

BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

VẬN DỤNG VÀ VẬN DỤNG CAO

PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN OXYZ

Câu 1: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua điểm M và cách gốc tọa độ O một khoảng lớn nhất, mặt phẳng (P) cắt các trục tọa độ tại các điểm A, B, C . Tính thể tích khối chóp $O.ABC$.

A. $\frac{1372}{9}$.

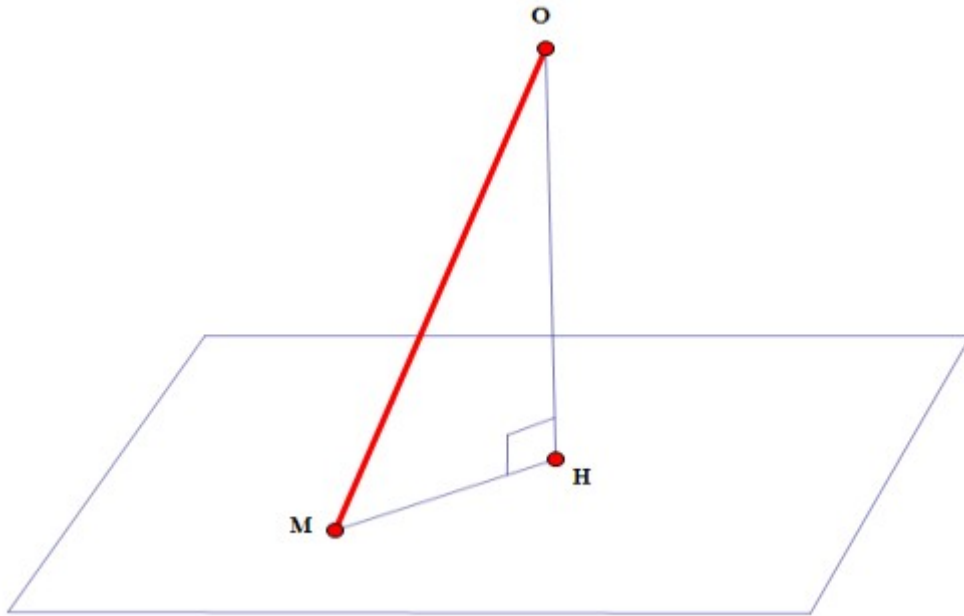
B. $\frac{686}{9}$.

C. $\frac{524}{3}$.

D. $\frac{343}{9}$.

Lời giải

Chọn B.



Gọi H là hình chiếu của O lên mp $^{(P)}$

Tam giác OHM có $OH \leq OM, \quad \forall H$.

Khi đó $d(O, (P)) = OH$ lớn nhất khi $M \equiv H$, hay $OM \perp (P)$.

Mp $^{(P)}$ đi qua M và nhận $\overrightarrow{OM} = (1; 2; 3)$ làm véc tơ pháp tuyến,

phương trình (P) : $x + 2y + 3z - 14 = 0$.

(P) cắt Ox ; Oy ; Oz lần lượt tại $A(14;0;0)$, $B(0;7;0)$, $C\left(0;0;\frac{14}{3}\right)$

Thể tích $V_{O.ABC} = \frac{868}{9}$.

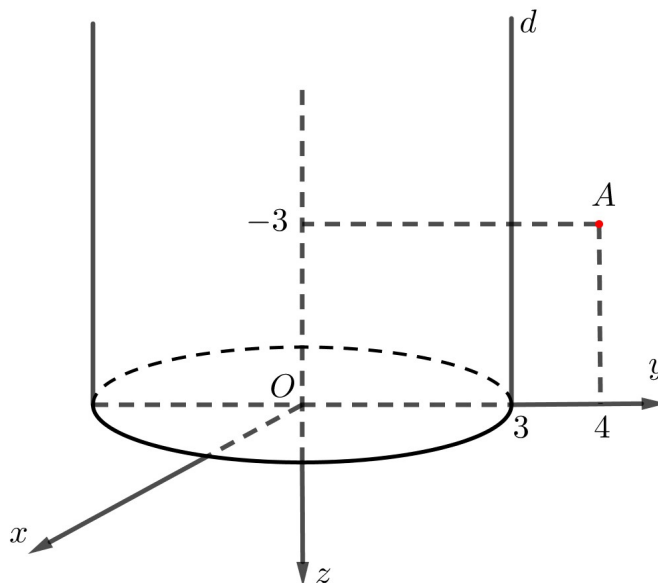
Câu 2 (ĐỀ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2019): Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(0;4;-3)$. Xét đường thẳng d thay đổi, song song với trục Oz và cách trục Oz một khoảng bằng 3. Khi khoảng cách từ A đến d nhỏ nhất, d đi qua điểm nào dưới đây?

- A. $P(-3;0;-3)$ B. $M(0;-3;-5)$ C. $N(0;3;-5)$ D. $Q(0;5;-3)$

Lời giải

Chọn C

Ta có mô hình minh họa cho bài toán sau:



Ta có $d(A; d)_{\min} = |d(A; Oz) - d(d; Oz)| = 1$.

Khi đó đường thẳng d đi qua điểm cố định $(0;3;0)$ và do $d // Oz \Rightarrow \vec{u}_d = \vec{k} = (0;0;1)$ làm vector chỉ

phương của $d \Rightarrow d \begin{cases} x=0 \\ y=3 \\ z=t \end{cases}$. Dựa vào 4 phương án ta chọn đáp án C. $N(0;3;-5)$.

Câu 3 (ĐỀ THI THPT QUỐC GIA NĂM 2019): Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + (z + \sqrt{2})^2 = 3$. Có tất cả bao nhiêu điểm $A(a;b;c)$ (a, b, c là các số nguyên) thuộc mặt phẳng (Oxy) sao cho có ít nhất hai tiếp tuyến của (S) đi qua A và hai tiếp tuyến đó vuông góc với nhau?

A. 12.

B. 8.

C. 16.

D. 4.

Lời giải

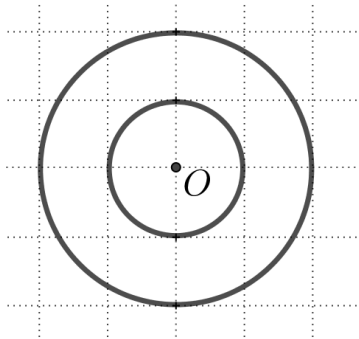
Chọn A

Do $A(a;b;c)$ thuộc mặt phẳng (Oxy) nên $A(a;b;0)$.

Nhận xét: Nếu từ A kẻ được ít nhất 2 tiếp tuyến vuông góc đến mặt cầu khi và chỉ khi

$$R \leq OA \leq R\sqrt{2} \Leftrightarrow 3 \leq a^2 + b^2 + 2 \leq 6 \Leftrightarrow 1 \leq a^2 + b^2 \leq 4.$$

Tập các điểm thỏa đề là các điểm nguyên nằm trong hình vành khăn (kể cả biên), nằm trong mặt phẳng (Oxy) , tạo bởi 2 đường tròn đồng tâm $O(0;0;0)$ bán kính lần lượt là 1 và 2.



Nhìn hình vẽ ta có 12 điểm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 4: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng:

$$(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}, \quad (d_2): \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}, \quad (d_3): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}, \quad (d_4): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}.$$

Số đường thẳng trong không gian cắt cả bốn đường thẳng trên là:

A. 0.

B. 2.

C. Vô Số

D. 1.

Hướng dẫn giải

Chọn D.

Dễ thấy $d_1 // d_2$ do đó có một mặt phẳng (P) duy nhất chứa $d_1; d_2$

$$(P): x + y + z - 1 = 0$$

Mặt khác ta có d_3 chéo d_4 lần lượt cắt (P) tại $A(1;-1;1); B(0;1;0)$

Do đó tồn tại một đường thẳng duy nhất qua $A; B$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 5: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 4z - 2 = 0$, mặt phẳng $(\alpha): x + 4y + z - 11 = 0$. Gọi (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của $\vec{v} = (1; 6; 2)$ và (P) tiếp xúc với (S) . Lập phương trình mặt phẳng (P) .

- A. $2x - y + 2z - 2 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.
- B. $x - 2y + 2z + 3 = 0$ và $x - 2y + z - 21 = 0$.
- C. $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.
- D. $2x - y + 2z + 5 = 0$ và $2x - y + 2z - 2 = 0$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -3; 2)$ và bán kính là $R = 4$.

Mặt phẳng (α) có VTPT là $\vec{n}_1 = (1; 4; 1)$.

Vì (P) là mặt phẳng vuông góc với (α) , (P) song song với giá của $\vec{v} = (1; 6; 2)$ nên (P) có cặp VTCP là $\vec{n}_1$ và $\vec{v}$, suy ra (P) có VTPT là $\vec{n} = [\vec{n}_1, \vec{v}] = (2; -1; 2)$.

Phương trình mp (P) có dạng $2x - y + 2z + D = 0$. Vì (P) tiếp xúc với (S) nên ta có

$$d(I; (P)) = R$$

$$\Leftrightarrow \frac{|9 + D|}{3} = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} D = 3 \\ D = -21 \end{cases}$$

Vậy có hai mặt phẳng thỏa mãn là $2x - y + 2z + 3 = 0$ và $2x - y + 2z - 21 = 0$.

Câu 6: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, phương trình tổng quát của mp (α) qua hai điểm $A(2; -1; 4)$, $B(3; 2; -1)$ và vuông góc với mp $(\beta): x + y + 2z - 3 = 0$ là:

- A. $11x + 7y - 2z - 21 = 0$.
- B. $11x + 7y + 2z + 21 = 0$.
- C. $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.
- D. $11x - 7y + 2z + 21 = 0$.

Câu 7: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A, B sao cho thiết diện

của mặt phẳng (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

- A. 3. B. -3. C. 0. D. -2.

Lời giải

Chọn B

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 4$.

Vì $IA = \sqrt{5} < R$ nên điểm A nằm bên trong mặt cầu. Suy ra (P) luôn cắt mặt cầu. Gọi r là bán

kinh đường tròn giao tuyến, ta có $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ với d là khoảng cách từ I đến mặt phẳng (P) .

Diện tích hình tròn thiết diện nhỏ nhất khi và chỉ khi bán kính r nhỏ nhất, hay d lớn nhất.

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng AB ta có d lớn nhất khi $d = IH$ tức IH vuông góc với (P) .

$$AB: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

Phương trình đường thẳng

Gọi $H(1-t; t; 2)$. $\overrightarrow{IH} = (-t; t-2; -1)$.

$IH \perp AB \Leftrightarrow t + (t-2) = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Suy ra $H(0; 1; 2)$.

Mặt phẳng (P) nhận $\overrightarrow{IH}$ làm vector pháp tuyến và đi qua điểm A nên có phương trình

$$-(x-1) - y - (z-2) = 0 \Leftrightarrow -x - y - z + 3 = 0.$$

Vậy $a + b + c = -3$.

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(0; 2; 0)$, $C(0; 0; 3)$, $D(2; -2; 0)$. Có tất cả bao nhiêu mặt phẳng phân biệt đi qua 3 trong 5 điểm O , A , B , C , D ?

- A. 7. B. 5. C. 6. D. 10.

Lời giải

Chọn B

Mặt phẳng (ABC) có phương trình là $\frac{x}{1} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1 \Leftrightarrow 6x + 3y + 2z - 6 = 0$, do đó $D \in (ABC)$.

Lại có A là trung điểm BD .

Ta có (Oxy) chứa các điểm O, A, B, D .

(Oyz) chứa các điểm O, B, C ;

(Oxz) chứa các điểm O, A, C ;

(ABC) chứa các điểm A, B, C, D .

(OCD) chứa các điểm O, C, D .

Vậy có 5 mặt phẳng phân biệt thỏa mãn bài toán.

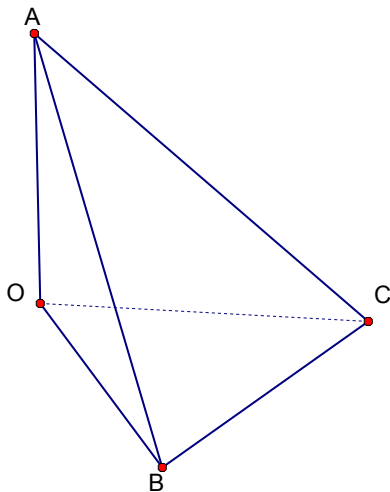
Câu 9: Xét tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc. Gọi α, β, γ lần lượt là góc giữa các đường thẳng OA, OB, OC với mặt phẳng (ABC) . Khi đó giá trị nhỏ nhất của biểu thức $M = (3 + \cot^2 \alpha)(3 + \cot^2 \beta)(3 + \cot^2 \gamma)$ là

A. Số khác.

B. $48\sqrt{3}$.

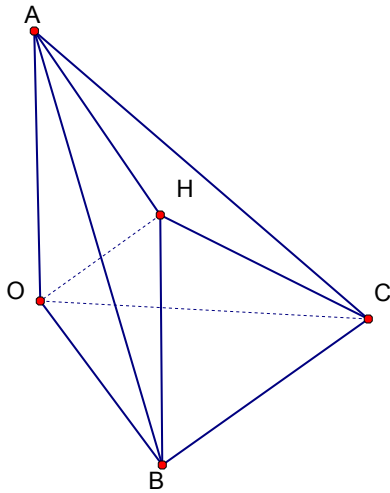
C. 48.

D. 125.



Lời giải

Chọn D



Ta có $\sin^2 \alpha = \sin^2 \angle HAO = \frac{OH^2}{OA^2}$, tương tự $\sin^2 \beta = \frac{OH^2}{OB^2}$; $\sin^2 \gamma = \frac{OH^2}{OC^2}$

Nên $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma = OH^2 \cdot \left(\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \right) = 1$

Và $M = \frac{(2\sin^2 \alpha + 1)(2\sin^2 \beta + 1)(2\sin^2 \gamma + 1)}{\sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}$; Áp dụng BĐT cổ si, ta có

$$2\sin^2 \alpha + 1 = \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma \geq 5 \sqrt{\sin^6 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma}$$

Tương tự, ta được $(2\sin^2 \alpha + 1)(2\sin^2 \beta + 1)(2\sin^2 \gamma + 1) \geq 125 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma$

Suy ra $M \geq 125$. Dấu bằng xảy ra khi $OA = OB = OC$.

Câu 10: Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x - y + 2z + 1 = 0$, $(Q): 2x + y + z - 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục hoành, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

A. $r = \sqrt{3}$. B. $r = \sqrt{2}$. C. $r = \sqrt{\frac{3}{2}}$. D. $r = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

* Gọi I là tâm của mặt cầu (S) . Do $I \in Ox$ nên ta có $I(a; 0; 0)$.

* Do (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính 2 nên ta có:

$$4 = R^2 - [d(I; (P))]^2 \Leftrightarrow 4 = R^2 - \frac{(a+1)^2}{6} \Rightarrow R^2 = 4 + \frac{(a+1)^2}{6} \quad (1)$$

* Do (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r nên ta có:

$$r^2 = R^2 - [d(I; (Q))]^2 \Leftrightarrow r^2 = R^2 - \frac{(2a-1)^2}{6} \quad (2)$$

* Từ (1) và (2) ta có:

$$r^2 = 4 + \frac{(a+1)^2}{6} - \frac{(2a-1)^2}{6} \Leftrightarrow -3a^2 + 6a + 24 - 6r^2 = 0 \Leftrightarrow -a^2 + 2a + 8 - 2r^2 = 0 \quad (3)$$

* Để có duy nhất một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu điều kiện là phương trình (3) có duy nhất một nghiệm a với $r > 0$ nên điều kiện là:

$$\Delta' = 9 - 2r^2 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Câu 11: Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$, $(Q): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục tung, đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

A. $r = \sqrt{3}$. B. $r = \sqrt{11}$. C. $r = \sqrt{\frac{11}{3}}$! D. $r = \frac{11\sqrt{3}}{3}$.

Câu 12: Trong không gian $Oxyz$, cho các mặt phẳng $(P): x + y - 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y + z + 1 = 0$. Gọi (S) là mặt cầu có tâm thuộc trục Oz , đồng thời (S) cắt mặt phẳng (P) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính 2 và (S) cắt mặt phẳng (Q) theo giao tuyến là một đường tròn có bán kính r . Xác định r sao cho chỉ có đúng một mặt cầu (S) thỏa mãn yêu cầu.

A. $r = \sqrt{7}$. B. $r = \sqrt{\frac{7}{2}}$! C. $r = 7\sqrt{2}$. D. $r = \frac{7\sqrt{2}}{2}$.

Câu 13: Trong không gian tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0$ và đường thẳng Δ là giao tuyến của hai mặt phẳng $(\alpha): x + 2y - 2z - 4 = 0$ và $(\beta): 2x - 2y - z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt A, B thỏa mãn $AB = 8$ khi:

A. $m = 12$. **B.** $m = -12$. **C.** $m = -10$. **D.** $m = 5$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có
$$\begin{cases} x + 2y - 2z - 4 = 0 \\ 2x - 2y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

Phương trình tham số của Δ là
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t \\ z = -3 + 2t \end{cases}$$

$A \in (\Delta) \Rightarrow A(-2 + 2t; t; -3 + 2t)$

$A \in (S) \Rightarrow (-2 + 2t)^2 + t^2 + (-3 + 2t)^2 + 4(-2 + 2t) - 6t + m = 0 \quad (*)$

$(*) \Leftrightarrow 9t^2 - 18t + 5 + m = 0$

Phương trình $(*)$ có hai nghiệm phân biệt khi $\Delta' = 36 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 4$.

Khi đó $A(-2 + 2t_1; t_1; -3 + 2t_1), B(-2 + 2t_2; t_2; -3 + 2t_2)$

$t_1 + t_2 = 2, t_1 t_2 = \frac{5+m}{9}$

$AB = 8 \Leftrightarrow AB^2 = 64$. Suy ra $9(t_2 - t_1)^2 = 64 \Leftrightarrow 9[(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2] = 64$

$\Rightarrow 9 \cdot \left[2^2 - 4 \left(\frac{5+m}{9} \right) \right] = 64 \Leftrightarrow m = -12$

Cách 2:

Mặt cầu (S) có tâm $I(-2; 3; 0)$, $R = \sqrt{13 - m}$, $m < 13$.

Đường thẳng (Δ) qua $M_0(-2; 0; -3)$, có VTCP $\vec{u} = (2; 1; 2)$

$$d = d(I; (\Delta)) = \frac{\left| \overrightarrow{IM_0}; \vec{u} \right|}{|\vec{u}|} = 3$$

$$R^2 = \frac{AB^2}{4} + d^2 \Leftrightarrow 13 - m = 16 + 9 \Leftrightarrow m = -12(n)$$

Yêu cầu đề bài tương đương

Câu 14: Trong không gian tọa độ O_{xyz} cho các điểm $A(1;5;0), B(3;3;6)$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2}$. Gọi $M(a;b;c) \in \Delta$ sao cho chu vi tam giác MAB đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $T = a + b + c$?

A. $T = 2$.

B. $T = 3$.

C. $T = 4$.

D. $T = 5$.

Lời giải

Chọn B

$$M(a;b;c) \in \Delta \rightarrow M(2t-1; -t+1; 2t)$$

Ta có

$$C = MA + MB + AB = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} + 2\sqrt{11}$$

Từ đó ta có:

$$C(t) = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} + 2\sqrt{11} \Rightarrow C'(t) = \frac{9}{\sqrt{9t^2 + 20}} + \frac{9t - 18}{\sqrt{9t^2 - 36t + 56}} = 0 \Rightarrow t = 1$$

Lập BBT ta có: $\min C(t) = C(1) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 0; 2)$

Đề xuất: Đánh giá $f(t) = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56}$ như sau

$$f(t) = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9(t-2)^2 + 20}$$

Trong hệ trục Oxy , chọn $\vec{u} = (3t; 2\sqrt{5})$, $\vec{v} = (-3(t-2); 2\sqrt{5})$, $\vec{u} + \vec{v} = (6; 4\sqrt{5})$. Khi đó $f(t) = |\vec{u}| + |\vec{v}| \geq |\vec{u} + \vec{v}| = \sqrt{36 + 20} = 2\sqrt{14}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $\vec{u}, \vec{v}$ cùng hướng $\Leftrightarrow \frac{3t}{-3(t-2)} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1; 0; 2)$

Câu 15: Trong không gian O_{xyz} , biết mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$ đồng thời (P) cắt các trục tọa độ Ox, Oy theo thứ tự tại hai điểm M, N (M, N đều không trùng với

gốc tọa độ) thỏa mãn $OM=ON$. Biết mặt phẳng (P) có hai phương trình là $x+b_1y+c_1z+d_1=0$ và $x+b_2y+c_2z+d_2=0$. Tính đại lượng $T=b_1+b_2$.

