sánh với điều kiện } (2) \text{ suy ra } \frac{3}{2} < m \leq 2 \text{ do } m \text{ nguyên nên } m = \{2\}$$

$$y = f(x), y = g(x) \quad f(x) + 3f(2-x) = 4x^2 - 10x + 10$$

Câu 6. Cho hai hàm số bậc hai thỏa mãn ;

$g(0) = 9; g(1) = 10; g(-1) = 4$. Biết rằng hai đồ thị hàm số $y = f(x), y = g(x)$ cắt nhau tại hai điểm phân biệt là A, B . Đường thẳng d vuông góc với AB tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 36. Hỏi điểm nào dưới đây thuộc đường thẳng d

A. M(-2;1) **B.** N(-1;9) **C.** P(1;4) **D.** Q(3;5)

Lời giải

$$\text{Gọi hàm số } f(x) = ax^2 + bx + c \text{ ta có } f(x) + 3f(2-x) = 4x^2 - 10x + 10$$

$$\Leftrightarrow ax^2 + bx + c + 3[a(2-x)^2 + b(2-x) + c] = 4x^2 - 10x + 10$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ -2b - 12a = -10 \\ 12a + 6b + 4c = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^2 - x + 1$$

$$\text{Gọi hàm số } g(x) = mx^2 + nx + p \text{ ta có } g(0) = 9; g(1) = 10; g(-1) = 4 \text{ ra hệ giải được } m = -2; n = 3; p = 9 \Rightarrow g(x) = -2x^2 + 3x + 9$$

Khi đó tọa độ hai điểm A, B thỏa mãn hệ phương trình

$$\begin{cases} y = x^2 - x + 1 \\ y = -2x^2 + 3x + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y = 2x^2 - 2x + 2 \\ y = -2x^2 + 3x + 9 \end{cases} \Rightarrow 3y = x + 11$$

$$y = \frac{1}{3}x + \frac{11}{3} \Rightarrow d: y = -3x + k$$

Do đó đường thẳng AB: . Đường thẳng d cắt hai trục tọa độ tại

$$E(0; k); F\left(\frac{k}{3}; 0\right) \quad \frac{1}{2} \left| k \right| \left| \frac{k}{3} \right| = 6 \Leftrightarrow k = \pm 6$$

. Diện tích tam giác OEF là

$$d: y = -3x + 6, y = -3x - 6$$

Vậy phương trình đường thẳng d là: . Chọn đáp án **B.**

$$y = mx \quad y = 2x^2 + x - 3$$

Câu 7. Biết rằng đường thẳng luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt A và B, khi đó quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A. đường parabol $y = 4x^2 + 1$.

B. đường parabol $y = 4x^2 + x$.

C. đường thẳng $y = 4x + 1$.

D. đường thẳng $y = 4x + 4$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $2x^2 + x - 3 = mx \Leftrightarrow 2x^2 + (1-m)x - 3 = 0$.

Vì $\Delta = m^2 - 2m + 25$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m-1}{4} \\ y = mx \end{cases}$$

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là:

Do đó, quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng AB là đường parabol $y = 4x^2 + x$.

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

Câu 8. Cho hàm số có đồ thị như hình vẽ bên. Tìm tất cả các giá trị của m để

$$f(|x-2018|) = |m-2018|$$

phương trình

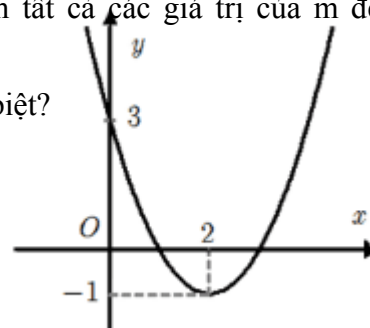
có đúng hai nghiệm phân biệt?

A. $m \in (-\infty; 2015] \cup [2021; +\infty)$.

B. $m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty) \cup \{2017; 2019\}$.

C. $m \in (2015; 2021)$.

D. $m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty)$.



Lời giải

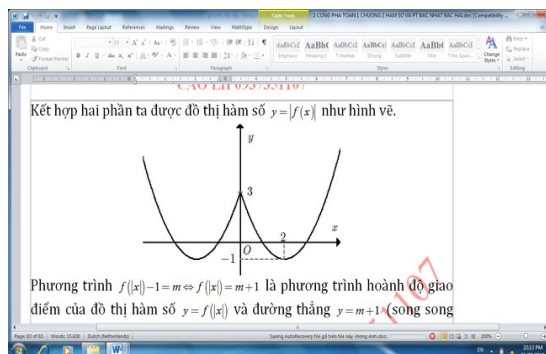
Chọn D

Đặt $t = |x-2018|$, phương trình $f(|x-2018|) = |m-2018|$ (1) trở thành: $f(t) = |m-2018|$ (2).

Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ phương trình (2) có đúng một nghiệm t dương

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |m-2018| > 3 \\ |m-2018| = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \in (-\infty; 2015) \cup (2021; +\infty)$$



Câu 9. Cho đường thẳng đi qua điểm $I(3;1)$, cắt hai tia Ox , Oy và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $2\sqrt{2}$. Tính giá trị của biểu thức $P = 2a + b^2$.

A. $P = 16$.

B. $P = 14$.

C. $P = 23$.

D. $P = 19$.

Lời giải

Họ và tên: Nguyễn Thị Hồng Vương Tên face: Nguyen Vuong

Chọn B

Đường thẳng $d: y = ax + b$ đi qua điểm $I(1; 3) \Leftrightarrow 1 = 3a + b$. (1)

Vì đường thẳng $d: y = ax + b$ cắt hai tia Ox , Oy và cách gốc tọa độ một khoảng bằng $\sqrt{5}$ nên $a < 0, b > 0$.

Ta có $d \cap Ox = A\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$; $d \cap Oy = B(0; b)$.

Suy ra $OA = \left|-\frac{b}{a}\right| = -\frac{b}{a}$ và $OB = |b| = b$ (do A, B thuộc hai tia Ox, Oy nên $a < 0, b > 0$).

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O trên đường thẳng d .

Xét tam giác AOB vuông tại O , có đường cao OH nên ta có

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} \Leftrightarrow \frac{1}{8} = \frac{a^2}{b^2} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow b^2 = 8a^2 + 8. \quad (2)$$

Từ (1) suy ra $b = 1 - 3a$. Thay vào (2), ta được

$$(1 - 3a)^2 = 8a^2 + 8 \Leftrightarrow a^2 - 6a - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 7 \end{cases} (L)$$

• Với $a = -1$, suy ra $b = 4$. Vậy $P = 2 \cdot (-1) + 4^2 = 14$

Câu 10. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = mx - m$. Gọi S là tập tất cả

các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ

$$x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{x_1^2 - mx_1 + 2m}{x_2} + \frac{x_2^2 - mx_2 + 2m}{x_1} = -4$$

. Tổng các phần tử của S là:

A. $\frac{13}{3}$.

B. $-\frac{13}{3}$.

C. $\frac{14}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 2x - 3 = mx - m \Leftrightarrow x^2 - (m + 2)x + m - 3 = 0 \quad (1)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m + 2)^2 - 4(m - 3) > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 16 > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 3$$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_1^2 - (m+2)x_1 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = (m+2)x_1 - m + 3$$

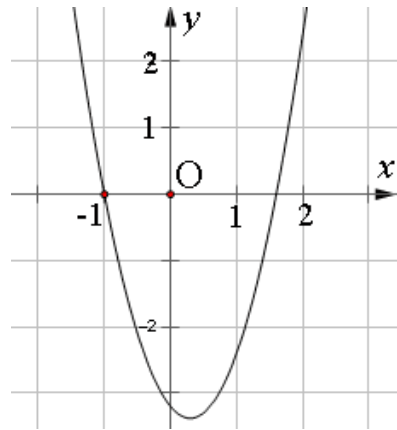
$$x_2^2 - (m+2)x_2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 = (m+2)x_2 - m + 3$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{x_1^2 - mx_1 + 2m}{x_2} + \frac{x_2^2 - mx_2 + 2m}{x_1} = \frac{2x_1 + m + 3}{x_2} + \frac{2x_2 + m + 3}{x_1} \\ &= \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + (m+3)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + (m+3)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{2(m+2)^2 - 4(m-3) + (m+3)(m+2)}{m-3} = \frac{3m^2 + 9m + 26}{m-3} \end{aligned}$$

$$T = -4 \Leftrightarrow \frac{3m^2 + 9m + 26}{m-3} = -4 \Leftrightarrow 3m^2 + 13m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = -2; m = -\frac{7}{3}$$

Tổng các giá trị của m là $-\frac{13}{3}$.

Câu 11. Cho hàm số $y = x^2 + ax + b$ có đồ thị là hình bên dưới. Đặt T là tổng các nghiệm của phương trình $(x+1)|x+b| = x$ trình: . T thuộc tập hợp nào sau đây ?



A. $(-3; -1)$

B. $(-1; 1)$

C. $(1; 3)$

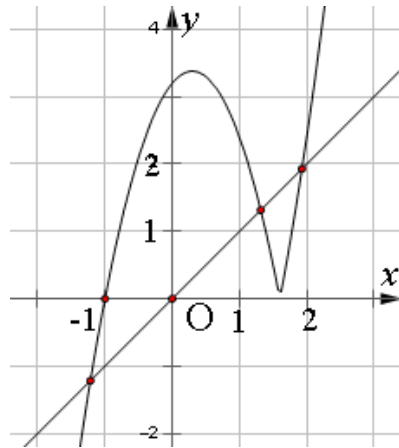
D. $(3; 5)$

Lời giải

Chọn C

Nhận thấy đồ thị hàm số cắt trục hoành tại $(-1; 0)$, phương trình $x^2 + ax + b = 0$ có hai nghiệm $-1, -b$. Giao điểm thứ hai của đồ thị và trục hoành là $(-b; 0)$. Ta có thể viết:
 $f(x) = x^2 + ax + b = (x+1)(x+b)$.

$g(x) = (x+1)|x+b| = \begin{cases} f(x), & \text{khi } x \geq -b \\ -f(x), & \text{khi } x < -b \end{cases}$. Suy ra đồ thị như hình vẽ:



Phương trình đề bài trở thành $g(x) = x$. Vẽ đường thẳng $y = x$, cắt đồ thị $y = g(x)$ tại ba điểm có hoành độ gần bằng $-1, 2, 1, 3, 1, 9$.

Tổng các nghiệm gần bằng 2. Đáp án **C**.

Câu 12. Cho parabol $(P): y = -x^2 + 1$ và đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ và có hệ số góc là k . Gọi

A và B là các giao điểm của (P) và (d) . Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 . Giá trị nhỏ

nhất của biểu thức $M = |x_1^3 - x_2^3|$ bằng:

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4.

Giải:

Chọn B

+ Đường thẳng (d) có pt: $y = kx$

+ PT tương giao (d) và (P) : $-x^2 + 1 = kx \Leftrightarrow x^2 + kx - 1 = 0(*)$

+ $(*)$ luôn có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 vì $\Delta = k^2 + 4 > 0 (\forall k)$

Theo Vi et có: $x_1 + x_2 = -k, x_1 x_2 = -1$

Ta có: $|x_1^3 - x_2^3| = |(x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2]| = |x_1 - x_2| \cdot |(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2|$

Có $|x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = k^2 + 4$

$\Rightarrow |x_1^3 - x_2^3| = \sqrt{k^2 + 4}(k^2 + 1) \geq 2, \forall k \in \mathbb{R}$.

Vậy GTNN của M bằng 2 khi $k = 0$.

$$|x^2 - 2|x| - m| = m^2$$

Câu 13. Có bao nhiêu giá trị của m để phương trình có đúng 5 nghiệm phân biệt?

- A.** 1. **B.** 2. **C.** 3. **D.** 4

Giải

Chọn A

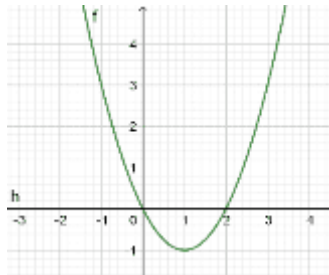
Do hàm số $y = f(x) = |x^2 - 2|x| - m|$ là hàm chẵn nó có đồ thị đối xứng qua trục Oy

Điều kiện cần để phương trình $f(x) = m^2$ có 5 nghiệm phân biệt là:

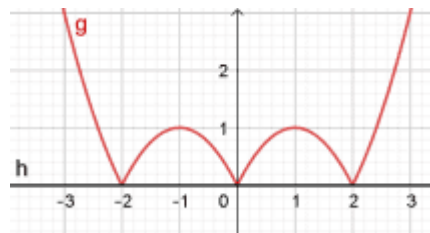
$$f(0) = m^2 \Rightarrow |m| = m^2 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \\ m = -1 \end{cases}$$

Thử lại: Từ đồ thị hàm số $y = g(x) = x^2 - 2|x|$ suy ra

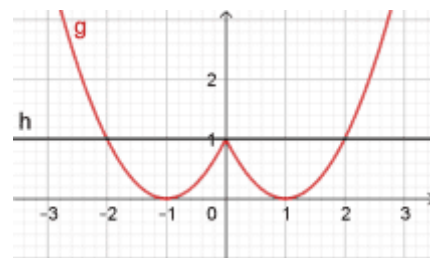
Các dạng đồ thị của hàm $y = f(x)$ cho 3 trường hợp



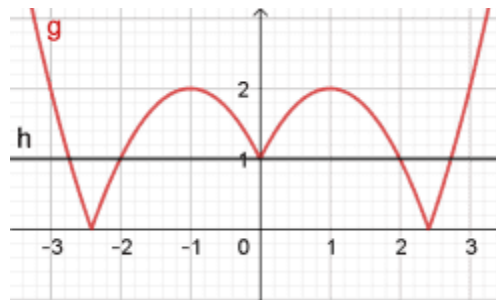
+ $m = 0$, phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt



+ $m = -1$, phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt



+ $m = 1$, phương trình đã cho có 5 nghiệm phân biệt



Vậy $m = 1$ thỏa điều kiện.

Câu 14. Cho hai đường thẳng $d_1 : y = mx - 4$ và $d_2 : y = -mx - 4$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành có diện tích lớn hơn hoặc bằng $\frac{8}{3}$?

A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn C

Ta thấy rằng d_1 và d_2 luôn cắt nhau tại điểm $A(0; -4)$ nằm trên trục tung.

Nếu $m = 0$ thì d_1 và d_2 là hai đường thẳng trùng nhau nên d_1, d_2 và trục Ox không tạo thành tam giác (không thỏa mãn ycbt).

Do đó $m \neq 0$, giả sử d_1 cắt Ox tại $B\left(\frac{4}{m}; 0\right)$, d_2 cắt Ox tại $C\left(-\frac{4}{m}; 0\right)$.

Tam giác tạo thành bởi d_1, d_2 và trục hoành là tam giác ABC .

Diện tích tam giác tạo thành là:
$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} OA \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot |x_B - x_C| = 2 \cdot \frac{8}{|m|} = \frac{16}{|m|}$$

Ta có
$$S_{\Delta ABC} \geq 8 \Leftrightarrow \frac{16}{|m|} \geq 8 \Leftrightarrow \begin{cases} |m| \leq 2 \\ m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2 \leq m \leq 2 \\ m \neq 0 \end{cases}$$

Do đó các giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán thuộc tập hợp $S = \{-2; -1; 1; 2\}$.
Vậy có 4 giá trị nguyên của m thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 15. Cho parabol $(P): y = -x^2$ và đường thẳng (d) đi qua điểm $I(0; -1)$ có hệ số góc là k . Gọi A và B là các giao điểm của (P) và (d) . Giả sử A, B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 . Số các giá trị nguyên của k thỏa mãn $|x_1^3 - x_2^3| \leq 2$ là
A. 1. B. 2. C. 0. D. Vô số.

Lời giải

Chọn A

(d) có phương trình: $y = kx - 1$ nên ta có phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + kx - 1 = 0$

phương trình này luôn có hai nghiệm trái dấu nên Parabol và đường thẳng (d) luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt với mọi k .

Ta có: $|x_1^3 - x_2^3| = |(x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2]| \leq 2 \Leftrightarrow k = 0$

$\Leftrightarrow |x_1 - x_2| = |(x_1 + x_2)^2 - x_1 x_2| \leq 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{k^2 + 4} \cdot |k^2 + 1| \leq 2 \Leftrightarrow k = 0$.

Câu 16. Cho đường thẳng $(d): y = -2$ và Parabol $(P_m): y = -x^2 + mx - m^2 + 1$ với $m \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.
Gọi M, N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN . Tính tổng $S = a^2 + b^2$.

A. $S = \frac{93}{4}$.

B. $S = 21$.

C. $S = 22$.

D. $S = \frac{129}{4}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Cao Minh Chí Thiện Tên FB: Thien Cao

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P_m) là:

$$-x^2 + mx - m^2 + 1 = -2 \Leftrightarrow -x^2 + mx - m^2 + 3 = 0 \quad (1)$$

(d) giao (P_m) tại hai điểm M, N khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-m^2 + 3) > 0 \Leftrightarrow -3m^2 + 12 > 0 \Leftrightarrow -2 < m < 2$$

So với điều kiện $m \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$. Vậy (d) cắt (P_m) tại hai điểm phân biệt khi $m \in \left[-1; \frac{1}{2}\right]$.

Gọi $M(x_1; -2); N(x_2; -2)$ với x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (1) .

Ta có: $\overrightarrow{MN} = (x_2 - x_1; 0) \Leftrightarrow MN^2 = (x_2 - x_1)^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2$

Theo định lý Vi - ét ta có: $MN^2 = m^2 - 4(m^2 - 3) = -3m^2 + 12$.

Xét hàm số $f(m) = -3m^2 + 12$. Có Đỉnh $S(0; 12)$.

Bảng biến thiên:

m			
	-1	0	$\frac{1}{2}$
$f(m)$	9	12	$\frac{45}{4}$

Dựa vào bảng biến thiên ta có $\begin{cases} f(m)_{\min} = 9 \\ f(m)_{\max} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} MN^2_{\min} = 9 \\ MN^2_{\max} = 12 \end{cases}$.

Vậy khi đó $S = a^2 + b^2 = 12 + 9 = 21$.

$$(P): y = \frac{1}{2}x^2 \quad (d): y = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2}m$$

Câu 17. Cho Parabol và đường thẳng (m là tham số).

Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của m thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ sao cho biểu thức $T = y_1 + y_2 - x_1x_2 - (x_1 + x_2)$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{1}{2}x^2 = (m+1)x - m^2 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + 2m^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

Đề (d) cắt (P) tại 2 điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thì phương trình (1) phải có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Leftrightarrow D' \geq 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - 2m^2 - 1 = 2m - m^2 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$$

Vậy với $0 \leq m \leq 2$ thì đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2(m+1) \\ x_1 x_2 = 2m^2 + 1 \end{cases}$$

Theo định lý Viet, ta có:

$$\text{Khi đó: } y_1 = (m+1)x_1 - m^2 - \frac{1}{2}; y_2 = (m+1)x_2 - m^2 - \frac{1}{2}.$$

Ta có:

$$\begin{aligned} T &= y_1 + y_2 - x_1 x_2 - (x_1 + x_2) \\ &= (m+1)(x_1 + x_2) - 2m^2 - 1 - x_1 x_2 - (x_1 + x_2) \\ &= 2(m+1)^2 - 4m^2 - 2 - 2(m+1) = -2m^2 + 2m - 2. \end{aligned}$$

Bài toán trở thành tìm giá trị của tham số m để hàm số: $T(m) = -2m^2 + 2m - 2$ đạt giá trị nhỏ nhất trên đoạn $[0; 2]$.

Ta có bảng biến thiên:

m	0	$\frac{1}{2}$	2
$-2m^2 + 2m - 2$	-2	$-\frac{3}{2}$	-6

Vậy giá trị nhỏ nhất của $T = -6$ đạt được khi $m = 2$.

$$y = x^2$$

Câu 18. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho Parabol (P) có phương trình $y = x^2$ và hai đường thẳng (d):

$$y = m \quad y = m^2 \quad 0 < m < 1$$

; (d'): (với) . Đường thẳng (d) cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B; đường thẳng (d') cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt C, D (với hoành độ điểm A và D là số âm) sao cho diện tích hình thang ABCD gấp 9 lần diện tích tam giác OCD. Khi đó giá trị m thuộc khoảng?

A. $\left(0; \frac{1}{16}\right)$.

B. $\left(\frac{1}{16}; \frac{1}{8}\right)$.

C. $\left(\frac{1}{8}; \frac{1}{3}\right)$.

D. $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$.

Lời giải

Chọn C

+ Xét PT hoành độ giao điểm

$$x^2 = m \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{m} \\ x = -\sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow A(-\sqrt{m}; m), B(\sqrt{m}; m)$$

+ Xét PT hoành độ giao điểm

$$x^2 = m^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = -m \end{cases} \Rightarrow C(m; m^2), D(-m; m^2).$$

Tính được $S_{\Delta OCD} = m^3$; $S_{ABCD} = (m - m^2)(\sqrt{m} + m)$ (do) $(0 < m < 1)$

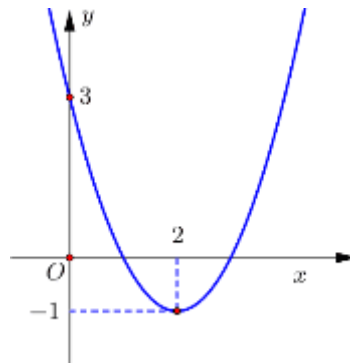
$$\text{Do } S_{ABCD} = 9 \cdot S_{\Delta OCD} \Leftrightarrow (m - m^2)(\sqrt{m} + m) = 9m^3 \Leftrightarrow 10m\sqrt{m} + m - \sqrt{m} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{4} \text{ là giá trị cần tìm.}$$

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Câu 19. Cho hàm số

có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

A. 1.

B. 2.

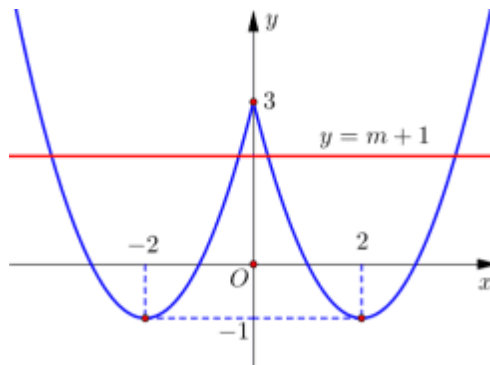
C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ là



$$\text{Ta có } f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow f(|x|) = m + 1$$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow -1 < m + 1 < 3 \Leftrightarrow -2 < m < 2$

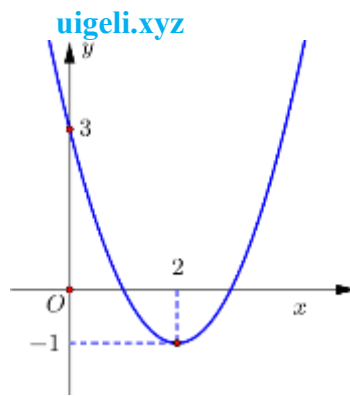
Mà $m \in \mathbb{Z}$ nên $S = \{-1; 0; 1\}$

Vậy số phần tử của S là 3.

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c$$

Câu 20. Cho hàm số

có đồ thị như hình vẽ.



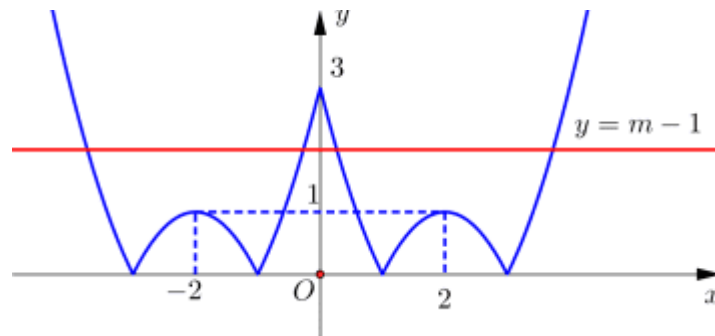
Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $|f(|x|)| + 1 = m$ có 4 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn A

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ suy ra đồ thị hàm số $y = |f(|x|)|$ là



Ta có $|f(|x|)| + 1 = m \Leftrightarrow |f(|x|)| = m - 1$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 < m - 1 < 3 \\ m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 < m < 4 \\ m = 1 \end{cases}$

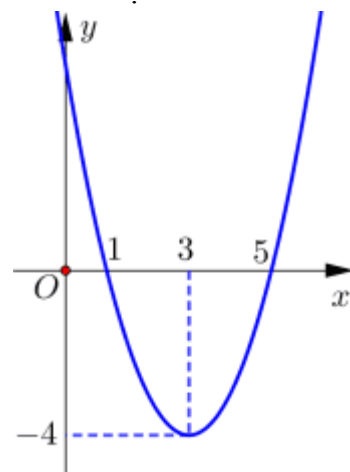
Mà $m \in \mathbb{Q}$ nên $S = \{1; 3\}$

Vậy số phần tử của S là 2.

$$y = f(x) = x^2 - 6x + 5$$

Câu 21. Cho hàm số

có đồ thị như hình vẽ.



Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để phương trình $(x-1)|x-5| + m = 0$ có hai nghiệm. Tổng các phần tử của S bằng

A. -6.

B. -4.

C. 4.

D. -4.

Lời giải

Chọn B

$$y = (x-1)|x-5| = \begin{cases} (x-1)(x-5) & \text{khi } x \geq 5 \\ -(x-1)(x-5) & \text{khi } x < 5 \end{cases}$$

Từ đồ thị hàm số

$$y = \begin{cases} x^2 - 6x + 5 & \text{khi } x \geq 5 \\ -(x^2 - 6x + 5) & \text{khi } x < 5 \end{cases}$$

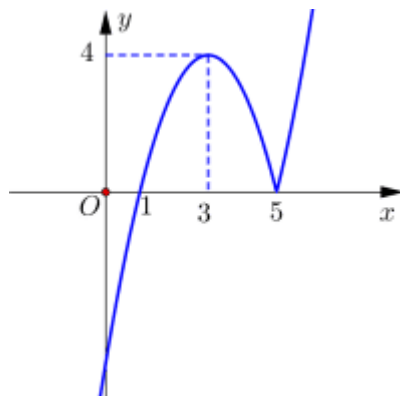
Hay

Dựa vào đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ suy ra đồ thị hàm số $y = (x-1)|x-5|$ như sau:

+ Khi $x \geq 5$ giữ nguyên phần đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$.

+ Khi $x < 5$ lấy đối xứng đồ thị hàm số $y = f(x) = x^2 - 6x + 5$ qua trục hoành.

Khi đó ta có đồ thị hàm số $y = (x-1)|x-5|$ là



Ta có $(x-1)|x-5| + m = 0 \Leftrightarrow (x-1)|x-5| = -m$

Dựa vào đồ thị hàm số, ta có theo yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow \begin{cases} -m = 0 \\ -m = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -4 \end{cases}$

Vậy tổng các phần tử của S là -4 .

Câu 22. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của tham số m sao cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + m$ cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $OA = 3OB$. Tính tổng T các phần tử của S .

A. $T = 3$.

B. $T = -15$.

C. $T = \frac{3}{2}$.

D. $T = -9$.

Lời giải.

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 4x + m = 0$. (*)

Để (P) cắt Ox tại hai điểm phân biệt A, B thì (*) có hai nghiệm phân biệt $\hat{U} \Delta = 4 - m > 0 \hat{U} m < 4$.

Theo giả thiết $OA = 3OB \hat{U} |x_A| = 3|x_B| \hat{U} \begin{cases} x_A = 3x_B \\ x_A = -3x_B \end{cases}$

$$\begin{array}{l} x_A = 3x_B \\ x_A = 3x_B \text{ p } \begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \text{ p } m = x_A \cdot x_B = 3. \end{array}$$

Với

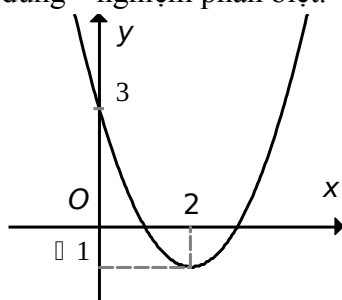
$$\begin{array}{l} x_A = -3x_B \\ x_A = -3x_B \text{ p } \begin{cases} x_A + x_B = 4 \\ x_A \cdot x_B = m \end{cases} \text{ p } m = x_A \cdot x_B = 12 \end{array}$$

Với

: không thỏa mãn ^(*).

Do đó $S = \{3\}$.

Câu 23. Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ đồ thị như hình. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực m thì phương trình $f(|x|) - 1 = m$ có đúng 3 nghiệm phân biệt.



A. $m = 3$.

B. $m > 3$.

C. $m = 2$.

D. $-2 < m < 2$.

Lời giải

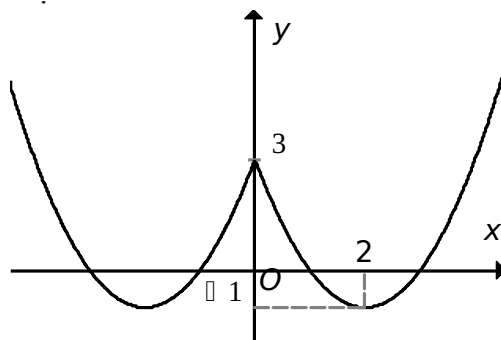
Họ và tên tác giả : Lê Thị Bích Hải. **Tên FB:** Bich Hai Le

Ta có $f(|x|) = f(x)$ nếu $x \geq 0$. Hơn nữa hàm $f(|x|)$ là hàm số chẵn.

Từ đó suy ra cách vẽ đồ thị hàm số (C) từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ như sau:

- Giữ nguyên đồ thị $y = f(x)$ phía bên phải trục tung.
- Lấy đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ phía bên phải trục tung qua trục tung.

Kết hợp hai phần ta được đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ như hình vẽ sau:



Phương trình $f(|x|) - 1 = m \Leftrightarrow f(|x|) = m + 1$ là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ và đường thẳng $y = m + 1$ (song song hoặc trùng với trục hoành).

Dựa vào đồ thị, ta có yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m + 1 = 3 \Leftrightarrow m = 2$.

Câu 24. Cho hàm số $y = (m+3)x^2 - 2(m+1)x + m$ biết đồ thị hàm số cắt trục Ox tại hai điểm có hoành độ x_1, x_2 . Với giá trị nào của a thì biểu thức $F = (x_1 - a)(x_2 - a)$ không phụ thuộc vào m .

A. $a = \frac{1}{4}$.

B. $a = \frac{3}{4}$.

C. $a = 4$.

D. $a = 1$.

Lời giải

Chọn B

+ Phương trình hoành độ giao điểm: $(m+3)x^2 - 2(m+1)x + m = 0$

+ Với $\begin{cases} m \neq -3 \\ m \leq 1 \end{cases}$ phương trình có hai nghiệm $x_1; x_2$

+ khi đó theo định lý vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m+3} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m+3} \end{cases}$, ta có:

$$F = (x_1 - a)(x_2 - a) = x_1 x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 = \frac{m}{m+3} - \frac{2a(m+1)}{m+3} + a^2$$

$$= \frac{m - 2am - 2a}{m+3} + a^2 = \frac{m+3 - 2a(m+3) + 4a - 3}{m+3} + a^2 = 1 - 2a + a^2 + \frac{4a-3}{m+3}$$

+ F không phụ thuộc vào m $\Leftrightarrow 4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

+ Với $a = \frac{3}{4}$ ta có $F = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 2$

Rõ ràng khi đó ta thấy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức trên chẳng hạn

như $m = 0$ ta có $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ thỏa hệ thức của bài toán.

Đã phản biện.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{2(m+1)}{m+3} \\ x_1 x_2 = \frac{m}{m+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 - \frac{4}{m+3} \\ x_1 x_2 = 1 - \frac{3}{m+3} \end{cases} \Rightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 2$$

Ta có thể sử lý theo hướng:

Đây là hệ thức không phụ thuộc vào m

Từ yêu cầu bài toán có

$$F = (x_1 - a)(x_2 - a) = x_1 x_2 - a(x_1 + x_2) + a^2 \Rightarrow 4F = 4x_1 x_2 - 4a(x_1 + x_2) + 4a^2$$

$$\text{Hay } 4F = 3(x_1 + x_2) - 2 - 4a(x_1 + x_2) + 4a^2 = (3 - 4a)(x_1 + x_2) + 4a^2 - 2$$

Để F không phụ thuộc vào m thì $4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

Thay với $a = \frac{3}{4}$ ta có $4a - 3 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

+ Với $a = \frac{3}{4}$ ta có $F = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 3(x_1 + x_2) - 4x_1 x_2 = 2$

Rõ ràng khi đó ta thấy phương trình đã cho luôn có hai nghiệm thỏa mãn hệ thức trên chẳng hạn

như $m = 0$ ta có $\begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{2}{3} \end{cases}$ thỏa hệ thức của bài toán.

Câu 25.

Bài toán 1 Tìm tham số để đường thẳng $y = m, m > 0$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 3x^2 - 2$ tại hai điểm A, B sao cho tam giác OAB vuông tại gốc tọa độ O .

A. 1

B. 2

C. 3

D. 4

Bài toán 2 Tìm tham số để đường thẳng $y = 3x + m$ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x^2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và $|x_1 - x_2|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. 1

B. -1

C. 2

D. 3

Lời giải

Bài toán 1 Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4 - 3x^2 - 2 = m \Leftrightarrow x^4 - 3x^2 - 2 - m = 0$$

Với mọi $m > 0$ thì đường thẳng $y = m$ cắt (C) tại hai điểm phân biệt $A(x_A; m)$ và $B(x_B; m)$ đối xứng qua Oy , $x_A < x_B$.

Tam giác OAB vuông tại O nên $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow x_A x_B + m^2 = 0$

Mà $x_A + x_B = 0$ nên $x_A = -m; x_B = m$

Do đó $m^4 - 3m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow (m - 2)(m^3 + 2m^2 + m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 2$ (vì $m > 0$)

Bài toán 2 : Phương trình hoành độ giao điểm:

$$\frac{x^2}{x-1} = 3x + m \Leftrightarrow 2x^2 + (m-3)x - m = 0, x \neq 1$$

Điều kiện có 2 nghiệm phân biệt khác 1:

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ g(1) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 2m + 9 > 0 \\ -1 \neq 0 \end{cases} : \text{Đúng } \forall m$$

$$Ta \text{ có: } |x_1 - x_2| = \left| \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} - \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right| = \frac{\sqrt{\Delta}}{4} = \frac{\sqrt{m^2 + 2m + 9}}{4} = \frac{1}{4} \sqrt{(m+1)^2 + 8} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Vậy giá trị $|x_1 - x_2|$ nhỏ nhất khi $m = -1$.

$$f(x) = 2(m-4)x + \frac{m(x-2)}{|x-2|}$$

Câu 26. Cho hàm số $f(x) = 2(m-4)x + \frac{m(x-2)}{|x-2|}$ (m là tham số)

Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm thuộc khoảng $(1;2)$.

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Họ và tên: Nguyễn Thị Thu Oanh Tên FB: Thu Oanh

Giải:

Vì x thuộc $(1;2)$ nên $f(x) = 2(m-4)x - m$

Giả sử $A(1; m-8); B(2; 3m-16)$

Để đồ thị hàm số cắt Ox tại 1 điểm thuộc khoảng (1;2) thì A, B nằm 2 phía với trục Ox.

Ta có: (I) $\begin{cases} m-8 > 0 \\ 3m-16 < 0 \end{cases}$ hoặc (II) $\begin{cases} m-8 < 0 \\ 3m-16 > 0 \end{cases}$

Hệ (I) vô nghiệm. Hệ (II) $\frac{16}{3} < m < 8 \Rightarrow m = 6; 7$. **Chọn C**

* Có thể mở rộng khoảng xác định (1;3)

Khi đó ta có: $f(x) = \begin{cases} 2(m-4)x - m, & x \in (1; 2) \quad (1) \\ 2(m-4)x + m, & x \in (2; 3) \quad (2) \end{cases}$

TH 1: Tương tự trên

TH2: C(2; 5m - 6); D(3; 7m - 24). Hai điểm C, D nằm 2 phía trục Ox $\Leftrightarrow \frac{16}{5} < m < \frac{24}{7}$. Không có giá trị nguyên của m thỏa mãn. **Chọn C**

Câu 27. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) và đường thẳng d: $y = mx + 3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.
A. 2. **B. 1** **C. 0.** **D. 3**

Lời giải

chọn A

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 3 &= mx + 3 \\ \Leftrightarrow x^2 - (4+m)x &= 0 \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m+4 \end{cases} \end{aligned}$$

gọi A(0;3) và B(m+4; m²+4m+3), ta có OA thuộc Oy nên

$$\begin{aligned} S_{\Delta OAB} &= \frac{1}{2} OA \cdot d(B, Oy) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m+4| = \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow |m+4| &= 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases} \end{aligned}$$

Câu 28. (Đề HSG tỉnh Hải Dương 2017-2018) Cho hai hàm số $y = x^2 - 2(m-1)x - 2m$ và $y = 2x + 3$.
Tìm m để đồ thị các hàm số đó cắt nhau tại hai điểm A và B phân biệt sao cho $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất (trong đó O là gốc tọa độ).