A. $T=2$.

B. $T=0$.

C. $T=4$.

D. $T=-4$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi phương trình mặt phẳng (P) là: $x+by+cz+d=0$

($b \neq 0$ do (P) cắt Oy tại điểm N khác O)

(P) đi qua hai điểm $A(1;1;1)$, $B(0;2;2)$ nên ta có các phương trình:

$$\begin{cases} 1+b+c+d=0 \\ 2b+2c+d=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b+c=1 \\ d=-2 \end{cases}$$

Mặt phẳng (P) có phương trình dạng: $x+by+cz-2=0$. (P) cắt Ox, Oy lần lượt tại

$$M(2;0;0), N(0;\frac{2}{b};0) \quad OM=ON \Leftrightarrow 2=\left|\frac{2}{b}\right| \Leftrightarrow b=\pm 1$$

Các mặt phẳng (P) tìm được có phương trình: $x+y-2=0$ và $x-y+2z-2=0$.

Vậy $T=b_1+b_2=0$.

Câu 16: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;2;-4), B(-3;5;2)$. Tìm tọa độ điểm M sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

A. $M(-1;3;2)$

B. $M(-2;4;0)$

C. $M(-3;7;-2)$

D. $M(\frac{3}{7}; \frac{7}{2}; -\frac{11}{2})$

Lời giải

Chọn B

Gọi $M(x;y;z)$

$$\text{Khi đó: } AM^2 = x^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2$$

$$BM^2 = (x+3)^2 + (y-5)^2 + (z-2)^2$$

Theo bài ra:

$$\begin{aligned} MA^2 + 2MB^2 &= x^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 + 2(x+3)^2 + 2(y-5)^2 + 2(z-2)^2 \\ &= 3(x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 8y + 32) = 3\left(\frac{4}{3}x+2\right)^2 + (y-4)^2 + z^2 + 12 \geq 3 \cdot 12 = 36 \end{aligned}$$

$$\left(MA^2 + 2MB^2 \right)_{\min} = 36 \hat{U} \begin{cases} x = -2 \\ y = 4 \\ z = 0 \end{cases}$$

Vậy

Vậy $M(-2; 4; 0)$ thỏa ycbt.

Câu 17: Trong không gian với hệ tọa độ , cho các điểm $S(0; 0; 1)$, $P(1; 1; 1)$ và $M(m; 0; 0)$, $N(0; n; 0)$ thay đổi sao cho $m + n = 1$ và $m > 0, n > 0$. Biết rằng luôn tồn tại một mặt cầu cố định qua P và tiếp xúc với mặt phẳng (SMN) . Tính bán kính của mặt cầu đó.

A. $\sqrt{2}$.

B. 2.

C. 1.

D. $\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình (SMN) : $\frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{1} = 1 \Leftrightarrow nx + my + mmz - mn = 0$.

Do $m + n = 1$ nên suy ra $nx + (1 - n)y + n(1 - n)z - n(1 - n) = 0$

Gọi $I(a; b; c)$ và R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S) cố định đi qua P và tiếp xúc với mặt phẳng (SMN) .

Khi đó, ta có $IP = \sqrt{(1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (1 - c)^2} = R^2$ (*)

và $d(I; (SMN)) = R \Leftrightarrow \frac{|na + (1 - n)b + nc(1 - n) - n(1 - n)|}{\sqrt{n^2 + m^2 + n^2 m^2}} = R$

$\Leftrightarrow \frac{|na + (1 - n)b + nc(1 - n) - n(1 - n)|}{1 - (1 - n)n} = R$

$\Leftrightarrow |(1 - c)n^2 + (a - b + c - 1)n + b| = R(1 - n + n^2)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - c)n^2 + (a - b + c - 1)n + b = R(1 - n + n^2) \end{cases} \quad (1)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (1 - c)n^2 + (a - b + c - 1)n + b = R(-1 + n - n^2) \end{cases} \quad (2)$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - c = R \\ a - b + c - 1 = -R \\ b = R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 1 - R \\ b = R \\ a = R \end{cases}$

Khi đó (*) $\Leftrightarrow \sqrt{2(1 - R)^2 + R^2} = R^2 \Leftrightarrow R = 1$

(2) làm tương tự.

Vậy $R = 1$.

Câu 18: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho mặt phẳng

$(P): 3mx + 5\sqrt{1-m^2}y + 4mz + 20 = 0$. Biết rằng khi m thay đổi trên đoạn $[-1; 1]$ thì mặt phẳng (P) luôn tiếp xúc với một mặt cầu (S) cố định. Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A. $R = \sqrt{5}$.

B. $\sqrt{3}$.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Mặt phẳng (P) có một véc tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (3m; 5\sqrt{1-m^2}; 4m)$.

Gọi $I(a; b; c)$ và R lần lượt là tâm và bán kính của mặt cầu (S) .

$$d(I; (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|3ma + 5\sqrt{1-m^2}b + 4mc + 20|}{\sqrt{9m^2 + 25(1-m^2) + 16m^2}} = R$$

Khi đó, ta có

$$\Leftrightarrow |3ma + 5\sqrt{1-m^2}b + 4mc + 20| = 5R$$

Do mặt cầu (S) cố định và tiếp xúc với (P) nên $|3ma + 5\sqrt{1-m^2}b + 4mc + 20| = k$ không đổi với mọi m . Suy ra (S) có tâm $I(0; 0; 0)$. Khi đó $R = d(I; (P)) = 4$.

Câu 19: Trong không gian với hệ toạ độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$ thỏa mãn $a + b + c = 4$ và. Biết a, b, c thay đổi thì tâm I mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 1; -1)$ đến mặt phẳng (P) .

A. $d(M; (P)) = \sqrt{3}$. B. $d(M; (P)) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $d(M; (P)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $d(M; (P)) = 0$.

Lời giải

Chọn C.

Phương trình mặt cầu (S) có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2ny - 2pz + d = 0$.

Do (S) đi qua O, A, B, C nên

$$\begin{cases} a^2 - 2ma = 0 \\ b^2 - 2nb = 0 \\ c^2 - 2pc = 0 \\ d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{a}{2} \\ n = \frac{b}{2} \\ p = \frac{c}{2} \\ d = 0 \end{cases}$$

Suy ra (S) có tâm $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$ và $R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2}$.

Mặt khác ta luôn có $\frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} - 2 = 0, \forall a, b, c > 0$ thỏa $a + b + c = 4$

Do đó $I \in (P): x + y + z - 2 = 0$ cố định.

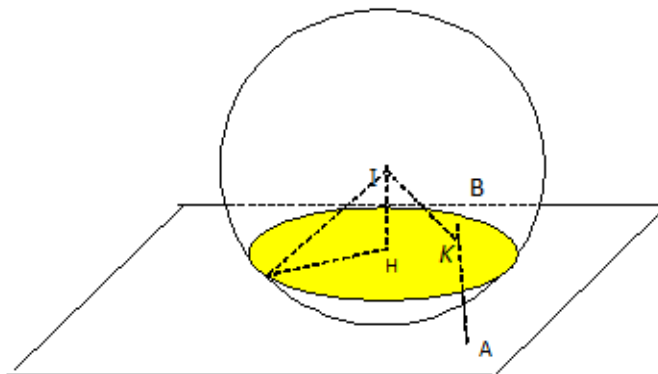
Vậy $d(M; (P)) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 20: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6), B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

A. $T = 4$. **B.** $T = 2$. **C.** $T = 3$. **D.** $T = 5$.

Lời giải:

Chọn C



(S) có tâm $I(1; 2; 3); R = 5; \overline{AB}(-3; 3; -6)$.

Vì B nằm trong mặt cầu nên gọi K là hình chiếu vuông góc của I lên AB thì K cũng nằm trong mặt cầu. Do đó (P) luôn cắt (S) theo giao tuyến là một đường tròn bán kính r .

$$AB \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases} \text{ nên } K(t; 1-t; 2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK} = (t-1; -t-1; 2t-3)$$

Vì $IK \perp AB$ suy ra $\overrightarrow{IK} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = 1$. Do đó $K(1; 0; 2)$.

Ta lại có: $r^2 = 25 - IH^2$ nên để r nhỏ nhất thì IH lớn nhất, mà $IH \leq IK$ nên mp (P) cần tìm nhận $\overrightarrow{IK}(0; -2; -1)$ làm VTPT. Vì $IK \perp AB$ nên $AB \subset (P)$. Vậy phương trình (P) : $2y + z - 2 = 0 \Rightarrow T = 3$.

Câu 21: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và hai điểm $A(1; 0; 2), B(-1; 2; 2)$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là đường tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$.

- A. $T = 3$. B. $T = -3$. C. $T = 0$. D. $T = -2$.

Lời giải

Chọn B

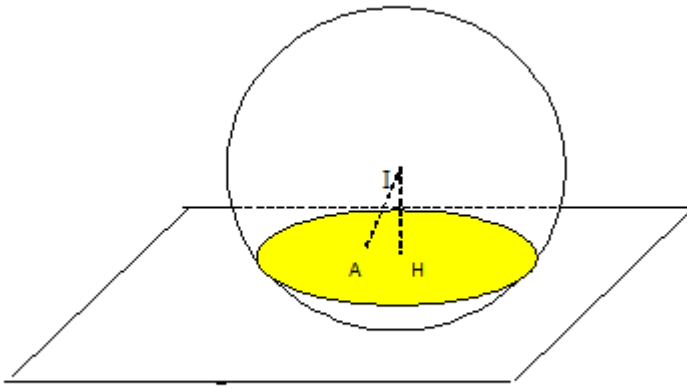
Mặt cầu có tâm $I(1, 2, 3); R = 4$. Ta có $IA = IB = \sqrt{5} < R$. Tương tự bài trên ta có $K(0; 1; 2)$ là trung điểm AB nên mp $(P): -x - y - z + 3 = 0$. Chọn **B**.

Câu 22: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$, điểm $A(0, 0, 2)$. Phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và cắt mặt cầu (S) theo thiết diện là đường tròn (C) có diện tích nhỏ nhất?

- A. $(P): x - 2y + 3z - 6 = 0$ B. $(P): x + 2y + 3z - 6 = 0$
C. $(P): 3x + 2y + 2z - 4 = 0$ D. $(P): x + 2y + z - 2 = 0$

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu có tâm $I(1, 2, 3); R = 3$. Ta có $\overline{IA}(-1; -2; -1) \Rightarrow IA = \sqrt{6} < R$. Mặt khác $IH \leq IA$ nên bán kính của đường tròn giao tuyến min khi $H \equiv A$. Do đó mp cần tìm nhận $\overline{IA}$ làm VTPT và qua $A(0; 0; 2)$ có dạng: $x + 2y + z - 2 = 0$.

Câu 23: Trong không gian hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; -2; 6), B(0; 1; 0)$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 25$. Mặt phẳng $(P): ax + by + cz - 2 = 0$ đi qua A, B và cắt (S) theo giao tuyến là hình tròn có bán kính nhỏ nhất. Tính $T = a + b + c$:

A. $T = 3$

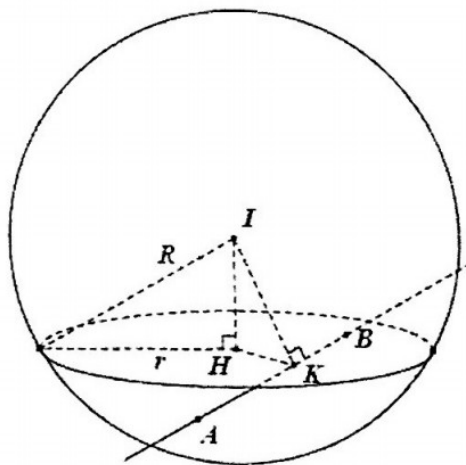
B. $T = 5$

C. $T = 2$

D. $T = 4$

Lời giải

Chọn. A.



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ bán kính $R = 5$.

Mặt phẳng (P) có vtpt $\vec{n}_p = (a, b, c), (a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

Do $B(0;1;0) \in (P): b-2=0 \Leftrightarrow b=2$

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-3;3;-6) = -3(1;-1;2)$, phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x=t \\ y=1-t, t \in \mathbb{R} \\ z=2t \end{cases}$.

Gọi r là bán kính của đường tròn giao tuyến, K là hình chiếu của I trên AB , H là hình chiếu vuông góc của I lên mặt phẳng (P) .

Ta có: $K \in AB \Rightarrow K(t;1-t;2t) \Rightarrow \overrightarrow{IK}(t-1;-t-1;2t-3)$

$$IK \perp AB \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{IK} = 0 \Rightarrow t=1 \Rightarrow \overrightarrow{IK}(0;-2;-1)$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - d^2(I, (P))} = \sqrt{25 - IH^2}$$

Ta có: r đạt min thì IH đạt max.

Mà $IH \leq IK \Rightarrow IH_{\max} \Leftrightarrow H \equiv K \Rightarrow (P) \perp IK \Rightarrow \overrightarrow{n_P}$ và $\overrightarrow{IK}$ cùng phương

$$\Rightarrow \overrightarrow{n_P} = k\overrightarrow{IK} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=-2k=2 \\ c=-k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ k=-1 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=2 \\ c=1 \end{cases}$$

Câu 24: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): 2x - y + z - 10 = 0$, điểm

$A(1;3;2)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=-2+2t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$. Tìm phương trình đường thẳng Δ cắt (P) và d lần lượt tại hai điểm M và N sao cho A là trung điểm của cạnh MN .

A. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+3}{-1}$.

B. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$.

C. $\frac{x-6}{7} = \frac{y-1}{4} = \frac{z+3}{-1}$.

D. $\frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{-1}$.

Lời giải

Chọn B.

Δ cắt d tại $N(-2+2t;1+t;1-t)$. Ta có A là trung điểm của cạnh MN nên $M(4-2t;5-t;3+t)$

Vì $M \in (P)$ nên ta có: $2(4-2t) - (5-t) + (3+t) - 10 = 0 \Rightarrow t = -2$

Suy ra: $M(8; 7; 1)$ và $N(-6; -1; 3) \Rightarrow$ đường thẳng Δ là đường thẳng đi qua M và N

$$\Rightarrow \text{Phương trình } \Delta \text{ là: } \frac{x+6}{7} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-3}{-1}$$

Câu 25: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ và điểm $A(1; -1; -3)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-3}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{2}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{1}$.

Câu 26: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(2; 1; 0)$ và đường thẳng d có phương trình $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$. Phương trình của đường thẳng Δ đi qua điểm M cắt và vuông góc với đường thẳng d là:

A. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

B. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z}{2}$.

C. $\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z}{2}$.

D. $\frac{x-2}{-3} = \frac{-y-1}{-4} = \frac{z}{-2}$.

Câu 27: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$ và $C(2; -1; 2)$. Biết mặt phẳng qua B , C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ có một vector pháp tuyến là $(10; a; b)$. Tổng $a+b$ là

A. -2 .

B. 2 .

C. 1 .

D. -1 .

Lời giải

Chọn B

Phân tích: Nội dung chính của câu hỏi này là tìm tọa độ tâm của mặt cầu nội tiếp tứ diện.

Phương trình (OAB) là: $-y + 2z = 0$.

Phương trình (OAC) là: $2y + z = 0$.

Phương trình (OBC) là: $x - z = 0$.

Phương trình (ABC) là: $5x + 3y + 4z - 15 = 0$.

Gọi $I(a'; b'; c')$ là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$.

Do đó:

I nằm cùng phía với A đối với (OBC) suy ra: $(a' - c') > 0$.

I nằm cùng phía với B đối với (OAC) suy ra: $(2b' + c') > 0$.

I nằm cùng phía với C đối với (OAB) suy ra: $(-b' + 2c') > 0$.

I nằm cùng phía với O đối với (ABC) suy ra: $(5a' + 3b' + 4c' - 15) < 0$.

Suy ra:

$$\begin{cases} d(I, (OAB)) = d(I, (OAC)) \\ d(I, (OAB)) = d(I, (OBC)) \\ d(I, (OAB)) = d(I, (ABC)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|-b' + 2c'|}{\sqrt{5}} = \frac{|2b' + c'|}{\sqrt{5}} \\ \frac{|-b' + 2c'|}{\sqrt{5}} = \frac{|a' - c'|}{\sqrt{2}} \\ \frac{|-b' + 2c'|}{\sqrt{5}} = \frac{|5a' + 3b' + 4c' - 15|}{5\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |-b' + 2c'| = |2b' + c'| \\ \sqrt{2}|-b' + 2c'| = \sqrt{5}|a' - c'| \\ \sqrt{10}|-b' + 2c'| = |5a' + 3b' + 4c' - 15| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -b' + 2c' = 2b' + c' \\ \sqrt{2}(-b' + 2c') = \sqrt{5}(a' - c') \\ \sqrt{10}(-b' + 2c') = -(5a' + 3b' + 4c' - 15) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a' = \frac{3}{2} \\ b' = \frac{3\sqrt{10} - 9}{2} \\ c' = \frac{9\sqrt{10} - 27}{2} \end{cases}.$$

Suy ra: $I\left(\frac{3}{2}; \frac{3\sqrt{10} - 9}{2}; \frac{3(3\sqrt{10} - 9)}{2}\right)$, $\overrightarrow{BI} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3\sqrt{10} - 13}{2}; \frac{9\sqrt{10} - 29}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC} = (1; -3; 1)$.

$$[\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BC}] = \left(-50 + 15\sqrt{10}; \frac{-30 + 9\sqrt{10}}{2}; \frac{10 - 3\sqrt{10}}{2} \right) \text{ cùng phương với } \vec{n} = (10; 3; -1).$$

Suy ra (BCI) có một VTPT là $\vec{n} = (10; 3; -1) = (10; a; b)$.

Vậy: $a + b = 2$.

Cách khác:

Phương trình (OBC) là: $x - z = 0$.

Phương trình (ABC) là: $5x + 3y + 4z - 15 = 0$.

Gọi (α) là mặt phẳng qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$.

Suy ra (α) là mặt phẳng phân giác của hai mặt phẳng (OBC) và (ABC) .

$$(\alpha): \frac{|x - z|}{\sqrt{2}} = \frac{|5x + 3y + 4z - 15|}{\sqrt{50}} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y - 8z - 15 = 0 & (1) \\ 10x + 3y - z - 15 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (1) bị loại do O và A phải nằm khác phía đối với (α) . Vì vậy ta chọn phương trình (2) . Do đó, (α) có một VTPT là $\vec{n} = (10; 3; -1) = (10; a; b)$.

Vậy: $a + b = 2$.

Câu 28: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện với điểm $A(1; 2; 2)$, $B(-1; 2; -1)$, $C(1; 6; -1)$ và $D(-1; 6; 2)$. Biết mặt phẳng qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ có một vector pháp tuyến là $(-1; b; c)$. Tổng $b + c$ là

A. 0.

B. 1.

C. 2.

D. -1

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình các mặt phẳng như sau:

$$(ABC): 6x - 3y - 4z + 8 = 0$$

$$(BCD): 6x - 3y + 4z + 16 = 0$$

$$(CDA): 6x + 3y + 4z - 20 = 0$$

$$(ABD): 6x + 3y - 4z - 4 = 0$$

Gọi $I(a'; b'; c')$ là tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $DABC$.

Do đó:

$$I \text{ nằm cùng phía với } A \text{ đối với } (DBC) \text{ suy ra: } 6a' - 3b' + 4c' + 16 > 0.$$

$$I \text{ nằm cùng phía với } B \text{ đối với } (DAC) \text{ suy ra: } 6a' + 3b' + 4c' - 20 < 0.$$

$$I \text{ nằm cùng phía với } C \text{ đối với } (DAB) \text{ suy ra: } 6a' + 3b' - 4c' - 4 > 0.$$

$$I \text{ nằm cùng phía với } D \text{ đối với } (ABC) \text{ suy ra: } 6a' - 3b' - 4c' + 8 < 0.$$

Suy ra:

$$\begin{cases} d(I, (DAB)) = d(I, (DAC)) \\ d(I, (DAB)) = d(I, (DBC)) \\ d(I, (DAB)) = d(I, (ABC)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |6a' + 3b' - 4c' - 4| = |6a' + 3b' + 4c' - 20| \\ |6a' + 3b' - 4c' - 4| = |6a' - 3b' + 4c' + 16| \\ |6a' + 3b' - 4c' - 4| = |6a' - 3b' - 4c' + 8| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a' + 3b' - 4c' - 4 = -(6a' + 3b' + 4c' - 20) \\ 6a' + 3b' - 4c' - 4 = 6a' - 3b' + 4c' + 16 \\ 6a' + 3b' - 4c' - 4 = -(6a' - 3b' - 4c' + 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 0 \\ b' = 4 \\ c' = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Suy ra: $I\left(0; 4; \frac{1}{2}\right)$, $\overrightarrow{BI} = \left(1; 2; \frac{3}{2}\right)$, $\overrightarrow{BC} = (2; 4; 0)$.