A. $m = \frac{119}{5}$ **B.** $m = \frac{11}{10}$
C. $m = \frac{-11}{10}$ **D.** Không tồn tại m.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị

$$x^2 - 2(m-1)x - 2m = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 2m - 3 = 0 \quad (*)$$

Ta có: $\Delta' = m^2 + 2m + 3 > 0$ với mọi m nên $(*)$ luôn có hai nghiệm phân biệt hay hai đồ thị luôn cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B .

Gọi x_A, x_B là hai nghiệm của phương trình $(*)$. Khi đó $A(x_A; 2x_A + 3), B(x_B; 2x_B + 3)$

Ta có $\overline{OA} = (x_A; 2x_A + 3), \overline{OB} = (x_B; 2x_B + 3)$.

$$OA^2 + OB^2 = x_A^2 + (2x_A + 3)^2 + x_B^2 + (2x_B + 3)^2$$

$$= 5(x_A^2 + x_B^2) + 12(x_A + x_B) + 18$$

$$= 5(x_A + x_B)^2 + 12(x_A + x_B) + 18 - 10x_A x_B \quad (1)$$

Theo định lí Vi-et ta có $x_A + x_B = 2m, x_A x_B = -2m - 3$

$$\text{Khi đó (1) trở thành } OA^2 + OB^2 = 20m^2 + 44m + 48 = 20\left(m + \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{119}{5}$$

Tìm được $OA^2 + OB^2$ nhỏ nhất bằng $\frac{119}{5}$ khi $m = \frac{-11}{10}$.

Vậy $m = \frac{-11}{10}$ là giá trị cần tìm.

Câu 29. Cho hàm số bậc hai $y = 2x^2 - 3x - 5$ có đồ thị là (P) và đường thẳng $(d): y = mx + 2m^2 - 1$. Gọi S là tập gồm tất cả các giá trị thực của m sao cho (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B thỏa mãn cho A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = -3x + 5$. Mệnh đề nào sau đây là mệnh đề đúng?

A. $S = \emptyset$.

B. Tổng của tất cả các phần tử của S là $-\frac{2}{3}$.

C. Tổng của tất cả các phần tử của S là $-\frac{11}{3}$.

D. S có đúng một phần tử.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) :

$$2x^2 - (m+3)x - 2m^2 - 4 = 0 \quad (*)$$

Phương trình này có $\Delta = (m+3)^2 + 8(2m^2 + 4)$ luôn nhận giá trị dương nên phương trình $(*)$

luôn có hai nghiệm phân biệt. Gọi 2 nghiệm đó là x_1, x_2 thì $x_1 + x_2 = \frac{m+3}{2}$.

Như vậy, (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B lần lượt có hoành độ là x_1, x_2 .

Trung điểm của đoạn thẳng AB là

$$I\left(\frac{x_1+x_2}{2}; m\frac{x_1+x_2}{2} + 2m^2 - 1\right) = \left(\frac{m+3}{4}; \frac{m(m+3)}{4} + 2m^2 - 1\right)$$

A, B nằm khác phía và cách đều đường thẳng $y = -3x + 5$ khi và chỉ khi (d) cắt đường thẳng $y = -3x + 5$ tại I , tương đương $m \neq -3$ và I thuộc đường thẳng $y = -3x + 5$, tương đương $3m^2 + 2m - 5 = 0$.

Vậy S có hai phần tử và tổng của chúng là $-\frac{2}{3}$.

Câu 30. Cho đồ thị hàm số (P): $y = (m-6)x^2 - 2$ và đường thẳng (d) $y = 2mx + 1$ trong đó x là ẩn, m là tham số. Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ để (d) và (P) có điểm chung.

4037.

4029.

4035.

4031.

A.

B.

C.

D.

Lời giải

Đáp án B

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) là: $(m-6)x^2 - 2 = 2mx + 1$

$$\Leftrightarrow (m-6)x^2 - 2mx - 3 = 0 \quad (*)$$

$$\begin{aligned} m = 6 & \quad -12x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{4} \\ \text{*Nếu } m \neq 6 & \text{ thay vào phương trình (*) ta được:} \end{aligned}$$

$$\Delta = m^2 + 3(m-6) = m^2 + 3m - 18$$

*Nếu Ta có :

Đồ thị (P) và đường thẳng (d) có điểm chung khi và chỉ khi phương trình (*) có nghiệm thực

$$\Leftrightarrow \Delta \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 18 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq -6 \\ m \geq 3 \end{cases} \quad (1)$$

$$m \in \mathbb{Z} \text{ \& } m \in [-2018; 2018] \quad (2)$$

Theo giả thiết:

Từ (1) và (2) suy ra: có 4029 giá trị m thỏa mãn YCBT.

Câu 31. Cho Parabol (P): $y = x^2 + 2mx + 3$. Có bao nhiêu giá trị của tham số m để đồ thị (P) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt A và B sao cho tam giác IAB là tam giác đều (Với I là đỉnh của (P)).

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$\text{Đỉnh của (P): } I(-m; 3 - m^2)$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và trục Ox là: $x^2 + 2mx + 3 = 0 \quad (*)$

Để (P) cắt Ox tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -\sqrt{3} \\ m > \sqrt{3} \end{cases}$$

Khi đó phương trình (*) có nghiệm: $x_1 = -m + \sqrt{m^2 - 3}$, $x_2 = -m - \sqrt{m^2 - 3}$

$$\Rightarrow A(-m + \sqrt{m^2 - 3}; 0), B(-m - \sqrt{m^2 - 3}; 0), \overline{AB}(-2\sqrt{m^2 - 3}; 0), \overline{IA}(\sqrt{m^2 - 3}; m^2 - 3)$$

Do (P) nhận đường thẳng $x = -m$ làm trục đối xứng suy ra tam giác IAB cân tại I để tam giác IAB đều

$$\Leftrightarrow AB = IA \Leftrightarrow \sqrt{4(m^2 - 3)} = \sqrt{(m^2 - 3) + (m^2 - 3)^2} \Leftrightarrow 4(m^2 - 3) = (m^2 - 3) + (m^2 - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 3 = 3 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{6} \quad (tm)$$

Vậy có 2 giá trị của m thỏa mãn

- Câu 32.** Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ nhận ba đường thẳng $y = x - 5; y = -3x + 3; y = 3x - 12$ làm các tiếp tuyến. Khi đó giá trị của $M = ab + bc$ là
- A.** -16. **B.** -25. **C.** -1. **D.** 25.

Lời giải

Chọn B

YCBT suy ra các phương trình sau đây đều có nghiệm kép:

$$ax^2 + bx + c = x - 5 \Leftrightarrow ax^2 + (b - 1)x + c + 5 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = -3x + 3 \Leftrightarrow ax^2 + (b + 3)x + c - 3 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 3x - 12 \Leftrightarrow ax^2 + (b - 3)x + c + 12 = 0$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (b - 1)^2 - 4a(c + 5) = 0 \\ (b + 3)^2 - 4a(c - 3) = 0 \\ (b - 3)^2 - 4a(c + 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 1 - 4ac - 20a = 0(1) \\ b^2 + 6b + 9 - 4ac + 12a = 0(2) \\ b^2 - 6b + 9 - 4ac - 48a = 0(3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $8b + 8 + 32a = 0$

Từ (2) và (3) suy ra: $12b + 60a = 0$

$$\begin{cases} 4a + b = -1 \\ 5a + b = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có hệ sau:

$$\Rightarrow a = 1; b = -5$$

Thay lại vào phương trình (1) ta có $c = 4$

$$\text{Vậy } M = ab + bc = -25$$

- Câu 33.** Cho hàm số $y = -x^2 + 2(m + 1)x + 1 - m^2 \quad (1)$, (m là tham số). Gọi m_1, m_2 giá trị của m để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác KAB vuông tại K , trong đó $K(2; -2)$. Khi đó $m_1^2 + m_2^2$ bằng:
- A.** 13 **B.** 12 **C.** 11 **D.** 10

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm
 $-x^2 + 2(m+1)x + 1 - m^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 1 = 0 \quad (2)$

Đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow (m+1)^2 - m^2 + 1 > 0 \Leftrightarrow 2m + 2 > 0 \Leftrightarrow m > -1$.

Gọi các nghiệm của phương trình (2) là x_1, x_2 .

Tọa độ các giao điểm A, B là $A(x_1; 0), B(x_2; 0)$; $\overrightarrow{KA} = (x_1 - 2; 2), \overrightarrow{KB} = (x_2 - 2; 2)$.

$KA \perp KB \Leftrightarrow \overrightarrow{KA} \cdot \overrightarrow{KB} = 0 \Leftrightarrow (x_1 - 2)(x_2 - 2) + 4 = 0 \Leftrightarrow x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 8 = 0$

$$\Leftrightarrow m^2 - 1 - 2 \cdot 2(m+1) + 8 = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = 3 \end{cases}$$

Kết hợp điều kiện $m > -1$, ta được $m = 1, m = 3$. Ta chọn đáp án **D**.

Câu 34. Biết $(P): y = m^2 x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2$ luôn đi qua 1 điểm cố định A, đường thẳng (d) đi

qua đi qua A và cắt $(\Delta): y = -\frac{1}{2}x - 1$ tại điểm có tung độ bằng -2. Giả sử (d) cắt (P) tại 2 điểm phân biệt A và **B**. Gọi $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của AB. Tổng các giá trị của m để

$OI = \frac{\sqrt{29}}{6}$ (hoặc có thể cho) $x_I^2 + y_I^2 = \frac{29}{36}$ thỏa mãn bài toán thuộc khoảng nào sau đây:

A. $\left(0; \frac{3}{2}\right)$ **B.** $\left(2; \frac{11}{4}\right)$ **C.** $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$ **D.** $\left(\frac{7}{4}; 2\right)$

Lời giải

Chọn B

Ta có: $m^2 x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2 \Leftrightarrow (x^2 - 1)m^2 - 2(x-1)m - 2x + 2 - y = 0 \quad (*)$

A là điểm cố định của $(P) \Leftrightarrow$ tọa độ A thỏa $(*)$, $\forall m \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Tọa độ A thỏa hệ
$$\begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ -2(x-1) = 0 \\ -2x + 2 - y = 0 \end{cases}$$

Suy ra $A(1; 0)$ là điểm cố định của (P) .

Gọi $M(x_M; -2) = (d) \cap (\Delta)$. $M \in (\Delta) \Leftrightarrow -2 = -\frac{1}{2}x_M - 1 \Rightarrow M(2; -2)$

$A, M \in (d) \Rightarrow (d): y = -2x + 2$. Phương trình hoành độ điểm chung của (P) và (d) :

$$m^2 x^2 - 2(m+1)x - m^2 + 2m + 2 = -2x + 2 \Leftrightarrow m^2 x^2 - 2mx - m^2 + 2m = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ m^2 x + m^2 - 2m = 0 \end{cases}$$

Để (P) và (d) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m^2 \cdot 1 + m^2 - 2m \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 0 \\ m \neq 1 \end{cases}$. Khi đó:

$$\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{m} \\ y_I = -2x_I + 2 = -\frac{2}{m} + 2 \end{cases} \Rightarrow OI^2 = x_I^2 + y_I^2 = \frac{1}{m^2} + \frac{4}{m^2} - \frac{8}{m} + 4 = \frac{29}{36} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{6}{5} \\ m = \frac{30}{23} \end{cases}$$

(Nhận)

Vậy $S = \frac{6}{5} + \frac{30}{23} \approx 2.5043478$

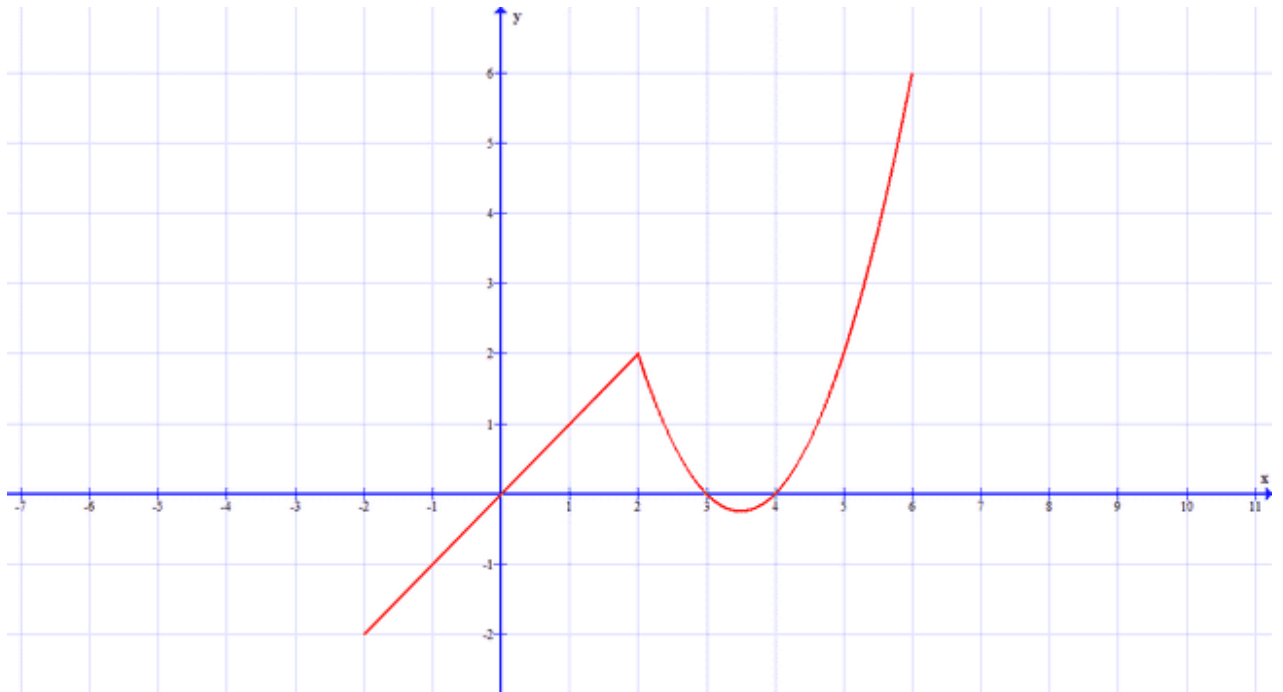
- Câu 35.** Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 12 & \text{khi } x \geq 2 \\ x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$. Gọi S là tập hợp gồm tất cả các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $|f(|x|)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt. Số phần tử của S là:
- A. 0** **B. 1** **C. 2** **D. 3**

Lời giải

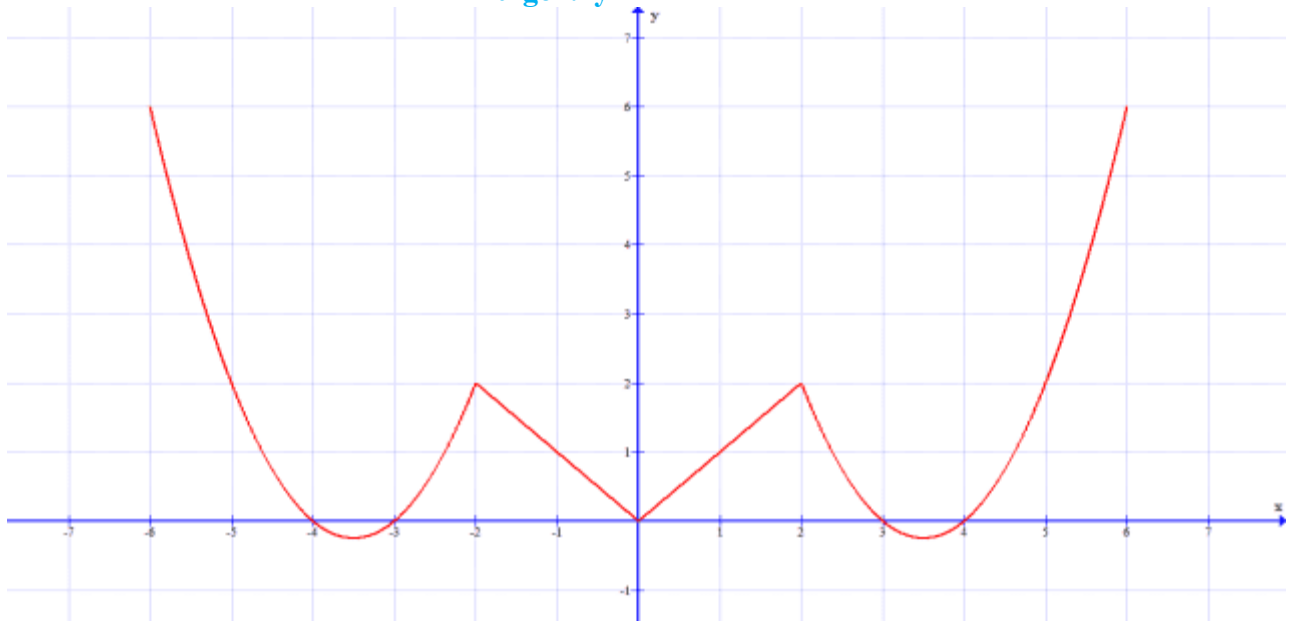
Chọn B

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 7x + 12 & \text{khi } x \geq 2 \\ x & \text{khi } x < 2 \end{cases}$$

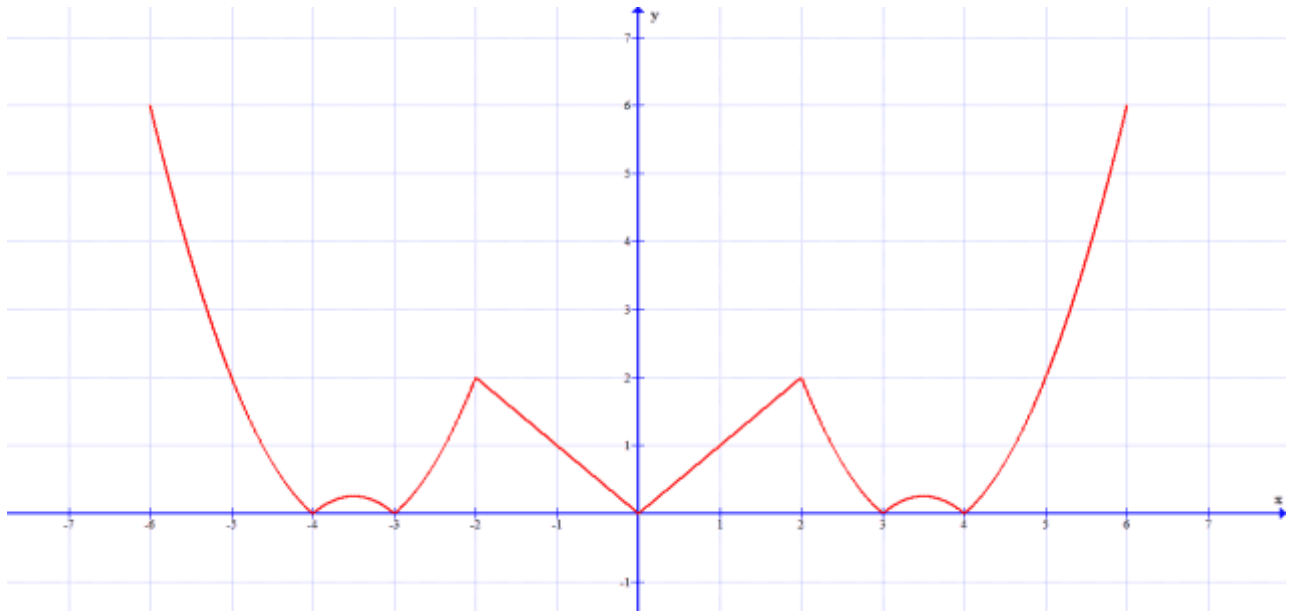
+) Vẽ đồ thị hàm số



+) Suy ra đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ nhờ tính chất của hàm số chẵn



+) Suy ra đồ thị của hàm số $y = |f(|x|)|$



Vậy phương trình $|f(|x|)| = m$ có 6 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $m \in \left(\frac{1}{4}; 2\right) \xrightarrow{M \in \mathbb{Z}} m = 1$.

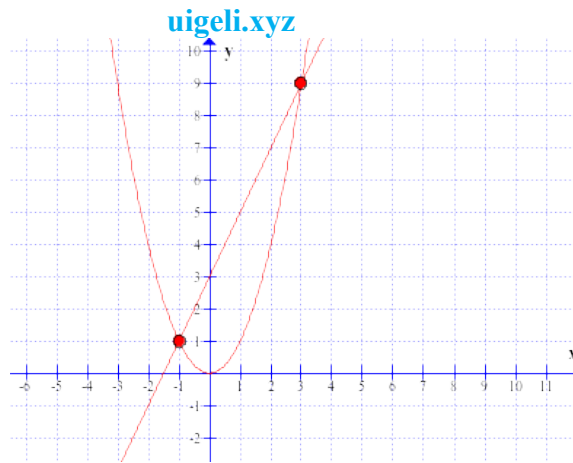
Câu 36. Cho parabol (P) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng d có phương trình $y = g(x)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) - g(x) \leq 0$ là $[a; b]$. Giả sử $A(a; y_1)$, $B(b; y_2)$ là giao điểm của (P) và (d) . Gọi $M(m; m^2)$ với $m \in [a; b]$. Để diện tích ΔMAB đạt giá trị lớn nhất thì m phải thỏa mãn:

A. $m \in (-1; 0)$

B. $m \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$

C. $m \in (2; 3)$

D. $m \in (0; 1)$



Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) - g(x) \leq 0$ là hoành độ của những điểm thuộc (P) và nằm phía dưới hoặc thuộc đường thẳng $y = g(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra tập nghiệm $T = [-1; 3]$

$\Rightarrow a = -1; b = 3 \Rightarrow A(-1; 1); B(3; 9) \Rightarrow$ Đường thẳng d có phương trình là $y = 2x + 3$

$$S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_M - y_A) - (x_M - x_A)(y_B - y_A)|$$

$$= \frac{1}{2} |4 \cdot (m^2 - 1) - (m + 1) \cdot 8| = 2 |m^2 - 2m - 3|$$

$\Rightarrow$ để $S_{\Delta MAB}$ đạt diện tích max thì $|m^2 - 2m - 3|$ đạt max

Mặt khác do $m \in [a; b]$ hay $m \in [-1; 3]$ nên $|m^2 - 2m - 3| = -m^2 + 2m + 3 = 4 - (m - 1)^2 \leq 4$

$\Rightarrow m = 1$ thì $S_{\Delta MAB}$ đạt diện tích lớn

Câu 37. Cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $d: y = 2x + m$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp các giá trị nguyên của m để đường thẳng d cắt parabol (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $\square OAB$ vuông tại O . Khi đó số các phần tử thuộc S bằng :

A. 2. **B.** 0. **C.** 1. **D.** 9.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Cần Việt Hưng Tên FB: Việt Hưng

Chọn C

+) Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) : $x^2 = 2x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x - m = 0$ (1)

+) d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt
 $\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 1 + m > 0 \Leftrightarrow m > -1$

+) Khi đó d cắt (P) tại 2 điểm phân biệt là : $A(x_A; x_A^2)$ và $B(x_B; x_B^2)$.

$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = (x_A; x_A^2)$, $\overrightarrow{OB} = (x_B; x_B^2)$, O, A, B không thẳng hàng $\Leftrightarrow x_A, x_B \neq 0$

Với x_A, x_B là các nghiệm của phương trình (1) nên theo vi-ét :

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_A \cdot x_B = -m \end{cases}$$

Theo giả thiết $\square OAB$ vuông tại $O \Leftrightarrow OA^2 + OB^2 = AB^2$

$$\Leftrightarrow x_A^2 + x_A^4 + x_B^2 + x_B^4 = (x_A - x_B)^2 + (x_A^2 - x_B^2)^2 \Leftrightarrow 2x_A x_B + 2(x_A x_B)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow -2m + 2m^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 1 \end{cases}$$

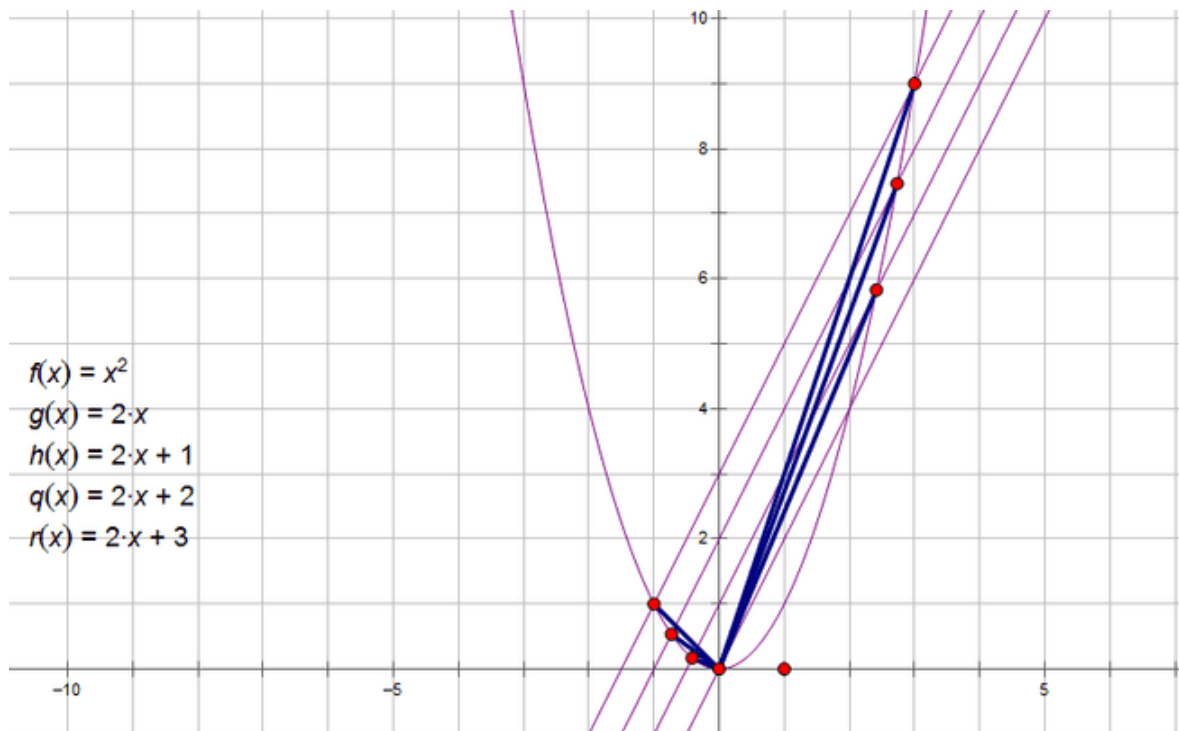
So sánh với các đk ta thấy $m = 0$ loại, $m = 1$ thỏa mãn $\Rightarrow S = \{1\}$.

Nội dung phản biện:

- Kiến thức tương quan lớp 10 phân hàm số và tọa độ véc tơ, độ dài véc tơ chưa học kịp cùng nhau. Bài này sử dụng cuối kì 1 thì được **C**. Nếu đến thời điểm đó thì dùng tích vô hướng 2 véc tơ sẽ đơn giản hơn về mặt biến đổi.

- Với điều kiện m nguyên thì có thể dùng hình vẽ đồ thị $y = x^2$ và đồ thị hàm số $y = 2x$ để kiểm tra đáp án được **C**. Bằng cách tịnh tiến đường thẳng $y = 2x$ theo các đơn vị nguyên từ đó nhìn hình kiểm tra số đáp án thỏa mãn. Do vậy có thể bỏ điều kiện m nguyên để tránh việc dùng hình vẽ giải bài toán này.

Cách dùng hình ở trang dưới:



Đồ thị hàm số bậc hai

Câu 38. Cho hàm số $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) đỉnh $I(1; 2)$. Biết rằng đường thẳng $(d): y = 4$ cắt (P) tại hai điểm A, B và tam giác IAB đều. Tính $f(2)$.

- A.** $f(2) = \frac{7}{2}$. **B.** $f(2) = \frac{8}{3}$. **C.** $f(2) = \frac{5}{2}$. **D.** $f(2) = 3$.

Lời giải

Chọn A

$$f(x) = a(x-1)^2 + 2$$

Khoảng cách từ đỉnh I đến đường thẳng (d) bằng 2 do đó $AB = \frac{4}{\sqrt{3}}$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P) : $a(x-1)^2 + 2 = 4 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{2}{a}}$

(ĐK có nghiệm là) $a > 0$.

Giả sử $A\left(1 - \sqrt{\frac{2}{a}}; 4\right), B\left(1 + \sqrt{\frac{2}{a}}; 4\right)$, ta có $AB = 2\sqrt{\frac{2}{a}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}$.

$$f(x) = \frac{3}{2}(x-1)^2 + 2, f(2) = \frac{7}{2}$$

Câu 39. Cho hai tập hợp $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - x + 2m = 0\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + m - 2 = 0\}$.

Giả sử các phần tử của A được sơn xanh, các phần tử của B được sơn đỏ. Người ta xếp các phần tử của A và B lên một trục số. Tìm số giá trị nguyên của m để $A \cup B$ có 4 phần tử và 2 phần tử cùng màu không đứng kề nhau.

A. 9.

B. 6.

C. 5.

D. 10.

Lời giải

Chọn A

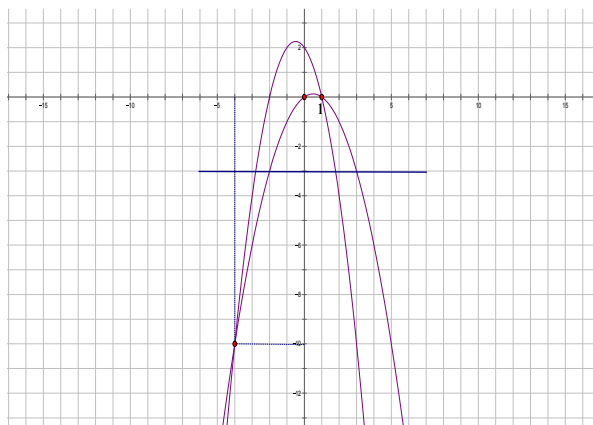
Yêu cầu bài toán tương đương với tìm m để phương trình $x^2 - x + 2m = 0(1)$ và $x^2 + x + m - 2 = 0(2)$ có nghiệm xen kẽ.

Cách 1: Cô lập tham số.

$$(1) \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$$

$$(2) \Leftrightarrow m = -x^2 - x + 2$$

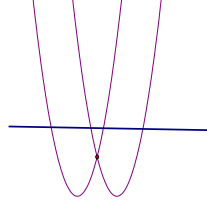
Vẽ parabol $(P_1): y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$, parabol $(P_2): y = -x^2 - x + 2$ và đường thẳng $y = m$ trên cùng một hệ trục tọa độ. Từ đó suy ra $-10 < m < 0$.



Cách 2: Theo cô Nguyễn Thị Hồng Gấm

Vẽ 2 parabol $y = x^2 - x + 2m$ và $y = x^2 + x + m - 2$. Thấy 2 parabol có đúng 1 điểm chung

$$M\left(\frac{m+2}{2}; \frac{m^2+10m}{4}\right)$$



Từ đó suy ra $m^2 + 10m < 0 \Leftrightarrow -10 < m < 0$. Các thầy cô có thể tạo ra câu tương tự và vận dụng hai cách giải trên, cũng có thể mở rộng cho bài toán điểm cực trị hàm bậc 3.

- Câu 40.** Cho các Parabol $(P_1): y = f(x) = \frac{1}{4}x^2 - x$, $(P_2): y = g(x) = ax^2 - 4ax + b$ ($a > 0$) có các đỉnh lần lượt là I_1, I_2 . Gọi A, B là giao điểm của (P_1) và Ox . Biết rằng 4 điểm A, B, I_1, I_2 tạo thành tứ giác lồi có diện tích bằng 10. Tính diện tích S của tam giác IAB với I là đỉnh của Parabol $(P): y = h(x) = f(x) + g(x)$.
- A. $S = 4$. B. $S = 6$. C. $S = 7$. D. $S = 9$.

Lời giải

Chọn B

Để dàng tìm được $A(0;0), B(4;0), I_1(2;-1), I_2(2;b-4a)$ với $b-4a > 0$ (vì tứ giác I_1AI_2B lồi). Khi đó tứ giác I_1AI_2B có hai đường chéo vuông góc nên

$$S_{I_1AI_2B} = \frac{1}{2} AB \cdot I_1I_2 = \frac{1}{2} 4 \cdot (1+b-4a) = 2(1+b-4a) = 10 \Leftrightarrow b = 4a + 4.$$

Ta có $h(x) = f(x) + g(x) = \left(a + \frac{1}{4}\right)x^2 - (4a+1)x + 4a+4$ nên tọa độ đỉnh I là

$$\begin{cases} x_I = \frac{4a+1}{2\left(a+\frac{1}{4}\right)} = 2 \\ y_I = h(2) = 4a+1-8a-2+4a+4 = 3 \end{cases} \Rightarrow I(2;3) \Rightarrow S_{IAB} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6.$$

Hoàng Trọng Anh

- Câu 41.** Trong hệ trục Oxy , cho parabol $(P): y = x^2 - 1$ và đường thẳng $d: y = 5x + m$ (với m là tham số). Tổng của tất cả các giá trị m để cho đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho OA vuông góc với OB là:

- A. $\frac{1}{2}$. B. 1. C. $\frac{3}{2}$. D. 2.

Đáp án: B.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (P) là: $x^2 - 1 = 5x + m \Leftrightarrow x^2 - 5x - m - 1 = 0(*)$.

Để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B khi $(*)$ có hai nghiệm phân biệt hay

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow 25 + 4(m+1) > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{29}{4}.$$

Ta có hai trường hợp sau :

TH1 : Nếu $m = -1$ thì d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(0; -1)$ và $B(5; 24)$, dễ thấy OA không vuông góc với OB , nên $m = -1$ loại.

TH2 : Nếu $m \neq -1, m > -\frac{29}{4}$ thì đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1)$ và $B(x_2; y_2)$. Khi đó ta có :

$$OA \perp OB \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \cdot \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \left(5 + \frac{m}{x_1}\right) \left(5 + \frac{m}{x_2}\right) = -1 \Leftrightarrow 25 + 5m \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} + \frac{m^2}{x_1 x_2} = -1$$

$$\Leftrightarrow 26x_1 x_2 + m^2 + 5m(x_1 + x_2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 26(-1-m) + m^2 + 25m = 0 \Leftrightarrow m^2 - m - 26 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1 - \sqrt{105}}{2} \\ m = \frac{1 + \sqrt{105}}{2} \end{cases} (TM)$$

Vậy tổng của tất cả các giá trị m để cho đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho OA vuông góc với OB là : $\frac{1 - \sqrt{105}}{2} + \frac{1 + \sqrt{105}}{2} = 1$. Ta được đáp án **B**.

- Câu 42.** Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị là parabol (P) . Biết rằng đường thẳng $d_1 : y = -\frac{5}{2}$ cắt (P) tại một điểm duy nhất, đường thẳng $d_2 : y = 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 5 . Tính giá trị $T = a + 2b + 3c$.
- A.** $T = -2$. **B.** $T = -3$. **C.** $T = -4$. **D.** $T = -5$.

Lời giải

Gọi $I(x_I; y_I)$ là đỉnh của (P) . Vì đường thẳng $d_1 : y = -\frac{5}{2}$ cắt (P) tại một điểm duy nhất nên ta được $y_I = -\frac{5}{2}$. Vì đường thẳng $d_2 : y = 2$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là -1 và 5 nên ta được $x_I = \frac{-1+5}{2} = 2$ và (P) đi qua điểm $M(-1; 2)$.

Từ các giả thiết trên ta được hệ phương trình sau :

$$\begin{cases} a - b + c = 2 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \\ 4a + 2b + c = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a - b + c = 2 \\ 4a + b = 0 \\ 4a + 2b + c = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -2 \\ c = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy $T = a + 2b + 3c = -5$. Ta được đáp án **D**.

- Câu 43.** Cho hàm số $f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$. Tất cả các giá trị m để hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 1 trên đoạn $[0; 1]$ thuộc tập hợp nào sau đây ?

A. $(-\infty; -3)$.

B. $[-3; 1]$.

C. $[-2; 2]$.

D. $[0; +\infty)$.

Lời giải

Hoành độ đỉnh của parabol $f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$ là $x_f = -m - \frac{1}{2}$. Ta có các trường hợp sau:

TH1: Nếu $x_f \in [0; 1] \Leftrightarrow m \in \left[-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right]$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(x_f) = 1 \Leftrightarrow -m - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4} \text{ (không thỏa mãn)}$$

TH2: Nếu $x_f < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(0) = 1 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Do đó $m = \sqrt{2}$ thỏa mãn.