$[\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BC}] = (-3; 3; 0)$ cùng phương với $\vec{n} = (-1; 1; 0)$.

Suy ra (BCI) có một VTPT là $\vec{n} = (-1; 1; 0) = (-1; b; c)$.

Vậy: $b + c = 1$.

Cách khác: có thể sử dụng mặt phẳng phân giác như trên.

Câu 29: Trong không gian $Oxyz$, cho tứ diện $ABCD$ với điểm $A(1; 2; 2)$, $B(-1; 2; -1)$, $C(1; 6; -1)$ và $D(-1; 6; 2)$. Thể tích của mặt cầu nội tiếp tứ diện $ABCD$ là

A. $V = \frac{72\pi\sqrt{61}}{3721}$ B. $V = \frac{288\pi\sqrt{61}}{3721}$ C. $V = \frac{216\pi\sqrt{61}}{3721}$ D. $V = \frac{288\pi}{\sqrt{61}}$

Lời giải

Chọn B

Ta có phương trình các mặt phẳng như sau:

$$(ABC): 6x - 3y - 4z + 8 = 0$$

$$(BCD): 6x - 3y + 4z + 16 = 0$$

$$(CDA): 6x + 3y + 4z - 20 = 0$$

$$(ABD): 6x + 3y - 4z - 4 = 0$$

Gọi $I(a'; b'; c')$ là tâm và R là bán kính mặt cầu nội tiếp tứ diện $DABC$.

Do đó:

$$I \text{ nằm cùng phía với } A \text{ đối với } (DBC) \text{ suy ra: } 6a' - 3b' + 4c' + 16 > 0$$

$$I \text{ nằm cùng phía với } B \text{ đối với } (DAC) \text{ suy ra: } 6a' + 3b' + 4c' - 20 < 0$$

$$I \text{ nằm cùng phía với } C \text{ đối với } (DAB) \text{ suy ra: } 6a' + 3b' - 4c' - 4 > 0$$

$$I \text{ nằm cùng phía với } D \text{ đối với } (ABC) \text{ suy ra: } 6a' - 3b' - 4c' + 8 < 0$$

Suy ra:

$$\begin{cases} d(I, (DAB)) = d(I, (DAC)) \\ d(I, (DAB)) = d(I, (DBC)) \\ d(I, (DAB)) = d(I, (ABC)) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |6a' + 3b' - 4c' - 4| = |6a' + 3b' + 4c' - 20| \\ |6a' + 3b' - 4c' - 4| = |6a' - 3b' + 4c' + 16| \\ |6a' + 3b' - 4c' - 4| = |6a' - 3b' - 4c' + 8| \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a' + 3b' - 4c' - 4 = -(6a' + 3b' + 4c' - 20) \\ 6a' + 3b' - 4c' - 4 = 6a' - 3b' + 4c' + 16 \\ 6a' + 3b' - 4c' - 4 = -(6a' - 3b' - 4c' + 8) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a' = 0 \\ b' = 4 \\ c' = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Suy ra: } I\left(0; 4; \frac{1}{2}\right), \text{ bán kính } R = \sqrt{\frac{36}{61}}$$

$$\text{Vậy thể tích mặt cầu cần tìm là: } V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{288\pi\sqrt{61}}{3721}$$

Cách khác: Sử dụng công thức nhanh.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot (S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ADC} + S_{BCD}) \quad (r \text{ là bán kính của mặt cầu nội tiếp})$$

Ta có: $\overline{AB} = (-2; 0; -3)$, $\overline{AC} = (0; 4; -3)$, $\overline{AD} = (-2; 4; 0)$, $\overline{DB} = (0; -4; -3)$, $\overline{DC} = (2; 0; -3)$.

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot |[\overline{AB}, \overline{AC}] \cdot \overline{AD}| = 8$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot |[\overline{AB}, \overline{AC}]| = \sqrt{61}, \quad S_{ADC} = \frac{1}{2} \cdot |[\overline{AD}, \overline{AC}]| = \sqrt{61}, \quad S_{ABD} = \frac{1}{2} \cdot |[\overline{AB}, \overline{AD}]| = \sqrt{61}$$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |[\overline{DB}, \overline{DC}]| = \sqrt{61}$$

Ta có:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3} \cdot r \cdot (S_{ABC} + S_{ABD} + S_{ADC} + S_{BCD}) \Leftrightarrow 8 = \frac{1}{3} \cdot r \cdot 4\sqrt{61} \Leftrightarrow r = \sqrt{\frac{36}{21}}$$

Vậy: $V_{MatCau} = \frac{4}{3} \cdot \pi R^3 = \frac{288\pi\sqrt{61}}{3721}$.

Câu 30: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M và N là tiếp điểm. Độ dài đoạn thẳng MN bằng

- A. $2\sqrt{2}$. B. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Từ (S) : Tâm $I(1; 2; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{2}$

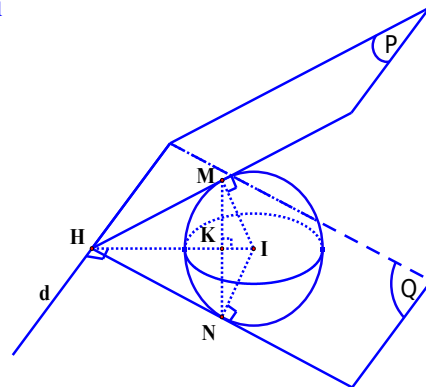
Từ d : Vector $\vec{u} = (2; -1; 4)$

Hạ $IH \perp d \Rightarrow H(2+2t; -t; 4t)$

$$\Rightarrow \overline{IH} = (2t+1; -2-t; 4t-1)$$

$$\Rightarrow \overline{IH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow (2t+1)2 + (-1)(-2-t) + (4t-1)4 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 0 \Leftrightarrow H(2; 0; 0)$$



Xét tam giác $\triangle IHM$ vuông tại M ta có $MH^2 = IH^2 - IM^2 = 6 - 2 = 4 \Rightarrow MH = 2$.

Ta có $\frac{1}{MK^2} = \frac{1}{MH^2} + \frac{1}{MI^2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \Rightarrow MK = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

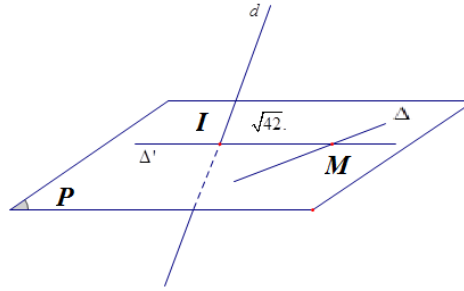
Vậy $MN = 2MK = \frac{4\sqrt{3}}{3}$. Vậy chọn Đáp án B

Câu 31: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-3}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x + y + z + 2 = 0$. Đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng (P) , vuông góc với đường thẳng d đồng thời khoảng cách từ giao điểm I của d với (P) đến Δ bằng $\sqrt{42}$. Gọi $M(5; b; c)$ là hình chiếu vuông góc của I trên Δ . Giá trị của bc bằng

A. -10 . B. 10 . C. 12 . D. -20 .

Lời giải

Chọn B.



Đường thẳng d có vectơ chỉ phương là $\vec{u}_1(2; 1; -1)$.

Mặt phẳng (P) có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}(1; 1; 1)$.

Gọi $\vec{u}_2$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ . Khi đó $\vec{u}_2 = [\vec{u}_1, \vec{n}] = (2; -3; 1)$

Vì $I = d \cap (P)$ nên ta tìm được $I(1; -3; 0)$

Gọi Δ' là đường thẳng nằm trong (P) và vuông góc với Δ , $\Delta \cap \Delta' = M$ thỏa mãn $IM = \sqrt{42}$

Δ' có vectơ chỉ phương là $\vec{u} = [\vec{n}, \vec{u}_2] = (4; 1; -5)$.

Khi đó Δ' có phương trình là
$$\begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -3 + t \\ z = -5t \end{cases}.$$

Gọi $M \in \Delta' \Rightarrow M(1+4t; -3+t; -5t)$, $IM = \sqrt{42} \Rightarrow (4t)^2 + t^2 + (5t)^2 = 42 \Leftrightarrow t = \pm 1$.

Với $t = 1 \Rightarrow M(5; -2; -5) \Rightarrow bc = 10$.

Với $t = -1 \Rightarrow M(-3; -4; 5)$ (loại)

Vậy $bc = 10$

Câu 32: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 2; 1)$, $B(2; -1; 3)$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $MA^2 - 2MB^2$ lớn nhất.

- A. $M\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. B. $M\left(\frac{1}{2}; \frac{-3}{2}; 0\right)$. C. $M(0; 0; 5)$. D. $M(3; -4; 0)$.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $M(x; y; 0) \in (Oxy)$ là điểm cần tìm.

$$MA^2 = (1-x)^2 + (2-y)^2 + 1 = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6$$

$$MB^2 = (2-x)^2 + (-1-y)^2 + 9 = x^2 + y^2 - 4x + 2y + 14$$

Ta có: $MA^2 - 2MB^2 = x^2 + y^2 - 2x - 4y + 6 - 2(x^2 + y^2 - 4x + 2y + 14)$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 2MB^2 = -x^2 - y^2 + 6x - 8y - 22$$

$$\Leftrightarrow MA^2 - 2MB^2 = -(x-3)^2 - (y+4)^2 + 3 \leq 3$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ
$$\begin{cases} x-3=0 \\ y+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=-4 \end{cases}$$

Vậy điểm $M(3; -4; 0)$ là điểm cần tìm.

Câu 32: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 đường thẳng $(d_1): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z+1}{1}$, $(d_2): \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}$, $(d_3): \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$, $(d_4): \frac{x}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{-1}$. Số đường thẳng trong không gian cắt cả 4 đường thẳng trên là

A. 0.**B.** 2.**C.** Vô số.**D.** 1.**Lời giải****Chọn A.**

(d_1) đi qua điểm $M_1(3; -1; -1)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (1; -2; 1)$.

(d_2) đi qua điểm $M_2(0; 0; 1)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (-3; 1; 2)$$

Vì $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \vec{0}$ và $[\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1M_2}] = (-5; -5; -5) \neq \vec{0}$ nên (d_1) song song với (d_2) .

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .

(P) đi qua điểm $M_2(0; 0; 1)$ và có $\vec{n}_P = [\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1M_2}] = (-5; -5; -5)$ hay $\vec{n} = (1; 1; 1)$ có phương trình $1(x-0) + 1(y-0) + 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0$.

Gọi $A = (d_3) \cap (P)$. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + t \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 1 \\ t = 0 \end{cases} \Rightarrow A(1; -1; 1)$$
.

Gọi $B = (d_4) \cap (P)$. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x = t' \\ y = 1 - t' \\ z = -t' \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 0 \\ t' = 0 \end{cases} \Rightarrow B(0; 1; 0)$$
.

Vì $\overrightarrow{BA} = (1; -2; 1)$ cùng phương với $\vec{u}_1$ nên (d) không thỏa mãn.

Câu 33: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 4 đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$,

$(d_2): \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$, $(d_3): \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$, $(d_4): \begin{cases} x = 1 + t' \\ y = 2t' \\ z = 1 - t' \end{cases}$. Gọi (d) là đường thẳng cắt cả bốn

đường thẳng trên. Điểm nào sau đây thuộc đường thẳng (d) ?

A. $A(0; 0; 1)$.**B.** $B(2; 2; 2)$.**C.** $C(6; 6; -3)$.**D.** $D(4; 4; -2)$.**Lời giải**

Chọn D.

(d_1) đi qua điểm $M_1(1;2;0)$ và có VTCP $\vec{u}_1 = (1;2;-2)$.

(d_2) đi qua điểm $M_2(2;2;0)$ và có VTCP $\vec{u}_2 = (2;4;-4)$.

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (1;0;0)$$

Vì $[\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \vec{0}$ và $[\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1M_2}] = (0;-2;-2) \neq \vec{0}$ nên (d_1) song song với (d_2) .

Gọi (P) là mặt phẳng chứa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .

(P) đi qua điểm $M_1(1;2;0)$ và có $\vec{n}_P = [\vec{u}_1; \overrightarrow{M_1M_2}] = (0;-2;-2)$ hay $\vec{n} = (0;1;1)$ có phương trình $0(x-1)+1(y-2)+1(z-0)=0 \Leftrightarrow y+z-2=0$.

Gọi $A = (d_3) \cap (P)$. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=t \\ y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=1 \\ t=1 \end{cases} \Rightarrow A(1;1;1)$$

Gọi $B = (d_4) \cap (P)$. Xét hệ phương trình
$$\begin{cases} x=1+t' \\ y=2t' \\ z=1-t' \\ y+z-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ z=0 \\ t'=1 \end{cases} \Rightarrow B(2;2;0)$$

(d) đi qua điểm $A(1;1;1)$ và có VTCP $\vec{AB} = (1;1;-1)$ có phương trình
$$\begin{cases} x=1+t \\ y=1+t \\ z=1-t \end{cases}$$

Vì $\vec{AB}$ không cùng phương với $\vec{u}_1$ nên (d) thỏa mãn.

Dễ thấy $D(4;4;-2) \in (d)$.

Câu 34: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1): \begin{cases} x=t \\ y=4-t \\ z=-1+2t \end{cases}$, $(d_2): \frac{x}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$, $(d_3): \frac{x+1}{5} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}$. Viết phương trình đường thẳng (d) cắt ba đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $AB = BC$.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{1}$. B. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$. C. $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$. D. $\frac{x}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z}{1}$.

Lời giải

Chọn B.

$$A \in (d_1) \Rightarrow A(a; 4-a; -1+2a)$$

$$B \in (d_2) \Rightarrow B(2b; 2+b; b)$$

$$C \in (d_3) \Rightarrow C(-1+5c; 1+2c; -1+c)$$

$$\text{Vì } B \text{ là trung điểm của } AC \text{ nên } \begin{cases} 2b = \frac{a-1+5c}{2} \\ 2+b = \frac{4-a+1+2c}{2} \\ b = \frac{-1+2a-1+c}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-4b+5c=1 \\ -a-2b+2c=-1 \\ 2a-2b+c=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow A(1; 3; 1), B(0; 2; 0)$$

$$(d) \text{ đi qua điểm } B(0; 2; 0) \text{ và có VTCP } \overrightarrow{BA} = (1; 1; 1) \text{ có phương trình } \frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}.$$

Câu 35: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 2$. Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S) . Gọi M, N là tiếp điểm. Tính độ dài đoạn thẳng MN .

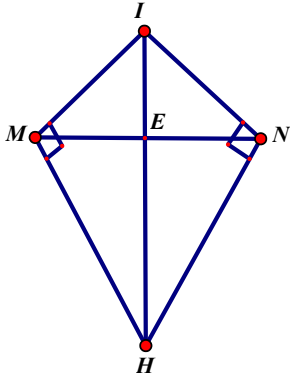
A. $\sqrt{6}$. B. $2\sqrt{2}$. C. $\frac{4}{\sqrt{3}}$. D. 4.

Lời giải

Chọn C.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 1)$, bán kính $R = \sqrt{2}$.

Cách 1:



Gọi H là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng $d \Rightarrow IH = d(I, d) = \sqrt{6}$

Theo bài ra ta có: $IM = IN = R = \sqrt{2} \Rightarrow MH = NH = \sqrt{IH^2 - IM^2} = 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{ME^2} = \frac{1}{MI^2} + \frac{1}{MH^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow ME = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow MN = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

Cách 2:

Đường thẳng d đi qua điểm $A(2; 0; 0)$, có vector chỉ phương $\vec{u}(2; -1; 4)$.

Mặt phẳng (P) chứa d có dạng $(P): A(x-2) + By + Cz = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Do $d \subset (P)$ nên ta có $2.A - 1.B + 4C = 0 \Leftrightarrow B = 2A + 4C$.

Ta có điều kiện tiếp xúc

$$R = d(I, (P)) \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{|-A + 2B + C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{|3A + 9C|}{\sqrt{5A^2 + 17C^2 + 16AC}} (*)$$

Biến đổi phương trình (*) về phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với A, B . Giải phương trình, tìm được mối liên hệ của A theo B . Từ đó suy ra phương trình mặt phẳng tiếp diện, suy ra tọa độ tiếp điểm.

Chú ý: - Do phương trình (*) có nghiệm quá lẻ nên tôi không trình bày chi tiết ở đây. Tôi đã chọn bài 01 minh họa cách giải này.

- Với bài tập này cách giải thứ nhất phù hợp hơn. Tuy nhiên với bài toán tìm tọa độ tiếp điểm M, N hay viết phương trình đường thẳng MN thì cách 2 phù hợp hơn.

Câu 36: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-13}{-1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y - 6z - 67 = 0$. Qua d dựng các mặt phẳng tiếp xúc với (S) lần lượt tại T_1, T_2 . Viết phương trình đường thẳng T_1T_2 .

A. $\frac{x-8}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-5}{-1}$

B. $\frac{x-8}{1} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-5}{-1}$

C. $\frac{x-8}{1} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+5}{1}$

D. $\frac{x-8}{1} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-5}{-1}$

Lời giải

Chọn A.

Ta có mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$, bán kính $R=3$.

Đường thẳng d đi qua điểm $A(13;-1;0)$, có vector chỉ phương $\vec{u}(-1;1;4)$.

Mặt phẳng (P) chứa d có dạng $(P): A(x-13) + B(y+1) + Cz = 0$ ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$)

Do $d \subset (P)$ nên ta có $-1.A + 1.B + 4C = 0 \Leftrightarrow B = A - 4C$.

Ta có điều kiện tiếp xúc $R = d(I, (P)) \Leftrightarrow 9 = \frac{|-12A + 3B + 3C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$\Leftrightarrow 9 = \frac{|9A + 9C|}{\sqrt{2A^2 + 17C^2 - 8AC}} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 2C \\ A = 8C \end{cases}$$

Suy ra hai mặt phẳng tiếp diện là $(P_1): 2x - 2y + z - 28 = 0$; $(P_2): 8x + 4y + z - 100 = 0$.

Suy ra tọa độ các tiếp điểm $T_1(7; -4; 6), T_2(9; 6; 4) \Rightarrow T_1T_2: \frac{x-7}{1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z-6}{-1}$

Chọn đáp án A.

Câu 37: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{4}$ và mặt cầu (S) tâm $I(1;2;1)$, bán kính R . Hai mặt phẳng (P) và (Q) chứa d và tiếp xúc với (S) tạo với nhau góc 60° . Hãy viết phương trình mặt cầu (S)

A. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 6$

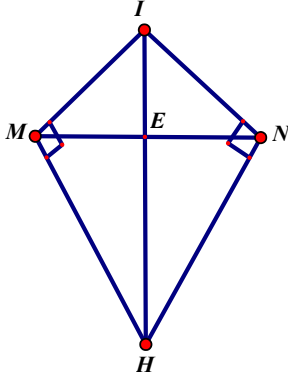
B. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$

C. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}$

D. $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1$

Lời giải

Chọn C.



Gọi M, N là tiếp điểm của mặt phẳng $(P), (Q)$ và mặt cầu (S) . Gọi H là hình chiếu của điểm I trên đường thẳng $d \Rightarrow IH = d(I, d) = \sqrt{6}$.

TH1: Góc $\widehat{MHN} = 60^\circ$:

Theo bài ra ta có: $R = IM = IH \cdot \sin 30^\circ = \sqrt{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$

$$\Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{3}{2}.$$

TH2: Góc $\widehat{MHN} = 120^\circ$:

Theo bài ra ta có: $R = IM = IH \cdot \sin 60^\circ = \sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{18}}{2}$

$$\Rightarrow (S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = \frac{9}{2}.$$

Câu 38: Trong không gian $Oxyz$ cho tam giác ABC có trọng tâm G , biết $B(6; -6; 0), C(0; 0; 12)$ và đỉnh A thay đổi trên mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Khi đó G thuộc mặt cầu (S_2)

A. $(S_2): (x+2)^2 + (y-2)^2 + (z+4)^2 = 1$

B. $(S_2): (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1$

C. $(S_2): (x-4)^2 + (y+4)^2 + (z-8)^2 = 1$

D. $(S_2): (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 3$

Lời giải

Chọn B.

Sử dụng công thức tọa độ trọng tâm, ta có: $x_A = 3x_G - 6; y_A = 3y_G + 6; z_A = 3z_G - 12$

Do A thay đổi trên mặt cầu $(S_1): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ nên ta có:

$$(3x_G - 6)^2 + (3x_G + 6)^2 + (3x_G - 12)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x_G - 2)^2 + (y_G + 2)^2 + (z_G - 4)^2 = 1$$

Vậy G thuộc mặt cầu có PT: $(S_2): (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 1$.