TH3: Nếu $x_f > 1 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$ thì

$$\min_{[0;1]} f(x) = f(1) = 1 \Leftrightarrow (m+1)^2 = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \end{cases}$$

Do đó $m = -2$ thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = \sqrt{2}$ và $m = -2$. Ta được đáp án **C**.

Câu 44. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B nằm về hai phía của đường thẳng có phương trình $y = 1$?

A. 3.

B. 4.

C. 5.

D. 6.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 2x - 3 = x + m \Leftrightarrow x^2 + x - 3 - m = 0$ (1)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{13}{4} \quad (2)$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (1)

Ta phải có $(y_1 - 1)(y_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow (x_1 + m - 1)(x_2 + m - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + (m-1)(x_1 + x_2) + m^2 - 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < m < 2 + \sqrt{5} \text{ (thỏa (2))}$$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Câu 45. Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 3m - 1$. Gọi S là tập hợp các giá trị thực của m để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2$ thỏa mãn:

$$(x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} + 2m = 2\sqrt{3m - 1} \quad (*)$$

Khi đó tổng các phần tử của S là:

A. $\frac{23 - 6\sqrt{5}}{12}$ **B.** $\frac{23 + 6\sqrt{5}}{12}$ **C.** $\frac{41}{12}$ **D.** 3

Lời giải

Chọn A

$$\begin{cases} m \geq \frac{1}{3} \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

ĐK:

Ta có phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 3x + 3m - 1 = 0 \quad (**)$

đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ lần lượt là $x_1; x_2 \geq 0 \Leftrightarrow$ pt(**) có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_1 + x_2 > 0 \\ x_1 x_2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 4(3m - 1) > 0 \\ 3 > 0 \\ 3m - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq m < \frac{13}{12}$$

. Và theo định lí Viet ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = 3m - 1 \end{cases}$$

Ta có

$$(x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} = x_1 \sqrt{x_2} + x_2 \sqrt{x_1} - m(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) = (\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})(\sqrt{x_1 x_2} - m)$$

Vì $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}$

Khi đó: $(x_1 - m)\sqrt{x_2} + (x_2 - m)\sqrt{x_1} = \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}(\sqrt{3m - 1} - m)$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}}(\sqrt{3m - 1} - m) = 2(\sqrt{3m - 1} - m) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3m - 1} = m \\ \sqrt{3 + 2\sqrt{3m - 1}} = 2 \end{cases}$$

Ta có (*)

Nếu $\sqrt{3m - 1} = m$, với đk trên ta có hai vế không âm nên pt

$$\Leftrightarrow m^2 - 3m + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} \\ m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \end{cases},$$

kết hợp với đk ta được $m = \frac{3 - \sqrt{5}}{2}$.

Nếu $\sqrt{3+2\sqrt{3m-1}} = 2 \Leftrightarrow 3+2\sqrt{3m-1} = 4 \Leftrightarrow \sqrt{3m-1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow m = \frac{5}{12}$ (thỏa mãn đk)

Vậy $S = \left\{ \frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{5}{12} \right\}$, nên tổng các phần tử của S là $\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{12} = \frac{23-6\sqrt{5}}{12} \Rightarrow$ **chọn A.**

Câu 46. Cho hàm số: $y = (m-2)x^2 - (2m+1)x + 3m-3$ (C). Giả sử m là giá trị để đồ thị hàm số (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ sao cho $(2m+1)x_1 + (m-2)x_2^2 = m-2$. Hỏi m gần với giá trị nào sau đây nhất:

A. không tồn tại m . **B.** 0,53. **C.** 1. **D.** 1,5.

Lời giải

Chọn A

+) Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và trục Ox là

$$(m-2)x^2 - (2m+1)x + 3m-3 = 0 \quad (1)$$

+ Đồ thị hàm số (C) cắt trục Ox tại 2 điểm phân biệt thì PT (1) phải có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m-2 \neq 0 \\ (2m+1)^2 - 4(m-2)(3m-3) > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 2 \\ -8m^2 + 40m - 23 > 0 \end{cases} \quad (*)$$

+) Theo hệ thức Viet ta có: $x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{m-2}$ và $x_1 x_2 = \frac{3m-3}{m-2}$.

+) Theo bài ra: $(2m+1)x_1 + (m-2)x_2^2 = m-2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)x_1 + x_2^2 = 1$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2m+1}{m-2} \right)^2 - \frac{3m-3}{m-2} = 1 \Leftrightarrow 17m = 9 \Leftrightarrow m = \frac{9}{17} \quad (\text{Không thỏa mãn}(*))$$

Vậy không có giá trị m thỏa mãn bài toán.

Câu 47. Cho hàm số $y = x^2 - 4x + 3$ có đồ thị (P) và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm tất cả các giá trị của tham số m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho tam giác OAB có diện tích bằng $\frac{9}{2}$.

A. $m = -1$ và $m = -7$.

B. $m = -1$ và $m = 7$.

C. $m = 7$.

D. Không tồn tại m

Lời giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm của d và (P):

$$x^2 - 4x + 3 = mx + 3$$

$$\Leftrightarrow x^2 - (4+m)x = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m+4 \end{cases}$$

gọi $A(0;3)$ và $B(m+4; m^2+4m+3)$, ta có OA thuộc Oy nên

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot d(B, Oy) = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m+4| = \frac{9}{2}$$

$$\Leftrightarrow |m+4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases}$$

- Câu 48.** Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1$ có đồ thị (C) . Gọi P là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để cho đồ thị (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của P là
- A.** 5. **B.** 4. **C.** 8. **D.** 9.

Lời giải

Chọn B

$$\sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 4x - 1 = m \end{cases}$$

Ta có:

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x - 1, x \geq -1$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	4	-5	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m \in \{1; 2; 3; 4\}$

- Câu 49.** Cho parabol $(P): y = x^2 - 4x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 3$. Tìm tất cả các giá trị thực của m để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{9}{2}$.
- A.** $m=7$. **B.** $m=-7$. **C.** $m=-1, m=-7$. **D.** $m=-1$.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d là

$$x^2 - 4x + 3 = mx + 3 \Leftrightarrow x(x - (m+4)) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = m+4 \end{cases}$$

Để d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B khi và chỉ khi $4+m^2 > 0 \Leftrightarrow m^2 > -4$.

Với $x=0$ $y=3$ $\Rightarrow A(0;3) \in Oy$.

Với $x=4+m$ $y=m^2+4m+3$ $\Rightarrow B(4+m; m^2+4m+3)$.

Gọi H là hình chiếu của B lên OA . Suy ra $BH = |x_B| = |4+m|$.

Theo giả thiết bài toán, ta có $S_{\Delta OAB} = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot BH = \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot |m+4| = \frac{9}{2}$

$$\Leftrightarrow |m+4| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -7 \end{cases}$$

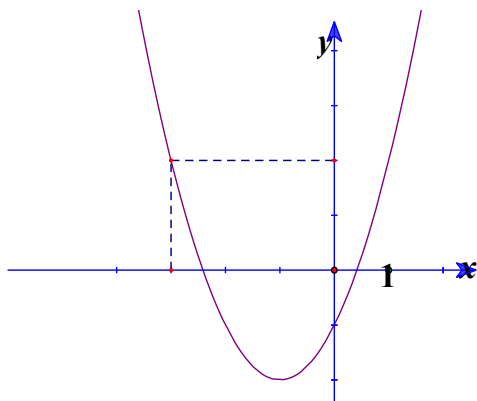
Câu 50. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị như hình dưới. Tìm m để phương trình $f(|x| + m) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt.

A. $m = -3$

B. $m = -2$

C. $m = 2$

D. $m = 3$



Lời giải

Chọn D

Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$, vẽ đồ thị hàm số $y = f(|x| + m)$ gồm 2 bước:

+ Tịnh tiến đồ thị hàm số $y = f(x)$ sang phải m đơn vị nếu $m \geq 0$, hoặc tịnh tiến sang trái $|m|$ đơn vị nếu $m < 0$ được đồ thị hàm số $y = f(x + m)$.

+ Giữ nguyên phần đồ thị trên trục Oy sang phải sau đó lấy đối xứng phần đồ thị đó qua trục Oy .

Do đó phương trình $f(|x| + m) = 2$ có 3 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = 2$ cắt đồ thị

$y = f(x + m)$ tại một điểm trên Oy và một điểm bên phải Oy khi và chỉ khi $m = 3$.

Câu 51. Cho hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ có đồ thị (C) và đường thẳng $d: y = mx - m$. Gọi S là tập tất cả các giá trị của tham số m để đường thẳng d cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt có hoành độ

$$x_1, x_2 \text{ thỏa mãn } \frac{x_1^2 - mx_1 + 2m}{x_2} + \frac{x_2^2 - mx_2 + 2m}{x_1} = -4.$$

A. $\frac{13}{3}$.

B. $-\frac{13}{3}$.

C. $\frac{14}{3}$.

D. $\frac{1}{3}$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^2 - 2x - 3 = mx - m \Leftrightarrow x^2 - (m + 2)x + m - 3 = 0 \quad (1)$$

d cắt (C) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta = (m + 2)^2 - 4(m - 3) > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 + 16 > 0 \\ m \neq 3 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 3$$

Do x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) nên:

$$x_1^2 - (m+2)x_1 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1^2 = (m+2)x_1 - m + 3$$

$$x_2^2 - (m+2)x_2 + m - 3 = 0 \Leftrightarrow x_2^2 = (m+2)x_2 - m + 3$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{x_1^2 - mx_1 + 2m}{x_2} + \frac{x_2^2 - mx_2 + 2m}{x_1} = \frac{2x_1 + m + 3}{x_2} + \frac{2x_2 + m + 3}{x_1} \\ &= \frac{2x_1^2 + 2x_2^2 + (m+3)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} = \frac{2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + (m+3)(x_1 + x_2)}{x_1 x_2} \\ &= \frac{2(m+2)^2 - 4(m-3) + (m+3)(m+2)}{m-3} = \frac{3m^2 + 9m + 26}{m-3} \end{aligned}$$

$$T = -4 \Leftrightarrow \frac{3m^2 + 9m + 26}{m-3} = -4 \Leftrightarrow 3m^2 + 13m + 14 = 0 \Leftrightarrow m = -2; m = -\frac{7}{3}$$

Tổng các giá trị của m là $-\frac{13}{3}$.

Câu 52. Cho $f(x) = 2x+1$ và hàm số $y = g(x)$ xác định bởi $g[f(x)] = 7x+5$. Biết đồ thị của hàm số $y = g(x)$ cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại A và B . Diện tích của tam giác OAB (với O là gốc tọa độ) bằng

- A.** $\frac{9}{28}$. **B.** $\frac{9}{14}$. **C.** $\frac{3}{28}$. **D.** $\frac{3}{14}$.

Lời giải

Cách 1: Họ và tên tác giả: **Phí Văn Quang Tên FB: QuangPhi**

Chọn A

Đặt $u = f(x) = 2x+1$. Khi đó $x = \frac{u-1}{2}$.

Do $g[f(x)] = 7x+5$ nên $g(u) = 7 \cdot \left(\frac{u-1}{2}\right) + 5 = \frac{7u+3}{2}$.

Vì $g(u) = \frac{7u+3}{2}$ nên $g(x) = \frac{7x+3}{2}$.

Đồ thị của hàm số $y = g(x) = \frac{7x+3}{2}$ cắt trục hoành tại $A\left(-\frac{3}{7}; 0\right)$ và cắt trục tung tại $B\left(0; \frac{3}{2}\right)$.

Diện tích của tam giác OAB là $S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \left|-\frac{3}{7}\right| \cdot \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{28}$.

Cách 2: Do cô Lưu Thêm đề xuất.

Giả sử $g(x) = ax+b$. Ta có $g(f(x)) = a(2x+1) + b = 2ax + (2a+b)$.

$$\begin{cases} 2a = 7 \\ 2a + b = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow g(x) = \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}$$

Mà $g[f(x)] = 7x + 5$ nên suy ra

Câu 53. Cho Parabol (P) : $y = x^2 + mx + 5m$, đường thẳng D đi qua $M(2; 1)$ và cắt Parabol đã cho tại hai điểm có hoành độ thỏa mãn phương trình $3x^2 + 7mx - \sqrt{3} = 0$, khi đó giá trị của tham số m thuộc khoảng nào sau đây?

- A. $(-1; \frac{1}{6})$ B. $(0; \frac{1}{5})$ C. $(\frac{1}{5}; 1)$ D. $(1; 2)$

Lời giải

Chọn B

Tọa độ giao điểm A, B của Parabol và đường thẳng là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = x^2 + mx + 5m \\ 3y = 3x^2 + 3mx + 15m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 7mx - \sqrt{3} = 0 \\ 3x^2 + 7mx - \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

Cộng vế với vế các phương trình ta được $3y + 4mx - 15m - \sqrt{3} = 0$, đây chính là phương trình đường thẳng cần tìm. Đường thẳng đi qua $M(2; 1)$ nên $3 - \sqrt{3} - 7m = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3 - \sqrt{3}}{7}$. Do đó ta chọn đáp án **B**.

Câu 54. Cho (P): $y = x^2 + 2mx$ cắt đường thẳng $d: y = 3mx + 1$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ $a; b$.

Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2 + t - 1}{t}$, tính giá trị biểu thức $Q = f^3(a) - f^3(b)$?

- A. 3 B. 1 C. -3 D. 0

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm giữa (P) và đường thẳng d : $x^2 - mx - 1 = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = m^2 + 4 > 0, \forall m \in \mathbb{R}$. Vậy (P) luôn cắt d tại hai điểm phân biệt. Gọi hoành độ các giao điểm là a và b . Theo định lý Viet ta có: $a + b = m; ab = -1$.

$$f(t) = \frac{t^2 + t - 1}{t} = t + 1 - \frac{1}{t}; f(a) = a + 1 - \frac{1}{a}; f(b) = b + 1 - \frac{1}{b}$$

$$f(a) - f(b) = (a - b) \left(1 + \frac{1}{ab} \right) = 0.$$

Giá trị của biểu thức: $Q = f^3(a) - f^3(b) = [f(a) - f(b)][f^2(a) + f^2(b) + f(a)f(b)] = 0$.

Câu 55. Cho hàm số $y = x^2 - 3x + 2$ và hàm số $y = -x + m$, với m là tham số. Gọi m là giá trị sao cho đồ thị hai hàm số đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt E, F mà khoảng cách từ trung điểm K của đoạn thẳng EF đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ K đến trục tung. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A. $m \in [3; 4)$ B. $m \in (-3; 1]$ C. $m \in (3; 5)$ D. $m \in (-3; 2]$

Lời giải

Chọn A

+ Phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số là

$$x^2 - 3x + 2 = -x + m \Leftrightarrow x^2 - 2x + 2 - m = 0 \quad (1)$$

+ Hai đồ thị hàm số đã cho có hai điểm chung khi và chỉ khi ⁽¹⁾ có hai nghiệm x_1, x_2 phân biệt
 $\Delta > 0 \Leftrightarrow 1 - (2 - m) > 0 \Leftrightarrow m > 1$

+ Theo định lý Viet ta có
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_1 x_2 = 2 - m \end{cases}$$

Tọa độ các điểm $E(x_1; -x_1 + m)$ và $F(x_2; -x_2 + m)$. Tọa độ trung điểm đoạn EF là $K\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{-x_1 - x_2 + 2m}{2}\right) \Rightarrow K(1; m - 1)$

+ Khoảng cách từ K đến trục hoành gấp đôi khoảng cách từ K đến trục tung khi và chỉ khi $|m - 1| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 \\ m = -1 \end{cases}$

+ Kết hợp với $m > 1$ ta có $m = 3$.

Câu 56. Cho parabol $(P): y = x^2 - (m - 1)x - 4$ (m là tham số). Gọi C là điểm thuộc (P) có hoành độ bằng -1 . Gọi S là tập tất cả các giá trị của m sao cho đường thẳng $d: y = 4x - 12$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa tam giác ABC vuông tại C . Tính tổng lập phương tất cả các phần tử của S .

- A. 1701. B. -1701. C. -1304. D. 1304.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C(-1; m - 4)$.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - (m - 1)x - 4 = 4x - 12 \Leftrightarrow x^2 - (m + 3)x + 8 = 0 \quad (1)$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi ⁽¹⁾ có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (m + 3)^2 - 32 > 0$.

Áp dụng Viet:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = m + 3 \\ x_1 x_2 = 8 \end{cases}$$

Gọi $A(x_1; 4x_1 - 12), B(x_2; 4x_2 - 12) \Rightarrow \overrightarrow{CA} = (x_1 + 1; 4x_1 - (m + 8)); \overrightarrow{CB} = (x_2 + 1; 4x_2 - (m + 8))$

ΔABC vuông tại C

$$\Rightarrow \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 0 \Leftrightarrow [x_1 x_2 + x_1 + x_2 + 1] + [16x_1 x_2 - 4(m + 8)(x_1 + x_2) + (m + 8)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow -3m^2 - 27m + 108 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3(n) \\ m = -12(n) \end{cases}$$

Có: $(-12)^3 + 3^3 = -1701$.

Câu 57. Cho parabol $(P): y = x^2 - (m-1)x - 4$ (m là tham số). Gọi C là điểm thuộc (P) có hoành độ bằng -1 . Gọi S là tập tất cả các giá trị của m sao cho đường thẳng $d: y = 4x - 12$ cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa tam giác ABC vuông tại C . Tính tổng lập phương tất cả các phần tử của S .

A. 1701.

B. -1701.

C. -1304.

D. 1304.

Lời giải

Chọn B

Ta có $C(-1; m-4)$.

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - (m-1)x - 4 = 4x - 12 \Leftrightarrow x^2 - (m+3)x + 8 = 0$ (1).

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt khi (1) có 2 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow (m+3)^2 - 32 > 0$.

Áp dụng Viet: $\begin{cases} x_1 + x_2 = m+3 \\ x_1 \cdot x_2 = 8 \end{cases}$.

Gọi $A(x_1; 4x_1 - 12), B(x_2; 4x_2 - 12) \Rightarrow$ trung điểm của AB : $I\left(\frac{x_1 + x_2}{2}; 2(x_1 + x_2) - 12\right)$

$\Rightarrow I\left(\frac{m+3}{2}; 2m-6\right)$

ΔABC vuông tại $C \Leftrightarrow AI = CI \Leftrightarrow \sqrt{\frac{(x_2 - x_1)^2}{4} + 4(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{\frac{(m+5)^2}{4} + (m-2)^2}$

$\Leftrightarrow \frac{17}{4}[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2] = \frac{5}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + \frac{41}{4}$

$\Leftrightarrow \frac{17}{4}[m^2 + 6m + 9 - 32] = \frac{5}{4}m^2 - \frac{3}{2}m + \frac{41}{4}$

$\Leftrightarrow 3m^2 + 27m - 108 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3(n) \\ m = -12(n) \end{cases}$

Có: $(-12)^3 + 3^3 = -1701$.

Câu 58. Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1$ có đồ thị (C) . Gọi P là tập hợp các giá trị nguyên dương của tham số m để cho đồ thị (C) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt. Số phần tử của P là

A. 5.

B. 4.

C. 8.

D. 9.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $\sqrt{2x^2 - 2x - m} - x - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x^2 - 4x - 1 = m \end{cases}$

Xét hàm số $f(x) = x^2 - 4x - 1, x \geq -1$

Ta có bảng biến thiên

x	-1	2	$+\infty$
$f(x)$	4	-5	$+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên ta được $m \in \{1; 2; 3; 4\}$

- Câu 59.** Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B nằm về hai phía của đường thẳng có phương trình $y = 1$?
- A.** 3. **B.** 4. **C.** 5. **D.** 6.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 2x - 3 = x + m \Leftrightarrow x^2 + x - 3 - m = 0$ (1)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{13}{4} \quad (2)$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (1)

Ta phải có $(y_1 - 1)(y_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow (x_1 + m - 1)(x_2 + m - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + (m - 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < m < 2 + \sqrt{5} \quad (\text{thỏa (2)})$$

$$m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

- Câu 60.** Cho Parabol $(P): y = x^2 - 3x + n$ và đường thẳng $d: y = mx - 1$. Biết đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ thỏa mãn $y_1 - y_2 = x_1 - x_2$. Số giá trị nguyên dương của n bằng:

- A.** 2. **B.** 0. **C.** 5. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Đường thẳng d có hệ số góc là $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = 1$ nên phương trình của d là $d: y = x - 1$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - 3x + n = x - 1 \Leftrightarrow x^2 - 4x + n + 1 = 0$ (1).

Vì đường thẳng d cắt Parabol (P) tại hai điểm phân biệt $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ nên (1) có hai nghiệm phân biệt, suy ra $\Delta' = 4 - n - 1 > 0 \Leftrightarrow n < 3$.

Do $n \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \in \{1; 2\}$.

Cũng có thể tìm m như sau:

$$\begin{aligned} & \text{do } A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) \text{ thuộc } d \text{ nên } \begin{cases} y_1 = mx_1 - 1 \\ y_2 = mx_2 - 1 \end{cases} \Rightarrow y_1 - y_2 = m(x_1 - x_2) \\ & \Leftrightarrow (m-1)(x_1 - x_2) = 0 \text{ do } x_1 - x_2 \neq 0 \Rightarrow m = 1 \end{aligned}$$

- Câu 61.** Cho $y = x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3$ (P). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^3 + x_1 x_2^2 - 4x_1 = x_2^3 + x_2 x_1^2 - 4x_2$.
- A. 1 B. 2 C. 3 D. 0

Giải

Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình $x^2 - 2(m+1)x + m^2 - 3 = 0$

Điều kiện để phương trình có 2 nghiệm x_1, x_2

$$\Delta' = (m+1)^2 - (m^2 - 3) > 0 \Leftrightarrow m > -2 \quad x_1^3 + x_1 x_2^2 - 4x_1 = x_2^3 + x_2 x_1^2 - 4x_2$$

$$\text{Biến đổi } x_1^3 + x_1 x_2^2 - 4x_1 = x_2^3 + x_2 x_1^2 - 4x_2 \Leftrightarrow (x_1 - x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 4] = 0$$

$$\text{Do } x_1 \neq x_2 \Rightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 4 = 0 \Rightarrow [2(m+1)]^2 - 2(m^2 - 3) - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -3 \end{cases} \text{ (loại)}$$

- Câu 62.** Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 2$ có đồ thị (P) và đường thẳng (d) có phương trình $y = x + m$. Có bao nhiêu giá trị m nguyên để đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2 \leq 22$.
- A. 8 B. 6 C. 7 D. 2

Giải

Hoành độ giao điểm của d và (P) là nghiệm phương trình:

$$x^2 - 2x + 2 = x + m \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 - m = 0 \quad (1)$$

d cắt (P) tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow (1)$ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta = 9 - 4(2 - m) > 0$

$$\Leftrightarrow 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{4}$$

Với điều kiện (*), gọi hai giao điểm là $A(x_1; x_1 + m), B(x_2; x_2 + m)$, trong đó x_1, x_2 là các nghiệm của (1). Theo định lý Viet ta có: $x_1 + x_2 = 3, x_1 x_2 = 2 - m$. Ta có: $OA^2 + OB^2 \leq 22 \Leftrightarrow x_1^2 + (x_1 + m)^2 + x_2^2 + (x_2 + m)^2 \leq 22$

$$\Leftrightarrow 2(x_1^2 + x_2^2) + 2m(x_1 + x_2) + 2m^2 \leq 22 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 + m(x_1 + x_2) + m^2 \leq 11$$

$$\Leftrightarrow 9 - 2(2 - m) + 3m + m^2 \leq 11 \Leftrightarrow m^2 + 5m - 6 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 1$$

Đối chiếu điều kiện (*) ta được $-\frac{1}{4} < m \leq 1$ Chọn đáp số D

$$(2m+1)x_1 + (m-2)x_2^2 = m-2 \quad (2m+1)x_1 + (m-2)x_2^2 = m-2$$

- Câu 63.** Gọi $S = (a; b)$ là tập các giá trị của tham số m để phương trình $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$ có số nghiệm nhiều nhất. Tính $a+b$.
- A. $a+b=6$. B. $a+b=4$. C. $a+b=1$. D. $a+b=2$

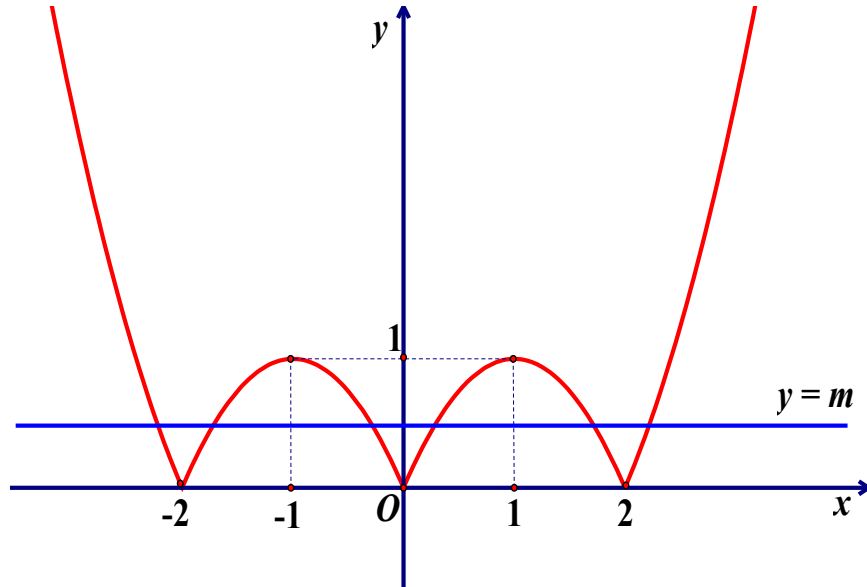
Chọn C

Cách 1:

$$y = |x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = |x| \cdot ||x| - 2| = \begin{cases} |x^2 - 2x| & \text{khi } x \geq 0 \\ |x^2 + 2x| & \text{khi } x < 0 \end{cases}$$

Có

Đồ thị:



Từ đồ thị, phương trình có số nghiệm nhiều nhất là 6 nghiệm khi và chỉ khi $0 < m < 1$
 $\Rightarrow S = (0; 1)$.

Vậy $a + b = 1$.

Cách 2:

Đặt $t = |x|$, $t \geq 0$.

Phương trình trở thành: $t|t - 2| = m \Leftrightarrow |t^2 - 2t| = m$.

Phương trình $|x|\sqrt{x^2 - 4|x| + 4} = m$ có nhiều nghiệm nhất $\Leftrightarrow$ phương trình $|t^2 - 2t| = m$ có nhiều nghiệm dương nhất.

Xét hàm số $y = f(t) = t|t - 2| = |t^2 - 2t|$, với $t \geq 0$.

Vẽ đồ thị hàm số $y = f(t)$ trên $[0; +\infty)$, từ đồ thị ta thấy phương trình nhiều nghiệm dương nhất là 3 nghiệm khi $0 < m < 1$, suy ra $S = (0; 1)$.

Vậy $a + b = 1$.

III Câu 64. Cho điểm M di động trên Parabol $(P): y = x^2 + 2x - 3$ và điểm N di động trên

đường thẳng $d: y = 4x - 9$. Khi đó giá trị nhỏ nhất của độ dài đoạn thẳng MN có dạng $\frac{a}{\sqrt{b}}$ với a, b là các số nguyên tố. Khi đó giá trị $T = b - a$ là

A. 12.

B. 10.

C. 14.

D. 4.

Lời giải

Chọn A

Để thấy với mỗi điểm $M \in (P)$ và với mỗi điểm $N \in d$ thì $MN \geq d(M; d) = MH$ với H là hình chiếu của M lên d . Để MN bé nhất thì N phải là hình chiếu của M lên d , tức là $N \equiv H$. Qua M kẻ đường thẳng d' song song với d . Khoảng cách từ M đến d bé nhất khi và chỉ khi d' là tiếp tuyến của (P) tại M . Bài toán trở thành viết phương trình đường thẳng d' tiếp xúc với (P) biết d' song song với d . Phương trình đường thẳng d' có dạng $y = 4x + b$ ($b \neq -9$). Vì d' tiếp xúc với (P) nên phương trình sau có nghiệm kép:

$$x^2 + 2x - 3 = 4x + b \quad \text{hay phương trình} \quad x^2 - 2x - 3 - b = 0 \quad \text{có nghiệm kép. Điều này xảy ra khi và}$$

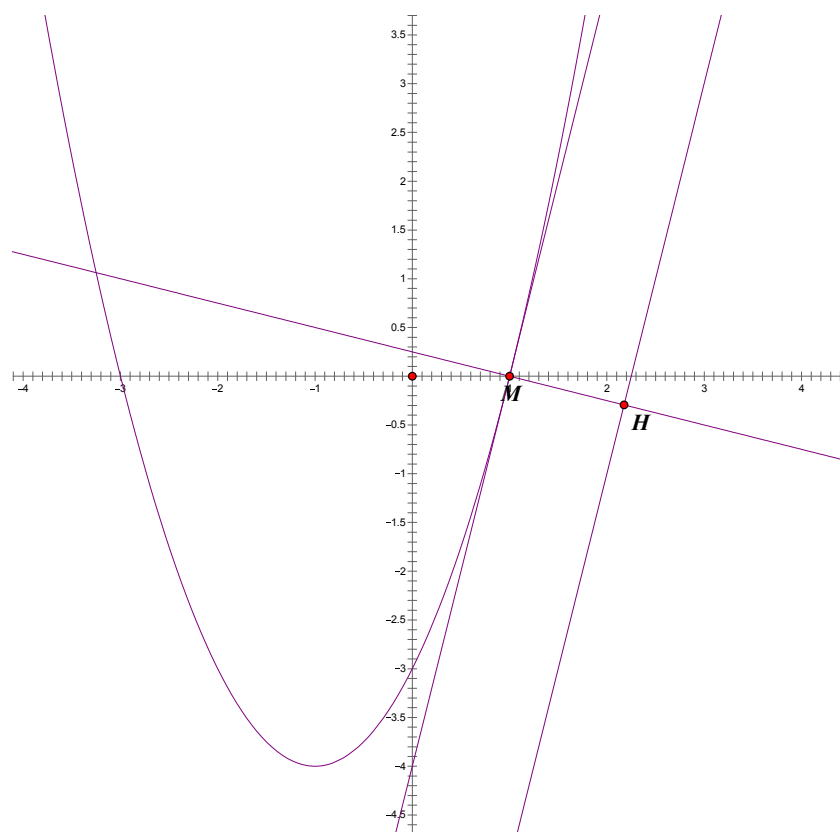
chỉ khi $b = -4$, khi đó hoành độ tiếp điểm M là $x_M = 1$ nên $M(1; 0)$. Đường thẳng MH qua M

và vuông góc với d nên có phương trình $y = -\frac{1}{4}(x - 1) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$.

Hoành độ điểm H là nghiệm phương trình $-\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} = 4x - 9 \Leftrightarrow x = \frac{37}{17}$

$$\Rightarrow H\left(\frac{37}{17}; -\frac{5}{17}\right) \Rightarrow MH = \frac{5}{\sqrt{17}}$$

. Do đó $a = 5, b = 17$ nên $T = b - a = 12$.



Câu 65. Biết rằng với giá trị của tham số m bằng $-\frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbf{Z}_+$, phân số tối giản) thì đường thẳng $d: y = 2x + 3$ cắt parabol $y = x^2 - 2(m-1)x - 2m$ tại hai điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2 + OB^2$ bé nhất. Khi đó giá trị $a + b$ là:

A. 22.

B. 21.

C. 20.

D. 19.

Lời giải

Chọn B

Hoành độ giao điểm là nghiệm phương trình $2x + 3 = x^2 - 2(m-1)x - 2m$ hay $x^2 - 2mx - 2m - 3 = 0$ (*)

Vì $\Delta' = m^2 + 2m + 3 = (m+1)^2 + 2 > 0, \forall m$ nên đường thẳng d luôn cắt parabol tại hai điểm phân biệt A, B lần lượt có hoành độ là x_A, x_B là hai nghiệm phân biệt của (*). Áp dụng định lý Vi-et ta có

$$x_A + x_B = 2m \quad (1); \quad x_A \cdot x_B = -2m - 3 \quad (2)$$

Khi đó tọa độ các giao điểm là $A(x_A; 2x_A + 3), B(x_B; 2x_B + 3)$, do đó:

$$\begin{aligned} OA^2 + OB^2 &= 5(x_A^2 + x_B^2) + 12(x_A + x_B) + 18 = 5[(x_A + x_B)^2 - 2x_A x_B] + 12(x_A + x_B) + 18 \\ &= 20m^2 + 44m + 48 = 20\left(m + \frac{11}{10}\right)^2 + \frac{119}{5} \end{aligned}$$

Nên $OA^2 + OB^2$ bé nhất khi và chỉ khi $m = -\frac{11}{10}$ suy ra $a = 11, b = 10$, do đó $a + b = 21$.

Câu 66. Cho hai hàm số $y = mx^2 - x + 2019$ và $y = x^2 + 2mx - m + 2020$ (m là tham số) có đồ thị lần lượt là $(P_1), (P_2)$. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của m để $(P_1), (P_2)$ cắt nhau tại hai điểm có tổng các hoành độ là một số nguyên. Số tập con của S là:

- A. 3. B. 4. C. 8. D. Lớn hơn 8.

Lời giải

Chọn D

• **Tự luận:**

Phương trình hoành độ giao điểm của $(P_1), (P_2)$:

$$mx^2 - x + 2019 = x^2 + 2mx - m + 2020$$

$$\Leftrightarrow (m-1)x^2 - (2m+1)x + (m-1) = 0 \quad (1)$$

(P_1) (P_2) cắt tại hai điểm khi và chỉ khi (1) có hai nghiệm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 \neq 0 \\ \Delta \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ (2m+1)^2 - 4(m-1)^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m^2 - 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ m \leq -1 \text{ hoặc } m \geq 1 \end{cases} \quad (2)$$

Mà: $x_1 + x_2 = \frac{2m+1}{m-1} = 2 + \frac{3}{m-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{m-1} \in \mathbb{Z}$

Đặt $n = \frac{3}{m-1} \Leftrightarrow m = \frac{n+3}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{n+3}{n} \leq -1 \text{ hoặc } \frac{n+3}{n} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{3n+12}{4n} \leq 0 \text{ hoặc } \frac{3n-4}{4n} \geq 0$$

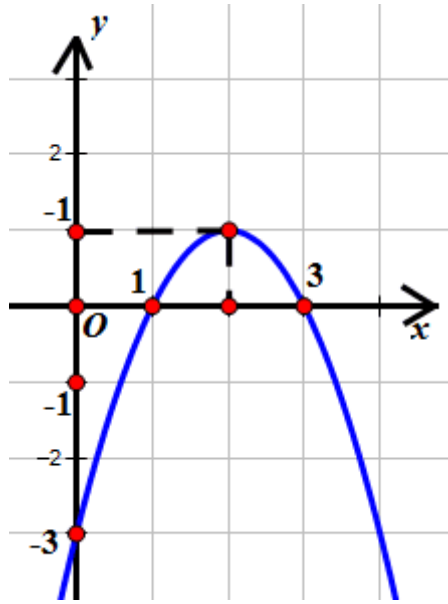
So sánh (2)

$$S = \left\{ \frac{n+3}{n} \mid n > 0 \text{ or } n \in \mathbb{Z}^-, n \neq -4 \right\}$$

Suy ra S có vô số tập con. **Chọn D**

Trắc nghiệm: Đề ý đề yêu cầu m là và các phương án đáp số ta sẽ **Chọn D**

Câu 67. Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị (C) (như hình vẽ). Hỏi có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $|f(|x|) + m| = 1$ có đúng 8 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_7 < 3 < x_8$.



A. 1.

B. 3.

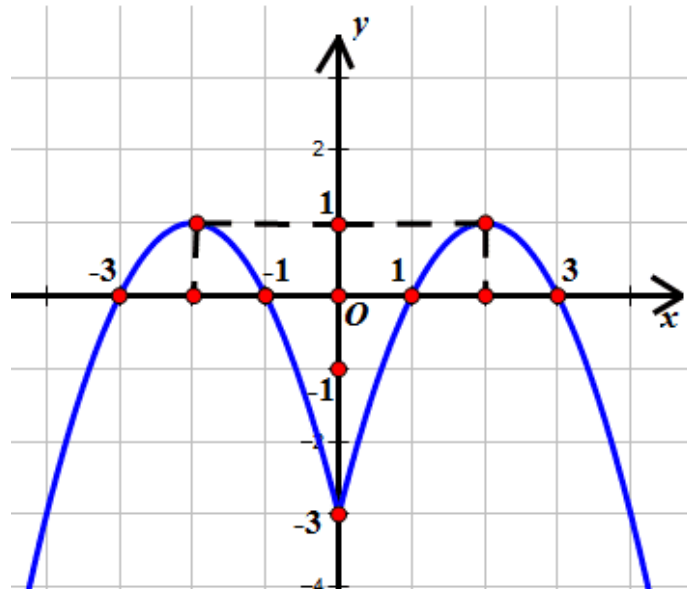
C. 2.