Câu 39: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng nhau. Gọi E, M lần lượt là trung điểm các cạnh BC, SA , α là góc tạo bởi đường thẳng EM và mặt phẳng (SBD) . Tính $\tan \alpha$.

A. 2.

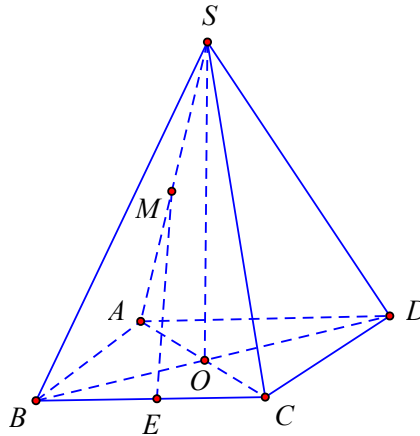
B. $\sqrt{3}$.

C. 1.

D. $\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D.



Giả sử $OA = 1$. Chọn hệ trục tọa độ sao cho $Ox \equiv OC, Oy \equiv OB, Oz \equiv OS$,

Ta có $C(1;0;0), A(-1;0;0) \Rightarrow (SBD)$ nhận $\overrightarrow{AC} = (2;0;0)$ là một vectơ pháp tuyến.

Từ $SA = AB = OA\sqrt{2} = \sqrt{2} \Rightarrow SO = \sqrt{SA^2 - OA^2} = 1$.

$$\Rightarrow \begin{cases} S(0;0;1) \\ A(-1;0;0) \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

Ta có $\begin{cases} C(1;0;0) \\ B(0;1;0) \end{cases} \Rightarrow E\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right) \Rightarrow EM$ nhận $\overrightarrow{ME} = \left(1; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ là một vectơ chỉ phương.

$$\Rightarrow \sin(\overrightarrow{EM}; (SBD)) = \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{AC}|}{ME \cdot AC} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\Rightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \tan \alpha = \sqrt{2}.$$

Câu 40: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; 2; -2)$, $B(2; 2; -4)$. Giả sử $I(a; b; c)$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB . Tính $T = a^2 + b^2 + c^2$.

A. $T = 8$

B. $T = 2$

C. $T = 6$

D. $T = 14$

Lời giải

Chọn A

Ta có $OA = AB = 2\sqrt{2}$ nên tam giác OAB cân tại A , vì vậy I thuộc đường trung tuyến qua A là

$$(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -2 \end{cases} \Rightarrow I(1 + t; 1 - t; -2)$$

$$IA = IO \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow I(2; 0; -2)$$

Do đó $T = 8 \rightarrow$ chọn **A.**

Câu 41: Cho hình lập phương $ABCD A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Gọi K là trung điểm của DD' . Khoảng cách giữa hai đường thẳng CK và $A'D$ bằng

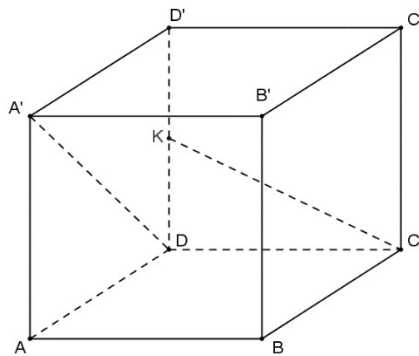
A. $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.

B. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

C. $\frac{2a\sqrt{3}}{3}$.

D. $\frac{a}{3}$.

Hướng dẫn giải:



Chọn $a = 1$ ta có hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho $D(0; 0; 0)$, $A'(1; 0; 1)$, $K\left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$ và $C(0; 1; 0)$

Ta có $\overrightarrow{DA'} = (1; 0; 1)$, $\overrightarrow{CK} = \left(0; -1; \frac{1}{2}\right)$ và $\overrightarrow{DK} = \left(0; 0; \frac{1}{2}\right)$

Ta có $[\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{CK}] = \left(1; -\frac{1}{2}; -1\right)$

$$[\overrightarrow{DA'}, \overrightarrow{CK}] \cdot \overrightarrow{DK} = -\frac{1}{2}$$

$$d_{(A'D;CK)} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \left(-\frac{1}{2} \right)^2 + (-1)^2}} = \frac{\left| -\frac{1}{2} \right|}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} + 1}} = \frac{1}{3}$$

Do đó

$$d_{(A'D;CK)} = \frac{a}{3}$$

Vậy

Câu 42: Biết rằng có n mặt phẳng với phương trình tương ứng là $(P_i): x + a_i y + b_i z + c_i = 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ đi qua $M(1; 2; 3)$ (nhưng không đi qua O) và cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại A, B, C sao cho hình chóp $O.ABC$ là hình chóp đều. Tính tổng $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

A. $S = 3$.

B. $S = 1$.

C. $S = -4$.

D. $S = -1$.

Lời giải

Chọn D

Mặt phẳng (ABC) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \ (abc \neq 0)$

$$M(1; 2; 3) \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \ (*)$$

$O.ABC$ là hình chóp đều nên ta có:

$$|a| = |b| = |c| \Leftrightarrow \begin{cases} b = a \\ c = a \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} b = a \\ c = -a \end{cases} \quad (2)$$

$$\begin{cases} b = -a \\ c = a \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} b = -a \\ c = -a \end{cases} \quad (4)$$

+) Thay (1) vào (*) ta được: $a = b = c = 6 \Rightarrow (P_1): x + y + z - 6 = 0$

+) Thay (2) vào (*) ta được: $\frac{1}{a} + \frac{2}{a} - \frac{3}{a} = 1$ (vô nghiệm)

+) Thay (3) vào (*) ta được: $\frac{1}{a} - \frac{2}{a} + \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = c = 2; b = -2 \Rightarrow (P_2): x - y + z - 2 = 0$

+) Thay (4) vào (*) ta được: $\frac{1}{a} - \frac{2}{a} - \frac{3}{a} = 1 \Rightarrow a = -4; b = c = 4 \Rightarrow (P_3): x - y - z + 4 = 0$

Vậy $S = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 + (-1) + (-1) = -1$.

Câu 43: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua hai điểm $M(1; 8; 0)$, $C(0; 0; 3)$ cắt các nửa trục dương Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho OG nhỏ nhất (G là trọng tâm tam giác ABC). Biết $G(a; b; c)$, tính $P = a + b + c$.

A. 7.

B. 12.

C. 3.

D. 6.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $A(m;0;0)$, $B(0;n;0)$ mà $C(0;0;3)$ nên $G\left(\frac{m}{3};\frac{n}{3};1\right)$ và $OG^2 = \frac{1}{9}(m^2 + n^2) + 1$.

$(P): \frac{x}{m} + \frac{y}{n} + \frac{z}{3} = 1$ (P) qua hai điểm $M(1;8;0)$ nên $\frac{1}{m} + \frac{8}{n} = 1$.

Ta có $1 = \frac{1}{m} + \frac{8}{n} = \frac{1}{m} + \frac{16}{2n} \geq \frac{(1+4)^2}{m+2n} \Rightarrow m+2n \geq 25$.

Suy ra $25 \leq m+2n \leq \sqrt{5(m^2 + n^2)} \Leftrightarrow m^2 + n^2 \geq 125 \Rightarrow OG^2 \geq \frac{134}{9}$.

Dấu bằng khi $\begin{cases} \frac{1}{m} + \frac{8}{n} = 1 \\ \frac{m}{1} = \frac{n}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=5 \\ n=10 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{5}{3};\frac{10}{3};1\right)$.

Câu 44: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Mặt phẳng (P) đi qua điểm M và cắt trục tọa độ Ox , Oy , Oz tại A, B, C sao cho M là trực tâm tam giác ABC .

Phương trình mặt phẳng (P) là

A. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 0$ B. $x + y + z - 8 = 0$

C. $x + 2y + 5z - 30 = 0$ D. $\frac{x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{z}{1} = 1$

Lời giải

Chọn C.

Cách 1:

Gọi $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Do $M \in (ABC)$ nên ta có phương trình $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1$ (1).

Ta có $\overrightarrow{AM} = (1-a;2;5)$, $\overrightarrow{BC} = (0;-b;c)$, $\overrightarrow{BM} = (1;2-b;5)$, $\overrightarrow{AC} = (-a;0;c)$.

Do M là trực tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b+5c=0 \\ -a+5c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=\frac{5c}{2} \\ a=5c \end{cases}$ (2).

Thế (2) vào (1) ta được $\frac{1}{5c} + \frac{4}{5c} + \frac{5}{c} = 1 \Leftrightarrow c=6 \Rightarrow a=30; b=15$.

Vậy phương trình mặt phẳng (ABC) là $\frac{x}{30} + \frac{y}{15} + \frac{z}{6} = 1 \Leftrightarrow x + 2y + 5z - 30 = 0$.

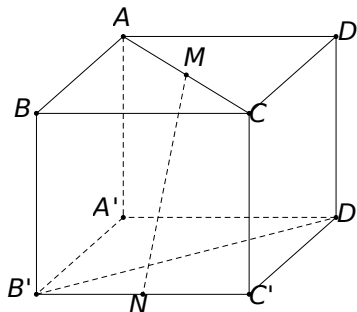
Cách 2:

Ta có chứng minh được $OM \perp (ABC)$.

(ABC) đi qua M nhận $\overrightarrow{OM}$ làm VTPT.

$$(ABC):1(x-1)+2(y-2)+5(y-5)=0 \Leftrightarrow x+2y+5y-30=0$$

Câu 45: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng



A. $\sqrt{5}a$.

B. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$.

C. $3a$.

D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1. (dùng tọa độ)

Đưa hình lập phương vào hệ trục tọa độ Oxyz sao cho

$$B'(0;0;0), C'(a;0;0), A'(0;a;0), D'(a;a;0), B(0;0;a), A(0;a;a), C(a;0;a)$$

Ta có : *) $M(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a), N(\frac{a}{2}; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; \frac{-a}{2}; -a) = \frac{-a}{2}(0; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{u_1}(0; 1; 2)$ là VTCP của MN .

*) $\overrightarrow{B'D'}(a; a; 0) = a(1; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{u_2}$ là VTCP của $B'D'$.

$$d(MN; B'D') = \frac{|\left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2} \right] \overrightarrow{B'N}|}{\left| \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2} \right] \right|} = \frac{a}{3}$$

Cách 2.

Gọi P là trung điểm của $C'D'$. $E = A'C' \cap NP, I = A'C' \cap B'D'$.

Ta có : $d(MN; B'D') = d(B'D'; (BDPN)) = d(I; (BDPN)) = h$

Ta có h là độ dài đường cao trong tam giác vuông MIN.

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{MI^2} + \frac{1}{IE^2} = \frac{16}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{3}$$

Vậy

Câu 46: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - z - 3 = 0$ và điểm $M(1;1;1)$. Gọi A là điểm thuộc tia Oz , B là hình chiếu của A lên (α) . Biết rằng tam giác MAB cân tại M . Diện tích của tam giác MAB bằng:

- A. $6\sqrt{3}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{123}}{2}$. D. $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $A(0;0;a)$ với $a > 0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $A(0;0;a)$ và có một vectơ chỉ phương

$$\vec{u} = (1;0;-1) \text{ có phương trình là: } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = a - t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

$$B \in (\alpha) \Rightarrow t - a + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3+a}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3+a}{2}; 0; \frac{a-3}{2}\right).$$

$$\text{Vì tam giác } MAB \text{ cân tại } M \Rightarrow MA = MB \Rightarrow 1+1+(a-1)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{a-5}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 + 1 = \frac{a^2 + 2a + 1}{4} + \frac{a^2 - 10a + 25}{4} \Rightarrow 4a^2 - 8a + 8 = 2a^2 - 8a + 26 \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow A(0;0;3) \text{ và } B(3;0;0).$$

$$\begin{aligned} \text{Cách 1: } \overrightarrow{AM} &= (1;1;-2), \overrightarrow{BM} = (-2;1;1) \Rightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}] = (3;3;3) \Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}] \right| \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

$$\text{Cách 2: Gọi } I \text{ là trung điểm của } AB. \text{ Ta có } I\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{3}{2}\right).$$

$$IM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}.$$

$$\text{Do đó } S_{ABM} = \frac{1}{2} IM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Câu 47: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-4=0$. Phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) sao cho d cắt và vuông góc với Δ là

- A. $d: \begin{cases} x = -3+t \\ y = 1-2t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 1-t \end{cases}$.
- B. $d: \begin{cases} x = 3t \\ y = 2+t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2+2t \end{cases}$.
- C. $d: \begin{cases} x = -2-4t \\ y = -1+3t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4-t \end{cases}$.
- D. $d: \begin{cases} x = -1-t \\ y = 3-3t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 3-2t \end{cases}$.

Lời giải

Chọn C.

Đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{-1}$ có vector chỉ phương $\vec{u}(1;1;-1)$, và mặt phẳng $(P): x+2y+2z-4=0$ có vector pháp tuyến $\vec{n}(1;2;2)$ suy ra $[\vec{u}, \vec{n}] = (4; -3; 1)$.

Gọi $M = d \cap \Delta \Rightarrow M = (P) \cap \Delta$

$M \in \Delta \Rightarrow M = (t; 1+t; 2-t)$, $M \in (P) \Rightarrow t+2(1+t)+2(2-t)-4=0 \Leftrightarrow t=-2$

Suy ra $M = (-2; -1; 4)$.

Đường thẳng d đi qua $M = (-2; -1; 4)$ và nhận $[\vec{u}, \vec{n}] = (4; -3; 1)$ làm vector chỉ phương nên có

phương trình là: $d: \begin{cases} x = -2-4t \\ y = -1+3t, (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4-t \end{cases}$.

Câu 48: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng d và mặt cầu (S) có phương

trình lần lượt là: $d: \frac{x+3}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{2}$; $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 18 = 0$ biết d cắt (S) tại

hai điểm M, N thì độ dài đoạn MN là

- A. $MN = \frac{\sqrt{30}}{3}$.
- B. $MN = \frac{20}{3}$.
- C. $MN = \frac{16}{3}$.
- D. $MN = 8$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có phương trình tham số của (d) là:
$$\begin{cases} x = -3 - t \\ y = 2t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$
 thay vào (S) ta được

$$(-3-t)^2 + (2t)^2 + (-1+2t)^2 - 2(-3-t) + 4(2t) + 2(-1+2t) - 18 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = \frac{2}{9} \end{cases}$$

Với $t = -2 \Rightarrow M(-1; -4; -5)$; với $t = \frac{2}{9} \Rightarrow M\left(-\frac{29}{9}; \frac{4}{9}; -\frac{5}{9}\right)$

$$\overline{MN} = \left(-\frac{20}{9}; \frac{40}{9}; \frac{40}{9}\right) \Rightarrow MN = \frac{20}{3}$$

Câu 49: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn điểm $A(0; 0; -3)$, $B(2; 0; -1)$ và (P) $3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Hỏi có bao nhiêu điểm C trên mặt phẳng (P) sao cho ABC đều.

A. vô số. **B.** Có một. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Chọn D.

Gọi $C(x_1, y_1, z_1)$ là điểm cần tìm

$$\Rightarrow AC = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + (z_1 + 3)^2}, AC = \sqrt{(x_1 - 2)^2 + y_1^2 + (z_1 + 1)^2}, AB = \sqrt{8}$$

Do $C \in (P) \Rightarrow 3x_1 - 8y_1 + 7z_1 - 1 = 0$ (1)

Do ABC đều $\Leftrightarrow AB = AC = BC$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + (z_1 + 3)^2 = 8 \\ (x_1 - 2)^2 + y_1^2 + (z_1 + 1)^2 = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + (z_1 + 3)^2 = 8 \\ x_1 = -z_1 - 1 \end{cases}$$

Thế $x_1 = -z_1 - 1$ vào (1) $\Rightarrow z_1 = 2y_1 + 1, x_1 = -2y_1 - 2$

$$\Leftrightarrow (-2y_1 - 2)^2 + (y_1)^2 + (2y_1 + 4)^2 = 8 \Rightarrow 3y_1^2 + 8y_1 + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} y_1 = -2 \\ y_1 = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

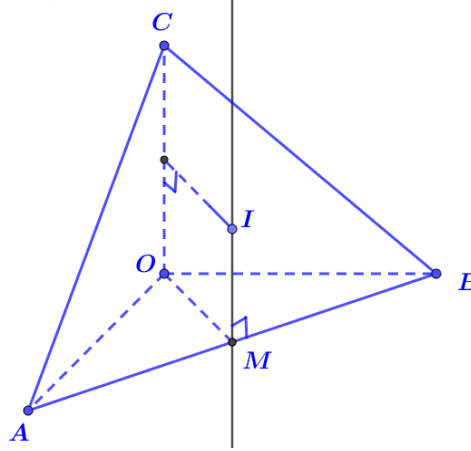
$$\Rightarrow C(2, -2, -3) \text{ và } C'\left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

Câu 50: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$. Cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, với a, b, c dương và thỏa $a+b+c=6$. Biết rằng a, b, c thay đổi thì tâm I của mặt cầu ngoại tiếp $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Khi đó khoảng cách d từ $N(1;1;1)$ tới (P) bằng:

- A. $d = \sqrt{3}$. B. $d = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. C. $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $d = 0$.

Lời giải

Chọn D.



Gọi M trung điểm AB , do tam giác OAB vuông tại O . Dựng trục Mt qua M và vuông góc với (OAB) . Dựng trung trực của OC cắt Mt tại tâm I của mặt cầu ngoại tiếp $OABC$ và

$$I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right).$$

Lại có: $x_I + y_I + z_I = \frac{a+b+c}{2} = \frac{6}{2} = 3 \Rightarrow I$ thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-3=0$ cố định.

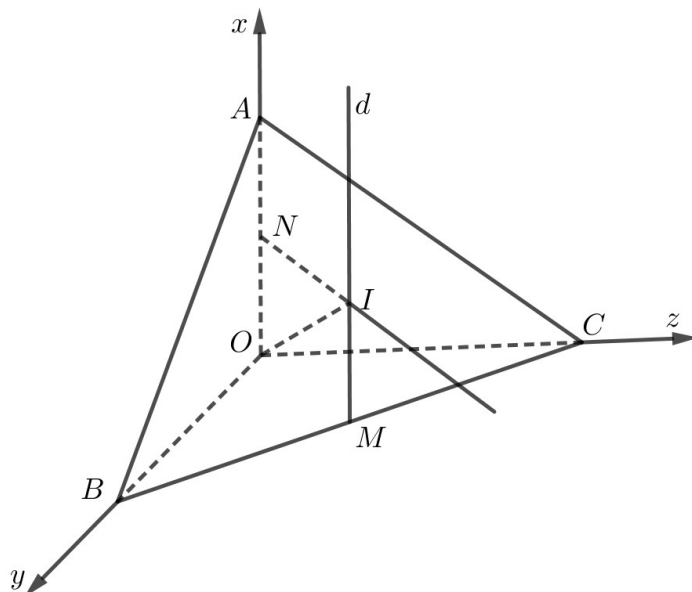
Vậy, $d(N, (P)) = 0$.

Câu 51: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi, khác 0 và thỏa mãn $a+b+c=6$. Gọi tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là I . Giá trị nhỏ nhất của OI bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. D. 3.

Lời giải

Chọn A



Ta có $OABC$ là tứ diện vuông tại O . Gọi M là trung điểm BC . Đường thẳng d qua M song song với OA là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC .

Trong mặt phẳng (OA, d) , từ trung điểm N của đoạn OA kẻ đường thẳng vuông góc với OA tại N cắt d tại I . Khi đó I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$.

Ta có tọa độ điểm $M\left(0; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$, khi đó điểm $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$.

$$OI = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a+b+c}{2\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Do đó

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c = 2$.

Câu 52: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$ với a, b, c là các số thực thay đổi, khác 0 và thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tính thể tích nhỏ nhất của khối cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$:

A. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

B. $\sqrt{3}\pi$.

C. 4π .

D. 12π .

Lời giải

Chọn A

Dựng trục đường tròn ngoại tiếp tam giác OBC , tâm I của khối cầu ngoại tiếp tứ diện là giao điểm của trục đường tròn và mặt phẳng trung trực của cạnh OA .

$$OI = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \geq \frac{a+b+c}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Khi đó

Do đó GTNN của thể tích khối cầu ngoại tiếp là $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi$.

Câu 53: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $M(1; -2; 3)$. Gọi (P) là mặt phẳng qua M cắt các trục tọa độ lần lượt tại A, B, C . Khi đó giá trị nhỏ nhất của $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ là:

A. $\frac{1}{14}$.

B. 1.

C. 14.

D. $\sqrt{14}$.

Lời giải

Chọn A

Mặt phẳng (P) có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, trong đó $\frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

Ta có $1 = \left(\frac{1}{a} - \frac{2}{b} + \frac{3}{c}\right)^2 \leq (1+4+9)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}$

Do đó $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{1}{14}$.