D. 0.

Lời giải

Chọn D

* Vẽ đồ thị hàm số (C') của hàm số $y = f(|x|)$: Giữ nguyên phần đồ thị (C) nằm phía bên phải trục Oy , bỏ đi phần đồ thị (C) bên trái trục Oy và lấy đối xứng phần đồ thị (C) phía bên phải trục Oy qua trục Oy .



* Vẽ đồ thị hàm số (C'') của hàm số $y = f(|x|) + m$:

Tịnh tiến đồ thị (C') theo vectơ $\vec{OI} = (0; m)$.

* Vẽ đồ thị hàm số (C''') của hàm số $y = |f(|x|) + m|$:

Giữ nguyên phần đồ thị (C'') nằm phía trên trục Ox , lấy đối xứng phần đồ thị (C'') ở phía dưới trục Ox qua trục Ox .

Dựa vào đồ thị ta thấy, phương trình có đúng 8 nghiệm phân biệt $x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_7 < 3 < x_8$ khi ta tịnh tiến đồ thị (C') lên trên m đơn vị $\Leftrightarrow 0 < m < 1$.

Câu 68. Cho hàm số $y = x^2 - (m-1)x + m+1$ và đường thẳng $d: y = x+3$. Biết rằng đường thẳng d cắt đồ thị hàm số tại hai điểm A, B thỏa mãn $OA^2 + OB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất với O là gốc tọa độ. Khi đó giá trị của tham số m thuộc tập hợp nào sau đây?

- A. $(0;1)$ B. $(1;3)$ C. $(-\infty; -1)$ D. $[-1;0]$

Lời giải

Chọn D

Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 - (m-1)x + m+1 = x+3 \Leftrightarrow x^2 - mx + m-2 = 0$

Ta có $\Delta = m^2 - 4m + 8 = (m-2)^2 + 4 > 0$, " m " nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt

do đó đường thẳng d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B .

Giả sử $A(x_1; x_1+3)$ và $B(x_2; x_2+3)$ với $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = m-2 \end{cases}$

Ta có $OA^2 + OB^2 = x_1^2 + (x_1+3)^2 + x_2^2 + (x_2+3)^2$

$OA^2 + OB^2 = 2(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 + 6(x_1 + x_2) + 18$

Thay vào ta có $OA^2 + OB^2 = 2m^2 - 4(m-2) + 6m + 18 = 2m^2 + 2m + 26$

$OA^2 + OB^2 = 2\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}m + \frac{51}{2} \geq \frac{51}{2}$, " m "

Dấu "=" xảy ra khi $m = -\frac{1}{2}$.

Vậy với $m = -\frac{1}{2}$ thỏa mãn yêu cầu đề bài. Đối chiếu các phương án **Chọn D**

Câu 69. Cho Parabol $(P): y = x^2 - 4x + 2$ có đỉnh là I_1 và parabol $(Q): y = -x^2 + 2x - m$ (m là tham số) có đỉnh là I_2 . Có bao nhiêu số nguyên dương m sao cho (P) cắt (Q) tại 2 điểm phân biệt A, B thỏa mãn $I_1 A I_2 B$ là hình bình hành.

- A. 2 B. 0 C. 1 D. 9

Lời giải

Họ và tên tác giả : Cần Việt Hưng Tên FB: Viet Hung

Chọn A

Parabol (P) có đỉnh là $I_1(2; -2)$, Parabol (Q) có đỉnh là $I_2(1; 1-m)$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (Q) : $x^2 - 4x + 2 = -x^2 + 2x - m$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 6x + m + 2 = 0 \quad (1)$

(P) cắt (Q) tại 2 điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow 5 - 2m > 0 \Leftrightarrow m < \frac{5}{2}, \text{ Khi đó phương trình (1) có 2 nghiệm } x_1, x_2.$$

$$\text{Theo Vi-et ta có : } \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_1 x_2 = \frac{m+2}{2} \end{cases}$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$, theo giả thiết $I_1 A I_2 B$ là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{I_1 A} = \overrightarrow{B I_2}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = 1 - x_2 \\ y_1 + 2 = 1 - m - y_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ y_1 + y_2 = -1 - m \end{cases} \Leftrightarrow y_1 + y_2 = -1 - m$$

$$\Leftrightarrow (x_1^2 + x_2^2) - 4(x_1 + x_2) + 4 = -1 - m \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4(x_1 + x_2) - 2x_1 x_2 + 4 = -1 - m$$

$$\Leftrightarrow 9 - 12 + 4 - (m + 2) = -1 - m \Leftrightarrow -1 - m = -1 - m \text{ (luôn đúng)}$$

Vậy $m < \frac{5}{2}$ và $m \in \mathbb{Z}^*$ suy ra $m \in \{1; 2\}$.

Câu 70. Cho parabol (p): $y = x^2 - 2mx + m + 1$ và đường thẳng (d): $y = x + 7$.

Tính tổng các giá trị của m để đường thẳng (d) cắt (p) tại hai điểm phân biệt A và B sao cho $2MA = 3MB$? Biết M (2; 9)?

A. $P = \frac{25}{12}$.

B. $P = \frac{25}{8}$.

C. $P = \frac{17}{8}$.

D. $P = \frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn B

+) Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - (2m+1)x + m - 6 = 0 (*) (\Delta = 4m^2 + 25 > 0, \forall m)$

+) Gọi: $A(a; a+7), B(b; b+7) \Rightarrow \overrightarrow{MA}(a-2; a-2), \overrightarrow{MB}(b-2; b-2)$

+) Trong đó a, b là nghiệm của phương trình (*), theo định lý Vi- Ét ta có
$$\begin{cases} a+b=2m+1(1) \\ ab=m-6(2) \end{cases}$$

+) Nhận xét: $M \in (d)$ nên ba điểm A, B, M thẳng hàng.

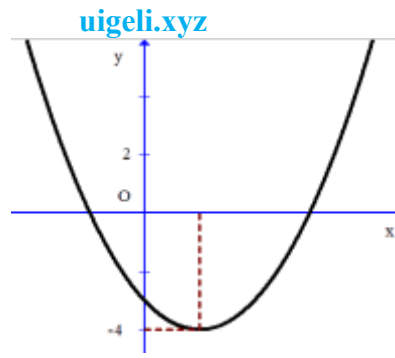
*) TH1: $2\overrightarrow{MA} = 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 2a - 3b = -2(3)$. Từ (1), (3) và (2) suy ra $24m^2 + 3m + 154 = 0$ (vô nghiệm)

*) TH2: $2\overrightarrow{MA} = -3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow 2a + 3b = 10(4)$. Từ (1), (4) và (2) suy ra $24m^2 - 75m + 50 = 0$

Phương trình này có hai nghiệm phân biệt nên ta có: $m_1 + m_2 = \frac{-b}{a} = \frac{25}{8}$

Vậy $m_1 + m_2 = \frac{25}{8}$.

Câu 71. Cho hàm số bậc hai $y = f(x) = ax^2 + bx + c, (a \neq 0)$ có đồ thị như hình vẽ dưới.



Tìm m để phương trình $|f(x+2018m)+m|=2m$ có 4 nghiệm thực phân biệt?

- A. $0 < m < 4$. B. $0 < m < \frac{4}{3}$. C. $m < \frac{4}{3}$. D. $0 < m < 2$.

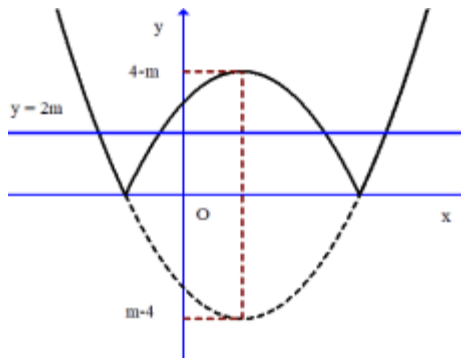
Lời giải

Chọn B

+) Trước hết ta có $m \geq 0$.

+) Đặt (P) là đồ thị hàm số $y = f(x)$ khi đó đồ thị hàm số $y = f(x+2018m)$ chỉ là tịnh tiến (P) sang trái $2018m$ đơn vị, do vậy số nghiệm phương trình $|f(x+2018m)+m|=2m$ bằng số nghiệm phương trình $|f(x)+m|=2m$.

+) Đồ thị hàm số $y = f(x)+m$ có tung độ đỉnh là $m-4$, để phương trình $|f(x)+m|=2m$ có 4 nghiệm thì điều kiện cần là đồ thị hàm số $y = |f(x)+m|$ có hình dáng:



Khi đó thì $m-4 < 0 \Leftrightarrow (m < 4)$

+) Điều kiện đủ để cắt tại 4 điểm phân biệt là $0 < 2m < 4-m \Leftrightarrow 0 < m < \frac{4}{3}$.

Câu 72. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2x - 3$ và đường thẳng $(d): y = x + m$. Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B nằm về hai phía của đường thẳng có phương trình $y = 1$?

- A. 3. B. 4. C. 5. D. 6.

Lời giải

Chọn C

Phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 + 2x - 3 = x + m \Leftrightarrow x^2 + x - 3 - m = 0$ (1)

(d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt $A, B \Leftrightarrow (1)$ có 2 nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m > -\frac{13}{4} \quad (2)$$

Giả sử $A(x_1; y_1), B(x_2; y_2)$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của (1)

Ta phải có $(y_1 - 1)(y_2 - 1) < 0 \Leftrightarrow (x_1 + m - 1)(x_2 + m - 1) < 0$

$$\Leftrightarrow x_1 x_2 + (m - 1)(x_1 + x_2) + m^2 - 2m + 1 < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4m - 1 < 0 \Leftrightarrow 2 - \sqrt{5} < m < 2 + \sqrt{5} \quad (\text{thỏa (2)})$$

$$m \in \mathbb{Q} \Rightarrow m \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$$

Câu 73.

Tập các giá trị của m để phương trình $|x^2 - x + 6| = 4x + m$ có bốn nghiệm phân biệt là khoảng $(a; b)$. Tính $P = ab$.

A. $P = -96$

B. $P = 147$

C. $P = -98$

D. $P = 98$

Lời giải

Chọn B

Ta có $|x^2 - x + 6| = 4x + m \Leftrightarrow |x^2 - x + 6| - 4x = m$

Xét hàm số $f(x) = |x^2 - x + 6| - 4x$

$$= \begin{cases} -x^2 - 5x + 6 & \text{khi } x \in [-3; 2] \\ x^2 - 3x - 6 & \text{khi } x \in (-\infty; -3) \cup (2; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

x	$-\infty$	-3	$-\frac{5}{2}$	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$
		12	$\frac{49}{4}$	-8	

Từ bảng biến thiên suy ra

Phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm

số $y = f(x)$ tại bốn điểm phân biệt $\Leftrightarrow 12 < m < \frac{49}{4}$

$$a = 12, b = \frac{49}{4} \Rightarrow P = 147$$

Do đó

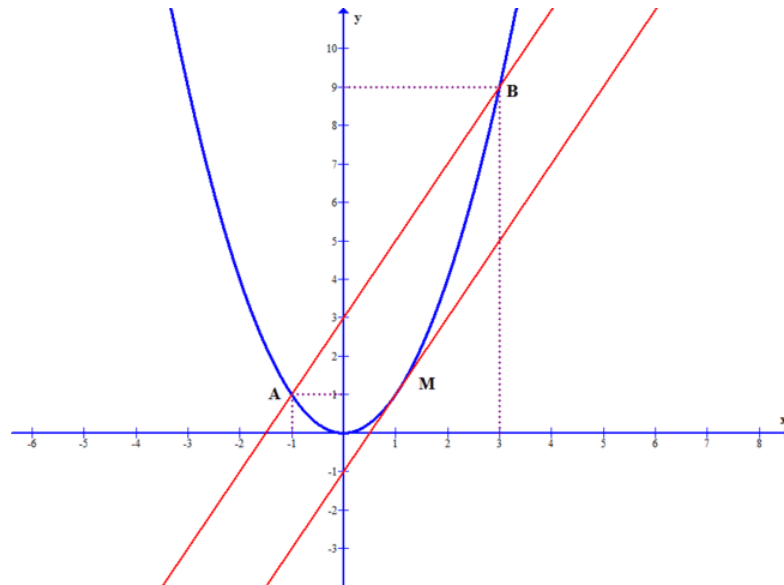
Câu 74. Cho parabol (P) có phương trình $y = f(x)$ và đường thẳng d có phương trình $y = g(x)$. Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) - g(x) \leq 0$ là $[a; b]$. Giả sử $A(a; y_1), B(b; y_2)$ là giao điểm của (P) và (d) . Gọi $M(m; m^2)$ với $m \in [a; b]$. Để diện tích ΔMAB đạt giá trị lớn nhất thì m phải thỏa mãn:

A. $m \in (-1; 0)$

B. $m \in \left(\frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$

C. $m \in (2; 3)$

D. $m \in (0; 1)$



Lời giải

Chọn B

Tập nghiệm của bất phương trình $f(x) - g(x) \leq 0$ là hoành độ của những điểm thuộc (P) và nằm phía dưới hoặc thuộc đường thẳng $y = g(x)$

Dựa vào đồ thị suy ra tập nghiệm $T = [-1; 3]$

$\Rightarrow a = -1; b = 3 \Rightarrow A(-1; 1); B(3; 9) \Rightarrow$ Đường thẳng d có phương trình là $y = 2x + 3$

Diện tích ΔMAB lớn nhất khi khoảng cách từ M đến đường thẳng AB lớn nhất

Gọi H là hình chiếu của M trên đường thẳng AB. MH lớn nhất khi M nằm trên tiếp tuyến d của đồ thị hàm số $y = x^2$ và song song với AB.

Phương trình d có dạng $y = 2x + b$. Vì d là tiếp tuyến nên $b = -1$. Khi đó $M(1; 1)$ hay $m = 1$.

Vậy đáp án D

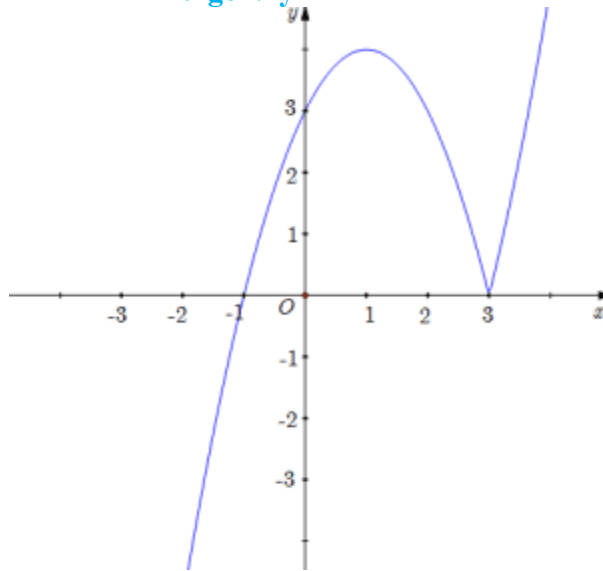
- Câu 75.** Tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $(x+1)\sqrt{x^2 - 6x + 9} - m + 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2 < 3 < x_3$ là $(a; b)$. Tính $a^2 + b^2$
- A. 58. B. 45. C. 85. D. 40.

Lời giải

$$(x+1)\sqrt{x^2 - 6x + 9} - m + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+1)|x-3| = m-3 \quad (*)$$

Số nghiệm của phương trình (*) bằng số giao điểm của đồ thị hàm số $y = (x+1)|x-3|$ và đường thẳng $y = m-3$ song song hoặc trùng với trục hoành



Dựa vào đồ thị ta thấy m để phương trình $(x+1)\sqrt{x^2 - 6x + 9} - m + 3 = 0$ có ba nghiệm phân biệt x_1, x_2, x_3 thỏa mãn $x_1 < 2 < x_2 < 3 < x_3$ thì $0 < m - 3 < 3 \hat{=} 3 < m < 6 \text{ và } a^2 + b^2 = 45$

VẤN ĐỀ 5. MIN, MAX

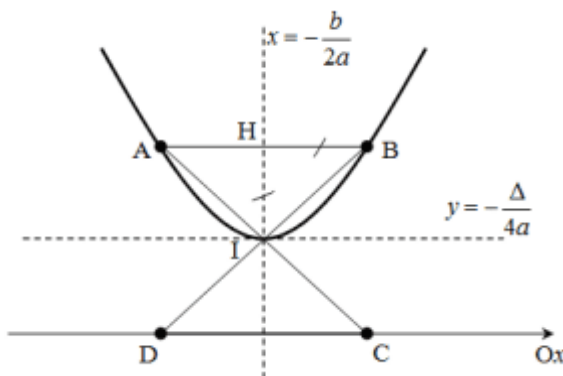
- Câu 1.** Cho parabol $(P) y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh là tâm của một hình vuông $ABCD$, trong đó C, D nằm trên trục hoành và A, B nằm trên (P) . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $T = ac + 2b$ bằng bao nhiêu ?
- A.** 2. **B.** -3. **C.** 4. **D.** -2.

Lời giải

Chọn C

Lời giải

Phác họa đồ thị như hình vẽ:



$$HI = HB = -\frac{\Delta}{4a}$$

Nhận thấy:

Tọa độ đỉnh của parabol $I = \left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$. Suy ra tọa độ điểm $B = \left(-\frac{b}{2a} + \frac{-\Delta}{4a}; -\frac{\Delta}{2a}\right)$

Thay tọa độ điểm B vào parabol (P) : $y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$; ta được:

$$-\frac{\Delta}{2a} = a \left(-\frac{\Delta}{4a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \Leftrightarrow \Delta = -4 = b^2 - 4ac \rightarrow T = ac + 2b = \frac{b^2}{4} + 2b + 1 = \left(\frac{b}{2} + 2 \right)^2 - 3 \geq -3$$

Suy ra giá trị nhỏ nhất của biểu thức T là $T_{\min} = -3$. Vậy **chọn đáp án B**.

Câu 2.

Một gia đình sản xuất cà phê nguyên chất. Do điều kiện nhà xưởng nên mỗi đợt gia đình đó sản xuất được t kg cà phê ($t \leq 30$). Nếu gia đình đó bán sỉ x kg thì giá của mỗi kí được xác định bởi công thức $G = 350 - 5x$ (nghìn đồng) và chi phí để sản xuất x kg cà phê được xác định bởi công thức $C = x^2 + 50x + 1000$ (nghìn đồng).

1) (Mức độ vận dụng) Tính chi phí để gia đình đó sản xuất kg cà phê thứ 10

- A.** 1600 nghìn. **B.** 69 nghìn. **C.** 1100 nghìn. **D.** 1000 nghìn.

2) (Mức độ Vận dụng cao) Để đạt được lợi nhuận tối đa, mỗi đợt gia đình đó nên sản xuất bao nhiêu kg cà phê.

- A.** $P = 20kg$. **B.** $25kg$. **C.** $15kg$. **D.** $30kg$.

Lời giải

1) Chọn B

Chi phí để sản xuất kg cà phê thứ 10 là $C(10) - C(9) = (10^2 + 50 \cdot 10) - (9^2 + 50 \cdot 9) = 69$ (nghìn đồng)

(Học sinh thường nhầm lẫn chi phí sản xuất kg thứ 10 với chi phí sản xuất 10kg)

2) Chọn B

Doanh thu khi gia đình bán x kg cà phê là $D = x(350 - 5x) = -5x^2 + 350x$ (nghìn)

Lợi nhuận thu được khi bán được x là

$$L = D(x) - C(x) = -5x^2 + 350x - (x^2 + 50x + 1000) = -6x^2 + 300x - 1000$$

Suy ra lợi nhuận đạt tối đa khi $x = \frac{300}{2 \cdot 6} = 25(kg)$

HS thường sai lầm khi nhầm hàm $D(x)$ với hàm $G(x)$

Câu 3.

Cho hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4ax + (a^2 - 2a + 2)$

Có bao nhiêu giá trị của a sao cho giá trị nhỏ nhất của trên đoạn $[0; 2]$ là bằng 5?

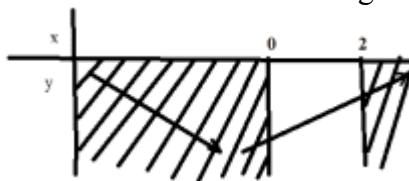
- A.** 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Parabol có hệ số của x^2 là $4 > 0$ nên bề lõm hướng lên. hoành độ đỉnh $x_I = \frac{a}{2}$.

- Nếu $\frac{a}{2} < 0 \Leftrightarrow a < 0$ thì $x_I < 0 < 2$. Ta có bảng biến thiên



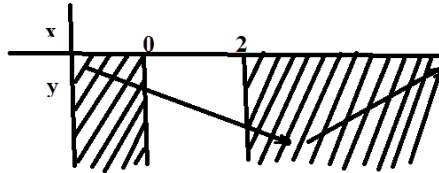
Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[0;2]} f(x) = f(0) = a^2 - 2a + 2$. Theo yêu cầu bài toán :

$$a^2 - 2a + 2 = 5 \Leftrightarrow a^2 - 2a - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1(t/m) \\ a = 3(L) \end{cases}$$

- Nếu $0 \leq \frac{a}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a \leq 4$ thì $x_l \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt GTNN tại đỉnh.

Do đó $\min_{[0;2]} f(x) = f(\frac{a}{2}) = -2a + 2$ Theo yêu cầu bài toán : $-2a + 2 = 5 \Leftrightarrow a = -\frac{3}{2} < 0(L)$

- Nếu $\frac{a}{2} > 2 \Leftrightarrow a > 4$ thì $x_l > 2 > 0$. Ta có bảng biến thiên



Từ bảng biến thiên ta có $\min_{[0;2]} f(x) = f(2) = a^2 - 10a + 18$. Theo yêu cầu bài toán :

$$a^2 - 10a + 18 = 5 \Leftrightarrow a^2 - 10a + 13 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 + 2\sqrt{3}(t/m) \\ a = 5 - 2\sqrt{3}(L) \end{cases}$$

Vậy $a = -1$ hoặc $a = 5 + 2\sqrt{3}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

Họ và tên tác giả: Nguyễn Văn Phu, Tên FB Nguyễn Văn Phu

Câu 4. Cho hàm số bậc hai (P): $y = x^2 - 2mx + 3m - 2$, trong đó x là ẩn, m là tham số. Tìm tất cả các giá trị của m để (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 và $x_1^2 + x_2^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $m = -\frac{3}{4}$.

B. $m = \frac{3}{4}$.

C. $m = \pm \frac{3}{4}$.

D. $m = \frac{3}{2}$.

A.

Lời giải

Đáp án B

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) với trục hoành: $x^2 - 2mx + 3m - 2 = 0$ (*)

Để (P) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1, x_2 \Leftrightarrow$ Phương trình (*) có hai nghiệm

$$x_1, x_2 \Leftrightarrow \Delta' = m^2 - 3m + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > 2 \\ m < 1 \end{cases} \quad (**)$$

phân biệt

$$x_1 + x_2 = 2m, x_1 x_2 = 3m - 2.$$

Với điều kiện (**), theo định lí Viét ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = 4m^2 - 2(3m - 2) = 4m^2 - 6m + 4$$

Do đó

$$x_1^2 + x_2^2 = 4m^2 - 6m + 4 = \left(2m - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}, \forall m \in D = (-\infty; 1) \cup (2; +\infty).$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi

$$2m - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{3}{4} \in D.$$

$$x_1^2 + x_2^2 \text{ đạt giá trị nhỏ nhất bằng } \frac{7}{4} \text{ khi và chỉ khi } m = \frac{3}{4}.$$

Vậy biểu thức

Câu 5. Gọi M và m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $y = \sqrt{5+4x-x^2} + (x-2)^2 + 99$.

Tính $4M + m$.

A. 535.

B. 541.

C. 516.

D. 534.

Họ và tên tác giả : Phạm Văn Huân Tên FB: Pham Van Huan

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } t = \sqrt{5+4x-x^2} = \sqrt{9-(x-2)^2} \quad (1)$$

Khi đó ta có $0 \leq t \leq 3$ hay $t \in [0; 3]$

Xét $y = f(t) = -t^2 + t + 108$ với $t \in [0; 3]$

t		$\frac{1}{2}$	
	0		3
f(t)		$\frac{433}{4}$	
	108		102

$$4M + m = 4 \cdot \frac{433}{4} + 102 = 535$$

Do vậy

$$P = 16x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(4x + \frac{1}{x}\right) + 7m + 11$$

Câu 6. Tìm tham số m để biểu thức có giá trị nhỏ nhất bằng 18.

A. $m = -1$.

B. $m = 0$.

C. Đáp án khác.

D. $m = 1$.

Lời giải

Chọn D

Đặt $t = 4x + \frac{1}{x} \Rightarrow 4x^2 - tx + 1 = 0$. Điều kiện để phương trình có nghiệm là

$$\Delta = t^2 - 16 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t \leq -4 \\ t \geq 4 \end{cases}$$

$P = t^2 - 2t + 7m + 3$. Ta có bảng biến thiên của P

t	$-\infty$	-4	4	$+\infty$
P	$+\infty$	$7m+27$	$7m+11$	$+\infty$

Từ BBT ta có $\min P = 18 \Leftrightarrow 7m + 11 = 18 \Leftrightarrow m = 1$. Chọn D

- Câu 7.** Cho $y = x^2 + mx + n$ (m, n là tham số), $f(x_0)$ là giá trị của hàm số tại x_0 . Biết $f(-2 + \sqrt{3} + m + n) = f(8 - \sqrt{3} - m - n)$ và giá trị nhỏ nhất của hàm số là -8 . Khi đó $T = m + n$ có giá trị bằng:
- A.** -5 . **B.** -4 . **C.** -6 . **D.** 3 .

Lời giải

Chọn A

Theo giả thiết và tính chất đối xứng của đồ thị hàm số bậc 2 ta có

$$\begin{cases} \frac{-m}{2} = 3 \\ f(3) = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ 9 + 3m + n = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -6 \\ n = 1 \end{cases}$$

Vậy $T = -5$. Chọn A

- Câu 8.** Cho hàm số: $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị nhỏ nhất bằng 2 khi $x=1$ và nhận giá trị bằng 3 khi $x=2$. Tính $abc=?$
- A.** -6 **B.** 6 **C.** -2 **D.** 1

Lời giải

Theo giả thiết, ta có:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \frac{-b}{2a} = 1 \\ a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ b = -2a \\ 3a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

Vậy $abc = -6 \Rightarrow$ Chọn A

- Câu 9.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$ có $|f(x)| \leq 1 \forall x \in [0; 1]$. Khi đó giá trị của b là:
- A.** $|b| \leq 8$ **B.** $|b| > 8$ **C.** $0 \leq b \leq 8$ **D.** $-8 < b < 0$

Lời giải

Từ giả thiết ta có:

$$\begin{cases} -1 \leq f(0) = c \leq 1 \\ -1 \leq f(1) = a + b + c \leq 1 \\ -1 \leq f(\frac{1}{2}) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2} + c \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 \leq -3c \leq 3 \\ -1 \leq -a - b - c \leq 1 \\ -4 \leq a + 2b + 4c \leq 4 \end{cases}$$

Cộng vế theo vế 3 bất đẳng thức trên ta có: $-8 \leq b \leq 8$

Vậy chọn A

Phản biện: Lời giải OK.

Về đề bài: Nếu đề đáp án như trên học sinh có thể sử dụng máy tính là dễ dàng. Theo mình nên đổi lại câu hỏi như sau cho phù hợp hơn:

Cho hàm số $y = \left| \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4 \right|$. Gọi A là giá trị lớn nhất của hàm số. Khi A đạt giá trị nhỏ nhất thì m thuộc khoảng nào dưới đây?

- A.** $m \in (-2; 0)$ **B.** $m \in (0; 1)$ **C.** $m \in (1; 2)$ **D.** $m \in (2; 3)$

- Câu 10.** Cho hàm số $y = \left| \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4 \right|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số y là nhỏ nhất.
- A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = \frac{3}{8}$. D. $m = \frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [0; 2]$.

Gọi $A = \max_{[0;2]} y$. Ta đặt $t = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow t = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ do đó $0 \leq t \leq 1$

Khi đó hàm số được viết lại là $y = |t - 3m + 4|$ với $t \in [0; 1]$ suy ra

$$A = \max_{[0;1]} |t - 3m + 4| = \max \{ |-3m + 4|, |5 - 3m| \} \geq \frac{|-3m + 4| + |5 - 3m|}{2}$$

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có

$$|-3m + 4| + |5 - 3m| = |3m - 4| + |5 - 3m| \geq 1$$

$$A \geq \frac{1}{2} \quad m = \frac{3}{2}$$

Do đó . Đẳng thức xảy ra

$$m = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị cần tìm là

- Câu 11.** Cho hàm số $y = \left| \sqrt{2x - x^2} - 3m + 4 \right|$. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số y là nhỏ nhất.
- A. $m = \frac{3}{4}$. B. $m = \frac{3}{2}$. C. $m = \frac{3}{8}$. D. $m = \frac{3}{16}$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định: $D = [0; 2]$.

Gọi $A = \max_{[0;2]} y$. Ta đặt $t = \sqrt{2x - x^2} \Rightarrow t = \sqrt{1 - (x-1)^2}$ do đó $0 \leq t \leq 1$

Khi đó hàm số được viết lại là $y = |t - 3m + 4|$ với $t \in [0; 1]$ suy ra

$$A = \max_{[0;1]} |t - 3m + 4| = \max \{ |-3m + 4|, |5 - 3m| \} \geq \frac{|-3m + 4| + |5 - 3m|}{2}$$

Áp dụng BĐT trị tuyệt đối ta có

$$|-3m + 4| + |5 - 3m| = |3m - 4| + |5 - 3m| \geq 1$$

$$A \geq \frac{1}{2} \quad m = \frac{3}{2}$$

Do đó . Đẳng thức xảy ra

$$m = \frac{3}{2}$$

Vậy giá trị cần tìm là .

Câu 12. Gọi A, B là hai giao điểm của đường thẳng $(d): y = -3x + 9$ và parabol $(P): y = -x^2 + 2x + 3$. Gọi điểm $K(a, b)$ thuộc trục đối xứng của (P) sao cho $KA + KB$ nhỏ nhất. Tính $a + b$.

A. 1.

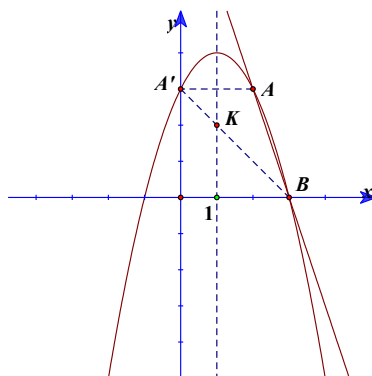
B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn C



Tọa độ giao điểm của (d) và (P) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} y = -3x + 9 \\ y = -x^2 + 2x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -3x + 9 \\ -x^2 + 5x - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

Suy ra: $A(2; 3), B(3; 0)$

Hoành độ hai điểm A, B cùng lớn hơn 1 nên chúng nằm cùng phía so với trục đối xứng $x = 1$.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua trục đối xứng $x = 1$. Khi đó: $A'(0; 3)$.

Ta có: $KA + KB = KA' + KB \geq A'B$. Suy ra $KA + KB$ nhỏ nhất khi dấu bằng xảy ra. Lúc đó K, A', B thẳng hàng, tức là K là giao điểm của $A'B$ với trục đối xứng $x = 1$.

Phương trình đường thẳng $A'B$: $y = -x + 3$

Điểm $K(1; 2)$

Vậy: $a + b = 3$

Câu 13. Cho 2 số x, y thỏa mãn $(x + 2y)((\sin x + \cos x)^4 + \sin^2 2x) = 5\sqrt{5}\sqrt{x^2 + y^2}$. Khi đó giá trị của biểu thức $P = \sin 2x + \cos y$ có giá trị bằng bao nhiêu?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn B

$$x + 2y \leq \sqrt{5(x^2 + y^2)}$$

Theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

$$\begin{cases} \frac{x}{1} = \frac{y}{2} \\ x + 2y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x \geq 0 \end{cases}$$

Dấu “=” xảy ra khi

$$\begin{cases} (\sin x + \cos x)^4 = \left(\sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \right)^4 \leq 4 \Rightarrow (\sin x + \cos x)^4 + \sin^2 2x \leq 5 \\ \sin^2 2x \leq 1 \end{cases}$$

Mặt khác ta lại có

$$x + 2y \leq \sqrt{5(x^2 + y^2)}$$

Vì

$$\Rightarrow (x + 2y) \left((\sin x + \cos x)^4 + \sin^2 2x \right) \leq \sqrt{5(x^2 + y^2)} \left((\sin x + \cos x)^4 + \sin^2 2x \right)$$

$$\leq 5\sqrt{5(x^2 + y^2)}$$

. Nên $VT \leq VP$, dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} y = 2x, x \geq 0 \\ |\sin x + \cos x| = \sqrt{2} \\ \cos 2x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + k\pi (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \\ y = \frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z}, k \geq 0) \end{cases} \Rightarrow \sin 2x + \cos y = 1$$

$\Rightarrow$ **chọn B**

- Câu 14.** Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a,b,c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.
- A.** $P = 0$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -6$.

Lời giải

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{cases} \text{ và điểm } \left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4} \right) \text{ thuộc đồ thị} \Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}.$$

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$

Khi đó giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$. Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \xrightarrow{\text{Viết}} \left(-\frac{b}{a} \right)^3 - 3 \left(-\frac{b}{a} \right) \left(\frac{c}{a} \right) = 9$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a} \right)^3 - 3 \left(-\frac{b}{a} \right) \left(\frac{c}{a} \right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \longrightarrow P = abc = 6.$$

Từ đó ta có hệ

Chọn B

Câu 15. Có hai giá trị của tham số m để cho giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$$

Trên đoạn $[0;1]$ bằng 1. Tổng của hai giá trị của m đó là :

- A. 2. B. $\sqrt{2}$. C. $\sqrt{2} - 2$. D. $2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Xét 3 trường hợp

TH1: $0 \leq -\frac{2m+1}{2} \leq 1$, suy ra $GTNN = f\left(-\frac{2m+1}{2}\right) = -m - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$ (loại)

TH2: $-\frac{2m+1}{2} < 0 \Rightarrow GTNN = f(0) = m^2 - 1 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{2}$

TH3: $-\frac{2m+1}{2} > 1 \Rightarrow GTNN = f(1) = (m+1)^2 = 1 \Rightarrow m = -2$

Tóm lại $m = -2; m = \sqrt{2}$.

Chọn C : $\sqrt{2} - 2$

Câu 16. Tìm các giá trị của tham số m để cho giá trị nhỏ nhất của hàm số

$$y = f(x) = x^2 + (2m+1)x + m^2 - 1$$

Trên đoạn $[0;1]$ bằng 1.

- A. $m = 2$. B. $m = \sqrt{2}$. C. $\begin{cases} m = \sqrt{2} \\ m = -2 \end{cases}$. D. $\begin{cases} m = -\sqrt{2} \\ m = 2 \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C

Xét 3 trường hợp

TH1: $0 \leq -\frac{2m+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq -\frac{1}{2}$, suy ra GTNN $f\left(-\frac{2m+1}{2}\right) = -m - \frac{5}{4} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$ (loại)

TH2: $-\frac{2m+1}{2} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$ suy ra GTNN $f(0) = m^2 - 1 = 1 \Rightarrow m = \sqrt{2}$.

TH3: $-\frac{2m+1}{2} > 1 \Leftrightarrow m < -1$, suy ra GTNN $f(1) = (m+1)^2 = 1 \Rightarrow m = -2$

Vậy $m = -2; m = \sqrt{2}$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

- Câu 17.** Cho hàm số $y = x^2 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right) + m$, $m \neq 0$. Đặt $\min_{[-1;1]} y = y_1; \min_{[-1;1]} y = y_2$. Có bao nhiêu giá trị của m thỏa mãn $y_2 - y_1 = 10$.
- A. 0. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Có định $I: x_i = m + \frac{1}{m}$, mà $|x_i| = \left|m + \frac{1}{m}\right| = |m| + \left|\frac{1}{m}\right| \geq 2$ nên $m + \frac{1}{m} \geq 2$ hoặc $m + \frac{1}{m} \leq -2$.

Do đó $y_1, y_2 \in \left\{ y(1) = 1 - 2\left(m + \frac{1}{m}\right) + m; y(-1) = 1 + 2\left(m + \frac{1}{m}\right) + m \right\}$. Yêu cầu bài toán tương đương với

$$|y_2 - y_1| = 10 \Leftrightarrow \left| 4\left(m + \frac{1}{m}\right) \right| = 10 \Leftrightarrow \begin{cases} m + \frac{1}{m} = \frac{5}{2} \\ m + \frac{1}{m} = -\frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \in \left\{ 2; -2; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \right\}. \text{ Chọn D}$$

Người soạn: Lưu Thị Liên

- Câu 18.** Cho x, y là các số thực thỏa mãn $2(x^2 + y^2) = xy + 1$. Giá trị lớn nhất của $P = 3(x^4 + y^4) + 5x^2y^2$ là

- A. 3. B. 2. C. $\frac{11}{9}$. D. $\frac{11}{10}$.

Lời giải

Chọn C.

Ta có $P = 3(x^4 + y^4) + 5x^2y^2 = 3\left[(x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2\right] + 5x^2y^2 = 3(x^2 + y^2)^2 - x^2y^2$

Vì $x^2 + y^2 = \frac{xy+1}{2}$ nên $P = 3\left(\frac{xy+1}{2}\right)^2 - x^2y^2 = -\frac{1}{4}x^2y^2 + \frac{3}{2}xy + \frac{3}{4}$

$$\begin{cases} 2(x^2 + y^2) = xy + 1 \\ x^2 + y^2 \geq 2xy \end{cases} \Rightarrow xy + 1 \geq 4xy \Rightarrow xy \leq \frac{1}{3}$$

Mặt khác

$$2(x^2 + y^2) = xy + 1 \Leftrightarrow 2[(x+y)^2 - 2xy] = xy + 1 \Leftrightarrow 2(x+y)^2 = 5xy + 1 \Rightarrow 5xy + 1 \geq 0 \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{5}$$

Đặt $t = xy$ ta có $P = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{3}{2}t + \frac{3}{4}$ với $-\frac{1}{5} \leq t \leq \frac{1}{3}$

Kết luận: $\max_{\left[-\frac{1}{5}; \frac{1}{3}\right]} P = \frac{11}{9}$ Khi $t = \frac{1}{3}$

- Câu 19.** Tham số a thỏa mãn giá trị lớn nhất của hàm số $y = |3x^2 - 6x + 2a - 1|$ với $-2 \leq x \leq 3$ đạt giá trị nhỏ nhất. Giá trị tham số a thuộc khoảng nào trong các khoảng sau?

- A. $(-10; -5)$. B. $(-5; 0)$. C. $(0; 5)$. D. $(5; 10)$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = 3x^2 - 6x + 2a - 1$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số $y = |f(x)|$ với $-2 \leq x \leq 3$.

$$2M \geq |f(-2)| + |f(1)| \geq |f(-2) - f(1)| = 27 \Rightarrow M \geq \frac{27}{2}$$

Ta có: . Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} |f(-2)| = |f(1)| = M = \frac{27}{2} \\ f(-2) \cdot (-f(1)) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-2) = -f(1) = \frac{27}{2} \\ f(-2) = -f(1) = -\frac{27}{2} \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{-19}{4}$$

Vậy $a = \frac{-19}{4}$ thỏa mãn bài toán. **Chọn B**

Câu 20. Cho hàm số: $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ($a > 0$). Biết rằng hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$. Khi đó giá

trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2}$ là:

- A.** 4. **B.** $\frac{8}{11}$. **C.** $\frac{8}{3}$. **D.** $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Hoàng Gia Hứng Tên FB: Hoàng Gia Hứng

Chọn B

Do $a > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ thì: $\frac{-b}{2a} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 2$

$$P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2} = \frac{8}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} + 3} = \frac{8}{t^2 + 2t + 3} \quad \text{với } t = \frac{b}{a} \geq 2$$

Khi đó :

Ta có $t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2 \geq 11, \forall t \geq 2$. Dấu "=" xảy ra khi $t = 2$

Do đó : $P \leq \frac{8}{11}$. Suy ra $\max P = \frac{8}{11}$ khi $\frac{b}{a} = 2$. **Chọn B**

Câu 21. Đặt $f(x) = ax^2 + bx + c$ và $g(x) = cx^2 + bx + a$, giả sử $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Tính $M = \max_{x \in [-1; 1]} g(x)$.

- A.** $M = -2$. **B.** $M = 2$. **C.** $M = 1$. **D.** $M = -1$.

Lời giải

Chọn B

Chọn $x = -1, 0, 1$ và đặt:

$$\begin{cases} A = f(1) = a + b + c \\ B = f(-1) = a - b + c \\ C = f(0) = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{A+B}{2} - C \\ b = \frac{A-B}{2} \\ c = C \end{cases} \quad \text{và } |A| \leq 1, |B| \leq 1, |C| \leq 1$$

Nên $g(x) = Cx^2 + \frac{A-B}{2}x + \frac{A+B}{2} - C = C(x^2 - 1) + \frac{1}{2}A(x+1) + \frac{1}{2}B(1-x)$

Suy ra

$$\begin{aligned} |g(x)| &\leq |C(x^2 - 1)| + \frac{1}{2}|A(x+1)| + \frac{1}{2}|B(1-x)| \\ &\leq |x^2 - 1| + \frac{1}{2}|x+1| + \frac{1}{2}|1-x| \\ &= 1 - x^2 + \frac{1}{2}(1+x) + \frac{1}{2}(1-x) = 2 - x^2 \leq 2, \forall x \in [-1; 1]. \end{aligned}$$

Ta thấy hàm số $f(x) = 2x^2 - 1 \Rightarrow g(x) = -x^2 + 2$ là một hàm số thỏa mãn điều kiện bài toán.

Vậy $\max_{[-1;1]} g(x) = 2$.

Câu 1. Cho 2 số thực $x \geq 1, y \geq 0$ thỏa mãn điều kiện $\max \{|x^2 + 1|; |2x - y + 1|\} = \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2}$.

Hỏi biểu thức $P = 3(x+1)(x^2 + 2y + 1)$ có tất cả bao nhiêu ước số nguyên dương?

A. 5. **B.** 6. **C.** 7. **D.** 8.

Lời giải

Chọn D

$$\left| \frac{a+b}{2} \right| + \left| \frac{a-b}{2} \right| = \max \{|a|; |b|\}$$

Ta có một tính chất cơ bản của hàm trị tuyệt đối

$$\max \{|x^2 + 1|; |2x - y + 1|\} = \left| \frac{x^2 + 2x - y + 2}{2} \right| + \left| \frac{x^2 - 2x + y}{2} \right|$$

Áp dụng ta có

Sử dụng bất đẳng thức trị tuyệt đối ta có

$$\left| \frac{x^2 + 2x - y + 2}{2} \right| + \left| \frac{x^2 - 2x + y}{2} \right| \geq \left| \frac{2x^2 + 2}{2} \right| = \frac{2x^2 + 2}{2} \geq 2 \quad (x \geq 1)$$

$$\frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} \leq \frac{\left(\sqrt{2(x^2 + y^2)} \right)^2}{x^2 + y^2} = 2$$

Mặt khác theo bất đẳng thức Cauchy – Schwarz ta có

Vậy $VT \geq 2 \geq VP$. Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = y = 1$.

Khi đó $P = 24$ có tất cả 8 ước số nguyên dương.

Câu 2. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 2(m-1)x + 3m - 5$, m là tham số. Tìm m để giá trị nhỏ nhất của $f(x)$ đạt giá trị lớn nhất.

- A.** $m = \frac{5}{2}$. **B.** $m = \frac{2}{5}$. **C.** $m = -\frac{3}{2}$. **D.** $m = -\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $f(x)$ là parabol có hoành độ đỉnh là $x = 1 - m$, mặt khác vì $a = 1 > 0$ nên:

$\min y = f(1 - m) = -m^2 + 5m - 6 = g(m)$, $g(m)$ là parabol có hoành độ đỉnh là $\frac{5}{2}$ và hệ số

$a = -1 < 0$ nên $\max g = g\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{4}$ tại $m = \frac{5}{2}$. Vậy

Câu 3. Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.

- A.** $P = 0$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -6$.

Lời giải

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{cases}$ và điểm $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}$.

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$

Khi đó giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$. Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \xrightarrow{\text{Viet}} \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \longrightarrow P = abc = 6.$$

Từ đó ta có hệ

Chọn B

Câu 4. Cho a, b, c là 3 số thực thỏa mãn $\begin{cases} a \neq 0 \\ 4a + 9b + 24c = 0 \end{cases}$. Gọi x_1, x_2 lần lượt là hoành độ giao điểm của Parabol $(P): y = 2ax^2 + 3bx + 4c$ với trục hoành. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $T = |x_1 - x_2|$.

- A.** $T = 0$. **B.** $T = \frac{1}{\sqrt{3}}$. **C.** $T = \frac{2}{\sqrt{3}}$. **D.** $T = \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: x_1, x_2 là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm: $2ax^2 + 3bx + 4c = 0$ (1).

Từ $4a + 9b + 24c = 0 \Rightarrow c = -\frac{4a + 9b}{24}$. Phương trình (1) có:

$$\Delta = 9b^2 - 32ac = 9b^2 + 32a\left(-\frac{4a + 9b}{24}\right) = 9\left(b + \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{4a^2}{3} > 0 \quad (\text{do } a \neq 0)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } T = |x_1 - x_2| &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} = \frac{\sqrt{9\left(b + \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{4a^2}{3}}}{2|a|} = \sqrt{\frac{9}{4a^2}\left(b + \frac{2a}{3}\right)^2 + \frac{1}{3}} \geq \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (T = |x_1 - x_2| \\ &= \frac{\sqrt{\Delta}}{2|a|} \text{ suy ra từ công thức nghiệm}). \end{aligned}$$

Dấu “=” xảy ra khi: $2a = -3b = 24c$. Vậy: $T_{\min} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Câu 5. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + (2m + 1)x + m^2 - 1$, với m là tham số. Tích các giá trị của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn $[0; 1]$ bằng 1 là:

- A.** $m = -2\sqrt{2}$ **B.** $m = -2$ **C.** $m = 0$ **D.** $m = -\frac{9}{4}$

Lời giải

Chọn A

Do hệ số của x^2 là $1 > 0$ nên đồ thị của hàm số là một Parabol có tọa độ đỉnh

$I\left(-\frac{2m+1}{2}; -\frac{4m+5}{4}\right)$, đặt $x_0 = -\frac{2m+1}{2}$. ta có bảng biến thiên của hàm số như sau:

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
y	$+\infty$	$-\frac{4m+5}{4}$	$+\infty$

Trường hợp 1: $x_0 \in [0;1]$ ta có $0 \leq -\frac{2m+1}{2} \leq 1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$. Khi đó
 $\min_{[0;1]} f(x) = \min_{\mathbb{R}} f(x) = f(x_0) = -\frac{4m+5}{4}$. Theo đề bài ta có $-\frac{4m+5}{4} = 1 \Leftrightarrow m = -\frac{9}{4}$ không thỏa
 mãn điều kiện $-\frac{3}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$

Trường hợp 2: $x_0 < 0$ ta có $-\frac{2m+1}{2} < 0 \Leftrightarrow m > -\frac{1}{2}$. Khi đó hàm số đồng biến trên $[0;1]$ nên
 $\min_{[0;1]} f(x) = f(0) = m^2 - 1$. Theo đề bài ta có $m^2 - 1 = 1 \Leftrightarrow m = -\sqrt{2}$ hoặc $m = \sqrt{2}$. Chỉ có
 $m = \sqrt{2}$ thỏa mãn điều kiện $m > -\frac{1}{2}$

Trường hợp 3: $x_0 > 1$ ta có $-\frac{2m+1}{2} > 1 \Leftrightarrow m < -\frac{3}{2}$. Khi đó hàm số nghịch biến trên $[0;1]$ nên
 $\min_{[0;1]} f(x) = f(1) = (m+1)^2$. Theo đề bài ta có $(m+1)^2 = 1 \Leftrightarrow m = 0$ hoặc $m = -2$. Chỉ có $m = -2$
 thỏa mãn điều kiện $m < -\frac{3}{2}$

Kết luận: Vậy có hai giá trị thỏa mãn yêu cầu bài toán là $m = -2; m = \sqrt{2}$. **Chọn A**

Câu 6. Cho hàm số bậc nhất $y = mx - m + 1$ (m là tham số), có đồ thị là đường thẳng d . Khoảng cách lớn nhất từ gốc tọa độ đến d là

- A. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Lời giải trắc nghiệm: Dễ thấy d luôn đi qua $A(1;1)$. Mà $d(O, d) \leq OA = \sqrt{2}$ nên chọn **D**.

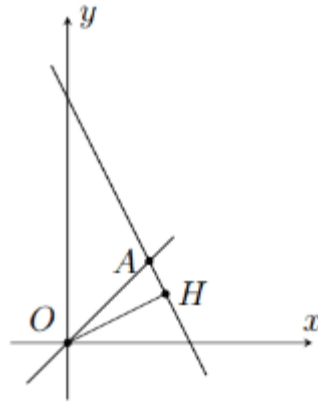
Lời giải tự luận:

Gọi $A(x_0; y_0)$ là điểm mà d luôn đi qua với mọi m . Khi đó

$$y_0 = mx_0 - m + 1, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)m - y_0 + 1 = 0, \quad \forall m \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 - 1 = 0 \\ -y_0 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1. \end{cases}$$



Do đó d luôn đi qua $A(1;1)$.

Gọi d' : $y = ax$ là đường thẳng đi qua gốc tọa độ và điểm $A(1;1) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow d'$: $y = x$.

Kẻ $OH \perp d \Rightarrow OH \leq OA$.

Do đó OH lớn nhất khi và chỉ khi $H \equiv A$ hay $d \perp d' \Leftrightarrow m \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow m = -1$.

Câu 7. Giá trị lớn nhất của hàm số $y = |5 - 2x| - 4|4 + x| + 3x + m^2 - 5m - 1$ trên đoạn $[-5; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất là:

A. $\frac{25}{4}$.

B. $\frac{25}{2}$.

C. $\frac{13}{2}$.

D. $\frac{13}{4}$.

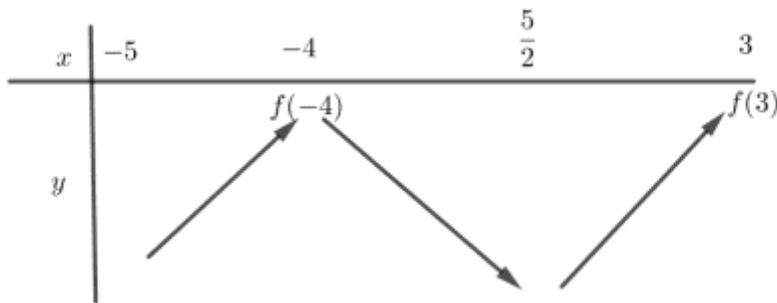
Lời giải

Chọn A

$$y = \begin{cases} 5x + m^2 - 5m + 20 & \text{khi } x \leq -4 \\ -3x + m^2 - 5m - 12 & \text{khi } -4 < x < \frac{5}{2} \\ x + m^2 - 5m - 22 & \text{khi } x \geq \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ta có

Do đó ta có BBT



$$f(-4) = m^2 - 5m$$

$$f(3) = m^2 - 5m - 19 < f(-4)$$

$$\Rightarrow \max_{[-5;3]} y = m^2 - 5m \geq \frac{25}{4}, \forall m$$

$$\Rightarrow \min \left(\max_{[-5;3]} y \right) = \frac{25}{4} \text{ khi } m = \frac{5}{2}. \text{ Chọn A}$$

- Câu 8.** Biết rằng parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ cắt trục hoành tại hai điểm có hoành độ thuộc đoạn $[0; 2]$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac}$ thuộc khoảng nào sau đây?
- A. $(1; \sqrt{3})$. B. $(2; 4)$. C. $(3; 9)$. D. $(9; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

PT tương giao: $ax^2 + bx + c = 0$ (1)

Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của PT(1), theo định lý Viet ta có:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Ta có:
$$P = \frac{8a^2 - 6ab + b^2}{4a^2 - 2ab + ac} = \frac{8 - 6 \cdot \frac{b}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2}{4 - 2 \cdot \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + (x_1 + x_2)^2}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2} \quad (\text{vì } a \neq 0).$$

Giả sử $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 2$
$$\begin{cases} x_1^2 \leq x_1 x_2 \\ x_2^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 x_2 + 4 \\ (x_1 + x_2)^2 \leq 3x_1 x_2 + 4 \end{cases}$$

Do đó
$$P \leq \frac{8 + 6(x_1 + x_2) + 3x_1 x_2 + 4}{4 + 2(x_1 + x_2) + x_1 x_2} = 3 \Rightarrow P_{\max} = 3$$

khi
$$\begin{aligned} & \begin{cases} x_1 = x_2 = 2 \\ x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{a} = 4 \\ \frac{c}{a} = 4 \\ \frac{b}{a} = 2 \\ c = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} -\frac{b}{a} = 4a \\ -\frac{b}{a} = -2a \\ c = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

- Câu 1.** Cho hàm số $y = ax^2 + bx + c$ có đồ thị đi qua điểm $A(1; 1)$ và cắt trục hoành tại hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông đỉnh A và có diện tích $S \leq \sqrt{2}$. Gọi M là giá trị lớn nhất của hàm số. Tìm giá trị lớn nhất của M .

- A. $\text{Max} M = 1$. B. $\text{Max} M = 2$. C. $\text{Max} M = 3$. D. $\text{Max} M = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đồ thị hàm số đi qua $A(1; 1)$ nên ta có $a + b + c = 1$. (1)

Gọi x_1, x_2 là nghiệm phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ thì $B(x_1; 0), C(x_2; 0)$. Tam giác ABC vuông đỉnh A nên $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 0 \Rightarrow (x_1 - 1)(x_2 - 1) + 1 = 0 \Rightarrow x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 2 = 0 \Rightarrow 2a + b + c = 0$ (2).

Từ (1) và (2) ta có $a = -1, c = 2 - b$.

Ta có $BC = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = \sqrt{(x_2 + x_1)^2 - 4x_1 x_2} = \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{a^2}} = \sqrt{b^2 - 4b + 8}$. Tam giác ABC có

diện tích $S \leq \sqrt{2}$ nên $\frac{1}{2} BC \leq \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{b^2 - 4b + 8} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow b^2 - 4b \leq 0$

Ta có $a = -1$ nên hàm số có giá trị lớn nhất là $M = \frac{-\Delta}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{b^2 - 4b + 8}{4}$.

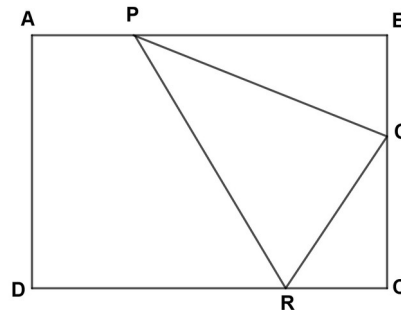
Vì $b^2 - 4b \leq 0$ nên $M \leq 2$,
 $M = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 + 2 \\ y = -x^2 + 4x - 2 \end{cases}$

Câu 2. Cho hình chữ nhật $ABCD$, $AB = 10, AD = 8$. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm P, Q, R sao cho $AP = BQ = CR$. Độ dài của AP trong khoảng nào sau đây thì diện tích tam giác PQR đạt nhỏ nhất.

A. (2;3) **B.** (3;4) **C.** (4;5) **D.** (5;6).

Lời giải

Chọn C



Cách 1:

$$S = \frac{(CR + BP)BC}{2} = 40$$

Ta có tứ giác $CRPB$ là hình thang và có diện tích không đổi nên diện tích hình PQR đạt nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng diện tích của 2 tam giác BPQ, CQR đạt lớn nhất.

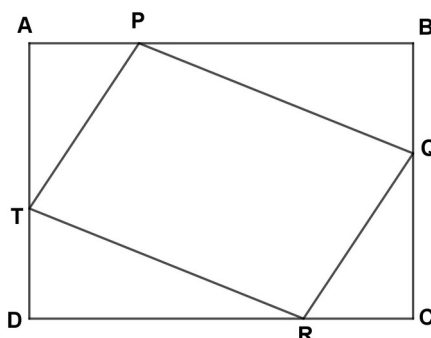
Đặt $AP = x$, $0 \leq x \leq 8$.

$$S_{BPQ} + S_{CQR} = \frac{x(8-x) + x(10-x)}{2} = x(9-x) = \frac{81}{4} - \left(x - \frac{9}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{4}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{9}{2}$. **Chọn C**

Cách 2: Trên cạnh AD lấy điểm T sao cho $DT = AP$. Để chứng minh được tứ giác $PQRT$ là hình bình hành và

$$S_{PRQ} = \frac{1}{2} S_{PQRT}$$



Đặt $AP = x$, $0 \leq x \leq 8$. Diện tích hình $PQRT$ đạt nhỏ nhất khi và chỉ khi tổng diện tích của 4 tam giác APT , BPQ , CQR , DTR đạt lớn nhất

$$S_{APT} + S_{BPQ} + S_{CQR} + S_{DTR} = x(8-x) + x(10-x) = x(18-2x) = 2x(9-x) = \frac{81}{2} - 2\left(x - \frac{9}{2}\right)^2 \leq \frac{81}{2}$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $x = \frac{9}{2}$. **Chọn C**

Để xét $2x(9-x) \leq \frac{81}{2}$ có thể áp dụng bất Cô si cho hai số không âm x và $9-x$ hoặc xét hàm số $y = -2x^2 + 18x$ trên $[0; 8]$.

Câu 3. Cho hàm số $f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 2$ (m là tham số). Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị

của m sao cho $\min_{[0;2]} f(x) = 3$. Khẳng định nào sau đây đúng:

A. $S \subset (-4; 6)$

B. $S \subset (-3; 7)$

C. $S \subset [-2; 8]$

D. $S \subset [-1; 9]$.

Lời giải

Chọn D

Có hoành độ của đỉnh $x_T = \frac{m}{2}$; $a = 4 > 0$.

Xét 3 trường hợp sau:

TH1: $\frac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow m < 0$. Suy ra hàm số đồng biến trên đoạn $[0; 2]$

$$\Rightarrow \min_{[0;2]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m + 2 = 3 \Rightarrow m = 1 - \sqrt{2} \quad (\text{thỏa mãn})$$

TH2: $0 \leq \frac{m}{2} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4 \Rightarrow \min_{[0;2]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m + 2 = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$ (loại)

TH3: $\frac{m}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 4$. Suy ra hàm số nghịch biến trên đoạn $[0; 2]$

$$\Rightarrow \min_{[0;2]} f(x) = f(2) = m^2 - 10m + 18 = 3 \Rightarrow m = 5 + \sqrt{10} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $S = \{1 - \sqrt{2}; 5 + \sqrt{10}\} \subset [-1; 9]$. **Chọn D**

Câu 4. Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $y = x^2 - 4\sqrt{16 - x^2} - 13$

b) $y = x(x+1)(x-2)(x-3)$

Lời giải

a) Điều kiện $-4 \leq x \leq 4$. Đặt $t = \sqrt{16 - x^2}, 0 \leq t \leq 4$

Khi đó: $y = f(t) = -t^2 - 4t + 3$ có $a = -1 < 0$ nên bề lõm quay xuống dưới.

Hoành độ đỉnh $-\frac{b}{2a} = -2 \notin [0; 4]$. Vậy nên $\min y = f(4) = -29$

b) $y = x(x+1)(x-2)(x-3) = (x^2 - 2x)(x^2 - 2x - 3)$

Đặt $t = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \geq 0$ thì $y = f(t) = (t-1)(t-4) = t^2 - 5t + 4; t \geq 0$.

Vậy $\min y = \min f(t) = f\left(\frac{5}{2}\right) = -\frac{9}{4}$

Câu 5. Cho hàm số $y = x^2 - 5x + 8$ có đồ thị là (P) và hai điểm $A(4; -1), B(10; 5)$. Biết điểm $M(x_0; y_0)$ trên (P) thỏa mãn diện tích tam giác MAB nhỏ nhất. Tính tổng $x_0 + y_0$.

A. 4 .

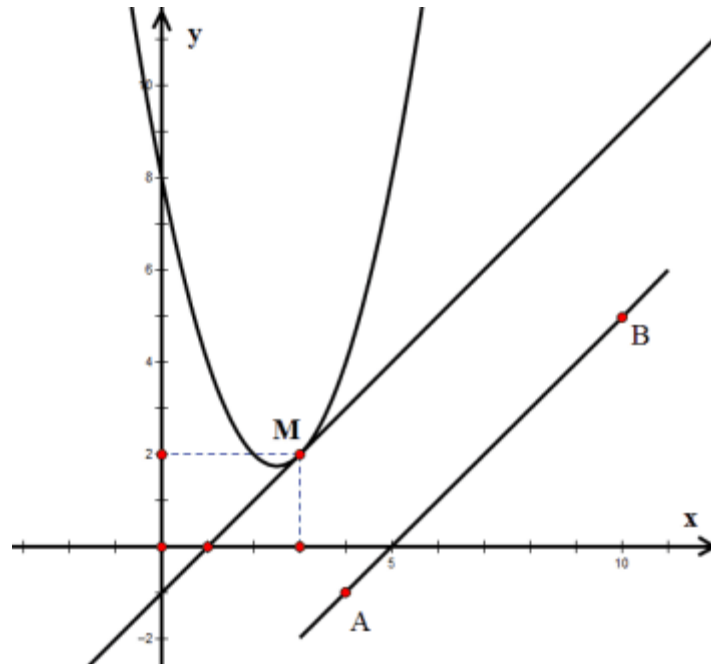
B. 2 .

C. 3 .

D. 5 .

Lời giải.

Chọn.



+ Vẽ đồ thị (P) , nhận thấy A, B không thuộc bề lõm của (P) , suy ra yêu cầu bài toán thỏa mãn khi M là tiếp điểm của tiếp tuyến với (P) song song với đường thẳng AB .

+ Gọi $y = ax + b$ là đường thẳng qua A, B suy ra $\begin{cases} 4a + b = -1 \\ 10a + b = 5 \end{cases} \Rightarrow y = x - 5$.

+ Đường thẳng Δ song song với đt $y = x - 5$ có dạng $y = x + b$, Δ là tiếp tuyến của (P) khi phương trình hoành độ giao điểm: $x^2 - 6x + 8 - b = 0$ của (P) và Δ có nghiệm kép $\Leftrightarrow \Delta' = 1 + b = 0 \Leftrightarrow b = -1$. (chú ý $b = -1$ là điều kiện tiếp xúc)

Khi đó $M(3; 2)$, vậy $x_0 + y_0 = 5$.

- Câu 6.** Tìm m để hàm số $y = x^2 - 2mx - m^2 + 5m - 2$ có giá trị nhỏ nhất đạt giá trị lớn nhất. Giả sử $m = \frac{a}{b}$, $\frac{a}{b}$ là phân số tối giản, $b > 0$. Tính $a + b$.
- A.** $a + b = 7$. **B.** $a + b = 5$. **C.** $a + b = 9$. **D.** $a + b = -1$.

Lời giải

Chọn C

Hàm số $y = x^2 - 2mx - m^2 + 5m - 2$ có giá trị nhỏ nhất là $y(m) = -2m^2 + 5m - 2$.

Biểu thức $y(m) = -2m^2 + 5m - 2$ đạt giá trị lớn nhất khi $m = \frac{5}{4}$.
 $\Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow a + b = 9$.

- Câu 7.** Giả sử phương trình bậc hai ẩn x (m là tham số): $x^2 + 2(m-2)x - 3m^2 - 4m + 8 = 0$ có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn điều kiện $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0$. Gọi M và N lần lượt là giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 13(x_1 + x_2)$. Tính $M + N$:
- A.** -64 **B.** -44 **C.** $-\frac{87}{2}$ **D.** $-\frac{127}{2}$

Lời giải

Chọn đáp án **A**.

Phương trình đã cho có hai nghiệm x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_1x_2 - 24 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - 4 \geq 0 \\ 6m^2 + 6m - 36 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 1 \\ m \leq -1 \\ -3 \leq m \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \leq m \leq -1 \\ 1 \leq m \leq 2 \end{cases} \quad (*)$$

(Theo định lý Viet ta có $x_1 + x_2 = -2(m-1)$, $x_1x_2 = -3m^2 - 4m + 8$)

Vậy $P = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 13(x_1 + x_2) = (x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2 - 13(x_1 + x_2) = -2m^2 + 2m - 20$

+ Bảng biến thiên của P với điều kiện (*)

m	-3	-1	1/2	1	2
P	-44	-24		-20	-24

Từ bảng biến thiên ta được: $M = -20$ khi $m = 1$, $N = -44$ khi $m = -3$. Suy ra $M + N = -64$.

Câu 8. Cho hàm số: $f(x) = ax^2 + bx + 2$ ($a > 0$). Biết rằng hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$. Khi đó giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2}$ là:

- A. 4. B. $\frac{8}{11}$. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{4}{3}$.

Lời giải

Do $a > 0$ nên hàm số đồng biến trên $(-1; +\infty)$ thì: $\frac{-b}{2a} \leq -1 \Leftrightarrow \frac{b}{a} \geq 2$

$$P = \frac{8a^2}{3a^2 + 2ab + b^2} = \frac{8}{\left(\frac{b}{a}\right)^2 + 2\frac{b}{a} + 3} = \frac{8}{t^2 + 2t + 3} \quad \text{với } t = \frac{b}{a} \geq 2$$

Khi đó :

Ta có $t^2 + 2t + 3 = (t+1)^2 + 2 \geq 11, \forall t \geq 2$. Dấu “=” xảy ra khi $t = 2$

Do đó : $P \leq \frac{8}{11}$. Suy ra $\max P = \frac{8}{11}$ khi $\frac{b}{a} = 2$. **Chọn B**

Câu 9. Cho parabol $(P): y = x^2 + 2018x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 4$. Biết d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |x_1 - x_2|$?

- A. $T = 2018$. B. $T = 0$. C. $T = 2$. D. $T = 4$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$x^2 - 2018x + 3 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m + 2018)x - 1 = 0$$

Nhận thấy phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$

Ta có $x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{x_1}$. Suy ra $T = \left| x_1 + \frac{1}{x_1} \right| = \left| x_1 \right| + \left| \frac{1}{x_1} \right| \geq 2$ (do $x_1, \frac{1}{x_1}$ cùng dấu).

Dấu “=” xảy ra khi $m = 2018$.

Câu 10. Cho $x, y, z \in [0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = 2(x + y + z) - (xy + yz + zx)$?

- A. $T = 3$. B. $T = 0$. C. $T = 4$. D. $T = 2$.

Lời giải

Ta có $T = f(x) = (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz$

Nếu $y + z = 2$ thì $f(x) = 4 - yz \leq 4$ do $-yz \leq 0$

Nếu $y + z \neq 2$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất

Ta có $f(0) = -(2 - y)(2 - z) + 4 \leq 4$ và $f(2) = -yz + 4 \leq 4$.

Vậy $\max T = 4$ khi $x = 0, y = z = 2$ hoặc $x = 2, y = z = 0$.

Câu 11. Cho hàm số $y = f(x) = x^2 - 2ax + 1$ với a là tham số. Gọi M và m là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số trên $[0; 1]$. Biết rằng có hai giá trị của a để $M - m = 4$ khi đó tổng hai giá trị của a bằng

A. 0.

B. 1.

C. -1

D. 2

Họ tên: Lê Hoa Tên Fb: Lê Hoa

Lời giải**Chọn B**

Hàm số $f(x) = x^2 - 2ax + 1$ có hệ số của x^2 bằng 1 dương, tọa độ đỉnh $I(a; 1 - a^2)$, $f(0) = 1$
 $f(1) = 2 - 2a$

HT1: Xét $a < 0$ khi đó hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(0; 1) \Rightarrow M = f(1)$, $m = f(0)$

Khi đó $M - m = 4 \Leftrightarrow a = \frac{-3}{2}$ (thỏa mãn).

TH2: Xét $a > 1$ khi đó hàm số nghịch biến trên $(0; 1) \Rightarrow M = f(0)$, $m = f(1)$

Khi đó $M - m = 4 \Leftrightarrow a = \frac{5}{2}$ (thỏa mãn).

(Đến đây đủ hai giá trị a chọn luôn đáp án).

TH3: Xét $0 \leq a \leq 1$ khi đó $m = f(a)$, $M = \max\{f(0); f(1)\}$

-Nếu $M = f(0) \Rightarrow M - m = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$ không thỏa mãn

-Nếu $M = f(1) \Rightarrow M - m = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$ không thỏa mãn.

Vậy có hai giá trị a thỏa mãn là $a = \frac{-3}{2}$, $a = \frac{5}{2}$ suy ra chọn **B**

Câu 12. Có bao nhiêu giá trị của m để giá trị nhỏ nhất của hàm số:

$f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 2$ trên đoạn $[0; 2]$ bằng 3?

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Lời giải**Chọn C**

Ta có: $f(x) = (2x - m)^2 - 2m + 2$

$f(0) = m^2 - 2m + 2$

$f(2) = m^2 - 18m + 18$

bảng biến thiên của hàm số $f(x)$ là:

x	$-\infty$	$\frac{m}{2}$	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	$-2m + 2$	$+\infty$

+) Nếu $\frac{m}{2} < 0 \Leftrightarrow m < 0$ thì $f(x)$ đồng biến trên $[0; 2]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn đó là

$$f(0) = m^2 - 2m + 2 \text{ khi đó } 3 = m^2 - 2m + 2$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \pm \sqrt{2} \text{ mà } m < 0 \text{ nên } m = 1 - \sqrt{2}$$

+) Nếu $\frac{m}{2} \in [0; 2] \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 4$ thì hàm số đạt giá trị nhỏ nhất là $f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m + 2$ khi đó

$$3 = -2m + 2 \Leftrightarrow m = \frac{-1}{2} \text{ (loại)}$$

+) Nếu $\frac{m}{2} > 2 \Leftrightarrow m > 4$ thì $f(x)$ nghịch biến trên $[0; 2]$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số trên đoạn đó là

$$f(2) = m^2 - 18m + 18 \text{ khi đó } 3 = m^2 - 18m + 18$$

$$\Leftrightarrow m = 9 \pm \sqrt{66} \text{ mà } m > 4 \text{ nên } m = 9 + \sqrt{66} \text{ Vậy với } m = 9 + \sqrt{66} \text{ hoặc } m = 1 - \sqrt{2} \text{ thì hàm số } f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m + 2 \text{ trên đoạn } [0; 2] \text{ bằng } 3$$

$$F = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$$

Câu 13. Gọi a, b các số thực để biểu thức $F = \frac{ax + b}{x^2 + 1}$ đạt giá trị lớn nhất bằng 4 và giá trị nhỏ nhất bằng -1. Tính giá trị của biểu thức $P = a^2 + b$.

A. $P = 12$.

B. $P = 21$.

C. $P = 19$.

D. $P = 29$.

Lời giải

Chọn C

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \max(F - 4) = 0 \\ \min(F + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \max(-4x^2 + ax + b - 4) = 0 \\ \min(x^2 + bx + b + 1) = 0 \end{cases}$$

Các số thực a, b thỏa mãn bài toán

$$f(x) = -4x^2 + ax + b - 4, \quad g(x) = x^2 + bx + b + 1$$

Đặt

Để thấy $f(x), g(x)$ là các hàm số bậc hai lần lượt có hệ số bằng -4 và 1. Nên max và min lần lượt đạt tại đỉnh của nó.

$$\begin{cases} a^2 + 16(b - 4) = 0 \\ a^2 - 4(b + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b = 3 \end{cases}$$

Từ đó ta có

Câu 14. Cho phương trình bậc hai $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ (x là ẩn và m là tham số). Khi đó m thuộc đoạn nào để phương trình đã cho có hai nghiệm không âm x_1, x_2 và giá trị của $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ là nhỏ nhất.

A. $m \in [2; 4]$.

B. $m \in (2; +\infty)$.

C. $m \in (2; +\infty)$.

D. $m \in (2; 5)$.

Lời giải

Chọn A

Phương trình $x^2 - 2mx + m^2 - 2m + 4 = 0$ có hai nghiệm không âm

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta' = m^2 - m^2 + 2m - 4 \geq 0 \\ S = 2m \geq 0 \\ P = m^2 - 2m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 2.$$

Theo định lý Vi-ét ta có $x_1 + x_2 = 2m; x_1 x_2 = m^2 - 2m + 4$.

Suy ra
$$P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1 x_2}} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}$$

Mà $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ nhỏ nhất khi $\sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}}$ nhỏ nhất.

Vậy $P = \sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{2m + 2\sqrt{(m-1)^2 + 3}} \geq \sqrt{8}$ dấu bằng xảy ra khi $m = 2$.

Đáp án: $m \in [2; 4]$

Câu 15. Cho hàm số $y = 2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m$ (1). Giá trị m để đồ thị của hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 sao cho biểu thức $A = \frac{1}{(x_1 + 2)^{2018}} + \frac{1}{(x_2 + 2)^{2018}}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $m \in \emptyset$. B. $m \in (-3; 0)$. C. $m \in (0; 3)$. D. $m \in \phi$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Phạm Công Dũng Tên FB: Phạm Công Dũng

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số (1) và trục hoành là nghiệm phương trình

$$2x^2 + (6-m)x + 3 - 2m = 0 \quad (*)$$

Để đồ thị hàm số (1) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt thì phương trình (*) phải có hai nghiệm

phân biệt $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow m^2 + 4m + 12 > 0, \forall m$.