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = 14, b = -7, c = \frac{14}{3}$.

Cách khác: Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên mặt phẳng (P) .

Khi đó $OABC$ là góc tam diện vuông nên có $\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2}$

Mà $OH \leq OM \Rightarrow \frac{1}{OH^2} \geq \frac{1}{OM^2} = \frac{1}{14}$

$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $H \equiv M$.

Câu 54: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, và $C(2; -1; 2)$. Biết mặt phẳng qua B, C và tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ có một vector pháp tuyến là $(10; a; b)$. Tổng $a + b$ là:

A. -2.

B. 2.

C. 1.

D. -1.

Lời giải

Chọn B.

Gọi tâm mặt cầu nội tiếp tứ diện $OABC$ là $I(x; y; z)$.

Ta có phương trình (OBC) : $x - z = 0$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $5x + 3y + 4z - 15 = 0$.

Tâm I cách đều hai mặt phẳng (OBC) và (ABC) suy ra:

$$\frac{|x - z|}{\sqrt{2}} = \frac{|5x + 3y + 4z - 15|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y + 3z - 5 = 0 & (\alpha) \\ 10x + 3y - z - 15 = 0 & (\beta) \end{cases}$$

Nhận xét: hai điểm A và O nằm về cùng phía với (α) nên loại (α) .

Hai điểm A và O nằm về khác phía (β) nên nhận (β) .

Thấy ngay một vector pháp tuyến là $(10; a; b)$ thì $a = 3$, $b = -1$. Vậy $a + b = 2$.

Phân tích: Bản chất bài toán là đi lập phương trình mặt phẳng phân giác “trong” của hai mặt phẳng (OBC) và (ABC) .

Câu 55: Trong không gian $Oxyz$, cho các điểm $A(3; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(2; -1; 2)$ và $D(6; 1; 0)$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của C trên AD . Biết mặt phẳng (BCI) có một vector pháp tuyến là $(6; a; b)$. Tổng $a + b$ là:

- A. -2. B. 2. C. 1. D. -1.

Lời giải

Chọn B.

Ta có $\overrightarrow{BC} = (1; -3; 1)$, $\overrightarrow{AD} = (3; 1; 0)$. Suy ra $BC \perp AD$.

Suy ra $(BCI) \perp AD$. Suy ra (BCI) có một véc tơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AD} = (3; 1; 0)$.

Thấy ngay một vector pháp tuyến khác là $(6; 2; 0)$ do đó $a = 2$, $b = 0$. Vậy $a + b = 2$.

Câu 56: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(3; 0; 0)$, $B(1; 2; 1)$, và $C(2; -1; 2)$. Tập hợp tất cả các điểm trong không gian có tỉ số khoảng cách đến hai mặt phẳng (ABC) và (OBC) bằng 2 là:

- A. Một mặt phẳng. B. Hai mặt phẳng. C. Một mặt cầu. D. Một mặt trụ.

Lời giải

Chọn B.

Gọi điểm $I(x; y; z)$ có tỉ số khoảng cách đến hai mặt phẳng bằng 2.

Ta có phương trình (OBC) : $x - z = 0$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $5x + 3y + 4z - 15 = 0$.

$$\frac{d(I; (OBC))}{d(I; (ABC))} = \frac{1}{2}$$

Ta có suy ra:

$$\frac{|x - z|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \frac{|5x + 3y + 4z - 15|}{5\sqrt{2}} \Leftrightarrow 10|x - z| = |5x + 3y + 4z - 15| \Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 3y - 14z + 15 = 0 \\ -15x - 3y + 6z + 15 = 0 \end{cases}$$

Vậy chọn B.

Câu 57: Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm $A(2; 2; 0), B(2; 0; -2)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z - 1 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $MA = MB$ và góc $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất. Khi đó giá trị $a + 4b + c$ bằng

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn A.

Cách 1:

+) Vì $MA = MB$ nên M thuộc mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB. Ta có phương trình trung trực của AB là $(Q): y + z = 0$

+) M thuộc giao tuyến của hai mặt phẳng $(P), (Q)$ nên M thuộc đường thẳng

$$(d): \begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}$$

Gọi $M(1 + 3t; -t; t)$, ta có $\cos \widehat{AMB} = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}|}{MA \cdot MB} = \frac{11t^2 - 2t + 1}{11t^2 - 2t + 5}$.

Khảo sát hàm số $f(t) = \frac{11t^2 - 2t + 1}{11t^2 - 2t + 5}$, ta được $\min f(t) = \frac{5}{27}$ khi $t = \frac{1}{11}$.

Suy ra $\widehat{AMB}$ có số đo lớn nhất khi $t = \frac{1}{11}$, ta có $M\left(\frac{14}{11}; -\frac{1}{11}; \frac{1}{11}\right)$.

Khi đó giá trị $a + 4b + c = 1$.

Cách 2:

I là trung điểm của AB $\Rightarrow I(2, 1, -1)$

$\begin{cases} \overline{AB}(0, -2, -2) \\ MA = MB \end{cases} \Rightarrow M$ thuộc mặt phẳng trung trực của AB gọi là (Q)

$\Rightarrow (Q): 0(x - 2) + 1(y - 1) + 1(z + 1) = 0$

$$\Leftrightarrow y + z = 0$$

Do giả thuyết $M \in (P) \Rightarrow M \in \Delta = (P) \cap (Q)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+2y-z-1=0 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-3t \\ y=t \\ z=-t \end{cases} \quad (\Delta) \Rightarrow M(1-3t, t, -t)$$

$\Leftrightarrow$ Toạ độ M thỏa mãn hpt

Do ΔAMB cân tại $M \Rightarrow \angle AMB = 2\angle AMI$

Mà $0^\circ < \angle AMI < 90^\circ \Rightarrow \angle AMI \max \Leftrightarrow \sin \angle AMI \max$

Lại có $\sin \angle AMI \max = \frac{AI}{AM}$, AI cố định

$\Rightarrow \sin \angle AMI \max \Leftrightarrow AM \min$

$$\text{Mà } AM = \sqrt{(1-3t-2)^2 + (t-1)^2 + (-t+1)^2} = \sqrt{11t^2 + 2t + 3}$$

$$AM \min \Leftrightarrow f(t) = 11t^2 + 2t + 3 \min$$

$$\Rightarrow f(t) \min \Rightarrow t = \frac{-1}{11}$$

$$\text{Vậy } M\left(\frac{14}{11}; \frac{-1}{11}; \frac{1}{11}\right) \Rightarrow a = \frac{14}{11}; b = \frac{-1}{11}; c = \frac{1}{11}$$

$$\Rightarrow T = a + 4b + c = 1.$$

Câu 58: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, xét mặt cầu (S) đi qua hai điểm $A(1; 6; 2), B(3; 0; 0)$ và có tâm thuộc mặt phẳng $(P): x - y + 2 = 0$ bán kính của mặt cầu (S) có giá trị nhỏ nhất là

A. $\frac{\sqrt{462}}{6}$.

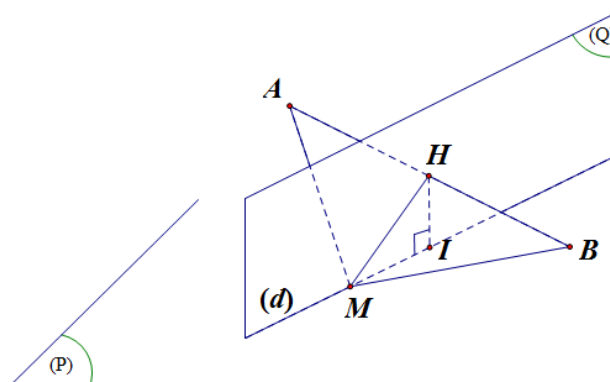
B. $\frac{\sqrt{534}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{218}}{6}$.

D. $\frac{\sqrt{530}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Gọi H là trung điểm của đoạn thẳng AB,

nên H(2; 3; 1). Vectơ $\overrightarrow{HB} = (1; -3; -1)$.

Mặt cầu đi qua A, B có tâm M thuộc mặt phẳng (Q)

là mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB

qua H và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{HB} = (1; -3; -1)$ có phương trình (Q): $x - 3y + z + 6 = 0$.

Do tâm M của mặt cầu cũng thuộc (P) nên M thuộc đường thẳng (d) là giao của (P) và (Q) có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 1; 2)$ và qua $M_0(-2; 0; 4)$.

$$d = d(H, (d)) = \frac{|\overrightarrow{M_0H}, \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{66}}{6}, \quad HB = \sqrt{11}.$$

Gọi d là khoảng cách từ H đến (d),

Ta có $R = MB = \sqrt{HB^2 + MH^2}$. Nhận thấy HB không đổi, R nhỏ nhất khi MH nhỏ nhất, MH nhỏ

nhất khi M trùng I, lúc đó $MH = HI = d = \frac{\sqrt{66}}{6}$. (I là hình chiếu vuông góc của H lên (d))

$$\text{Vậy } R_{\min} = \sqrt{HB^2 + IH^2} = \sqrt{\frac{66}{36} + 11} = \frac{\sqrt{462}}{6}.$$

$$d_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -3 - t \end{cases} \text{ và}$$

Câu 59: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng d_1 và d_2 : $\begin{cases} x = 4 + 3t \\ y = 3 + 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$. Trên đường thẳng d_1 lấy hai điểm A, B sao cho $AB = 3$. Trên đường thẳng d_2 lấy hai điểm C, D sao cho $CD = 4$. Tính thể tích V của khối tứ diện ABCD.

A. $V = 7$. B. $V = 2\sqrt{21}$. C. $V = \frac{4\sqrt{21}}{3}$. D. $V = \frac{5\sqrt{21}}{6}$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có đường thẳng d_1 đi qua điểm $M_1(1; 2; -3)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_1(1; -2; -1)$

Ta có đường thẳng d_2 đi qua điểm $M_2(4; 3; 1)$ và có vec tơ chỉ phương $\vec{u}_2(3; 2; -1)$

$$d = \frac{\left| \begin{bmatrix} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{bmatrix} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \right|}{\left| \begin{bmatrix} \vec{u}_1, \vec{u}_2 \end{bmatrix} \right|} = \frac{|42|}{\sqrt{16+4+64}} = \sqrt{21}$$

Ta có khoảng cách giữa $d_1; d_2$ là

Nhận xét rằng $d_1 \perp d_2$

$$V = \frac{1}{6} AB \cdot CD \cdot d \cdot \sin \alpha = \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sqrt{21} = 2\sqrt{21}$$

Thể tích khối tứ diện cần tìm là

Câu 60: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z = 0$ và điểm $M(1; 2; -1)$. Một đường thẳng thay đổi qua M cắt (S) tại hai điểm A, B . Tìm giá trị lớn nhất của tổng $MA + MB$.

- A. 8. B. 10. C. $2\sqrt{17}$. D. $8 + 2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn C

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; -2)$ và bán kính $R = 3$. Trong khi $IM = \sqrt{17} > 3$ nên M nằm ngoài hình cầu (S) .

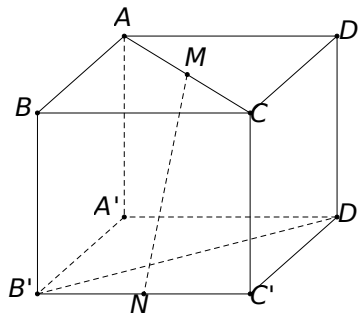
Gọi H là trung điểm của AB , có M nằm trên đường AB và nằm ngoài đoạn AB nên có $MA + MB = 2MH$.

Mặt khác, tam giác IHM vuông tại H nên $MH \leq MI$. Vậy $MA + MB \leq 2\sqrt{17}$.

Đẳng thức xảy ra khi đường thẳng qua M và tâm I của mặt cầu, tức AB lúc này là đường kính của mặt cầu.

Vậy giá trị lớn nhất của tổng $MA + MB$ là $2\sqrt{17}$.

Câu 61: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ cạnh a . Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và $B'C'$ (tham khảo hình vẽ bên). Khoảng cách giữa hai đường thẳng MN và $B'D'$ bằng



- A. $\sqrt{5}a$. B. $\frac{\sqrt{5}a}{5}$. C. $3a$. D. $\frac{a}{3}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1. (dùng tọa độ)

Đưa hình lập phương vào hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho

$$B'(0;0;0), C'(a;0;0), A'(0;a;0), D'(a;a;0), B(0;0;a), A(0;a;a), C(a;0;a)$$

Ta có : *) $M(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; a), N(\frac{a}{2}; 0; 0) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (0; \frac{-a}{2}; -a) = \frac{-a}{2}(0; 1; 2) \Rightarrow \overrightarrow{u_1}(0; 1; 2)$ là VTCP của MN .

*) $\overrightarrow{B'D'}(a; a; 0) = a(1; 1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{u_2}$ là VTCP của $B'D'$.

$$d(MN; B'D') = \frac{\left| \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2} \right] \cdot \overrightarrow{B'N} \right|}{\left| \left[\overrightarrow{u_1}; \overrightarrow{u_2} \right] \right|} = \frac{a}{3}$$

Cách 2.

Gọi P là trung điểm của $C'D'$. $E = A'C' \cap NP, I = A'C' \cap B'D'$.

Ta có : $d(MN; B'D') = d(B'D'; (BDPN)) = d(I; (BDPN)) = h$

Ta có h là độ dài đường cao trong tam giác vuông MIN .

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{MI^2} + \frac{1}{IE^2} = \frac{16}{2a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{9}{a^2} \Rightarrow h = \frac{a}{3}$$

Câu 62: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): x - z - 3 = 0$ và điểm $M(1; 1; 1)$. Gọi A là điểm thuộc tia Oz , B là hình chiếu của A lên (α) . Biết rằng tam giác MAB cân tại M . Diện tích của tam giác MAB bằng:

- A. $6\sqrt{3}$. B. $\frac{3\sqrt{3}}{2}$. C. $\frac{3\sqrt{123}}{2}$. D. $3\sqrt{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $A(0; 0; a)$ với $a > 0$. Đường thẳng AB đi qua điểm $A(0; 0; a)$ và có một vector chỉ phương

$$\overrightarrow{u} = (1; 0; -1) \text{ có phương trình là: } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = a - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$B \in (\alpha) \Rightarrow t - a + t - 3 = 0 \Rightarrow t = \frac{3+a}{2} \Rightarrow B\left(\frac{3+a}{2}; 0; \frac{a-3}{2}\right)$$

$$\text{Vì tam giác } MAB \text{ cân tại } M \Rightarrow MA = MB \Rightarrow 1 + 1 + (a-1)^2 = \left(\frac{a+1}{2}\right)^2 + 1 + \left(\frac{a-5}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow a^2 - 2a + 1 + 1 = \frac{a^2 + 2a + 1}{4} + \frac{a^2 - 10a + 25}{4} \Rightarrow 4a^2 - 8a + 8 = 2a^2 - 8a + 26 \Rightarrow 2a^2 = 18 \Rightarrow a = 3$$

$$\Rightarrow A(0;0;3) \text{ và } B(3;0;0).$$

Cách 1: $\overline{AM} = (1;1;-2)$, $\overline{BM} = (-2;1;1) \Rightarrow [\overline{AM}, \overline{BM}] = (3;3;3) \Rightarrow S_{ABM} = \frac{1}{2} \left| [\overline{AM}, \overline{BM}] \right|$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

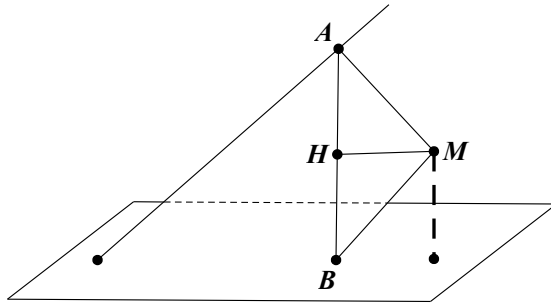
Cách 2: Gọi I là trung điểm của AB . Ta có $I\left(\frac{3}{2};0;\frac{3}{2}\right)$.

$$IM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-1)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

$$AB = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-3)^2} = 3\sqrt{2}.$$

Do đó $S_{ABM} = \frac{1}{2} IM \cdot AB = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \cdot 3\sqrt{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$

Cách 3:



$$f(x, y, z) = x - z - 3$$

Tam giác MAB cân tại M nên $f(A) = 2f(M) \Leftrightarrow -z_A - 3 = 2 \cdot (-3) \Rightarrow A(0;0;3)$

$$S_{ABM} = HM \cdot HB = d(M, (\alpha)) \sqrt{MA^2 - d^2(M, (\alpha))} = \frac{3}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{6 - \frac{9}{2}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

Câu 63: Cho biết có n mặt phẳng với phương trình tương ứng là $(P_i): x + a_i y + b_i z + c_i = 0$ ($i = 1, 2, \dots, n$) đi qua điểm $M(1;2;3)$ và không đi qua gốc tọa độ O , đồng thời cắt các trục tọa độ Ox, Oy, Oz theo thứ tự tại A, B, C sao cho hình chóp $OABC$ là hình chóp đều. Khi đó giá trị $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ bằng?

A. 3.

B. 1.

C. -4.

D. -1

Lời giải

Chọn D

Giả sử mặt phẳng $(P): x + ay + bz + c = 0$ thỏa mãn yêu cầu bài toán

$$+) (P) \cap Ox = A(-c; 0; 0), (P) \cap Oy = B\left(0; \frac{-c}{a}; 0\right), (P) \cap Oz = C\left(0; 0; \frac{-c}{b}\right)$$

Vì hình chóp $OABC$ là hình chóp đều, suy ra $OA = OB = OC$

$$\text{Nên ta có } |-c| = \left|\frac{-c}{a}\right| = \left|\frac{-c}{b}\right| \Rightarrow |a| = |b| = 1 \text{ (do } (P) \text{ không đi qua gốc tọa độ nên } c \neq 0)$$

$$+) \text{ Vì điểm } M(1; 2; 3) \in (P) \text{ nên suy ra: } 1 + 2a + 3b + c = 0$$

Nhận thấy nếu $a = 1, b = -1$ thì $c = 0$, trường hợp này không thỏa mãn do $c \neq 0$

Như vậy ta sẽ có 3 mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu bài toán lần lượt ứng với các trường hợp

$$a = b = 1, a = b = -1 \text{ và } a = -1, b = 1$$

$$\text{Vậy } a_1 = 1, a_2 = -1, a_3 = -1 \text{ suy ra } a_1 + a_2 + a_3 = -1.$$

Câu 64: Trong không gian hệ trục $Oxyz$ cho tam giác ABC có $A(1; 0; -1), B(2; 3; -1), C(-2; 1; 1)$

. Phương trình đường thẳng đi qua tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC và vuông góc với

mặt phẳng (ABC) là:

$$\text{A. } \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

$$\text{B. } \frac{x}{3} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{5}$$

$$\text{C. } \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{2}$$

$$\text{D. } \frac{x-3}{3} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-5}{5}$$

Lời giải

Chọn A.

Gọi d là đường thẳng cần tìm.

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{10}, AC = \sqrt{14}, BC = \sqrt{24} \Rightarrow \triangle ABC \text{ vuông tại } A.$$

$$\text{Gọi } I \text{ là tâm của đường tròn ngoại tiếp tam giác } ABC \Rightarrow I \text{ là trung điểm } BC \Rightarrow I(0; 2; 0).$$

$$\text{Mặt phẳng } (ABC) \text{ có VTPT } \vec{n} = [\vec{AB}, \vec{AC}] = (3; -1; 5).$$

$$\text{Do } d \perp (ABC) \Rightarrow \text{VTCP của } d \text{ là: } \vec{u} = \vec{n} = (3; -1; 5).$$

$$\text{Vậy phương trình đường thẳng } d \text{ là: } \frac{x-3}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-5}{5}.$$

Câu 65: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 3)$, đường thẳng $(d): \frac{x+2}{1} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-2}$

và mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = 16$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng (Δ) qua A ,

(d) và tiếp xúc với (S) và tiếp xúc với

A. 0 .**B.** 1 .**C.** 2 .**D.** Vô số.**Lời giải****Chọn B.**

Gọi VTCP (Δ) là $\vec{u} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$

Mặt cầu (S) : Tâm $I(1; -2; 3), R = 4$

$\overrightarrow{IA} = (0; 4; 0)$, $[\overrightarrow{IA}, \vec{u}] = (4c; 0; -4a)$. Ta có

$$d(I; (\Delta)) = \frac{[\overrightarrow{IA}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 4 \Leftrightarrow 4\sqrt{a^2 + c^2} = 4\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow b = 0$$

Mà VTCP (d) vuông góc VTCP (Δ) nên $a + 3b - 2c = 0 \Leftrightarrow a = 2c$.

Chọn $c = 1 \Rightarrow a = 2$. Nên có 1 VTCP của phương trình đường thẳng (Δ) . Vậy có 1 PT thỏa.

Câu 66: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $B(1; 2; -5)$, đường thẳng (d) :
 $\frac{x-6}{1} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+1}{-1}$ và mặt cầu (S) : $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 4$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng (Δ) qua B , vuông góc (d) và tiếp xúc với (S)

A. 0 .**B.** 1 .**C.** 2 .**D.** Vô số.**Lời giải****Chọn C.**

Gọi VTCP (Δ) là $\vec{u} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$

Mặt cầu (S) : Tâm $I(1; 2; -1), R = 4$

$\overrightarrow{IB} = (0; 0; -4)$, $[\overrightarrow{IB}, \vec{u}] = (4b; -4a; 0)$.

Ta có VTCP (d) vuông góc VTCP (Δ) nên $a + 4b - c = 0 \Leftrightarrow c = a + 4b$.

$$d(I; (\Delta)) = \frac{[\overrightarrow{IB}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = 2 \Leftrightarrow 4\sqrt{a^2 + b^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 4(a^2 + b^2) = a^2 + b^2 + (a + 4b)^2$$

$$\Leftrightarrow 2a^2 - 8ab - 13b^2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{4 \pm \sqrt{42}}{2} b$$

Chọn $b = 2 \Rightarrow a = 4 \pm \sqrt{42}$. Nên có 2 VTCP của phương trình đường thẳng (Δ) . Vậy có 2 PT thỏa.

Câu 67: Trong không gian tọa độ $Oxyz$, cho điểm $C(0;6;-5)$, đường thẳng $(d): \frac{x-6}{-1} = \frac{y-5}{2} = \frac{z+1}{5}$ và mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-6)^2 + (z+5)^2 = 7$. Hỏi có bao nhiêu đường thẳng (Δ) qua C , vuông góc (d) và tiếp xúc với (S)

A. 0. **B.** 1. **C.** 2. **D.** Vô số.

Lời giải

Chọn A.

Gọi VTCP (Δ) là $\vec{u} = (a; b; c), a^2 + b^2 + c^2 > 0$

Mặt cầu (S) : Tâm $I(-2;6;-5), R = \sqrt{7}$

$$\overrightarrow{IC} = (2;0;0), [\overrightarrow{IC}, \vec{u}] = (0; -2c; 2b)$$

Ta có VTCP (d) vuông góc VTCP (Δ) nên $-a + 2b + 5c = 0 \Leftrightarrow a = 2b + 5c$.

$$d(I; (\Delta)) = \frac{[\overrightarrow{IC}, \vec{u}]}{|\vec{u}|} = \sqrt{7} \Leftrightarrow 2\sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{7}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow 3(b^2 + c^2) + 7(2b + 5c)^2 = 0$$

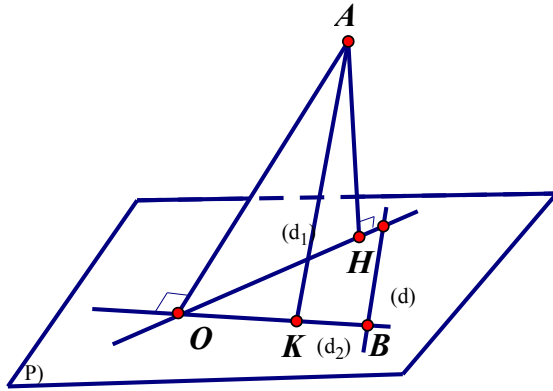
$\Leftrightarrow 31b^2 + 140bc + 178c^2 = 0$ có nghiệm $b = c = 0 \Rightarrow a = 0$ không thỏa mãn điều kiện VTCP $\vec{u}$

Vậy không có PT thỏa.

Câu 68: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1;1;1)$ và đường thẳng $(d): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + t \\ z = 3 - t \end{cases}$. Trong tất cả các đường thẳng đi qua gốc tọa độ O , cắt đường thẳng (d) , (d_1) là đường thẳng mà khoảng cách đến A là lớn nhất, (d_2) là đường thẳng mà khoảng cách đến A là nhỏ nhất. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng (d_1) và (d_2) .

A. 0. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{2}}{4}$. **D.** $\frac{1}{4}$.

Lời giải



Chọn A.

Gọi (P) là mặt phẳng chứa (d) và đi qua O : $(P) : x - 2y - z = 0$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên mặt phẳng (P)

$$\Rightarrow H\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \overrightarrow{OH} = \frac{1}{3}(4; 1; 2) = \frac{1}{3}\vec{u}_1$$

(d_2) là đường thẳng qua O và H . Suy ra (d_2) có một VTCP $\vec{u}_1 = (4; 1; 2)$.

Gọi B là giao điểm của (d) và $(d_2) \Rightarrow B(1+t; -1+t; 3-t) \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (1+t; -1+t; 3-t)$

Khoảng cách từ A đến (d_2) lớn nhất khi

$$OA \perp d_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0 \Leftrightarrow t = -3 \Rightarrow \overrightarrow{OB} = (-2; -4; 6)$$

$\Rightarrow (d_2)$ có một VTCP $\vec{u}_2 = (1; 2; -3)$

$$\cos(d_1, d_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = 0$$

Ta có

Vậy chọn A.

Câu 69: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1; 1; -2)$, $B(-1; 0; 2)$. Gọi Δ_1 đường thẳng qua A , vuông góc với d sao cho khoảng cách từ B tới Δ_1 là nhỏ nhất và Δ_2 là đường thẳng qua A , cắt d sao cho khoảng cách từ B tới Δ_2 là nhỏ nhất. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 .

- A. $\frac{\sqrt{15}}{75}$. B. $\frac{25\sqrt{1767}}{1767}$. C. $\frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\frac{4\sqrt{126}}{64}$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với d . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (P) . Khi đó, đường thẳng Δ_1 đi qua A và H thỏa YCBT.

Ta có: $(P): x+2y-z-5=0$ và $H\left(\frac{1}{3}; \frac{8}{3}; \frac{2}{3}\right)$. Δ_1 có một VTCP: $\vec{u}_1 = \overrightarrow{AH} = (-2; 5; 8)$

Gọi (Q) là mặt phẳng đi qua A và chứa d . Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên (Q) .

Khi đó, đường thẳng Δ_2 đi qua A và K thỏa YCBT

Ta có: $(Q): x+z+1=0$ và $K(-2; 0; 1)$. Δ_2 có một VTCP: $\vec{u}_2 = \overrightarrow{AK} = (-3; -1; 3)$

$$\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{25\sqrt{1767}}{1767}$$

Vậy chọn B

Câu 70: Trong không gian $Oxyz$, Cho đường thẳng $\Delta: \frac{x+1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{-1}$ và hai điểm $A(1; 2; -1)$, $B(3; -1; -5)$. Gọi d đường thẳng đi qua điểm A và cắt đường thẳng Δ sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là lớn nhất. Tính cosin góc giữa hai đường thẳng Δ và d .

- A. $\frac{\sqrt{406}}{406}$. B. 0 . C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$. D. $\frac{3\sqrt{21}}{13}$.

Lời giải

Chọn D.

Giả sử d cắt Δ tại $M \Rightarrow M(-1+2t; 3t; -1-t)$, $\overrightarrow{AM} = (-2+2t; 3t-2; -t)$, $\overrightarrow{AB} = (2; -3; -4)$

Gọi H là hình chiếu của B trên d . Khi đó, $d(B, d) = BH \leq BA$. Vậy $d(B, d)$ lớn nhất bằng

$$BA \Leftrightarrow H \equiv A \Leftrightarrow AM \perp AB \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow t = 2$$

$\Rightarrow d$ có một VTCP: $\vec{u}_2 = \overrightarrow{AM} = (1; 2; -1)$

Δ có một VTCP: $\vec{u}_1 = (2; 3; -1)$

$$\cos(\Delta, d) = \frac{|\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2|}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|} = \frac{3\sqrt{21}}{13}$$

Ta có

Vậy chọn D

Câu 71: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$, $K\left(-\frac{8}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$, $O(0;0;0)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, C trên các cạnh BC, CA, AB . Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

- A. $d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.
 B. $d: \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}$.
 C. $d: \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{17}{9}}{2}$.
 D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-6}{2}$.

Lời giải:

Chọn A.

Cách 1: Tọa độ I : $OH = 3, OK = 4, HK = 5$. Gọi I là trực tâm tam giác ABC .

$$\begin{cases} x_I = \frac{4 \cdot 2 + 5 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{8}{3}\right)}{12} = 0 \\ y_I = \frac{3 \cdot \frac{4}{3} + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 0}{12} = 1 \\ z_I = \frac{3 \cdot \frac{8}{3} + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 0}{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1).$$

Ta có:

$$\overline{IH} = (2;1;0) \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$A \in IH \Rightarrow A(2t;1+t;1)$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OI} = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A(-4;-1;1) \in d \\ \overline{u_d} = [\overline{OI}, \overline{OH}] = (-1;2;-2) \end{cases} \Rightarrow (d): \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

Cách 2: VTPT của (ABC) là $\vec{n} = [\overline{OH}, \overline{OK}] = 4(1;-2;2)$.

$$\text{Vì } \overline{OH} \cdot \overline{OK} = 0 \Rightarrow \angle HOK = 90^\circ.$$

$$\text{Gọi } (\alpha) \text{ là mặt phẳng đi qua } O, \vec{n}_\alpha = \overline{OK} = \frac{4}{3}(-2;1;2) \Rightarrow (\alpha): -2x + y + 2z = 0$$

$$\text{Gọi } (\beta) \text{ là mặt phẳng đi qua } O, \vec{n}_\alpha = \overline{OH} = (2;2;1) \Rightarrow (\alpha): 2x + 2y + z = 0$$

Ta có $d(A,(\alpha))=d(A,(\beta))$, đổi chiều 4 phương án A,B,C,D thấy $A(-4;-1;1)$ thỏa mãn. Vậy chọn A

Câu 72: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác nhọn ABC có $H(2;2;1)$; $K(-\frac{8}{3};\frac{4}{3};\frac{8}{3})$; $O(0;0;0)$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của A,B,C trên các cạnh BC,CA,AB . Đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:

- A. $d: \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}$.
 B. $d: \frac{x-\frac{8}{3}}{1} = \frac{y-\frac{2}{3}}{-2} = \frac{z+\frac{2}{3}}{2}$.
 C. $d: \frac{x+\frac{4}{9}}{1} = \frac{y-\frac{17}{9}}{-2} = \frac{z-\frac{17}{9}}{2}$.
 D. $d: \frac{x}{1} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z-6}{2}$.

Lời giải:

Chọn A.

Cách 1: Tọa độ I : $OH=3, OK=4, HK=5$. Gọi I là trực tâm tam giác ABC .

$$\begin{cases} x_I = \frac{4.2+5.0+3.(-\frac{8}{3})}{12} = 0 \\ y_I = \frac{3.\frac{4}{3}+4.2+5.0}{12} = 1 \\ z_I = \frac{3.\frac{8}{3}+4.1+5.0}{12} = 1 \end{cases} \Rightarrow I(0;1;1).$$

Ta có:

$$\overline{IH} = (2;1;0) \Rightarrow (\Delta): \begin{cases} x = 2t \\ y = 1+t \\ z = 1 \end{cases}$$

$$A \in IH \Rightarrow A(2t;1+t;1)$$

$$\overline{OA} \cdot \overline{OI} = 0 \Leftrightarrow t = -2$$

$$\text{Suy ra } \begin{cases} A(-4;-1;1) \in d \\ \vec{u}_d = [\overline{OI}, \overline{OH}] = (-1;2;-2) \end{cases} \Rightarrow (d): \frac{x+4}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-1}{2}.$$

Cách 2: VTPT của (ABC) là $\vec{n} = [\overline{OH}, \overline{OK}] = 4(1;-2;2)$.

$$\text{Vì } \overline{OH} \cdot \overline{OK} = 0 \Rightarrow \widehat{HOK} = 90^\circ.$$

$$\text{Gọi } (\alpha) \text{ là mặt phẳng đi qua } O, \vec{n}_\alpha = \overline{OK} = \frac{4}{3}(-2;1;2) \Rightarrow (\alpha): -2x + y + 2z = 0.$$

$$\text{Gọi } (\beta) \text{ là mặt phẳng đi qua } O, \vec{n}_\alpha = \overline{OH} = (2;2;1) \Rightarrow (\alpha): 2x + 2y + z = 0.$$

Ta có $d(A,(\alpha))=d(A,(\beta))$, đổi chiều 4 phương án A,B,C,D thấy $A(-4;-1;1)$ thỏa mãn. Vậy chọn A

Câu 73: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1;2;3)$ và $B(3;-1;2)$. Điểm M thỏa mãn $MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB}$ có tọa độ là:

- A. $\left(\frac{5}{3}; 0; \frac{7}{3}\right)$ B. $(7; -4; 1)$ C. $\left(1; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}\right)$ D. $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{5}{3}\right)$.

Lời giải.

Chọn B.

Từ giả thiết $MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{4MB}{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nên ba điểm M, A, B thẳng hàng và A, B nằm cùng phía so với điểm M do $\frac{4MB}{MA}$ dương.

Lại có $MA \cdot \overrightarrow{MA} = 4MB \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow (MA \cdot \overrightarrow{MA})^2 = (4MB \cdot \overrightarrow{MB})^2 \Leftrightarrow MA^4 = 16MB^4 \Leftrightarrow MA = 2MB$.

Vậy B là trung điểm của MA . Khi đó ta được tọa độ điểm $M(7; -4; 1)$.

Câu 74: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;2;3)$ và $B(5;0;1)$. Điểm M thỏa mãn $MA \cdot \overrightarrow{MA} = -4MB \cdot \overrightarrow{MB}$ có tọa độ là:

- A. $(3; 1; 2)$ B. $(7; -4; 1)$ C. $\left(\frac{11}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ D. $\left(\frac{2}{9}; \frac{1}{9}; \frac{5}{9}\right)$.

Lời giải.

Chọn C.

Từ giả thiết $MA \cdot \overrightarrow{MA} = -4MB \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MA} = \frac{-4MB}{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ nên ba điểm M, A, B thẳng hàng và A, B nằm khác phía so với điểm M do $\frac{-4MB}{MA}$ âm.

Lại có $MA \cdot \overrightarrow{MA} = -4MB \cdot \overrightarrow{MB} \Rightarrow (MA \cdot \overrightarrow{MA})^2 = (4MB \cdot \overrightarrow{MB})^2 \Leftrightarrow MA^4 = 16MB^4 \Leftrightarrow MA = 2MB$.

$\Rightarrow \overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{MB}$.

Gọi tọa độ $M(x; y; z)$, khi đó
$$\begin{cases} 1-x = -2(5-x) \\ 2-y = -2(0-y) \\ 3-z = -2(1-z) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{3} \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{5}{3} \end{cases}.$$

Câu 75: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 3; 5), B(1; -1; 1)$. Phương trình mặt phẳng (P) có dạng $ax + by + cz - 1 = 0$, biết M, N lần lượt là hình chiếu của A, B trên (P) và

$$AM = \frac{20}{3}; \quad BN = \frac{2}{3}. \text{ Tính } a + b + c ?$$

A. 4.

B. 9.

C. 5.

D. 7.

Lời giải

Chọn C.

$$+) \quad AB = 6 < AM = \frac{20}{3} \Rightarrow AB \text{ cùng phía đối với } (P)$$

$$+) \quad AM \neq BN \Rightarrow AB \cap (P) = I\left(\frac{7}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{5}{9}\right)$$

$$+) \quad \frac{IA}{IB} = \frac{AM}{BN} = \frac{20}{3} \cdot \frac{3}{2} = 10 \Rightarrow \overline{IA} = 10\overline{IB} \Rightarrow I\left(\frac{7}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{5}{9}\right)$$

$$+) \quad IA = \frac{20}{3}; IB = \frac{2}{3} \Rightarrow I \equiv M \equiv N \Rightarrow (P) \perp AB$$

$$+) \quad (P) \text{ đi qua } I\left(\frac{7}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{5}{9}\right) \text{ nhận } \overline{AB}(-2; -4; -4) \text{ làm véc tơ pháp tuyến}$$

$$\Rightarrow pt(P): x + 2y + 2z + 1 = 0 \Rightarrow a + b + c = 5.$$

Câu 76: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với a, b, c dương. Biết A, B, C di động trên các tia Ox, Oy, Oz sao cho $a + b + c = 2$. Biết rằng khi a, b, c thay đổi thì quỹ tích tâm hình cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc mặt phẳng (P) cố định. Tính khoảng cách từ $M(2016; 0; 0)$ tới mặt phẳng (P) .

A. 2017.

B. $\frac{2014}{\sqrt{3}}$.C. $\frac{2015}{\sqrt{3}}$.D. $\frac{2016}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn C.

+) Gọi (α) , (β) , (γ) lần lượt là mặt phẳng trung trực của các đoạn OA, OB, OC .

Suy ra $(\alpha): x - \frac{a}{2} = 0$; $(\beta): y - \frac{a}{2} = 0$; $(\gamma): z - \frac{a}{2} = 0$.

+) Gọi I là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $O.ABC$ thì $I = (\alpha) \cap (\beta) \cap (\gamma)$.

Tìm được $I\left(\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right)$

+) $a + b + c = 2 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 1$, do đó $I \in (P): x + y + z = 1$

+) $d(M, (P)) = \frac{|2016 - 1|}{\sqrt{3}} = \frac{2015}{\sqrt{3}}$.

Câu 77: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$,

trong đó $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu

$(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính thể tích của khối tứ diện $O.ABC$.

A. $\frac{2}{9}$.

B. $\frac{1}{6}$.

C. $\frac{3}{8}$.

D. $\frac{5}{6}$.

Lời giải**Chọn A.**

+) Ta có $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

+) Mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = \sqrt{\frac{72}{7}}$.

+) Mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với $(S) \Leftrightarrow d(I; (ABC)) = R \Leftrightarrow \frac{\left| \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1 \right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}}$.

+) Áp dụng BĐT Bunhiacopski ta có

$$(1^2 + 2^2 + 3^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \geq \left(\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \right)^2 = 7^2 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \geq \frac{7}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow a=2, b=1, c=\frac{2}{3},$$

+) Dấu "=" xảy ra khi đó $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{2}{9}$.

Câu 78: Phương trình của mặt phẳng nào sau đây đi qua điểm $M(1; 2; 3)$ và cắt ba tia Ox , Oy , Oz lần lượt tại A , B , C sao cho thể tích tứ diện $OABC$ nhỏ nhất?

A. $6x + 3y + 2z + 18 = 0$.

B. $6x + 3y + 3z - 21 = 0$.

C. $6x + 3y + 3z + 21 = 0$.

D. $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Lời giải

Chọn D.

+) Giả sử (ABC) : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ với $A(a; 0; 0)$, $B(0; b; 0)$, $C(0; 0; c)$, $(a, b, c > 0)$

+) Thể tích tứ diện $O.ABC$: $V = \frac{1}{6}abc$

+) $M(1; 2; 3)$ thuộc (ABC) : $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1$.

+) Ta có: $1 = \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} \geq 3\sqrt[3]{\frac{6}{abc}} \Rightarrow 1 \geq \frac{27 \cdot 6}{abc} \Rightarrow \frac{1}{6}abc \geq 27 \Rightarrow V \geq 27$

$$\Leftrightarrow V = 27 \Leftrightarrow \frac{1}{a} = \frac{2}{b} = \frac{3}{c} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \\ c = 9 \end{cases}$$

+) V đạt giá trị nhỏ nhất

+) Vậy (ABC) : $6x + 3y + 2z - 18 = 0$.

Câu 79: Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+3}{4}$.

Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là:

A. $\frac{x-7}{3} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+9}{-1}$.

B. $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-1}$.

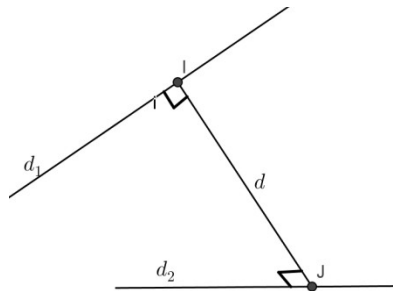
C. $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

D. $\frac{x+7}{3} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-9}{-1}$.

Lời giải

Chọn C. Giả sử d cắt d_1 và d_2 tại I, J .

Ta có $I \in d_1$ suy ra $I(3+t; -1-t; 4+t)$, $J \in d_2$ suy ra $J(2+2u; 4-u; -3+4u)$.



Suy ra $\overrightarrow{IJ}(2u-t-1; -u+t+5; 4u-t-7)$.