Gọi x_1, x_2 là nghiệm của phương trình (*). Theo Viét ta có

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{m-6}{2} \\ x_1 x_2 = \frac{3-2m}{2} \end{cases}$$

Ta có
$$\frac{1}{(x_1 + 2)(x_2 + 2)} = \frac{1}{(x_1 x_2 + 2x_1 + 2x_2 + 4)} = -2.$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có
$$\frac{1}{(x_1 + 2)^{2018}} + \frac{1}{(x_2 + 2)^{2018}} \geq 2\sqrt{\left(\frac{1}{(x_1 + 2)} \cdot \frac{1}{(x_2 + 2)}\right)^{2018}} = 2^{1010}.$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi
$$\frac{1}{(x_1 + 2)^{2018}} = \frac{1}{(x_2 + 2)^{2018}} \Leftrightarrow |x_1 + 2| = |x_2 + 2|.$$

Do x_1, x_2 phân biệt nên ta có
$$x_1 + 2 = -x_2 - 2 \Leftrightarrow x_1 + x_2 = -4 \Rightarrow \frac{m-6}{2} = -4 \Leftrightarrow m = -2.$$

Câu 16. Cho phương trình: $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình.

Tìm GTLN của $A = |x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

A. 4.

B. 9

C. 8.

D. $\frac{9}{2}$ **Lời giải****Chọn D**

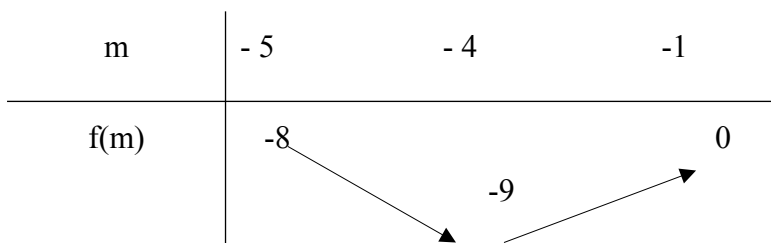
$$PT: 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0 \quad (1)$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -(m^2 + 6m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1 x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}$$

Ta có: $A = \frac{1}{2}|m^2 + 8m + 7|$

Xét hàm số $f(m) = m^2 + 8m + 7$ có BBT trên $[-5; -1]$ là:



$$\Rightarrow \max_{[-5; -1]} |f(m)| = 9 \Rightarrow \max A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -4$$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$ và ba số thực a, b, c thỏa mãn $a \geq 5, a + b \geq 8, a + b + c \geq 10$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của biểu thức $f(a) + f(b) + f(c)$. Giá trị M là

A. 85

B. 58

C. 78

D. 65A**Lời giải****Chọn A**

$$f(x) = 2x^2 + 3x - 7 \geq 2x_0^2 + 3x_0 - 7 + (4x_0 + 3)(x - x_0)$$

Ta có

$$\Leftrightarrow 2(x - x_0)^2 \geq 0$$

Suy ra $f(a) \geq 58 + 23(a - 5)$

$$f(b) \geq 20 + 15(b - 3)$$

$$f(c) \geq 7 + 11(c - 2)$$

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 85 + 23(a - 5) + 15(b - 3) + 11(c - 2)$$

$$f(a) + f(b) + f(c) \geq 85 + 11(a + b + c - 10) + 4(a + b - 8) + 8(a - 5) \geq 85$$

Vậy giá trị nhỏ nhất bằng 85

- Câu 18.** Cho hàm số $y = x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x + m^2} - 2018m$. Tổng S tất cả các giá trị nguyên dương của m thỏa mãn điều kiện: $S \leq 2019$ (với S là giá trị nhỏ nhất của hàm số khi $x \geq 2$) bằng:
- A. $S = 2019.1010$ B. $S = 2019.1009$ C. $S = 2019.2018$ D. $S = 2021.1009$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y = x^2 - 2x + 2\sqrt{x^2 - 2x + m^2} - 2018m$

trong đó

$$x \geq 2 \Rightarrow t = \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0$$

$$\Rightarrow y = t^2 + 2t + m^2 - 2018m \geq m^2 - 2018m; \forall t \geq 0$$

$$y_{cbt} \Leftrightarrow m^2 - 2018m \geq 2019$$

Mặt khác : m nguyên dương

$$1 \leq m \leq 2019$$

$$\Rightarrow S = 1 + 2 + 3 + \dots + 2019 = 2019.1010$$

- Câu 19.** Cho hàm số: $y = f(x) = mx^2 - 2x - m - 1$ (C)

Với giá trị nào của m thì giá trị lớn nhất của hàm số (C) đạt giá trị nhỏ nhất.

Lời giải

+)BBT

x	$-\infty$	$\frac{1}{m}$	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\frac{m^2 + m + 1}{m}$	$-\infty$

+) $m \geq 0$ không có GTLN

+) $m < 0$ từ BBT ta có GTLN là $-\frac{m^2 + m + 1}{m}$

Vì

$$m < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{m} > 0 \\ -m > 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) + (-m) \geq 2 \Leftrightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) + (-m) - 1 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{1}{m}\right) = (-m) \Leftrightarrow m = -1 \text{ do } m < 0$$

Dấu đẳng thức x

$$m = -1$$

Vậy GTNN bằng 1 khi và chỉ khi

- Câu 20.** Cho hàm số $f(x) = |x^2 - 2x + m|$ với tham số m thuộc đoạn $[-2018; 2018]$. Gọi M là giá trị nhỏ nhất của hàm số $f(x + \frac{1}{x})$ trên tập $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Số giá trị m nguyên để $M \geq 2$ là :
A. 2017 . **B.** 2018 . **C.** 4036 . **D.** 2016 .

Lời giải

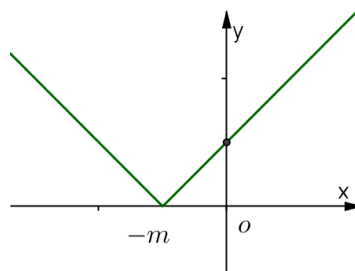
Chọn A

Đặt $t = x + \frac{1}{x} \Rightarrow |t| \geq 2$, xét hàm số $f(t) = |t^2 - 2t + m|$ với $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$

Đặt $a = t^2 - 2t$ với $t \in (-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$ suy ra $a \geq 0$

Xét hàm số $g(a) = |a + m|$. Khi đó $M = \min g(a)$ với $a \geq 0$

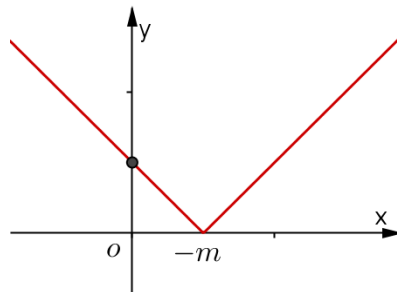
+) Nếu $-m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 0$



Dựa vào đồ thị

$$M = g(0) = |m| = m \geq 2 \Rightarrow m = \{2; 3; \dots; 2018\}$$

+) Nếu $-m > 0 \Leftrightarrow m < 0$



Dựa vào đồ thị

$$M = g(-m) = 0 < 2 \text{ không thỏa mãn bài toán.}$$

Vậy có 2017 giá trị m thỏa mãn bài toán.

- Câu 21.** Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 6x + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(f(x))$, với $-3 \leq x \leq 0$. Tổng $S = m + M$.
A. $S = 1$ **B.** $S = 56$ **C.** $S = 57$ **D.** $S = 64$

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Khắc Sâm Tên FB: Nguyễn Khắc Sâm

Chọn B

$$\text{Ta có } f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5.$$

Đặt $t = f(x)$, Xét hàm $t = f(x) = x^2 + 6x + 5$ trên $[-3; 0]$

Ta có bảng biến thiên:

x	- ∞	- 3	0
$t = x^2 + 6x + 5$	+∞	- 4	5

Từ bảng biến thiên ta được: $-4 \leq t \leq 5$

Khi đó hàm số được viết lại: $f(t) = t^2 + 6t + 5$,

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = t^2 + 6t + 5$, trên $[-4; 5]$.

t	- 4	- 3	5
$f(t) = t^2 + 6t + 5$	- 3	- 4	60

Ta được $m = -4$, $M = 60$. Vậy $S = 56$

Cách 2: Tìm min, max của $y = f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5$, trên $x \in K = [-3; 0]$ không cần BBT.

Ta có: $y' = 2f(x) \cdot f'(x) + 6f'(x)$.

$$y' = 0 \Leftrightarrow 2f(x) \cdot f'(x) + 6f'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) = 0 \\ f(x) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 6 = 0 \\ x^2 + 6x + 5 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \in K \\ x = -2 \in K \\ x = -4 \notin K \end{cases}$$

$$y(-3) = f(f(-3)) = f(-4) = -3$$

$$y(-2) = f(f(-2)) = f(-3) = -4$$

$$y(0) = f(f(0)) = f(5) = 60$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} \min y = -4 = m \\ \max y = 60 = M \end{cases} \Rightarrow S = M + m = 56$$

- Câu 22.** Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$ và biểu thức $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $P = 5a + 11b + c$, biết $a > 0$
- A.** $P = 10$. **B.** $P = 9$. **C.** $P = 16$. **D.** $P = 12$.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Đồng Anh Tú Tên FB: Anhtu

Chọn B

$$\text{Thay } x = -1, x = 0, x = 1 \text{ vào hàm số } f(x), \text{ ta được } \begin{cases} -1 \leq c \leq 1 & (1) \\ -1 \leq a + b + c \leq 1 & (2) \\ -1 \leq a - b + c \leq 1 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Từ (2), (3) ta có } \begin{cases} -1 - c \leq a + b \leq 1 + c \\ -1 - c \leq a - b \leq 1 + c \end{cases}, \text{ kết hợp với (1), ta được } \begin{cases} -2 \leq a + b \leq 2 \\ -2 \leq a - b \leq 2 \end{cases}$$

Suy ra $\begin{cases} a^2 + 2ab + b^2 \leq 4 \\ a^2 - 2ab + b^2 \leq 4 \end{cases} \Rightarrow a^2 + b^2 \leq 4$. Vậy $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2 = \frac{8}{3}(a^2 + b^2) - \frac{2}{3}b^2 \leq \frac{8}{3}(a^2 + b^2) \leq \frac{32}{3}$

Nên $\frac{8}{3}a^2 + 2b^2$ lớn nhất khi $b = 0, a = 2$ thay vào (2), ta được $-3 \leq c \leq -1$ kết hợp với (1) thì $c = -1$. Thử lại với $b = 0, a = 2, c = -1$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Vậy $b = 0, a = 2, c = -1$

Nên $P = 9$.

- Câu 1.** Cho đồ thị hàm số $(C): y = ax^2 + bx + c$ có đỉnh $I(-1; 2)$. Biết giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{a(2a + 6b) - 2b(c + 3b) - 4c(3 - b)}{a(3c + 3b) + 2}$ là M khi hàm số có pt: $y = a_1x^2 + b_1x + c_1$. Tính $Q = M^2 + a_1^2 + b_1^2 + c_1^3$
- A. $Q = \frac{3739}{27}$ B. $Q = 28$ C. $Q = -\frac{26}{5}$ D. $Q = \frac{520}{27}$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $\begin{cases} x_I = -\frac{b}{2a} = -1 \\ a - b + c = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2a \\ c = 2 + a \end{cases}$

* $P = \frac{a \cdot 14a - 4a(2 + 7a) - 4(2 + a)(3 - 2a)}{a(9a + 6) + 2} = \frac{-6a^2 - 4a - 24}{9a^2 + 6a + 2} = -\frac{2}{3} - \frac{\frac{68}{3}}{9a^2 + 6a + 2}$

* $P_{\min} = -\frac{70}{3}$ tại $a = -\frac{1}{3}; b = -\frac{2}{3}; c = \frac{5}{3}$.

* Hàm số có pt: $y = -\frac{x^2}{3} - \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$ và $P_{\min} = \frac{520}{27}$

Chọn đáp án D

- Câu 2.** Cho hai điểm $A(-1; 1); B(2; 4)$ nằm trên Parabol $(P): y = x^2$. Điểm C nằm trên cung $\widehat{AB}$ của Parabol (P) sao cho tam giác ABC có diện tích lớn nhất. Khi đó độ dài của đoạn thẳng OC là:

A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Lời giải

Chọn A

Ta có phương trình của đường thẳng $AB: y = x + 2$.

Gọi d là đường thẳng song song với $AB: y = x + 2$ và tiếp xúc với (P) .

Ta có $d: y = x + m$ trong đó $m \neq 2$.

d tiếp xúc với (P) khi và chỉ khi phương trình $x^2 = x + m$ có nghiệm kép

$$\Leftrightarrow x^2 - x - m = 0 \quad 1 + 4m = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{4}$$

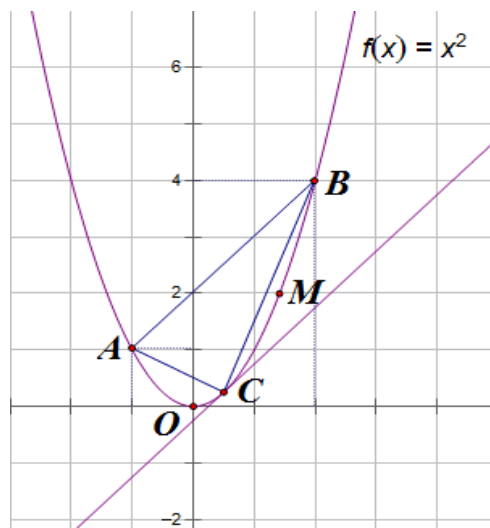
có nghiệm kép $\Leftrightarrow$

$$d: y = x - \frac{1}{4}$$

Khi đó

Gọi C là tiếp điểm của d và (P) , khi đó tọa độ của C là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} y = x - \frac{1}{4} \\ y = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$$



Gọi M là một điểm bất kì nằm trên cung $\widehat{AB}$ của Parabol (P) , khi đó điểm M nằm giữa hai đường thẳng d và đường thẳng AB suy ra chiều cao hạ từ M đến đường thẳng AB nhỏ hơn chiều cao hạ từ C đến đường thẳng AB . Vậy tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

$$C\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right) \Rightarrow OC^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{5}{16} \Rightarrow OC = \frac{\sqrt{5}}{4}$$

Khi đó

- Câu 3.** Cho parabol $(P): y = x^2 + 2018x + 3$ và đường thẳng $d: y = mx + 4$. Biết d cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B có hoành độ lần lượt là x_1, x_2 . Tìm giá trị nhỏ nhất của $T = |x_1 - x_2|$?
- A.** $T = 2018$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 2$. **D.** $T = 4$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và d :

$$x^2 - 2018x + 3 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - (m + 2018)x - 1 = 0$$

Nhận thấy phương trình luôn có 2 nghiệm trái dấu x_1, x_2 với mọi $m \in \mathbb{R}$

Ta có $x_1 x_2 = -1 \Leftrightarrow x_2 = -\frac{1}{x_1}$. Suy ra $T = \left|x_1 + \frac{1}{x_1}\right| = |x_1| + \left|\frac{1}{x_1}\right| \geq 2$ (do $x_1, \frac{1}{x_1}$ cùng dấu)

Dấu “=” xảy ra khi $m=2018$.

- Câu 4.** Cho $x, y, z \in [0; 2]$. Tìm giá trị lớn nhất của $T = 2(x + y + z) - (xy + yz + zx)$?
A. $T = 3$. **B.** $T = 0$. **C.** $T = 4$. **D.** $T = 2$.

Lời giải

Ta có $T = f(x) = (2 - y - z)x + 2(y + z) - yz$

Nếu $y + z = 2$ thì $f(x) = 4 - yz \leq 4$ do $-yz \leq 0$

Nếu $y + z \neq 2$ thì $f(x)$ là hàm số bậc nhất

Ta có $f(0) = -(2 - y)(2 - z) + 4 \leq 4$ và $f(2) = -yz + 4 \leq 4$.

Vậy $\text{Max} T = 4$ khi $x = 0, y = z = 2$ hoặc $x = 2, y = z = 0$

- Câu 5.** Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = |x^4 - 4x^2 + 5 + m|$ trên đoạn $[1; \sqrt{3}]$ là giá trị nhỏ nhất.
A. $m = \frac{3}{2}$. **B.** $m = -\frac{3}{2}$. **C.** $m = \frac{1}{2}$. **D.** $m = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Chọn B

Đặt $t = x^2 \Rightarrow t \in [1; 3]$ ta được hàm số: $y(t) = |t^2 - 4t + 5 + m|, t \in [1; 3]$

Đặt $u = t^2 - 4t + 5, u \in [1; 2]$, hàm số trở thành: $y(u) = |u + m|$

t	1	2	3
$u = t^2 - 4t + 5$	2		2
		1	

$\forall t \in [1; 3] \Rightarrow u \in [1; 2]$

Hàm số $f(u) = u + m$ đồng biến trên $[1; 2]$ nên hàm số $y = |u + m|$ nhận GTLN, GTNN ở một trong hai điểm mút 1, 2.

Do đó: $\max_{[1; \sqrt{3}]} y = \max \{f(1), f(2)\} = \max \{|1 + m|, |2 + m|\} \geq \frac{|1 + m| + |2 + m|}{2} \geq \frac{1}{2}$.

Dấu “=” xảy ra khi $m + 1 = -m - 2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

Cách khác:

Đặt $t = x^4 - 4x^2 + 5 \Rightarrow t' = 4x^3 - 8x = 0 \Rightarrow x = \sqrt{2}$ (do $x \in [1; \sqrt{3}]$)

Bảng biến thiên

x	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
$t = x^4 - 4x^2 + 5$	2		2
		1	

Ta có : $t \in [1; 2]$

Hàm số trở thành : $y(t) = |t + m|, t \in [1; 2]$

Hàm số $f(t) = t + m$ đồng biến trên $[1; 2]$ nên hàm số $y = |t + m|$ nhận GTLN, GTNN ở một trong hai điểm mút 1, 2.

Do đó : $\max_{[1; \sqrt{3}]} y = \max \{f(1), f(2)\} = \max \{|1 + m|, |2 + m|\} \geq \frac{|1 + m| + |2 + m|}{2} \geq \frac{1}{2}$.

Dấu "=" xảy ra khi $m + 1 = -m - 2 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$.

- Câu 6.** Cho parabol $(P): y = -x^2 + 2mx - 3m^2 + 4m - 3$ (m là tham số) có đỉnh I . Gọi A, B là 2 điểm thuộc Ox sao cho $AB = 2018$. Khi đó $\square IAB$ có diện tích nhỏ nhất bằng :
A. 2018. **B.** 1009. **C.** 4036. **D.** 1008.

Lời giải

Chọn B

$y = -x^2 + 2mx - 3m^2 + 4m - 3$ có $\Delta' = m^2 + (-3m^2 + 4m - 3)$

$\Delta' = -2m^2 + 4m - 3 = -2(m - 1)^2 - 1 < 0, \forall m$

$\Rightarrow (P)$ luôn nằm phía dưới Ox .

(P) có đỉnh $I(m; -2m^2 + 4m - 3)$. Gọi H là hình chiếu của I trên Ox . Khi đó ta có :

$IH = |-2m^2 + 4m - 3| = 2m^2 - 4m + 3$.

$\Rightarrow S_{\square IAB} = \frac{1}{2} IH \cdot AB$

$S_{\square IAB}$ đạt GTNN $\Leftrightarrow IH$ đạt GTNN $\Leftrightarrow f(m) = 2m^2 - 4m + 3$ đạt GTNN

$\Leftrightarrow m = 1 \Rightarrow \text{Min} f(m) = 1 \Rightarrow \text{Min} IH = 1 \Rightarrow \text{Min} S_{\square IAB} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2018 = 1009$

- Câu 7.** Cho hàm số $y = |x^2 + 2x + 3m|$ (m là tham số). Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để giá trị lớn nhất của hàm số trên $[-2; 1]$ bằng 7.
A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A

Đặt $g(x) = x^2 + 2x + 3m$, khi đó $y = |g(x)|$.

Bảng biến thiên của hàm số $g(x)$ trên $[-2; 1]$

x	-2	-1	1
$g(x)$	$3m$		$3m+3$
	$\searrow$		$\nearrow$
	$3m-1$		

+) Nếu $3m - 1 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3}$ thì $\max_{[-2;1]} y = 3m + 3$.

Ycbt $\Leftrightarrow 3m + 3 = 7 \Leftrightarrow m = \frac{4}{3}$ (loại do m nguyên).

+) Nếu $3m + 3 \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -1$ thì $\max_{[-2;1]} y = -3m + 1$.

Ycbt $\Leftrightarrow -3m + 1 = 7 \Leftrightarrow m = -2$ (chọn do m nguyên và $m \in (-\infty; -1]$).

+) Nếu $3m < 0 < 3m + 3 \Leftrightarrow -1 < m < 0$ thì $\begin{cases} \max_{[-2;1]} y = 3m + 3 \\ \max_{[-2;1]} y = -3m + 1 \end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 3 = 7 \\ -3m + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \notin (-1; 0) \\ m = -2 \notin (-1; 0) \end{cases}$.

+) Nếu $3m - 1 < 0 < 3m \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{3}$ thì $\begin{cases} \max_{[-2;1]} y = 3m + 3 \\ \max_{[-2;1]} y = 3m \\ \max_{[-2;1]} y = -3m + 1 \end{cases}$.

Ycbt $\Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 3 = 7 \\ 3m = 7 \\ -3m + 1 = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \notin \left(0; \frac{1}{3}\right) \\ m = \frac{7}{3} \notin \left(0; \frac{1}{3}\right) \\ m = -2 \notin \left(0; \frac{1}{3}\right) \end{cases}$.

Vậy $m = -2$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cách khác

Ta có: $\max_{[-2;1]} y = \max \{|3m - 1|; |3m + 3|\}$.

+) $|3m - 1| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m - 1 = 7 \\ 3m - 1 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{8}{3} \\ m = -2 \end{cases}$.

+) $|3m + 3| = 7 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m + 3 = 7 \\ 3m + 3 = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{4}{3} \\ m = -\frac{10}{3} \end{cases}$.

Vì m nguyên nên $m = -2$.

Câu 8. Cho các số thực x, y thỏa mãn $x^2 + y^2 = 1 + xy$. Gọi M, m lần lượt là giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức $S = x^4 + y^4 - x^2 y^2$. Khi đó giá trị của $M + m$ là

A. $\frac{10}{9}$.

B. $\frac{29}{18}$.

C. $\frac{5}{2}$.

D. $\frac{5}{9}$.

Lời giải

Chọn B

Có $S = (x^2 + y^2)^2 - 3x^2y^2 = (1 + xy)^2 - 3x^2y^2 = -2x^2y^2 + 2xy + 1$

Đặt $t = xy \Rightarrow S = -2t^2 + 2t + 1$

Có

$x^2 + y^2 \geq 2xy \Rightarrow 1 + xy \geq 2xy \Rightarrow xy \leq 1$, dấu bằng xảy ra khi $x = y = \pm 1$

$x^2 + y^2 \geq -2xy \Rightarrow 1 + xy \geq -2xy \Rightarrow xy \geq -\frac{1}{3}$, dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{3}}, y = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x = -\frac{1}{\sqrt{3}}, y = \frac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$

Suy ra $t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Xét hàm số $f(t) = -2t^2 + 2t + 1, t \in \left[-\frac{1}{3}; 1\right]$

Ta có bảng biến thiên

t	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	1
$f(t)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{2}$	1

Từ bảng biến thiên ta thấy $M = \frac{3}{2}; m = \frac{1}{9} \Rightarrow M + m = \frac{29}{18}$

Câu 9. Giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $f(x) = |2m - 3x|$ trên $\left[-\frac{1}{2}; 2\right]$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn mệnh đề nào sau đây

A. $m \in (2; 3)$

B. $m \in (1; 2)$

C. $m \in (-1; 1)$

D. $m \in (3; 4)$

Lời giải

Chọn C

Vì đồ thị hàm số bậc nhất $y = 2m - 3x$ là một đường thẳng nên $\max_{x \in [-1/2; 2]} f(x)$ chỉ có thể đạt được tại $x = -1$ hoặc $x = 2$.

Do đó nếu đặt $M = \max_{x \in [-1/2; 2]} f(x)$ thì $M \geq f(-1) = |2m + 3|$ và $M \geq f(2) = |2m - 6|$.

Ta có

$$M \geq \frac{f(-1) + f(2)}{2} = \frac{|2m+3| + |2m-6|}{2} = \frac{|2m+3| + |6-2m|}{2} \geq \frac{|(2m+3) + (6-2m)|}{2} = \frac{9}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |2m+3| = |6-2m| \\ (2m+3)(6-2m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = \frac{3}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{9}{2}$, đạt được chỉ khi $m = \frac{3}{4}$. Đáp án **B**.

- Câu 10.** Giá trị m để giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x) = |-3x^2 + 6x + 1 - 2m|$ trên $\in [2; 3]$ đạt giá trị nhỏ nhất thỏa mãn mệnh đề nào sau đây
- A.** $m \in (-6; -4)$ **B.** $m \in (-4; 0)$ **C.** $m \in (0; 3)$ **D.** $m \in (3; 5)$

Lời giải

Chọn A

Đồ thị hàm số $y = g(x) = -3x^2 + 6x + 1 - 2m$ là parabol có hoành độ đỉnh bằng $-\frac{b}{a} = 1 \notin [2; 3]$

Do đó

$$\begin{aligned} M &= \max_{x \in [2; 3]} f(x) = \max \{|g(1)|; |g(-2)|; |g(3)|\} \\ &= \max \{|4 - 2m|; |-23 - 2m|; |-8 - 2m|\} \\ &= \max \{|2m - 4|; |2m + 23|; |2m + 8|\} \\ &= \max \{|2m - 4|; |2m + 23|\} \quad (\text{do } 2m - 4 < 2m + 8 < 2m + 23 \text{ " } m \in \mathbb{R}) \\ &= \max \{|2m - 4|; |2m + 23|\} \end{aligned}$$

$$M \geq |2m - 4| \text{ và } M \geq |2m + 23|$$

Suy ra

Ta có

$$M \geq \frac{|2m - 4| + |2m + 23|}{2} = \frac{|2m + 23| + |4 - 2m|}{2} \geq \frac{|(2m + 23) + (4 - 2m)|}{2} = \frac{27}{2}$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} |2m + 23| = |4 - 2m| \\ (2m + 23)(4 - 2m) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{19}{4}$

Vậy giá trị nhỏ nhất của M là $\frac{27}{2}$, đạt được chỉ khi $m = -\frac{19}{4}$. Đáp án **A**.

- Câu 11.** Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a, b, c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.
- A.** $P = 0$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -6$.

Lời giải

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{cases}$ và điểm $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}$.

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$

Khi đó giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$. Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \xrightarrow{\text{Viet}} \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \longrightarrow P = abc = 6.$$

Từ đó ta có hệ

Chọn B

- Câu 12.** Biết rằng hàm số $y = ax^2 + bx + c$ (a,b,c là các số thực) đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ và tổng lập phương các nghiệm của phương trình $y = 0$ bằng 9. Tính $P = abc$.
- A.** $P = 0$. **B.** $P = 6$. **C.** $P = 7$. **D.** $P = -6$.

Lời giải

Hàm số $y = ax^2 + bx + c$ đạt giá trị lớn nhất bằng $\frac{1}{4}$ tại $x = \frac{3}{2}$ nên ta có $\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ a < 0 \end{cases}$ và điểm $\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)$ thuộc đồ thị $\Rightarrow \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4}$.

Để phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm thì $b^2 - 4ac \geq 0$

Khi đó giả sử x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $y = 0$. Theo giả thiết: $x_1^3 + x_2^3 = 9$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2) = 9 \xrightarrow{\text{Viet}} \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9$$

$$\begin{cases} -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2} \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \left(-\frac{b}{a}\right)^3 - 3\left(-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{c}{a}\right) = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ \frac{9}{4}a + \frac{3}{2}b + c = \frac{1}{4} \\ \frac{c}{a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 3 \\ c = -2 \end{cases} \longrightarrow P = abc = 6.$$

Từ đó ta có hệ

Chọn B

- Câu 13.** Cho đường thẳng $d_m: y = mx - 2m + 1$ và parabol $(P): y = x^2 - 3x + 2$ (m là tham số thực).
 Biết $d = \frac{\sqrt{a}}{b}$ (với $a, b \in \mathbb{Q}$ và phân số $\frac{a}{b}$ tối giản) là khoảng cách lớn nhất từ đỉnh I của parabol (P) đến đường thẳng d_m . Tính $P = a^2 + b^2$.
A. $P = 1097$. **B.** $P = 45$. **C.** $P = 857$. **D.** $P = 285$.

Lời giải

Chọn C

Đỉnh của (P) là $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$.

Gọi $M(a; b)$ là điểm cố định của họ đường thẳng d_m

Suy ra $(a-2)m + 1 - b = 0$ đúng với mọi m

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ 1-b=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow M(2; 1)$$

Gọi H là hình chiếu của I lên d_m , khi đó IH là khoảng cách từ I đến đường thẳng d_m .

Có $d(I; d_m) = IH \leq IM$ nên $d(I; d_m)$ đạt giá trị lớn nhất bằng IM khi và chỉ khi $H \equiv M(2; 1)$

$$\text{Khi đó } d = IM = \frac{\sqrt{29}}{4} \Rightarrow a = 29, b = 4.$$

$$\text{Vậy } P = a^2 + b^2 = 857.$$

- Câu 14.** Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho hai điểm $A(-1; 1)$ và $B(-2; 3)$. Điểm $M\left(0; \frac{m}{n}\right)$ (với $\frac{m}{n}$ là phân số tối giản, $n > 0$) nằm trên trục tung thỏa mãn tổng khoảng cách từ M tới hai điểm A và B là nhỏ nhất. Tính $S = m + 2n$.
A. $S = 1$ **B.** $S = 11$. **C.** $S = 4$. **D.** $S = 3$.

Lời giải

Chọn B

Ta có A, B nằm cùng phía so với Oy .

Lấy điểm $B'(2; 3)$ đối xứng với điểm B qua Oy .

Ta có: $MA + MB = MA + MB'$.

Do đó, để $MA + MB$ nhỏ nhất thì 3 điểm M, A, B' thẳng hàng.

Phương trình đường thẳng đi qua A và B' là: $y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.

Đường thẳng AB' cắt trục tung tại điểm $M\left(0; \frac{5}{3}\right) \Rightarrow m = 5; n = 3 \Rightarrow m + 2n = 11$.

- Câu 15.** Cho hàm số $y = f(x) = x^2 + 6x + 5$. Gọi m, M lần lượt là giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(f(x))$, với $-3 \leq x \leq 0$. Tổng $S = m + M$.

- A. $S = 64$ $S = 1$ B. $S = 56$ C. $S = 57$ D.

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(f(x)) = f^2(x) + 6f(x) + 5$.

Đặt $t = f(x)$, Xét hàm $t = f(x) = x^2 + 6x + 5$ trên $[-3; 0]$

Ta có bảng biến thiên:

x	- ∞	- 3	0
$t = x^2 + 6x + 5$	+∞	- 4	5

Từ bảng biến thiên ta được: $-4 \leq t \leq 5$

Khi đó hàm số được viết lại: $f(t) = t^2 + 6t + 5$,

Lập bảng biến thiên của hàm $f(t) = t^2 + 6t + 5$, trên $[-4; 5]$.

t	- 4	- 3	5
$f(t) = t^2 + 6t + 5$	- 3	- 4	60

Ta được $m = -4$, $M = 60$. Vậy $S = 56$

Câu 16. Cho Parabol $y = mx^2 - 2mx + 2$. Gọi S là tổng tất cả các giá trị của m để hàm số đạt giá trị nhỏ nhất bằng -6 trên đoạn $[-2; 3]$. Tính tổng tất cả các phần tử của S.

- A. 8 B. 7 C. 2 D. 4

Hướng dẫn:

Tọa độ đỉnh của Parabol $I(1; 2 - m)$

Nếu $m > 0$ khi đó giá trị nhỏ nhất là $2 - m \Rightarrow 2 - m = -6 \Leftrightarrow m = 8$ (tm)

Nếu $m < 0$ khi đó $y(-2) = 8m + 2, y(3) = 3m + 2$ vì $8m + 2 < 3m + 2 \forall m < 0 \Rightarrow \min y = 8m + 2$

Ycbt $\Leftrightarrow 8m + 2 = -6 \Leftrightarrow m = -1$ (tm)

Vậy $S = \{-1; 8\}$

Câu 17. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x) = 4x^2 - 4mx + m^2 - 2m$ trên đoạn $[-2; 0]$ bằng 3. Tính tổng T các phần tử của S.

- A. $T = -\frac{3}{2}$. B. $T = \frac{1}{2}$. C. $T = \frac{9}{2}$. D. $T = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D

Họ và tên: Nguyễn Hoàng Phú An Facebook: Phu An

Parabol có hệ số theo x^2 là $4 > 0$ nên bề lõm hướng lên. Hoành độ đỉnh $x_I = \frac{m}{2}$.

• Nếu $\frac{m}{2} < -2 \Leftrightarrow m < -4$ thì $x_I < -2 < 0$. Suy ra $f(x)$ tăng trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(-2) = m^2 + 6m + 16$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 + 6m + 16 = 3$ (vô nghiệm).

• Nếu $-2 \leq \frac{m}{2} \leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 0$ thì $x_I \in [0; 2]$. Suy ra $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất tại đỉnh.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f\left(\frac{m}{2}\right) = -2m$.

Theo yêu cầu bài toán $-2m = 3 \Leftrightarrow m = -\frac{3}{2}$ (thỏa mãn $-4 \leq m \leq 0$).

• Nếu $\frac{m}{2} > 0 \Leftrightarrow m > 0$ thì $x_I > 0 > -2$. Suy ra $f(x)$ giảm trên đoạn $[-2; 0]$.

Do đó $\min_{[-2; 0]} f(x) = f(0) = m^2 - 2m$.

Theo yêu cầu bài toán: $m^2 - 2m = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \text{ (loại)} \\ m = 3 \text{ (thỏa mãn)} \end{cases}$

Vậy $S = \left\{-\frac{3}{2}; 3\right\} \longrightarrow T = -\frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{2}$.

Câu 18. Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 1]$. Giá trị

lớn nhất của biểu thức $T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$ là

A. $T_{\max} = 3$. B. $T_{\max} = \frac{3}{2}$. C. $T_{\max} = \frac{35}{8}$. D. $T_{\max} = \frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Với các số thực a, b, c làm cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 1]$. Gọi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

hai nghiệm đó là x_1, x_2 , theo định lý Viet ta được

$$T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\frac{(a-b)(2a-b)}{a^2}}{\frac{a-b+c}{a}} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

Ta có

$$= \frac{2(1+x_1+x_2+x_1x_2)+x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 2 + \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}.$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$,

$$\begin{cases} x_1^2 \leq x_1x_2 \\ x_2^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq 1+x_1+x_2+x_1^2 \geq x_1+x_2+x_1^2+x_2^2$$

Suy ra

$$\frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1^2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2} = 1.$$

Suy ra

$T \leq 2+1=3$. Vậy $T_{\max}=3$, dấu “=” xảy ra khi $x_1=x_2=1$.



Ý tưởng: Nếu hàm số $y=f(x)$ là hàm số lẻ trên đoạn $[-a;a], (a>0)$ và có giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất thì

$$\left| \max_{[-a;a]} f(x) \right| = \left| \max_{[0;a]} f(x) \right| = \left| \min_{[-a;a]} f(x) \right|$$

$$f(x) = x \sqrt{\frac{2017 + \sqrt{2019 - x^2}}{2018}}$$

- Câu 19.** Gọi M, m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số định của nó. Tìm số phần tử của tập hợp $\mathbb{N}^* \cap \zeta[m; M]$?
- A.** 2018. **B.** 44. **C.** 88. **D.** 89

Lời giải

Đáp án: B

Tập xác định $D = \left[\sqrt{2019}; \sqrt{2019} \right]$

Dễ thấy $f(x)$ là hàm số lẻ trên D . Thêm nữa, $f(x) \geq 0, \forall x \in \left[\sqrt{2019}; \sqrt{2019} \right]$.