Gọi $\vec{u}$ là véc tơ chỉ phương của đường thẳng d . Suy ra $\begin{cases} \vec{u} \perp \vec{u}_1 \\ \vec{u} \perp \vec{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \vec{u} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = (-3; -2; 1)$

Suy ra $\overrightarrow{IJ}$ cùng phương với $\vec{u}$, suy ra $\frac{2u-t-1}{-3} = \frac{-u+t+5}{-2} = \frac{4u-t-7}{1}$

Suy ra $\begin{cases} -7u+5t=-17 \\ 7u-t=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=-1 \\ t=-2 \end{cases} \Rightarrow I(1; 1; 2)$

Vậy phương trình đường vuông góc chung là $\frac{x-1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-2}{-1}$.

Câu 80: Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-3}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+3}{3}$.

Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là:

A. $\frac{x-7}{-5} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z+9}{-1}$.

B. $\frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{1}$.

C. $\begin{cases} x = \frac{22}{5} + 2t \\ y = \frac{8}{5} + 5t \\ z = \frac{21}{5} + t \end{cases}$.

D. $\frac{x+7}{5} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-9}{-1}$.

Câu 81: Cho hai đường thẳng chéo nhau $d_1: \frac{x-3}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-4}{1}$ và $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+3}{2}$.

Phương trình đường vuông góc chung của d_1 và d_2 là:

A. $\frac{x-7}{1} = \frac{y-3}{4} = \frac{z+9}{-1}$.

B. $\frac{x-3}{-4} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-1}{-1}$.

C. $\frac{x-12}{1} = \frac{y+4}{4} = \frac{z-7}{1}$.

D. $\frac{x+7}{-1} = \frac{y+3}{-4} = \frac{z-9}{-1}$.

Câu 82: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho đường thẳng (Δ) đi qua $M(1;1;-2)$ song song với mặt phẳng $(P): x-y-z-1=0$ và cắt đường thẳng $d: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{3}$. Phương trình của đường thẳng (Δ) là:

A. $\frac{x+1}{2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{-3}$.

B. $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$.

C. $\frac{x+5}{-2} = \frac{y+3}{1} = \frac{z}{-1}$.

D. $\frac{x+1}{-2} = \frac{y+1}{5} = \frac{z-2}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Giả sử điểm $N(-1-2t; 1+t; 1+3t)$ là giao điểm của (Δ) và d .

$$\Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-2t-2; t; 3t+3)$$

Vì $(\Delta) \parallel (P)$ nên ta có: $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{5}{6} \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (-\frac{1}{3}; -\frac{5}{6}; \frac{1}{2}) \Rightarrow \vec{u}_{\Delta} = (2; 5; -3)$

$\Rightarrow$ phương trình của (Δ) là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{5} = \frac{z+2}{-3}$

Câu 83: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1;0;2)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{2}$. Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua A , vuông góc và cắt d .

A. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{-1}$.

C. $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{1}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-3} = \frac{z-2}{1}$.

Câu 84: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-3}$ và điểm $A(1;-1;-3)$. Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ đi qua A , vuông góc và cắt đường thẳng d là

A. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{-3}$.

B. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{4} = \frac{z+3}{2}$.

C. $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+3}{1}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+3}{1}$.

Câu 85: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1;5;0), B(3;3;6)$ và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2t \end{cases}$$

. Một điểm M thay đổi trên d sao cho chu vi tam giác ABM nhỏ nhất. Khi đó tọa độ điểm M và chu vi tam giác ABM là:

A. $M(1;0;2), P = 2\sqrt{11} + \sqrt{29}$.

B. $M(1;2;2), P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$.

C. $M(1;2;2), P = \sqrt{11} + \sqrt{29}$.

D. $M(1;0;2), P = 2(\sqrt{11} + \sqrt{29})$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1. Phương pháp trắc nghiệm

- Kiểm tra thấy chỉ có điểm $M(1;0;2)$ thuộc d nên lại phương án B, C .

- Với $M(1;0;2)$ tính chi vi tam giác ABM suy ra chọn D.

Cách 2.

- Lấy điểm $M(-1+2t; 1-t; 2t)$ thuộc d .

- Tính chu vi tam giác ABM : $P = \sqrt{9t^2 + 20} + \sqrt{9t^2 - 36t + 56} + 2\sqrt{11}$

$$= \sqrt{(3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + \sqrt{(6-3t)^2 + (2\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{11}$$

$$\geq \sqrt{(3t+6-3t)^2 + (2\sqrt{5}+2\sqrt{5})^2} + 2\sqrt{11} = 2(\sqrt{29} + \sqrt{11}). \quad (\text{dùng BĐT vector})$$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3t}{6-3t} = \frac{2\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \geq 0 \Leftrightarrow t = 1 \Rightarrow M(1;0;2)$. Chọn D.

Câu 86: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}$ và điểm $A(1;4;2)$. Gọi (α) là mặt phẳng chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất. Mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là

- A.** $\vec{n}_\alpha = (5; -2; 6)$ **B.** $\vec{n}_\alpha = (5; 2; 4)$ **C.** $\vec{n}_\alpha = (10; 22; -1)$ **D.** $\vec{n}_\alpha = (10; -6; 13)$

Lời giải

Chọn C

Ta có $d \subset (\alpha) \Rightarrow d(A; (\alpha)) \leq d(A; d) \Rightarrow d(A; (\alpha))_{\max} = d(A; d)$ Khi hình chiếu của A trên d cũng là hình chiếu của A trên (α) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d .

Ta có $H \in d: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2} \Rightarrow H(1-2t; -2+t; 2t)$.

$AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \vec{u}_d = 0$. (1) (với $\vec{u}_d$ là một vectơ chỉ phương của d)

Ta có $\overrightarrow{AH}(-2t; t-6; 2t-2)$, $\vec{u}_d = (-2; 1; 2)$.

Từ (1) $\Rightarrow 4t + t - 6 + 2 \cdot (2t - 2) = 0 \Leftrightarrow 9t - 10 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{10}{9} \Rightarrow H\left(-\frac{11}{9}; -\frac{8}{9}; \frac{20}{9}\right)$.

Vậy mặt phẳng (α) có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AH} = \left(-\frac{20}{9}; -\frac{44}{9}; \frac{2}{9}\right)$

$\Rightarrow \vec{n}_\alpha(10; 22; -1)$ cũng là một vectơ pháp tuyến của mặt phẳng (α) .

Câu 87: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(-1; 2; 4)$ và $N(0; 1; 5)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua M sao cho khoảng cách từ N đến (P) là lớn nhất. Khi đó, khoảng cách d từ O đến mặt phẳng (P) bằng bao nhiêu?

- A.** $d = \frac{\sqrt{3}}{3}$ **B.** $d = \sqrt{3}$ **C.** $d = \frac{1}{3}$ **D.** $d = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $M \in (P) \Rightarrow d(M; (P)) \leq MN \Rightarrow d(M; (P))_{\max} = MN$ khi $MN \perp (P)$.

Vậy (P) qua $M(-1; 2; 4)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MN} = (1; -1; 1)$.

Phương trình mặt phẳng $(P): 1 \cdot (x+1) - 1 \cdot (y-2) + 1 \cdot (z-4) = 0 \Leftrightarrow x - y + z - 1 = 0$.

$$d(O; (P)) = \frac{|0-0+0-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Vậy .

Câu 88: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3;2;-1)$ và đường thẳng $d: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

A. $2x+y-3z+3=0$. **B.** $x+2y-z-1=0$. **C.** $3x+2y-z+1=0$. **D.** $2x-y-3z+3=0$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $d \subset (P) \Rightarrow d(A; (P)) \leq d(A; d) \Rightarrow d(A; (P))_{\max} = d(A; d)$ Khi hình chiếu của A trên d cũng là hình chiếu của A trên (P) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của A trên d .

$$H \in d: \begin{cases} x=t \\ y=t \\ z=1+t \end{cases} \Rightarrow H(t; t; 1+t)$$

Ta có

$$AH \perp d \Rightarrow \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{u_d} = 0 \quad (1) \text{ (với } \overrightarrow{u_d} \text{ là một vectơ chỉ phương của } d)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AH}(t-3; t-2; t+2), \quad \overrightarrow{u_d} = (1; 1; 1)$$

$$\text{Từ (1)} \Rightarrow t-3+t-2+t+2=0 \Leftrightarrow 3t-3=0 \Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow H(1; 1; 2)$$

Vậy mặt phẳng (P) qua $H(1; 1; 2)$ và có một vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AH} = (-2; -1; 3)$.

$$\text{Phương trình mặt phẳng } (P): -2 \cdot (x-1) - 1 \cdot (y-1) + 3 \cdot (z-2) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3z + 3 = 0$$

Câu 89: Trong không gian với hệ tọa độ Oxy cho mặt phẳng $(P): 2x - y - z + 1 = 0$ và hai điểm $A(2; 1; 1), B(3; 3; 2)$. Điểm $M(a; b; c)$ với $b > 0$ nằm trong mặt phẳng (P) sao cho $OM \perp AB$ và $MA = \sqrt{26}$. Giá trị của tổng $a + b + c$ bằng:

A. 0. **B.** 4. **C.** 2. **D.** -2.

Lời giải

Chọn D.

$$\overrightarrow{OM} = (a; b; c) \text{ và } \overrightarrow{AB} = (1; 2; 1)$$

Từ giả thiết ta có hệ phương trình
$$\begin{cases} 2a - b - c + 1 = 0 \\ a + 2b + c = 0 \\ (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 26 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a - b + 1 = c \\ 3a + b + 1 = 0 \\ (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5a + 2 = c \\ b = -3a - 1 \\ (a-2)^2 + (b-1)^2 + (c-1)^2 = 26 \end{cases}$$

(Vì $b < 0$ nên $a < \frac{-1}{3}$) Từ hệ trên ta suy ra phương trình:

$$(a-2)^2 + (-3a-2)^2 + (5a+1)^2 = 26 \Rightarrow 35a^2 + 18a - 17 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{17}{35} \end{cases}$$

Kết hợp với điều kiện $a < \frac{-1}{3}$ ta được $a = -1 \Rightarrow b = 2, c = -3$ nên $a + b + c = -2$.

Câu 90: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x + y - z - 1 = 0$. Ba điểm $A(2; 0; 1), B(1; 1; 1)$ và $I(0; 1; 3)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc mặt phẳng (P) sao cho $IM \perp AB$ và $AM = 3\sqrt{2}$. Tính tổng $S = a + b + c$, biết rằng $b > 0$.

A. -3.

B. 9.

C. -9.

D. 11.

Lời giải

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-1; 1; 0)$ và $\overrightarrow{IM} = (a; b-1; c-3)$.

Lập luận tương tự, ta có hệ phương trình:
$$\begin{cases} -a + b - 1 = 0 \\ a + b - c - 1 = 0 \\ (a-2)^2 + b^2 + (c-1)^2 = 18 \end{cases}$$

Giải ra ta được $\begin{cases} a = -1; b = 0; c = -2 \\ a = 2, b = 3, c = 4 \end{cases}$, do $b > 0$ nên ta nhận được $M(2; 3; 4)$.

Câu 91: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(3; 1; 2), B(-3; 1; 0)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 3z - 14 = 0$. Gọi M là điểm thuộc (P) sao cho $\triangle AMB$ vuông tại M . Khoảng cách từ M đến (Oxy) bằng:

A. 1.

B. 5.

C. 4.

D. 3.

Lời giải

Chọn C.

Ta có: $\angle AMB = 90^\circ$ suy ra M thuộc mặt cầu (S) đường kính AB .

Gọi I là trung điểm AB , khi đó $I(0;0;1)$ và $R = \frac{AB}{2} = \sqrt{11}$.

Ta tính được $d(I;(P)) = \sqrt{11} = R$ suy ra (P) và mặt cầu (S) tiếp xúc nhau hay M là tiếp điểm của (P) và (S) . Vậy M là hình chiếu của I trên (P) .

Phương trình đường thẳng qua I và vuông góc với (P) là:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình:
$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 1 + 3t \\ x + y + 3z - 14 = 0 \end{cases} \text{ suy ra } t = 1.$$

Suy ra $M(1;1;4) \Rightarrow d(M;(Oxy)) = 4$.

Câu 92: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z + 4 = 0$ và hai điểm $A(1;2;-1)$, $B(-1;0;3)$. Mặt cầu (S) có tâm $I(a;b;c)$ tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại A và đi qua điểm B . Giá trị của tích abc bằng

A. 3.

B. -6

C. 4.

D. -2

Lời giải**Chọn B**

Do $A(1;2;-1) \in (P)$ và mặt cầu (S) tiếp xúc với (P) tại A nên có tâm I nằm trên đường thẳng d là đường thẳng qua I và vuông góc với (P) .

Phương trình đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$

$\Rightarrow I(1+t; 2-2t; -1+t)$

Do mặt cầu (S) qua B nên

$$d(I;(P)) = IB \Leftrightarrow \frac{|1+t-2(2-2t)-1+t+4|}{\sqrt{6}} = \sqrt{(-2-t)^2 + (-2+2t)^2 + (4-t)^2}$$

$$\sqrt{6}|t| = \sqrt{6t^2 - 12t + 24} \Leftrightarrow t = 2$$

$$\Rightarrow I(3; -2; 1) \Rightarrow abc = -6$$

Câu 93: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ tâm I và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M .

- A. $M(-1; 0; 4)$ B. $M(0; 1; 2)$ **C. $M(3; 4; 2)$** D. $M(4; 1; 2)$

Lời giải

Chọn C

Ta có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 3$. Do $d(I; (P)) = 9 > R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) . Do H là hình chiếu của I lên (P) và MH lớn nhất nên M là giao điểm của đường thẳng IH với mp (P) .

$$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{n_{(P)}} = (2; 2; -1)$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } IH \text{ là } \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

$$\text{Giao điểm của } IH \text{ với } (S): 9t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow M_1(3; 4; 2) \text{ và } M_2(-1; 0; 4)$$

$$M_1H = d(M_1; (P)) = 12; \quad M_2H = d(M_2; (P)) = 6$$

Vậy điểm cần tìm là $M(3; 4; 2)$.

Câu 94: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu

$(S): x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ có bán kính $R = \sqrt{19}$, đường thẳng $d: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2 - 4t \\ z = -1 - 4t \end{cases}$ và mặt phẳng $(P): 3x - y - 3z - 1 = 0$. Trong các số $\{a; b; c; d\}$ theo thứ tự dưới đây, số nào thỏa mãn $a + b + c + d = 43$, đồng thời tâm I của (S) thuộc đường thẳng d và (S) tiếp xúc mặt phẳng (P) ?

- A. $\{-6; -12; -14; 75\}$ B. $\{6; 10; 20; 7\}$ C. $\{-10; 4; 2; 47\}$ D. $\{3; 5; 6; 29\}$

Lời giải

Đáp án A

Ta có $I \in d \Rightarrow I(5+t; 2-4t; -1-4t)$

Do (S) tiếp xúc với (P) nên $d(I; (P)) = R = \sqrt{19} \Leftrightarrow |19+19t| = 19 \Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ t=-2 \end{cases}$

Mặt khác (S) có tâm $I\left(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2}; -\frac{c}{2}\right)$; bán kính $R = \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{4}} - d = \sqrt{19}$

Xét khi $t=0 \Rightarrow I(5; -2; -1) \Rightarrow \{a; b; c; d\} = \{-10; 4; 2; 47\}$

Do $\frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d \neq 19$ nên ta loại trường hợp này

Xét khi $t=2 \Rightarrow \{a; b; c; d\} = \{-6; -12; -14; 75\}$

Do $\frac{a^2+b^2+c^2}{4} - d = 19$ nên thỏa .

Câu 95: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng Δ đi qua gốc tọa độ O và điểm $I(0; 1; 1)$. Gọi S là tập hợp các điểm nằm trên mặt phẳng (Oxy) , cách đường thẳng Δ một khoảng bằng 6. Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi S .

- A. 36π . B. $36\sqrt{2}\pi$. C. $18\sqrt{2}\pi$. D. 18π

Lời giải

Chọn B.

Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (0; 1; 1)$ và đi qua gốc tọa độ $O(0; 0; 0)$.

Gọi $M(a; b; 0)$ là điểm thuộc mặt phẳng (Oxy) , cách Δ một khoảng bằng 6.

Ta có: $d(M, \Delta) = \frac{\|[\overrightarrow{OM}, \vec{u}]\|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{2a^2+b^2}}{\sqrt{2}}$. Ta được: $2a^2+b^2=36 \Leftrightarrow \frac{a^2}{36} + \frac{b^2}{72} = 1$.

Như vậy tập hợp điểm M là elip (E) trong mặt phẳng tọa độ (Oxy) , có phương trình:

$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{72} = 1$, nên có nửa độ dài các trục lần lượt là 6 và $6\sqrt{2}$ có diện tích bằng: $\pi \cdot 6 \cdot 6\sqrt{2} = 36\sqrt{2}\pi$.

Câu 96: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $a, b, c > 0$. Biết rằng mặt phẳng (ABC) đi qua điểm $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right)$ và tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Tính $T = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$.

- A. $T = 14$. B. $T = \frac{1}{7}$. C. $T = 7$. D. $T = \frac{7}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Mặt phẳng (ABC) đi qua ba điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nên có phương trình là

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Ta có $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right) \in (ABC)$ nên $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$.

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;2;3)$ và bán kính $R = \sqrt{\frac{72}{7}}$.

$$(ABC) \text{ tiếp xúc với } (S) \Leftrightarrow d(I, (ABC)) = R \Leftrightarrow \frac{\left|\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} - 1\right|}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \sqrt{\frac{72}{7}} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2}.$$

Câu 97: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và điểm $A(1;2;3)$. Ba mặt phẳng thay đổi đi qua A và đôi một vuông góc với nhau, cắt mặt cầu theo ba đường tròn. Tính tổng diện tích của ba đường tròn tương ứng đó.

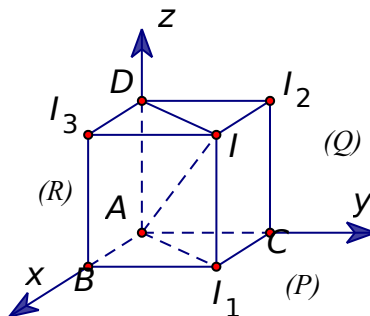
- A. 10π . B. 38π . C. 33π . D. 36π .

Lời giải

Chọn B.

Cách 1:

Nhận xét:



Giả sử ba mặt phẳng cùng đi qua A đôi một vuông góc với nhau là $(P), (Q), (R)$.

Với điểm I bất kỳ, hạ II_1, II_2, II_3 lần lượt vuông góc với ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ thì ta luôn có: $IA^2 = II_1^2 + II_2^2 + II_3^2$ (1).

Thật vậy, ta chọn hệ trục tọa độ $Oxyz$ với $O \equiv A$, ba trục Ox, Oy, Oz lần lượt là ba giao tuyến của ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$.

Khi đó tọa độ $I(a; b; c)$ thì:

$$IA^2 = a^2 + b^2 + c^2 = d^2(A; (Iyz)) + d^2(A; (Ixz)) + d^2(A; (Ixy))$$

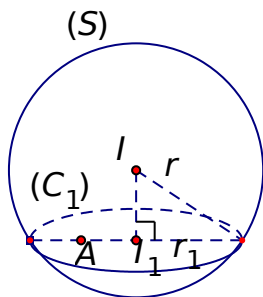
$$\text{hay } IA^2 = II_1^2 + II_2^2 + II_3^2.$$

Vậy (1) được chứng minh.

Áp dụng giải bài :

Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -1; 2)$ và có bán kính $r = 4$.

$$\overrightarrow{IA} = (0; 3; 1) \Rightarrow IA = \sqrt{10}.$$



Giả sử ba mặt phẳng cùng đi qua A đôi một vuông góc với nhau là $(P), (Q), (R)$ và cắt mặt cầu (S) theo ba đường tròn lần lượt là $(C_1), (C_2), (C_3)$.

Gọi I_1, I_2, I_3 và r_1, r_2, r_3 lần lượt là tâm và bán kính của $(C_1), (C_2), (C_3)$.

Khi đó: $II_1 \perp (P) \Rightarrow II_1^2 + r_1^2 = r^2 \Rightarrow r_1^2 = r^2 - II_1^2$.

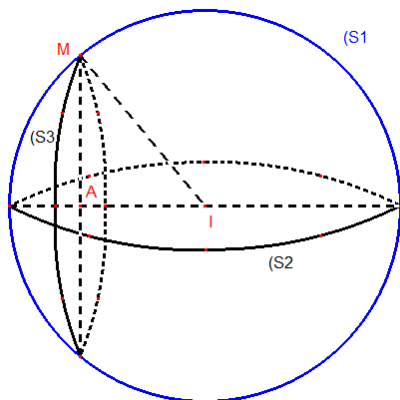
Tương tự có: $r_2^2 = r^2 - II_2^2$ và $r_3^2 = r^2 - II_3^2$.