Do đó,

$$\begin{cases} M = \max_{\left[\sqrt{2019}; \sqrt{2019} \right]} f(x) = \max_{\left[\sqrt{2019}; \sqrt{2019} \right]} f(x) \\ m = \min_{\left[\sqrt{2019}; \sqrt{2019} \right]} f(x) = - \max_{\left[\sqrt{2019}; \sqrt{2019} \right]} f(x) \end{cases}$$

Ta có

$$f(x) = x \sqrt{\frac{2017 + \sqrt{2019 - x^2}}{2018}} = \frac{x}{2018} \left(\sqrt{2017} \sqrt{2017} + \sqrt{2019 - x^2} \right)$$

$$\begin{aligned} & \leq \frac{x}{2018} \sqrt{\left(\sqrt{2017} \right)^2 + 1^2} \sqrt{\left(\sqrt{2017} \right)^2 + \left(\sqrt{2019 - x^2} \right)^2} \\ & = \frac{\sqrt{2018}}{2018} x \left(\sqrt{2017 + (2019 - x^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f(x) \leq \frac{\sqrt{2018}}{2018} \frac{x^2 + 2017 + (2019 - x^2)}{2} = \sqrt{2018}$$

$$\hat{U} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{2017}}{\sqrt{2017}} = \frac{\sqrt{2019-x^2}}{1} \\ x^2 = 2017 + (2019-x^2) \end{array} \right. \hat{U} x = \sqrt{2018} \hat{U} \sqrt{2019}$$

Đẳng thức xảy ra

Từ đó suy ra

$$\left\{ \begin{array}{l} M = \underset{\sqrt{2019}; \sqrt{2019}}{\text{Max}} f(x) = \underset{\sqrt{2019}}{\text{Max}} f(x) = \sqrt{2018} \\ m = \underset{\sqrt{2019}; \sqrt{2019}}{\text{Min}} f(x) = - \underset{\sqrt{2019}}{\text{Max}} f(x) = -\sqrt{2018} \end{array} \right.$$

Vậy $n(\mathbb{N}^* \cap [m; M]) = n(\mathbb{N}^* \cap [\sqrt{2018}; \sqrt{2018}]) = 44$



có thể hỏi dễ hơn $M + m = ?$ (Bài độ chế từ đề Olympic 30/4 Hùng Vương – Bình dương)

Câu 20. Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = |x^2 - 3x + 2| + mx$ có giá trị nhỏ nhất bằng -1 . Tổng các phần tử của tập hợp S bằng

- A. 6. B. $\frac{5}{2} + 2\sqrt{3}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{3}{2} + 2\sqrt{3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có

$$y = f(x) = \begin{cases} x^2 + (m-3)x + 2 & \text{nếu } x \leq 1 \vee x \geq 2 \quad (P_1) \\ -x^2 + (m+3)x - 2 & \text{nếu } 1 < x < 2 \quad (P_2) \end{cases}$$

Hai parabol (P_1) và (P_2) cắt nhau tại $A(1; m), B(2; 2m)$. Parabol (P_1) có đỉnh $S\left(\frac{3-m}{2}; -\frac{(m-3)^2}{4} + 2\right)$

$$\frac{3-m}{2} \leq 1 \vee \frac{3-m}{2} \geq 2 \Leftrightarrow m \leq -1 \vee m \geq 1$$

Trường hợp 1:

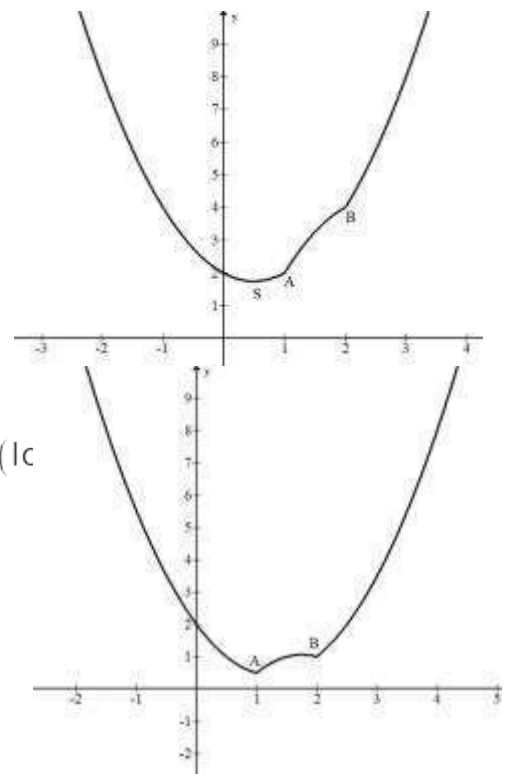
Khi đó

$$\min y = y_S = -1 \Leftrightarrow -\frac{(m-3)^2}{4} + 2 = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 3 + 2\sqrt{3} \\ m = 3 - 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ (lc)}$$

$$1 < \frac{3-m}{2} < 2 \Leftrightarrow -1 < m < 1$$

Trường hợp 2:

Khi đó



$$\min y = \min \{y_A; y_B\} = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < m \leq 0 \\ 2m = -1 \\ 0 < m < 1 \\ m = -1 \end{cases} \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}$$

Nhận xét: Do $\min y = \min \left\{ f(1); f(2); f\left(\frac{3-m}{2}\right) \right\}$ nên ta có giải bài toán bằng cách lần lượt cho $f(1), f(2), f\left(\frac{3-m}{2}\right)$ bằng -1 để tìm m , sau đó kiểm tra lại xem nó có phải là $\min y$ không.

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$$

- Câu 21.** Gọi M, m lần lượt là GTLN và GTNN của hàm số $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x}{(x^2 + 1)^2}$. Tìm số phần tử của tập hợp $\mathbb{C}[m; M]$?
- A.** 0. **B.** 1. **C.** 3. **D.** 4.

Họ và tên tác giả: Trần Đức Phương Tên FB: Trần Đức Phương

Lời giải

Chọn B

Ta có $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2}$. Đặt $t = \frac{x}{x^2 + 1}$

Vì $x^2 + 1 \geq 2|x| \Rightarrow -\frac{x^2 + 1}{2} \leq x \leq \frac{x^2 + 1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2 + 1} \leq \frac{1}{2} \Rightarrow t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Xét hàm $g(t) = t^2 + t$ với $t \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$.

Dễ thấy hàm số đồng biến trên $\left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right]$

Nên $m = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, M = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$.

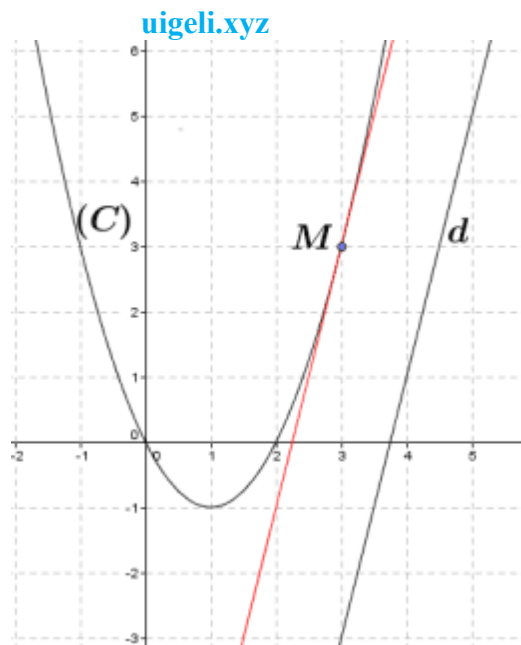
Vậy $\mathbb{C}[m; M] = \{0\}$.

- Câu 22.** Cho hàm số $y = x^2 - 2x$ có đồ thị (C) . Giả sử $M(x_0; y_0)$ thuộc (C) sao cho khoảng cách từ điểm M tới đường thẳng $d: y = 4x - 15$ là nhỏ nhất. Tính $S = x_0 + y_0$.
- A.** 4. **B.** 6. **C.** 5. **D.** 7.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Văn Thanh Tên FB: Thanh Văn Nguyễn

Chọn B



Gọi Δ là tiếp tuyến của (C) sao cho Δ song song với đường thẳng $d: y = 4x - 15$.

Δ có phương trình là $y = 4x - 9$.

Giao điểm của Δ và (C) là $M(3; 3)$.

$M(3; 3)$ là điểm cần tìm.

Do đó $S = x_0 + y_0 = 6$.

Câu 23. Cho hàm số $y = x^2 - 2(m^2 + 1)x + m$. Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số trên $[-2; 0]$

lần lượt là y_1 ; y_2 . Tính tổng các giá trị của m tìm được, biết $y_1 + 11y_2 = 0$.

A. -1

B. -3

C. 2

D. 3

Lời giải

Chọn B

Đặt $f(x) = x^2 - 2(m^2 + 1)x + m$

Gọi $I(x_I; y_I)$ là tọa độ đỉnh của parabol $\Rightarrow x_I = m^2 + 1 \geq 1$. Vậy $x_I \notin [-2; 0]$

Ta có hàm số nghịch biến trên khoảng $(-\infty; m^2 + 1) \Rightarrow$ hàm số cũng nghịch biến trên $(-2; 0)$

Vậy $y_1 = f(-2) = 4m^2 + m + 8$ và $y_2 = f(0) = m$

Theo bài ra $y_1 + 11y_2 = 0 \Leftrightarrow 4m^2 + 12m + 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -1 \\ m = -2 \end{cases}$

Câu 24. Xét các số thực a, b, c sao cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 1]$. Giá trị

lớn nhất của biểu thức $T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)}$ là

- A.** $T_{\max} = 3$. **B.** $T_{\max} = \frac{3}{2}$. **C.** $T_{\max} = \frac{35}{8}$. **D.** $T_{\max} = \frac{8}{3}$.

Lời giải

Chọn A

Với các số thực a, b, c làm cho phương trình $ax^2 + bx + c = 0$ có hai nghiệm thuộc $[0; 1]$. Gọi

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

hai nghiệm đó là x_1, x_2 , theo định lý Viet ta được

$$T = \frac{(a-b)(2a-b)}{a(a-b+c)} = \frac{\frac{(a-b)(2a-b)}{a^2}}{\frac{a-b+c}{a}} = \frac{\left(1 - \frac{b}{a}\right)\left(2 - \frac{b}{a}\right)}{1 - \frac{b}{a} + \frac{c}{a}} = \frac{(1+x_1+x_2)(2+x_1+x_2)}{1+x_1+x_2+x_1x_2}$$

Ta có

$$= \frac{2(1+x_1+x_2+x_1x_2)+x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} = 2 + \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2}.$$

Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $0 \leq x_1 \leq x_2 \leq 1$,

Suy ra $\begin{cases} x_1^2 \leq x_1x_2 \\ x_2^2 \leq 1 \end{cases} \Rightarrow 1+x_1+x_2+x_1x_2 \geq 1+x_1+x_2+x_1^2 \geq x_1+x_2+x_1^2+x_2^2$

Suy ra $\frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1x_2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{1+x_1+x_2+x_1^2} \leq \frac{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2+x_1^2+x_2^2} = 1.$

Suy ra $T \leq 2+1=3$. Vậy $T_{\max} = 3$, dấu “=” xảy ra khi $\begin{cases} x_1 = 0; x_2 = 1 \\ x_1 = x_2 = 1 \end{cases}$.

Câu 25: Cho hàm số $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ thỏa mãn điều kiện $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = a^2 + b^2 + c^2$?

- A.** $\max T = 1$. **B.** $\max T = 3$. **C.** $\max T = 5$. **D.** $\max T = 9$.

Lời giải

Chọn C

Ta có

$$|f(1) - f(0)| = |a+b| \leq 2 \Rightarrow (a+b)^2 \leq 4$$

$$|f(-1) - f(0)| = |a-b| \leq 2 \Rightarrow (a-b)^2 \leq 4$$

Suy ra $(a+b)^2 + (a-b)^2 \leq 8 \Leftrightarrow 2(a^2 + b^2) \leq 8 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \leq 4$.

Ta lại có $|f(0)| = |c| \leq 1 \Rightarrow c^2 \leq 1$.

Do đó, $a^2 + b^2 + c^2 \leq 5$. Đẳng thức xảy ra khi

$$\begin{cases} |a+b|=2 \\ |a-b|=2 \\ |c|=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in \{-2; 2\} \\ b=0 \\ c \in \{-1; 1\} \end{cases} \Leftrightarrow (a; b; c) \in \{(-2; 0; -1), (-2; 0; 1), (2; 0; -1), (2; 0; 1)\}$$

Thử lại, chỉ có $(a; b; c) \in \{(-2; 0; 1), (2; 0; -1)\}$ thỏa mãn $|f(x)| \leq 1, \forall x \in [-1; 1]$.
 Vậy $\max T = 5$.

VẤN ĐỀ 6 ỨNG DỤNG HÀM SỐ VÀO GIẢI CÁC BÀI TOÁN KHÁC

- Câu 1.** Một doanh nghiệp tư nhân A chuyên kinh doanh xe gắn máy các loại. Hiện nay doanh nghiệp đang tập trung chiến lược vào kinh doanh xe honda Future Fi với chi phí mua vào một chiếc là 27 (triệu đồng) và bán ra với giá là 31 triệu đồng. Với giá bán này thì số lượng xe mà khách hàng sẽ mua trong một năm là 600 chiếc. Nhằm mục tiêu đẩy mạnh hơn nữa lượng tiêu thụ dòng xe đang ăn khách này, doanh nghiệp dự định giảm giá bán và ước tính rằng nếu giảm 1 triệu đồng mỗi chiếc xe thì số lượng xe bán ra trong một năm là sẽ tăng thêm 200 chiếc. Vậy doanh nghiệp phải định giá bán mới là bao nhiêu để sau khi đã thực hiện giảm giá, lợi nhuận thu được sẽ là cao nhất.
- A.** 30 triệu đồng. **B.** 29 triệu đồng. **C.** 30,5 triệu đồng. **D.** 29,5 triệu đồng.

Lời giải

Chọn C

Gọi x (triệu) đồng là số tiền mà doanh nghiệp A dự định giảm giá; $(0 \leq x \leq 4)$.

Khi đó:

Lợi nhuận thu được khi bán một chiếc xe là $31 - x - 27 = 4 - x$ (triệu đồng).

Số xe mà doanh nghiệp sẽ bán được trong một năm là $600 + 200x$ (chiếc).

Lợi nhuận mà doanh nghiệp thu được trong một năm là

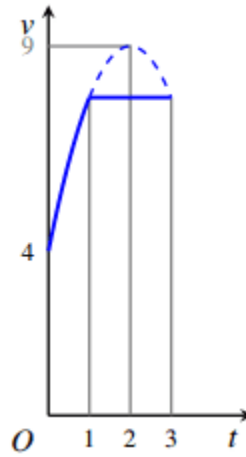
$$f(x) = (4 - x)(600 + 200x) = -200x^2 + 200x + 2400.$$

Xét hàm số $f(x) = -200x^2 + 200x + 2400$ trên đoạn $[0; 4]$ có bảng biến thiên

$$\text{Vậy } \max_{[0; 4]} f(x) = 2450 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}.$$

Vậy giá mới của chiếc xe là 30,5 triệu đồng thì lợi nhuận thu được là cao nhất.

- Câu 2.** Một vật chuyển động trong 3 giờ với vận tốc $v(km/h)$ phụ thuộc vào thời gian $t(h)$ có đồ thị của hàm số vận tốc như hình dưới. Trong khoảng thời gian 1 giờ kể từ khi bắt đầu chuyển động, đồ thị đó là một phần của đường parabol có đỉnh $I(2; 9)$ và trục đối xứng song song với trục tung, khoảng thời gian còn lại đồ thị là một đoạn thẳng song song với trục hoành. Tính vận tốc v của vật tại thời điểm $t = 3$.



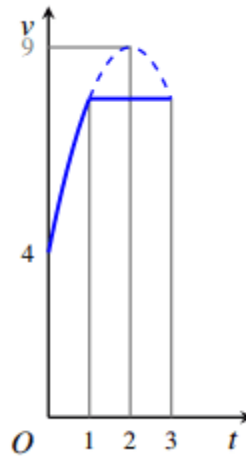
A. $v = \frac{121}{4}$

B. $v = \frac{31}{4}$

C. $v = \frac{89}{4}$

D. $v = \frac{61}{4}$

Lời giải



Giả sử $v(t) = at^2 + bt + c$ ($t \geq 0$)

Ta có :

$$\begin{cases} v(0) = c = 4 \\ v(2) = 4a + 2b + c = 9 \\ -\frac{b}{2a} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 2b = 5 \\ 4a + b = 0 \\ c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{5}{4} \\ b = 5 \\ c = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v(t) = -\frac{5}{4}t^2 + 5t + 4$$

$$t = 3 \Rightarrow v_0(t) = \frac{31}{4}$$

Chọn B

Câu 3. Với giá trị nào của a thì bất pt sau nghiệm đúng với mọi giá trị của x :

$$(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 6) \geq a$$

A. $a \geq -2$

B. $a \leq -2$

C. $a \geq -1$

D. $a \leq -1$

Lời giải :

Chọn B

Đặt : $t = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 6 = t + 3$

Ta có : $t = (x+2)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow t \geq -1$

Bài toán trở thành : Tìm a để $t(t+3) \geq a(*) \quad \forall t \geq -1$.

Xét hàm số : $f(t) = t^2 + 3t, (t \geq -1)$

Lập bảng biến thiên của $f(t)$ trên $[-1; +\infty)$

Suy ra $\min f(t) = -2$

$(*) \Leftrightarrow f(t) \geq a, \quad \forall t \geq -1$

Vậy $a \leq -2$

- Câu 4.** Cho phương trình $2\left(x + \sqrt{4-x^2}\right) = m + x\sqrt{4-x^2}$. Gọi m_0 là giá trị nhỏ nhất của tham số m để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt. Khi đó:
- A.** $m_0 \in (1; 2)$ **B.** $m_0 \in [3; 4)$ **C.** $m_0 \in (5; 6)$ **D.** $m_0 \in (-2; 0]$

Lời giải

Chọn B

Phương trình: $2\left(x + \sqrt{4-x^2}\right) = m + x\sqrt{4-x^2} \quad (1)$

+ Điều kiện $-2 \leq x \leq 2$

+ Đặt $t = x + \sqrt{4-x^2}$, với $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$

Khi đó $t^2 = 4 + 2x\sqrt{4-x^2} \Rightarrow x\sqrt{4-x^2} = \frac{t^2 - 4}{2}$

Phương trình (1) trở thành:

$2t = m + \frac{t^2 - 4}{2} \Leftrightarrow t^2 - 4t + 2m - 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 4t = 4 - 2m \quad (2)$

+ Ta có $t = x + \sqrt{4-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq t \\ x = \frac{t \pm \sqrt{8-t^2}}{2} \end{cases}$

+ Nhận xét : Với $-2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ thì $\frac{t - \sqrt{8-t^2}}{2} \leq t$

Với $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ thì $\frac{t + \sqrt{8-t^2}}{2} \leq t$

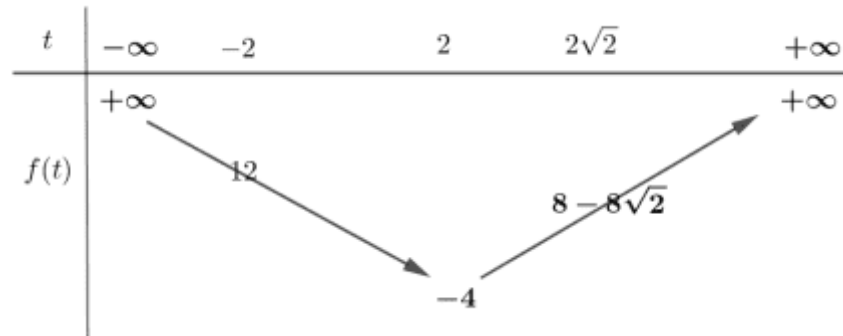
+ Do đó

Với $-2 \leq t < 2$ thì phương trình có 1 nghiệm $x = \frac{t - \sqrt{8-t^2}}{2}$

Với $2 \leq t \leq 2\sqrt{2}$ thì phương trình có 2 nghiệm $x = \frac{t \pm \sqrt{8-t^2}}{2}$

+ Như vậy, để phương trình đã cho có 3 nghiệm phân biệt thì ⁽²⁾ phải có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn : $-2 \leq t_1 < 2 \leq t_2 \leq 2\sqrt{2}$

Lập BBT của hàm số $f(t) = t^2 - 4t$,



Từ BBT ta thấy phương trình ⁽²⁾ có 2 nghiệm t_1, t_2 thỏa mãn $-2 \leq t_1 < 2 \leq t_2 \leq 2\sqrt{2}$
 $\Leftrightarrow -4 < 4 - 2m \leq 8 - 8\sqrt{2} \Leftrightarrow 4\sqrt{2} - 2 \leq m < 4$

Do đó $m_0 = 4\sqrt{2} - 2$. Vậy $m_0 \in [3; 4)$.

Chủ đề : HS và PT Bậc 1-2 lớp 10

Câu 5. Với giá trị nào của a thì bất pt sau nghiệm đúng với mọi giá trị của x :

$$(x^2 + 4x + 3)(x^2 + 4x + 6) \geq a$$

- B.** $a \geq -2$ **B.** $a \leq -2$ **C.** $a \geq -1$ **D.** $a \leq -1$

Lời giải :

Chọn B

$$\text{Đặt : } t = x^2 + 4x + 3 \Rightarrow x^2 + 4x + 6 = t + 3$$

$$\text{Ta có : } t = (x+2)^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow t \geq -1$$

Bài toán trở thành : Tìm a để $t(t+3) \geq a(*) \forall t \geq -1$.

$$\text{Xét hàm số : } f(t) = t^2 + 3t, (t \geq -1)$$

Lập bảng biến thiên của f(t) trên $[-1; +\infty)$

$$\text{Suy ra } \min f(t) = -2$$

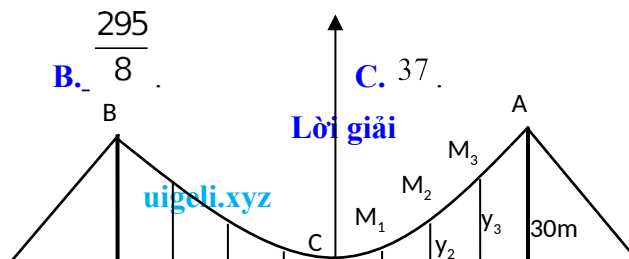
$$(*) \Leftrightarrow f(t) \geq a, \forall t \geq -1$$

$$\text{Vậy } a \leq -2$$

Câu 6. Dây truyền đỡ nền cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu cuối của dây được gắn chặt vào điểm A và B trên trục AA' và BB' với độ cao $30m$. Chiều dài nhịp $A'B' = 200m$. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên nền cầu là $OC = 5m$. Tính tổng chiều dài các dây cáp treo $y_1 + y_2 + y_3$ (thanh thẳng đứng nối nền cầu với dây truyền)?

- A.** $\frac{147}{4}$ **B.** $\frac{295}{8}$ **C.** 37 **D.** $\frac{73}{2}$

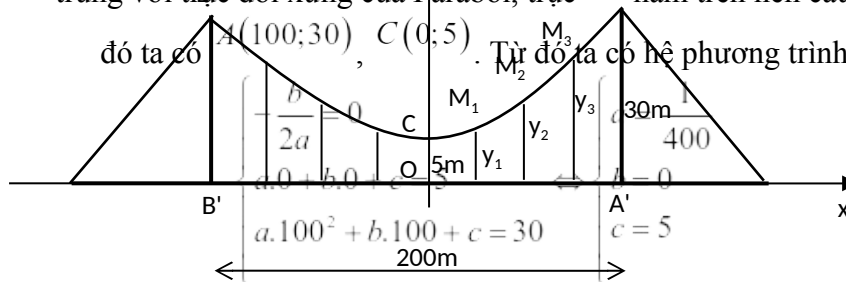
Lời giải





Chọn B

Chọn trục Oy trùng với trục đối xứng của Parabol, trục Ox nằm trên nền cầu như hình vẽ. Khi

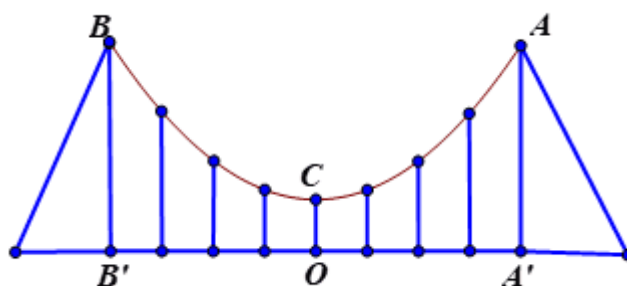


Suy ra Parabol có phương trình $y = \frac{1}{400}x^2 + 5$. Bài toán đưa việc xác định chiều dài các dây cáp treo sẽ là tính tung độ những điểm M_1, M_2, M_3 của Parabol. Trong đó các hoành độ lần

lượt là $x_1 = 25; x_2 = 50; x_3 = 75$, từ đó suy ra $y_1 = \frac{105}{16}; y_2 = \frac{45}{4}; y_3 = \frac{305}{16}$. Vậy

$$y_1 + y_2 + y_3 = \frac{295}{8}$$

Câu 7. Dây truyền đỡ nền cầu treo có dạng Parabol ACB như hình vẽ. Đầu cuối của dây được gắn chặt vào điểm A và B trên trục AA' và BB' với độ cao 30m. Chiều dài nhịp $A'B' = 200m$. Độ cao ngắn nhất của dây truyền trên nền cầu là $OC = 5m$. Xác định tổng các chiều dài các dây cáp treo (thanh thẳng đứng nối nền cầu với dây truyền)?



A. 34,875 m.

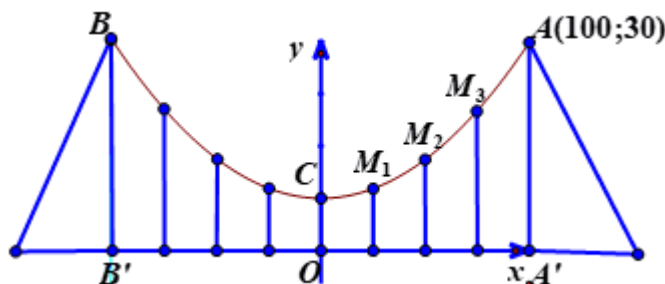
B. 35,875 m.

C. 36,875 m.

D. 37,875 m.

Lời giải

Chọn C



Chọn trục Oy trùng với trục đối xứng của Parabol, trục Ox nằm trên nền cầu như Hình vẽ. Khi đó ta có $A(100; 30), C(0; 5)$, ta tìm phương trình của Parabol có dạng $y = ax^2 + bx + c$. Parabol có đỉnh là C và đi qua A nên ta

$$\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = 0 \\ a \cdot 0 + b \cdot 0 + c = 5 \\ a \cdot 100^2 + b \cdot 100 + c = 30 \end{array} \right. \quad \cup \quad \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{400} \\ b = 0 \\ c = 5 \end{array} \right. \end{array}$$

có hệ phương trình:

Suy ra Parabol có phương trình $y = \frac{1}{400}x^2 + 5$. Bài toán đưa việc xác định chiều dài các dây cáp treo sẽ là tính tung độ những điểm M_1, M_2, M_3 của Parabol. Ta dễ dàng tính được tung độ các

điểm có các hoành độ $x_1 = 25, x_2 = 50, x_3 = 75$ lần lượt là $y_1 = 6,5625$ (m), $y_2 = 11,25$ (m), $y_3 = 19,0625$ (m). Do đó tổng độ dài các dây cáp treo cần tính là

$$6,5625 + 11,25 + 19,0625 = 36,875 \text{ (m)}$$

Câu 8. Khi một quả bóng được đá lên nó sẽ đạt được độ cao nào đó rồi rơi xuống. Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol. Giả thiết rằng bóng được đá từ độ cao 1m. Sau đó 1 giây nó đạt độ cao 8,5m và 2 giây sau khi đá nó đạt độ cao 6m. Hỏi sau bao lâu quả bóng chạm đất (Tính chính xác đến hàng phần trăm).

A. 2, 58s.

B. 2, 59s.

C. 2, 60s.

D. 2, 57s.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Nguyễn Thị Trang Tên FB: Trang Nguyen

Chọn A

Biết rằng quỹ đạo của quả bóng là một cung parabol. Nên có dạng $y = ax^2 + bx + c$

Theo bài ra gán vào hệ tọa độ và sẽ tương ứng các điểm A, B **C.** nên ta có

$$\begin{cases} c = 1 \\ a + b + c = 8,5 \\ 4a + 2b + c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -5 \\ b = 12,5 \\ c = 1 \end{cases}$$

Khi đó parabol có dạng

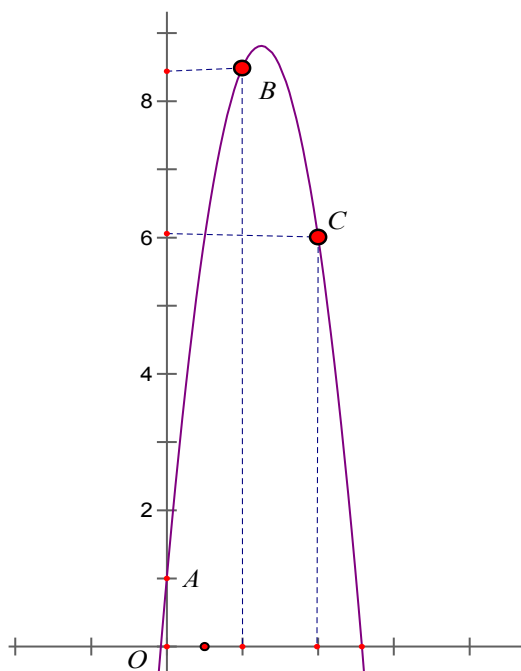
$$y = -5x^2 + 12,5x + 1$$

Để quả bóng rơi xuống đất khi $y = 0$

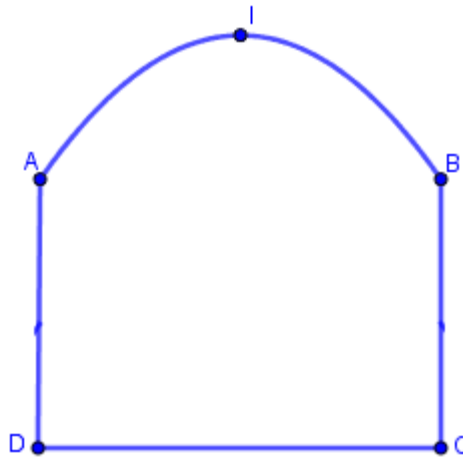
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \approx -0,08(\text{loại}) \\ x \approx 2,58(\text{tm}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Đáp án A

Vậy $s = 2,58$ s



Câu 9. Một chiếc cổng như hình vẽ, trong đó $CD = 6m$, $AD = 4m$, phía trên cổng có dạng hình parabol

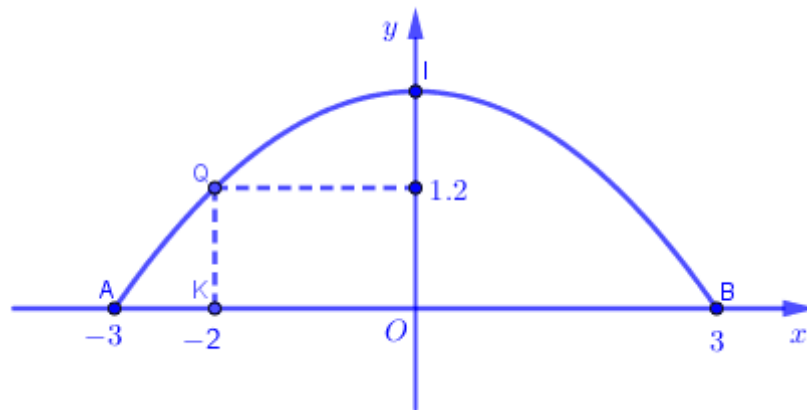


Người ta cần thiết kế cổng sao cho những chiếc xe container chở hàng với bề ngang thùng xe là $4m$, chiều cao là $5,2m$ có thể đi qua được (chiều cao được tính từ mặt đường đến nóc thùng xe và thùng xe có dạng hình hộp chữ nhật). Hỏi đỉnh I của parabol (theo mép dưới của cổng) cách mặt đất tối thiểu là bao nhiêu?

- A. $6,13m$. B. $6,14m$. C. $6,15m$. D. $6,16m$.

Lời giải

Chọn D



Gọi O là trung điểm của AB , K là điểm thuộc đoạn thẳng OA sao cho $OK = 2m$.

Chọn hệ tọa độ như hình vẽ. Khi đó phương trình của đường cong parabol có dạng $y = ax^2 + c$.

Theo giả thiết ta có parabol đi qua $(-2; 1,2), (-3; 0)$ nên ta có:

$$\begin{cases} 4a + c = 1,2 \\ 9a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{6}{25} \\ c = \frac{54}{25} = 2,16 \end{cases}$$

Vậy đỉnh I của parabol (theo mép dưới của cổng) cách mặt đất tối thiểu là $6,16m$

Câu 10. Cho a, b, c là các số thực thuộc đoạn $[0; 1]$. Tìm GTLN của biểu thức

$$P = a(1-b) + b(1-c) + c(1-a)$$

- A. $\frac{5}{4}$. B. 1. C. $\frac{5}{6}$. D. $\frac{3}{2}$.

Chọn B

Biểu thức P được viết lại dưới dạng

$$P = (1 - b - c)a + b + c - bc$$

Xét hàm số $f(x) = (1 - b - c)x + b + c - bc$ với $x \in [0; 1]$.

Do $f(x)$ là hàm số bậc nhất trên đoạn $[0; 1]$ nên ta có

$$f(x) \leq \max \{f(0), f(1)\}, \forall x \in [0; 1].$$

Lại có

$$f(0) = b + c - bc = -(1 - b)(1 - c) + 1 \leq 1, \forall b, c \in [0; 1].$$

và

$$f(1) = 1 - bc \leq 1, \forall b, c \in [0; 1].$$

Do đó

$$f(x) \leq 1, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow f(a) \leq 1.$$

$$a = 1, b = 0, c \in [0; 1].$$

Đẳng thức xảy ra chẳng hạn tại

$$\text{Vậy } \max P = 1.$$

Câu 11. Có bao nhiêu giá trị nguyên của m để phương trình $x^2 + \sqrt{5 + 4x - x^2} = 4x + m - 103$ có nghiệm?

A. 7

B. 8

C. 9

D. 6

Lời giải

Chọn A

Đặt $t = \sqrt{5 + 4x - x^2} = \sqrt{9 - (x - 2)^2}$ nên $0 \leq t \leq 3$ hay $t \in [0; 3]$

Ta được PT $-t^2 + t + 108 = m$

Khi đó xét $y = f(t) = -t^2 + t + 108$ với $t \in [0; 3]$

t	0	$\frac{1}{2}$	3
f(t)	108	$\frac{433}{4}$	102

Từ bảng biến thiên trên ta thấy PT có nghiệm khi và chỉ khi $102 \leq m \leq \frac{433}{4}$ nên có 7 các số nguyên của m thỏa mãn.

Câu 12. Cho phương trình $(x^2 - 2x + m)^2 - 2x^2 + 3x - m = 0$. Có bao nhiêu giá trị nguyên của $m \in [-10; 10]$ để phương trình đã cho có bốn nghiệm phân biệt.

A. 11.

B. 12.

C. 9.

D. 13.

Lời giải

Họ và tên tác giả : Phạm Thành Trung Tên FB: Phạm Thành Trung

Chọn B

Biến đổi phương trình về dạng: $(x^2 - 2x + m)^2 - 2(x^2 - 2x + m) + m = x$

Đặt $a = x^2 - 2x + m$ ta có hệ:
$$\begin{cases} a = x^2 - 2x + m \\ x = a^2 - 2a + m \end{cases}$$

$$(x - a)(x + a - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \\ x + a - 1 = 0 \end{cases}$$

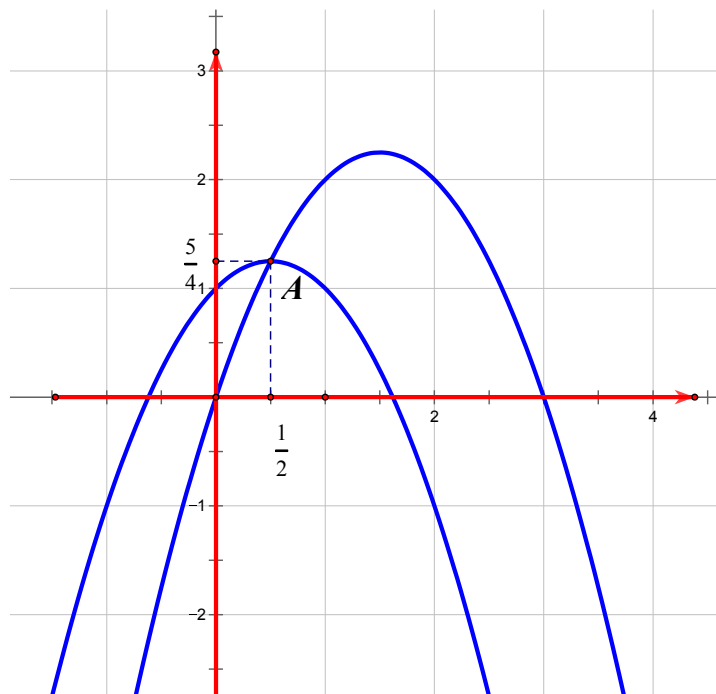
Từ hệ phương trình có:

$$\begin{cases} x = x^2 - 2x + m \\ x + x^2 - 2x + m - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -x^2 + 3x \\ m = -x^2 + x + 1 \end{cases}$$

Hay có:

Vẽ trên cùng một đồ thị các Parabol: $(P_1): y = -x^2 + 3x; (P_2): y = -x^2 + x + 1$ ta có $m \leq \frac{5}{4}$

Vậy có 12 giá trị của m thỏa mãn yêu cầu của bài toán



Câu 1: Cho bất phương trình $mx + 4 > 0$ đúng với $|x| < 8$ khi m thuộc đoạn $[a; b]$. Tính $a + b$?

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $-\frac{1}{2}$

D. 3

Lời giải

Chọn đáp án A

Yêu cầu bài toán tương đương với $f(x) = mx + 4 > 0, \forall x \in (-8; 8) \Leftrightarrow$ đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên khoảng $(-8; 8)$ nằm phía trên trục hoành $\Leftrightarrow$ hai đầu mút của đoạn thẳng đó đều nằm phía trên trục hoành.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(-8) \geq 0 \\ f(8) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8m + 4 \geq 0 \\ 8m + 4 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{1}{2} \\ m \geq -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq \frac{1}{2}$$

Khi đó $a + b = 0$.

Câu 13. Có tất cả bao nhiêu giá trị m nguyên để phương trình: $\sqrt{9-x} = \sqrt{3m-x^2+9x} - \sqrt{x}$ có đúng bốn nghiệm phân biệt?

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. Không tồn tại.

Lời giải

Chọn A

Đk $0 \leq x \leq 9$

Ta có: $\sqrt{9-x} = \sqrt{3m-x^2+9x} - \sqrt{x} (*) \Leftrightarrow \sqrt{9-x} + \sqrt{x} = \sqrt{3m-x^2+9x}$

$$\Leftrightarrow 9 + 2\sqrt{9x-x^2} = 3m - x^2 + 9x \Leftrightarrow -(-x^2+9x) + 9 + 2\sqrt{9x-x^2} = 3m$$

$$\text{Đặt: } t = \sqrt{9x-x^2} \quad (0 \leq \sqrt{9x-x^2} = \sqrt{\frac{81}{4} - (\frac{9}{2}-x)^2} \leq \frac{9}{2}) \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{9}{2}$$

Phương trình (*) trở thành: $-t^2 + 2t + 9 = 3m$ (1)

Với $t = \sqrt{9x-x^2} \Rightarrow x^2 - 9x + t^2 = 0$ có $\Delta = 81 - 4t^2 > 0, \forall t \in [0; \frac{9}{2}) \Rightarrow$ Nếu mỗi giá trị của $t \in [0; \frac{9}{2})$ thì ta có 2 giá trị phân biệt của x tương ứng.

Như vậy: pt (*) có 4 nghiệm phân biệt khi pt (1) có 2 nghiệm phân biệt thuộc $[0; \frac{9}{2})$

Lập bảng biến thiên của hàm số $f(t) = -t^2 + 2t + 9$ trên $[0; \frac{9}{2})$.

t	0	1	$\frac{9}{2}$
$f(t)$	9	10	$-\frac{9}{4}$

Khi đó ta có : $9 \leq 3m < 10 \Leftrightarrow 3 \leq m < \frac{10}{3}$. mà $m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m = 3$. Chọn đáp án **A**

Câu 14. Cho (P) $y = 2x^2 - (m + 4)x - 2m + 1$ và đường thẳng (d) : $y = -3x - 3m$, với m là tham số. Biết (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trọng tâm tam giác OAB thuộc đường thẳng $(\Delta) : 6x - 2y + 2019 = 0$. Khi đó:

A. $3m + 2020 = 0$

B. $3m - 2020 = 0$

C. $6m + 2021 = 0$

D. $6m - 2021 = 0$

Đáp án: C

Giải

Xét phương trình hoành độ giao điểm

$$2x^2 - (m + 4)x - 2m + 1 = -3x - 3m \Leftrightarrow 2x^2 - (m + 1)x + m + 1 = 0 \quad (1)$$

Để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt thì phương trình (1) phải có hai nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow \Delta = (m + 1)^2 - 8(m + 1) > 0 \Leftrightarrow m^2 - 6m - 7 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -1 \\ m > 7 \end{cases}$$

Khi đó, phương trình (1) có hai nghiệm x_1, x_2 .

Tọa độ hai điểm A, B lần lượt là $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$

Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB khi đó

$$\begin{cases} x_G = \frac{x_1 + x_2}{3} = \frac{m + 1}{6} \\ y_G = \frac{y_1 + y_2}{3} = \frac{-3x_1 - 3m - 3x_2 - 3m}{3} = \frac{-3(x_1 + x_2) - 6m}{3} = -(x_1 + x_2) - 2m = -\frac{m + 1}{2} - 2m \end{cases}$$

Mà G thuộc $(\Delta) : 6x - 2y + 2019 = 0$ nên ta có

$$6 \cdot \frac{m + 1}{6} - 2 \left(-\frac{m + 1}{2} - 2m \right) + 2019 = 0 \Leftrightarrow 6m + 2021 = 0 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Suy ra đáp án **C.**

Câu 15. Tìm số giá trị nguyên của $m \in [-2018; 2018]$ để phương trình : $|x + 2| + m|x - 1| = 3$ có nghiệm duy nhất

A. 2017

B. 2018

C. 4034

D. 4036

Lời giải

Họ và tên tác giả: Lê Thị Thúy Tên FB: Thúy Lê

Chọn C

$$f(x) = \begin{cases} (-m-1)x + m - 2 & \text{nếu } x < -2 \\ (1-m)x + m + 2 & \text{nếu } -2 \leq x < 1 \\ (m+1)x + 2 - m & \text{nếu } x \geq 1 \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số theo m

Từ bảng biến thiên ta có: Phương trình $f(x) = 3$ có nghiệm duy nhất khi $m > 1$ hoặc $m < -1$ do m nguyên, $m \in [-2018; 2018]$. chọn **C**

Câu 16. Tìm số các giá trị nguyên của tham số m để phương trình $x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + 2x + m} + m + 2 = 0$ có đúng hai nghiệm phân biệt trên $[1; 2]$

A. 12.

B. 9.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn D

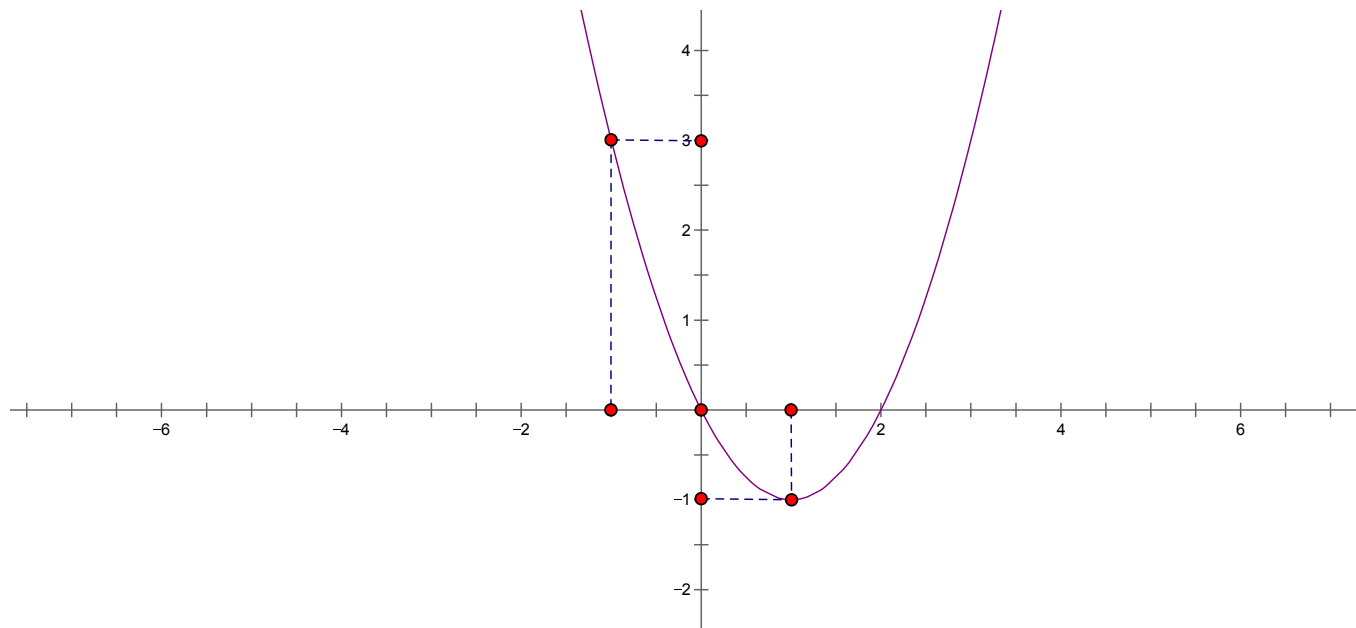
Ta có

$$x^2 + 2x - 3\sqrt{x^2 + 2x + m} + m + 2 \stackrel{(1)}{=} 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + 2x + m} = 1 \\ \sqrt{x^2 + 2x + m} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 2x = 1 - m \\ x^2 + 2x = 4 - m \end{cases}$$

Hàm số $y = x^2 + 2x$ đồng biến trên $(-1; +\infty) \supset [1; 2]$ Do đó, phương trình (1) có đúng hai nghiệm trên $[1; 2]$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} 1 - m \neq 4 - m \\ y(1) \leq 1 - m \leq y(2) \\ y(1) \leq 4 - m \leq y(2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq 1 - m \leq 8 \\ 3 \leq 4 - m \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7 \leq m \leq -2 \\ -4 \leq m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow -4 \leq m \leq -2.$$

Câu 17. Cho hàm số bậc hai $y=f(x)$ có đồ thị như hình vẽ



Tổng các giá trị nguyên của m để phương trình $f(f(x)) = m$ có 4 nghiệm phân biệt là

A. $S = 5$.

B. $S = 3$.

C. $P = 6$.

D. $P = +\infty$.

Lời giải

Chọn B

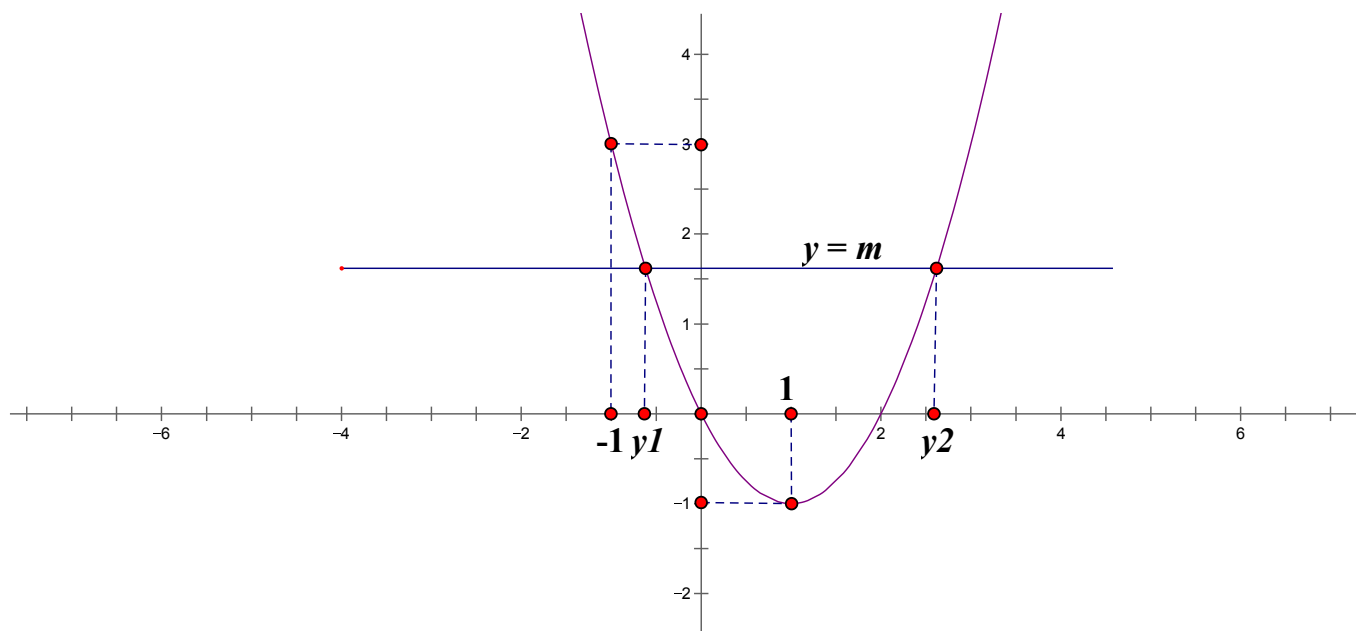
Số nghiệm của pt $f(f(x)) = m$ là số giao điểm của đồ thị hàm số $y = f(f(x))$ và đường thẳng $y = m$.

Dựa vào đồ thị ta có:

+ Nếu $m < -1$ thì pt vô nghiệm

+ Nếu $m = -1$ thì pt tương đương $f(x) = 1$ suy ra pt đã cho có 2 nghiệm phân biệt.

+ Nếu $-1 < m < 3$ thì pt tương đương với $\begin{cases} f(x) = y_1 \in (-1; 1) \\ f(x) = y_2 > 1 \end{cases}$



Từ đồ thị suy ra pt đã cho có 4 nghiệm phân biệt

+ Nếu $m = 3$ thì pt tương đương với $\begin{cases} f(x) = -1 \\ f(x) = y_2 > 1 \end{cases}$

Từ đồ thị suy ra pt đã cho có 3 nghiệm phân biệt

+ Nếu $m > 3$ thì pt tương đương với $\begin{cases} f(x) = y_1 < -1 \\ f(x) = y_2 > 1 \end{cases}$

Từ đồ thị suy ra pt đã cho có 2 nghiệm phân biệt

Vậy để pt có 4 nghiệm phân biệt thì $-1 < m < 3$

VẤN ĐỀ 7 HÀM HỢP – TÍNH GIÁ TRỊ HÀM SỐ

Câu 1. Cho hàm số f xác định trên tập số nguyên và nhận giá trị cũng trong tập số nguyên, thỏa mãn

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(m+n) = f(m) + f(n) + 3(4mn-1) \end{cases} \text{ với mọi } m, n \text{ là số nguyên.}$$

Tính $f(19)$.

A. $f(19) = 1999$

B. $f(19) = 1998$

C. $f(19) = 2000$

D. $f(19) = 2001$

Lời giải

Chọn B.

$$m = n = 1 \Rightarrow f(2) = 2f(1) + 9 = 9$$

$$m = n = 2 \Rightarrow f(4) = 2f(2) + 45 = 63$$

$$m = n = 4 \Rightarrow f(8) = 2f(4) + 189 = 315$$

$$m = n = 8 \Rightarrow f(16) = 2f(8) + 765 = 1395$$

$$m = 2; n = 1 \Rightarrow f(3) = f(2) + f(1) + 21 = 30$$

$$m = 16; n = 3 \Leftrightarrow f(19) = f(16) + f(3) + 573 = 1998$$

Câu 2. Cho hàm số f xác định trên $\mathbb{R}$ và cũng nhận giá trị trên tập $\mathbb{R}$ thỏa

$$2f(x) - f(-x) = x^4 - 12x^3 + 4$$

Tính giá trị $f(1)$

A. $f(1) = -1$

B. $f(1) = 1$

C. $f(1) = 9$

D. $f(1) = -9$

Lời giải

Chọn B

Cho $x = 1$ ta được $2f(1) - f(-1) = 1^4 - 12(1)^3 + 4 = -7$

Cho $x = -1$ ta được $2f(-1) - f(1) = (-1)^4 - 12(-1)^3 + 4 = 17$

Ta có hệ
$$\begin{cases} 2f(1) - f(-1) = -7 \\ -f(1) + 2f(-1) = 17 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(1) = 1 \\ f(-1) = 9 \end{cases}$$

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ thỏa mãn $f(u+v) = f(u) + f(v)$ với $\forall u, v \in \mathbb{R}$. Biết $f(4) = 5$, hỏi giá trị của $f(-6)$ nằm trong khoảng nào dưới đây?

A. $(-8; -7)$

B. $(6; 8)$

C. $(-5; 0)$

D. $(-10; -8)$

Lời giải

Chọn A

Lời giải

Cho $u = v = 0 \rightarrow f(0+0) = f(0) + f(0) = 0 \Leftrightarrow f(0) = 0$

Cho $v = -u \rightarrow f(u-u) = f(u) + f(-u) = f(0) = 0 \Leftrightarrow f(-u) = -f(u) \rightarrow$ hàm số $y = f(x)$ là hàm lẻ.

Lại có: $f(4) = f(2+2) = f(2) + f(2) = 5 \rightarrow f(2) = \frac{5}{2}$

Suy ra: $f(6) = f(4) + f(2) = 5 + \frac{5}{2} = \frac{15}{2} \rightarrow f(-6) = -f(6) = -\frac{15}{2}$ (vì hàm $y = f(x)$ là hàm lẻ)

Chọn đáp án A.

Câu 4. Cho hàm số $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn điều kiện

$$f(x^2 + x + 3) + 2f(x^2 - 3x + 5) = 6x^2 - 10x + 17, \forall x \in \mathbb{R}$$

Tính $f(2018)$

A. $f(2018) = 2018$

B. $f(2018) = 2018^2$

C. $f(2018) = 4033$

D. $f(2018) = 3033$

Chọn C

Ta cần thay x bởi đại lượng nào đó để bảo toàn được sự xuất hiện của

$$f(x^2 + x + 3) \quad \text{và} \quad f(x^2 - 3x + 5) \quad \text{trong phương trình.}$$

Do đó ta cần có $x^2 + x + 3 = x^2 - 3x + 5 \Leftrightarrow x = 1 - x$.

Như vậy ta thay x bởi $1 - x$.

Cuối cùng ta tính được :

$$f(x^2 + x + 3) = 2x^2 + 2x + 3 = 2(x^2 + x + 3) - 3$$

$$\text{Vậy } f(2018) = 2.2018 - 3 = 4033$$

Câu 5.

Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x-10 & \text{khi } x > 2018 \\ f(f(x+11)) & \text{khi } x \leq 2018 \end{cases}$. Tính giá trị $f(1) + f(2018)$.

A. 1999. **B.** 2009. **C.** 4018. **D.** 4036.

Lời giải**Chọn B**

Ta có:

$$f(2018) = f(f(2018+11)) = f(f(2029)) = 2019 - 10 = 2009$$

$$f(2017) = f(f(2017+11)) = f(f(2028)) = f(2018) = 2009$$

...

$$f(2009) = f(f(2009+11)) = f(f(2020)) = f(2010) = 2009$$

$$f(2008) = f(f(2008+11)) = f(f(2019)) = f(2009) = 2009$$

$$f(2007) = f(f(2007+11)) = f(f(2018)) = f(2009) = 2009$$

$$f(2006) = f(f(2006+11)) = f(f(2017)) = f(2009) = 2009$$

...

$$f(1) = f(f(1+11)) = f(f(12)) = 2009$$

Do đó ta có $f(2018) = f(2017) = \dots = f(1) = 2009$.

$$\text{Vậy } f(1) + f(2018) = 4018$$

211

Câu 6: Có bao nhiêu hàm số $f(x)$ xác định với mọi x thỏa mãn điều kiện $f(x+y) \geq f(x).f(y) \geq 2019^{x+y}$ với mọi số thực x, y .

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** vô số.

Lời giải**Chọn B**

Xét hệ điều kiện $f(x+y) \geq f(x).f(y) \geq 2019^{x+y}$ (1)

- Cho $x = y = 0$, (1) $\Rightarrow f(0) \geq f^2(0) \geq 1$. Từ đó suy ra $f(0) = 1$.
- Cho $y = -x$, (1) $\Rightarrow 1 = f(0) \geq f(x).f(-x) \geq 1$. Suy ra $f(x).f(-x) = 1$. (2)
- Cho $y = 0$, (1) $\Rightarrow f(x) \geq 2019^x \quad \forall x \in \mathbb{Q}$ (3)

Vì (3) đúng với mọi x nên $f(-x) \geq 2019^{-x}$ (4)

Từ (2) và (4) suy ra $\frac{1}{f(x)} \geq \frac{1}{2019^x} \Rightarrow f(x) \leq 2019^x$ (5)

Từ (3) và (5) suy ra $f(x) = 2019^x$.

VẤN ĐỀ 8. TIẾP TUYẾN – TIẾP XÚC

- Câu 1.** Biết rằng $y = ax + b$, $(a, b \in \mathbb{Q})$ là tiếp tuyến chung của hai parabol $y = x^2 + 4x + 8$ và $y = x^2 + 8x + 4$. Khi đó giá trị của biểu thức $T = 2018a + 2019b$ bằng?
- A.** $T = 24224$. **B.** $T = 24220$. **C.** $T = 24022$. **D.** $T = 24242$.

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và parabol $y = x^2 + 4x + 8$ là:

$$x^2 + 4x + 8 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (a-4)x + 8-b = 0 \quad (1)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (1) có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow (a-4)^2 - 4(8-b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 8a + 4b = 16 \quad (*)$$

Ta có phương trình hoành độ giao điểm của đường thẳng $y = ax + b$ và parabol $y = x^2 + 8x + 4$ là:

$$x^2 + 8x + 4 = ax + b \Leftrightarrow x^2 - (a-8)x + 4-b = 0 \quad (2)$$

Đường thẳng tiếp xúc với parabol khi và chỉ khi phương trình (2) có nghiệm kép.

$$\Leftrightarrow (a-8)^2 - 4(4-b) = 0 \Leftrightarrow a^2 - 16a + 4b = -48 \quad (**)$$

Kết hợp (*), (**) ta có hệ:
$$\begin{cases} a^2 - 8a + 4b = 16 \\ a^2 - 16a + 4b = -48 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 8a + 4b = 16 \\ 8a = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 8 \\ b = 4 \end{cases}$$

Vậy $T = 2018.8 + 2019.4 = 24220$.

- Câu 2.** Các Parabol $(P_m): y = mx^2 - (4m-1)x + 4m-1$ ($m \neq 0$) luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định d khi m thay đổi. Hỏi d đi qua điểm nào trong các điểm sau

- A. $(0;0)$ B. $(-2;0)$
C. $(-1;0)$ D. $(3;2)$

Lời giải

Chọn D

Cách 1.

Gọi $d: y = ax + b$ là đường thẳng mà họ Parabol luôn tiếp xúc.

Xét phương trình tương giao :

$$mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1 = ax + b$$

$$\Leftrightarrow mx^2 - (4m - 1 - a)x + 4m - 1 - b = 0$$

Khi đó phương trình tương giao phải có nghiệm kép với mọi m

$$\Leftrightarrow \Delta = (4m - 1 - a)^2 - 4m(4m - 1 - b) = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow [2(a - 1) + (1 + b)]m + (a - 1)^2 = 0, \forall m \neq 0$$

$$\begin{cases} 2(a - 1) + 1 + b = 0 \\ a - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$

Vậy $d: y = x - 1$. Nên d đi qua điểm $(3;2)$.

Cách 2. (Trắc nghiệm) Ta có: $(P_m): y = mx^2 - (4m - 1)x + 4m - 1 = m(x - 2)^2 + x - 1$

Nên phương trình đường thẳng luôn tiếp xúc với họ Parabol là $d: y = x - 1$

(Chú ý: Mẹo trắc nghiệm thay $m = 0$ vào phương trình họ Parabol ta tìm được phương trình đường thẳng) $d: y = x - 1$.

- Câu 3.** Parabol $(P): y = ax^2 + bx + c$ nhận ba đường thẳng $y = x - 5; y = -3x + 3; y = 3x - 12$ làm các tiếp tuyến. Khi đó giá trị của $M = ab + bc$ là
A. -25 B. -16 C. -1. D. 25.

Lời giải

YCBT suy ra các phương trình sau đây đều có nghiệm kép:

$$ax^2 + bx + c = x - 5 \Leftrightarrow ax^2 + (b - 1)x + c + 5 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = -3x + 3 \Leftrightarrow ax^2 + (b + 3)x + c - 3 = 0$$

$$ax^2 + bx + c = 3x - 12 \Leftrightarrow ax^2 + (b - 3)x + c + 12 = 0$$

Ta có hệ phương trình

$$\begin{cases} (b - 1)^2 - 4a(c + 5) = 0 \\ (b + 3)^2 - 4a(c - 3) = 0 \\ (b - 3)^2 - 4a(c + 12) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2 - 2b + 1 - 4ac - 20a = 0(1) \\ b^2 + 6b + 9 - 4ac + 12a = 0(2) \\ b^2 - 6b + 9 - 4ac - 48a = 0(3) \end{cases}$$

Từ (1) và (2) suy ra: $8b + 8 + 32a = 0$

Từ (2) và (3) suy ra: $12b + 60a = 0$

$$\begin{cases} 4a + b = -1 \\ 5a + b = 0 \end{cases}$$

Vậy ta có hệ sau:

$$\Rightarrow a = 1; b = -5$$

Thay lại vào phương trình (1) ta có $c = 4$

$$M = ab + bc = -25$$

Vậy

Câu 4. Cho parabol $(P): y = mx^2 - (4m-1)x + 4m-1$ với $m \neq 0$. Đường thẳng cố định luôn tiếp xúc với parabol (P) là:

A. $y = x + 1$

B. $y = -x + 1$

C. $y = -x - 1$

D. $y = x - 1$

Lời giải

Chọn D

Gọi $d: y = ax + b$ là đường thẳng tiếp xúc với parabol (P)

Khi đó, phương trình hoành độ giao điểm sau luôn có nghiệm kép

$$mx^2 - (4m-1)x + 4m-1 = ax + b \Leftrightarrow mx^2 - (4m-1-a)x + 4m-1-b = 0$$

Ta có: $\Delta = 0, \forall m \neq 0 \Leftrightarrow (4m-1-a)^2 - 4m(4m-1-b) = 0, \forall m \neq 0$

$$\Leftrightarrow [2(a-1) + (1+b)]m + (a-1)^2 = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(a-1) + (1+b) = 0 \\ (a-1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = 1 \end{cases}$$

Vậy, đường thẳng cố định cần tìm là $d: y = x - 1$

Câu 5. Các parabol của họ $(P_m): y = mx^2 + 2(m+1)x + m+1, (m \neq 0)$ luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định có phương trình là:

A. $2x + y + 1 = 0$

B. $2x - y + 1 = 0$

C. $x + 2y + 1 = 0$

D. $x - 2y + 1 = 0$

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$y = mx^2 + 2(m+1)x + m+1 = m(x+1)^2 + 2x+1$$

$$\Rightarrow d: y = 2x + 1$$

Cách 2:

Gọi $d: y = ax + b$ là đường thẳng cần tìm

ycbt $\Leftrightarrow mx^2 + 2(m+1)x + m+1 = ax + b$ có nghiệm kép với mọi $m \neq 0$.

$$\Leftrightarrow mx^2 + (2m + 2 - a)x + m + 1 - b = 0 \text{ có nghiệm kép với mọi } m \neq 0.$$

$$\Delta = (2m + 2 - a)^2 - 4m(m + 1 - b) = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 4 + a^2 + 8m - 4ma - 4a - 4m^2 - 4m + 4bm = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 4m(1 - a + b) + 4 + a^2 - 4a = 0, \forall m \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - a + b = 0 \\ 4 + a^2 - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } d: y = 2x + 1.$$

Câu 6.

$(P_m): y = x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2$ luôn tiếp xúc với đường thẳng Δ cố định. Khi đó Δ cắt (P) tại A, B thì độ dài AB là:

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\Delta_m: y = m^2 + 2mx + x^2 - x^2 - x + 4 \Leftrightarrow y = (x + m)^2 - x^2 - x + 4$$

Xét

Do đó Δ_m luôn tiếp xúc với parabol (P): $y = -x^2 - x + 4$.

$$(P_m): y = x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 \Leftrightarrow y = (x - m)^2 - x + 2$$

(P_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: y = -x + 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$-x^2 - x + 4 = -x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}, y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}), B(-\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow AB = 4$$

Câu 7.

$(P_m): y = x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2$ luôn tiếp xúc với đường thẳng Δ cố định. Khi đó Δ cắt (P) tại A, B thì độ dài AB là:

A. 1.

B. 4.

C. 2.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

$$\Delta_m: y = m^2 + 2mx + x^2 - x^2 - x + 4 \Leftrightarrow y = (x + m)^2 - x^2 - x + 4$$

Xét

Do đó Δ_m luôn tiếp xúc với parabol (P): $y = -x^2 - x + 4$.

$$(P_m): y = x^2 - (2m + 1)x + m^2 + 2 \Leftrightarrow y = (x - m)^2 - x + 2$$

(P_m) luôn tiếp xúc với đường thẳng $\Delta: y = -x + 2$.

Xét phương trình hoành độ giao điểm:

$$-x^2 - x + 4 = -x + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2}, y = 2 - \sqrt{2} \\ x = -\sqrt{2}, y = 2 + \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(\sqrt{2}, 2 - \sqrt{2}), B(-\sqrt{2}, 2 + \sqrt{2})$$

$$\Rightarrow AB = 4$$

VẤN ĐỀ 9. TẬP HỢP ĐIỂM

Câu 1. Cho Parabol $(P): y = -mx^2 + 2m^2x + m^2 - 2m (m \neq 0)$. Quỹ tích đỉnh của Parabol (P) là đường cong (C) cắt trục hoành tại điểm có tọa độ:

- A. $(0; 0), (-2; 0)$. B. $(0; 0), (-2; 0), (1; 0)$.
C. $(-2; 0), (-1; 0), (0; 0)$. D. $(-2; 0), (1; 0)$.

Lời giải

Chọn D

Ta có tọa độ đỉnh I của Parabol là $\begin{cases} x_I = m \\ y_I = -m^3 + 2m^2 + m^2 - 2m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_I = m \\ y_I = m^3 + m^2 - 2m \end{cases}$

$$\Rightarrow y_I = x_I^3 + x_I^2 - 2x_I$$

Do $m \neq 0 \Rightarrow x_I \neq 0$

Suy ra quỹ tích đỉnh của Parabol (P) là $(C): y = x^3 + x^2 - 2x$ với $(x \neq 0)$.

Ta có $(C) \cap Ox$: Phương trình $x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \\ x = 1 \end{cases}$ do $x \neq 0$ nên

$$(C) \cap Ox = \{(-2; 0), (1; 0)\}$$

Câu 2. Cho Parabol (P) có phương trình $y = 4x^2 + 1$. Gọi I là đỉnh của (P) ; A, B là hai điểm phân biệt thuộc (P) và không trùng với I sao cho IA vuông góc với IB . Biết rằng quỹ tích trung điểm N của đoạn AB khi A, B thay đổi là một parabol có phương trình $y = mx^2 + n$. Tính $P = m^2 + 16n^2$

- A. $P = 98$ B. $P = 89$ C. $P = 97$ D. $P = 79$

Lời giải

Chọn B

Gọi $A(a; 4a^2 + 1)$ nằm trên (P) , đỉnh $I(0; 1)$.

Do IA qua $I(0; 1)$ và $A(a; 4a^2 + 1)$ nên IA có phương trình $y = 4ax + 1$

Đường thẳng IB vuông góc với IA nên phương trình IB có dạng $y = -\frac{1}{4a}x + 1$. Do đó ta có phương trình đường thẳng $IB: x + 4ay - 4a = 0$

Tọa độ của B là nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} y = 4x^2 + 1 \\ x + 4ay - 4a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow B\left(\frac{-1}{16a}; \frac{1}{64a^2} + 1\right)$

N là trung điểm của AB , suy ra $N\left(\frac{a}{2} - \frac{1}{32a}; 2a^2 + \frac{1}{128a^2} + 1\right)$

Nhận xét: Theo giả thiết quỹ tích N là một parabol có dạng $y = mx^2 + n$

Từ đó ta xét $x_N^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{32a}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{1024a^2}$. Do đó

$$y_N = 2a^2 + \frac{1}{128a^2} + 1 = 8\left(\frac{a^2}{4} - \frac{1}{32} + \frac{1}{1024a^2}\right) + \frac{5}{4}$$

Vậy quỹ tích của điểm N là Parabol $y = 8x^2 + \frac{5}{4}$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 8 \\ n = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow P = 89$$

.Do đó chọn B

Câu 3: Biết rằng đường thẳng $y = m\kappa$ luôn cắt parabol $y = 2x^2 + x - 3$ tại hai điểm phân biệt A và B, khi đó quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng AB là:

A. đường parabol $y = 4x^2 + 1$.

B. đường parabol $y = 4x^2 + x$.

C. đường thẳng $y = 4x + 1$.

D. đường thẳng $y = 4x + 4$.

Lời giải

Chọn B

Phương trình hoành độ giao điểm của hai đường: $2x^2 + x - 3 = m\kappa \Leftrightarrow 2x^2 + (1-m)x - 3 = 0$

Vì $\Delta = m^2 - 2m + 25$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 .

$$\begin{cases} x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{m-1}{4} \\ y = m\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4x + 1 \\ y = m\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 4x + 1 \\ y = 4x^2 + x \end{cases}$$

Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng AB là:

Do đó, quỹ tích trung điểm của đoạn thẳng AB là đường parabol $y = 4x^2 + x$.

VẤN ĐỀ 10 PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI

Câu 1. Gọi x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình $x^2 - 3x + a = 0$; x_3, x_4 là hai nghiệm của phương trình

$x^2 - 12x + b = 0$ và biết rằng $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3}$, b dương. Hỏi a thuộc khoảng nào dưới đây?

A. $(-2; 1)$.

B. $(-1; 3)$.

C. $(2; 6)$.

D. $(3; 7)$.

Lời giải

Chọn B

$$\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = k, \quad k \neq 0$$

Đặt $\frac{x_2}{x_1} = \frac{x_3}{x_2} = \frac{x_4}{x_3} = k, \quad k \neq 0$. Khi đó

Áp dụng hệ thức Viet cho hai phương trình đã cho, ta được

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3 \\ x_3 + x_4 = 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (k+1)x_1 = 3 \\ (k+1)x_3 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (k+1)x_1 = 3 \\ (k+1)k^2x_1 = 12 \end{cases} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} k = 2 \\ k = -2 \end{cases}$$

Mặt khác $b = x_3 \cdot x_4 = kx_3^2 > 0 \Rightarrow k > 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x_1 = 1, a = kx_1^2 = 2$.

Câu 2: Cho phương trình bậc hai $px^2 + qx + r = 0$ có hai nghiệm α, β . Tính giá trị biểu thức $p^2(\alpha - \beta)^2$.

A. $q^2 - 4p$.

B. $q^2 - 4rp$.

C. $q^2 - 4r$.

D. $q^2 - 2p$.

Lời giải

Chọn B.

$$\alpha + \beta = -\frac{p}{q}, \alpha\beta = \frac{r}{q}$$

Theo định lí Vi-et

$$p^2(\alpha - \beta)^2 = p^2\left([\alpha + \beta]^2 - 4\alpha\beta\right) = p^2\left(\left[-\frac{q}{p}\right]^2 - 4\frac{r}{p}\right) = q^2 - 4rp$$

Ta có

Câu 3: Gọi x_1, x_2 là 2 nghiệm của phương trình $2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0$. Tìm giá trị lớn nhất của $A = |x_1x_2 - 2(x_1 + x_2)|$.

A. 4.

B. 9.

C. 8.

D. $\frac{9}{2}$

Lời giải

Chọn D

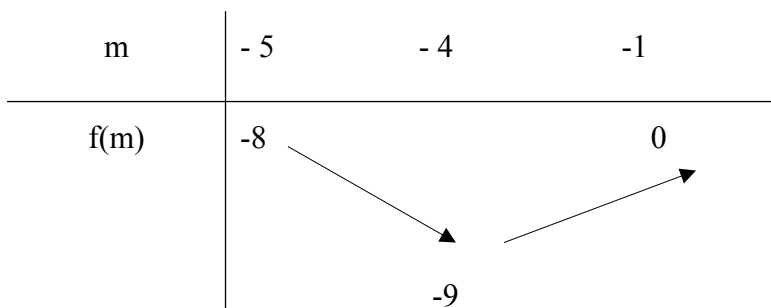
$$PT: 2x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m + 3 = 0(1)$$

Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' = -(m^2 + 6m + 5) \geq 0 \Leftrightarrow -5 \leq m \leq -1$

Theo hệ thức viét
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -(m+1) \\ x_1x_2 = \frac{1}{2}(m^2 + 4m + 3) \end{cases}$$

Ta có : $A = \frac{1}{2}|m^2 + 8m + 7|$

Xét hàm số $f(m) = m^2 + 8m + 7$ có BBT trên $[-5; -1]$ là:



$$\Rightarrow \max_{[-5; -1]} |f(m)| = 9 \Rightarrow \max A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow m = -4$$