Theo nhận xét ở trên ta có: $IA^2 = II_1^2 + II_2^2 + II_3^2$

Ta có tổng diện tích các đường tròn là:

$$\begin{aligned} S &= \pi(r_1^2 + r_2^2 + r_3^2) = \pi(r^2 - II_1^2 + r^2 - II_2^2 + r^2 - II_3^2) \\ &= \pi[3r^2 - (II_1^2 + II_2^2 + II_3^2)] \\ &= \pi(3r^2 - IA^2) = 38\pi \end{aligned}$$

Cách 2:



Đặt biệt hóa: Giả sử có 3 đường tròn $(S1); (S2); (S3)$ như hình bên trong đó $(S1); (S2)$ đều là đường tròn lớn có bán kính là 4.

$I(1; -1; 2); A(1; 2; 3)$ suy ra $IA = \sqrt{10}$; $R = 4$. Suy ra bán kính hình tròn $(S3)$ là $r = \sqrt{16 - 10} = \sqrt{6}$

Tổng diện tích các hình tròn là: $\pi \cdot 4^2 + \pi \cdot 4^2 + \pi \cdot (\sqrt{6})^2 = 38\pi$.

Câu 98: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho điểm $A(2;1;3)$ và mặt phẳng $(P): x + my + (2m+1)z - m - 2 = 0$, m là tham số. Gọi $H(a;b;c)$ là hình chiếu vuông góc của điểm A trên (P) . Tính $a+b$ khi khoảng cách từ điểm A đến (P) lớn nhất?

- A. $a+b = -\frac{1}{2}$. B. $a+b = 2$. C. $a+b = 0$. D. $a+b = \frac{3}{2}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1:

Ta có
$$d(A, (P)) = \frac{|6m+3|}{\sqrt{5m^2+4m+2}} \Rightarrow d^2(A, (P)) = \frac{36m^2+36m+9}{5m^2+4m+2}$$

Xét hàm số
$$f(m) = \frac{36m^2+36m+9}{5m^2+4m+2} \Rightarrow f'(m) = \frac{-36m^2+54m+36}{(5m^2+4m+2)^2}$$

$$f'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -\frac{1}{2} \\ m = 2 \end{cases}$$

BBT

m	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$		
$f'(m)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(m)$	$\frac{36}{5}$		$\frac{15}{2}$		$\frac{9}{2}$	

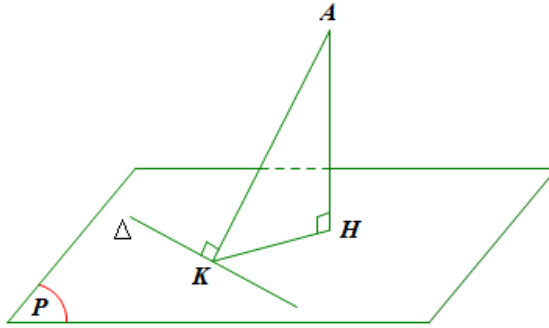
Hàm số đạt GTLN khi $m = 2 \Rightarrow (P): x + 2y + 5z - 4 = 0$

Đường thẳng Δ qua A và vuông góc với (P) có phương trình là
$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 + 2t \\ z = 3 + 5t \end{cases}$$

$$H \in \Delta \Rightarrow H(2+t; 1+2t; 3+5t)$$

$$H \in (P) \Rightarrow 2+t+2(1+2t)+5(3+5t)-4=0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a+b = \frac{3}{2}$$

Cách 2:



Gọi $M(x; y; z)$ là điểm cố định thuộc mặt phẳng (P)

Ta có $x + my + (2m + 1)z - m - 2 = 0, \forall m$

$$\Leftrightarrow m(y + 2z - 2) + x + z - 2 = 0, \forall m$$

$$\Rightarrow \text{tọa độ điểm } M \text{ thỏa mãn hệ } \begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Đặt $z = t$ với $t \in \mathbb{R}$, từ (*)

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 - 2t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

Vậy tập hợp các điểm cố định thuộc mặt phẳng (P) là đường thẳng

$$\text{Gọi } K \text{ là hình chiếu vuông góc của } A \text{ trên } \Delta \Rightarrow K\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{Ta có } d(A, (P)) = AH \leq AK \Rightarrow d(A, (P)) \text{ lớn nhất bằng } AK \text{ khi } H \equiv K \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow a + b = \frac{3}{2}$$

Câu 99: Trong hệ tọa độ không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 1 = 0$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z}{2}, d_2: \frac{x-5}{6} = \frac{y}{4} = \frac{z+5}{-5}$. Biết rằng có 2 điểm M_1, M_2 trên d_1 và hai điểm N_1, N_2 trên d_2 sao cho M_1N_1, M_2N_2 song song mặt phẳng (P) đồng thời cách mặt phẳng (P) một khoảng bằng 2. Tính

A. $d = 6 + 5\sqrt{2}$.

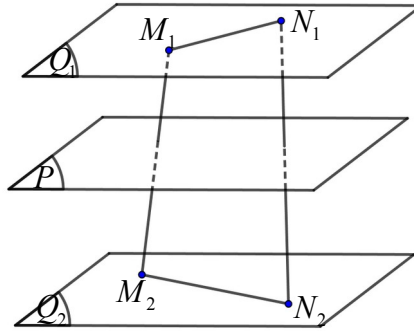
B. $d = 5\sqrt{2}$.

C. $d = 5 + 5\sqrt{2}$.

D. $d = 6\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi (Q) là mặt phẳng song song với (P) sao cho khoảng cách giữa (P) và (Q) bằng 2.

$\Rightarrow (Q)$ có phương trình dạng $x - 2y + 2z + m = 0 (m \neq -1)$ và (Q) chứa M_1N_1 hoặc M_2N_2 .

Theo giả thiết khoảng cách từ mp (Q) đến (P) bằng 2 nên ta có

$$\frac{|m+1|}{3} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = -7 \end{cases}$$

Vậy có 2 mặt phẳng song song và cách (P) một khoảng bằng 2 là:

$$(Q_1): x - 2y + 2z + 5 = 0 \text{ và } (Q_2): x - 2y + 2z - 7 = 0$$

+ Theo giả thiết $M_1 = d_1 \cap (Q_1), N_1 = d_2 \cap (Q_1)$ suy ra

$$M_1(1; -3; -5), N_1(4; -3; -5) \Rightarrow M_1N_1 = 5\sqrt{2}$$

$$M_2 = d_1 \cap (Q_2), N_2 = d_2 \cap (Q_2) \text{ suy ra } M_2(3; 0; 2), N_2(-1; -4; 0) \Rightarrow M_2N_2 = 6$$

$$\text{Vậy } d = 6 + 5\sqrt{2}.$$

Câu 100: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = -1 - t \\ z = -2 + t \end{cases}$, điểm $M(1; 2; -1)$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y + 14z + 64 = 0$. Gọi (Δ') là đường thẳng đi qua M và cắt Δ tại A ,

cắt (S) tại B sao cho $\frac{AM}{AB} = \frac{1}{3}$ và điểm B có hoành độ là số nguyên. Mặt phẳng trung trực của đoạn AB có phương trình là

A. $2x + 4y - 4z - 19 = 0$

B. $2x - 4y - 4z - 43 = 0$

C. $3x - 6y - 6z - \frac{129}{2} = 0$

D. $3x + 6y - 6z - 31 = 0$

Lời giải

Chọn C.

Từ giả thiết: (S) có tâm $I(2; -5; -7)$ và bán kính $R = \sqrt{14}$.

$$A \in \Delta \Rightarrow A(3+t; -1-t; -2+t) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (-2-t; t+3; 1-t)$$

$$\text{Vì } \frac{AM}{AB} = \frac{1}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \pm 3\overrightarrow{AM}$$

$$+) \text{ Nếu } \overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AM} = (-3t-6; 3t+9; 3-3t) \Rightarrow B(-2t-3; 2t+8; -2t+1)$$

$$\text{Do } B \in (S) \Rightarrow BI = R$$

$$\Rightarrow (2t+5)^2 + (-2t-13)^2 + (2t-8)^2 = 14 \Leftrightarrow 12t^2 + 40t + 244 = 0 \quad (\text{ Vô nghiệm}).$$

$$+) \text{ Nếu } \overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AM} = (3t+6; -3t-9; -3+3t) \Rightarrow B(4t+9; -4t-10; 4t-5)$$

$$\text{Do } B \in (S) \Rightarrow BI = R$$

$$\Rightarrow (-4t-7)^2 + (4t+5)^2 + (-4t-2)^2 = 14 \Leftrightarrow 48t^2 + 112t + 64 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{4}{3}; t = -1.$$

$$\text{Do } B \text{ có hoành độ là số nguyên nên } t = -1 \Rightarrow \overrightarrow{AB}(3; -6; -6)$$

Trung điểm AB là $E\left(\frac{7}{2}; -3; -6\right)$ nên PT mặt phẳng trung trực AB :

$$3x - 6y - 6z - \frac{129}{2} = 0$$

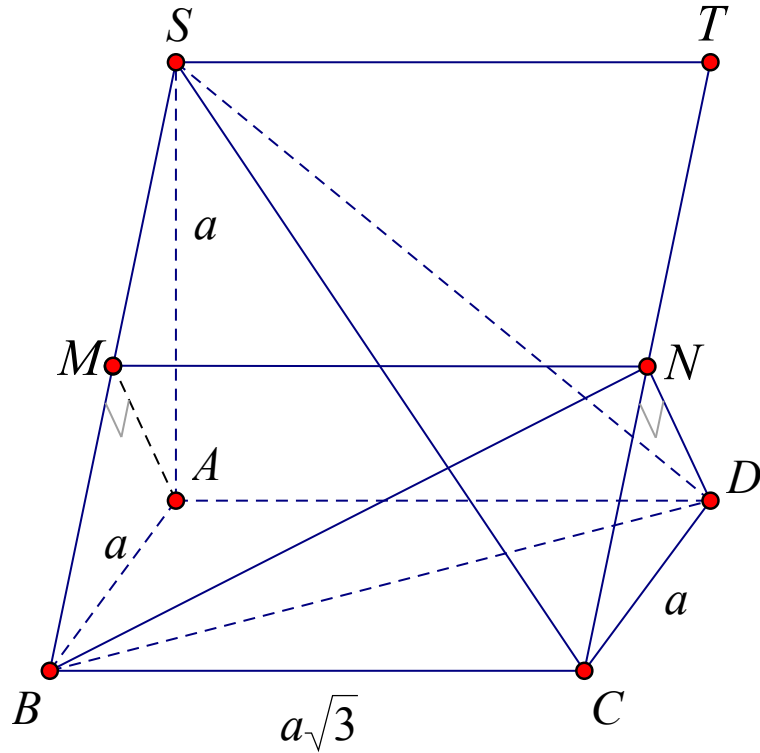
Câu 101: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = a$, $BC = a\sqrt{3}$, $SA = a$ và SA vuông góc với đáy $ABCD$. Tính $\sin \alpha$, với α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) .

A. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{7}}{8}$

B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$

D. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$

Chọn C.**Cách 1:**

Vẽ $\overline{ST} = \overline{BC}$.

Lúc đó $(SBC) \equiv (STCB)$

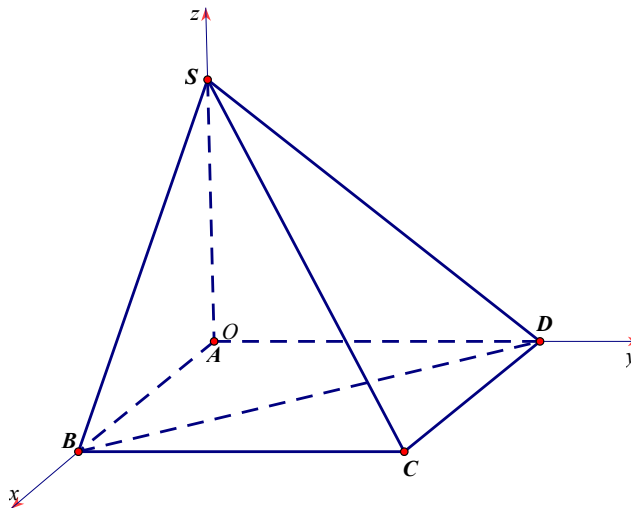
Gọi M, N lần lượt là trung điểm SB, TC lúc đó ta có $AM \perp (SBC), DN \parallel AM \Rightarrow DN \perp (SBC)$

Hình chiếu của BD trên (SBC) chính là BN .

Ta có $(BD, (SBC)) = (BD, BN) = \angle DBN$.

$$\sin DBN = \frac{DN}{BD} = \frac{AM}{BD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Cách 2:



Đặt hệ trục tọa độ $Oxyz$ như hình vẽ. Khi đó, ta có $A(0;0;0)$, $B(a;0;0)$, $D(0;a\sqrt{3};0)$, $S(0;0;a)$.

Ta có $\overrightarrow{BD} = (-a; a\sqrt{3}; 0) = a(-1; \sqrt{3}; 0)$, nên đường thẳng BD có véc-tơ chỉ phương là $\vec{u} = (-1; \sqrt{3}; 0)$.

Ta có $\overrightarrow{SB} = (a; 0; -a)$, $\overrightarrow{BC} = (0; a\sqrt{3}; 0) \Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{BC}] = (a^2\sqrt{3}; 0; a^2\sqrt{3}) = a^2\sqrt{3}(1; 0; 1)$.

Như vậy, mặt phẳng (SBC) có véc-tơ pháp tuyến là $\vec{n} = (1; 0; 1)$.

Do đó, α là góc tạo bởi giữa đường thẳng BD và mặt phẳng (SBC) thì

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{|(-1) \cdot 1 + \sqrt{3} \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{(-1)^2 + \sqrt{3}^2 + 0^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

Câu 102: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho bốn đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$, $d_2: \frac{x-2}{2} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{-4}$, $d_3: \frac{x}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$, $d_4: \frac{x-2}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$. Gọi Δ là đường thẳng cắt cả bốn

đường thẳng đã cho. Vector nào sau đây là vector chỉ phương của đường thẳng Δ

- A. $\vec{u}_3 = (2; 0; -1)$ B. $\vec{u}_2 = (2; 1; -1)$ C. $\vec{u}_1 = (2; 1; 1)$ D. $\vec{u}_4 = (1; 2; -2)$

Lời giải

Chọn B

$d_1 \perp d_2$. Phương trình mặt phẳng $(d_1, d_2): y - z + 2 = 0$

Ta có

Gọi $A = d_3 \cap (d_1, d_2) \Rightarrow A\left(1; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right); B = d_4 \cap (d_1, d_2) \Rightarrow B(4; 2; 0)$

Khi đó $\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng Δ . $\overrightarrow{u_{\Delta}} = \left(3; \frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right) \Rightarrow \overrightarrow{u_2} = (2; 1; -1)$ là vector chỉ phương của đường thẳng Δ .

Câu 103: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - y + z + 1 = 0$, $A(1; 1; 1)$, $B(0; 1; 2)$, $C(-2; 0; 1)$ và điểm $M(a; b; c) \in (P)$ sao cho: $S = 2MA^2 + MB^2 + MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khi đó $T = 3a + 2b + c$ bằng:

A. $\frac{7}{4}$.

B. $\frac{25}{2}$.

C. $-\frac{25}{4}$.

D. $-\frac{25}{2}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi I là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I = \left(0; \frac{3}{4}; \frac{5}{4}\right)$.

Khi đó: $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2\overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2$

$$= 2(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 = 4MI^2 + 2\overrightarrow{MI} \cdot (2\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}) + 2IA^2 + IB^2 + IC^2$$

$$= 4MI^2 + 2IA^2 + IB^2 + IC^2.$$

Do $2IA^2 + IB^2 + IC^2$ không đổi nên S đạt nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất. Điểm $M(a; b; c) \in (P)$ nên MI nhỏ nhất khi M là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P) . Khi đó, M là giao điểm của (P) và đường thẳng qua I , vuông góc với (P) .

Tọa độ của M là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} x - y + z + 1 = 0 \\ \frac{x}{1} = \frac{y - \frac{3}{4}}{-1} = \frac{z - \frac{5}{4}}{1} \end{cases} \Rightarrow M\left(-\frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{3}{4}\right).$$

Vậy $T = 3a + 2b + c = \frac{7}{4}$.

Câu 104: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y - z + 3 = 0$, và điểm $A(2; 0; 0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với (P) , cách gốc tọa độ O một khoảng cách bằng $\frac{4}{3}$ và cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C khác O . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

- A. 8. B. 16. C. $\frac{8}{3}$. D. $\frac{16}{3}$.

Lời giải

Chọn C

Gọi $B(0; b; 0), C(0; 0; c) (bc \neq 0) \Rightarrow$ PT mặt phẳng $(\alpha): \frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Do $(\alpha) \perp (P)$ nên $\frac{2}{b} - \frac{1}{c} = 0 \Rightarrow b = 2c \Rightarrow$ PT mặt phẳng $(\alpha): cx + y + 2z = 2c$.

$$d(O, (\alpha)) = \frac{|2c|}{\sqrt{c^2 + 5}} = \frac{4}{3} \Rightarrow 9c^2 = 4(c^2 + 5) \Leftrightarrow c = \pm 2$$

$$\text{Do đó, } V_{OABC} = \frac{1}{6} OA \cdot OB \cdot OC = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{8}{3}.$$

Ta có thể tạo một số bài toán tương tự bằng cách thay giả thiết $(\alpha) \perp (P)$ và (α) qua A bằng giả thiết (α) chứa đường thẳng d , giả thiết khoảng cách bằng giả thiết góc.

Câu 105: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) chứa đường thẳng

$d: \begin{cases} x = 2 \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$ đồng thời cách gốc tọa độ O một khoảng cách bằng $\frac{4}{3}$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C khác O . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

- A. 8 B. 16 C. $\frac{8}{3}$ D. $\frac{16}{3}$

Câu 106: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2y - z + 3 = 0$, và điểm $A(2; 0; 0)$. Mặt phẳng (α) đi qua A , vuông góc với (P) , tạo với mặt phẳng

$(Q): x - 2y + 2z + 1 = 0$ góc φ sao cho $\cos \varphi = \frac{1}{3}$. Mặt phẳng (α) cắt các tia Oy, Oz lần lượt tại các điểm B, C khác O . Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

- A. $\frac{1}{8}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{1}{24}$ D. $\frac{1}{4}$

Câu 107: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (α) chứa đường thẳng

$d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ đồng thời cách gốc tọa độ O một khoảng cách lớn nhất. Gọi A, B, C

(khác O) lần lượt là giao điểm của (α) với các tia Ox, Oy, Oz . lần lượt tại các điểm. Thể tích khối tứ diện $OABC$ bằng

- A. $\frac{4913}{72}$ B. $\frac{1331}{6}$ C. $\frac{1331}{18}$ D. $\frac{4913}{24}$

Câu 108: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;0;0)$, $M(1;1;1)$. Gọi (P) là mặt phẳng thay đổi đi qua A , M và cắt các trục Oy , Oz lần lượt tại $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ với $b > 0$, $c > 0$. Khi diện tích tam giác ABC nhỏ nhất, hãy tính giá trị của bc .

- A. $bc = 8$. B. $bc = 64$. C. $bc = 2$. D. $bc = 16$.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình mặt phẳng $(P): \frac{x}{2} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Điểm $M(1;1;1) \in (P) \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow b + c = \frac{1}{2}bc$ (1)

Có $\frac{1}{2}bc = b + c \geq 2\sqrt{bc} \Rightarrow bc \geq 16$.

Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-2; b; 0)$, $\overrightarrow{AC} = (-2; 0; c) \Rightarrow [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (bc; 2c; 2b)$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{(bc)^2 + 4b^2 + 4c^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2(bc)^2 - 8bc}$ (do $b + c = \frac{1}{2}bc$)

Đặt $t = bc \Rightarrow t \geq 16$

Khi đó $S_{ABC} = S(t) = \frac{1}{2} \sqrt{2t^2 - 8t}$, với $t \geq 16$.

Có $S'(t) = \frac{t-2}{\sqrt{2t^2-8t}} > 0 \forall t \geq 16 \Rightarrow S(t)$ đồng biến trên $[16; +\infty)$

Suy ra $S_{\Delta ABC}$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow S(t)$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow t = 16$, tức $bc = 16$.

Vậy $S_{\Delta ABC}$ nhỏ nhất khi $bc = 16$.

Câu 109: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;-2;-1)$, $B\left(\frac{-4}{3}; \frac{-8}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Đường thẳng Δ đi qua tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB và vuông góc với mặt phẳng (OAB) . Hỏi Δ đi qua điểm nào dưới đây?

A. $Q(5; -1; 5)$.

B. $N(3; 0; 2)$.

C. $M(1; -1; 1)$.

D. $P(-5; -4; 5)$.

Lời giải.

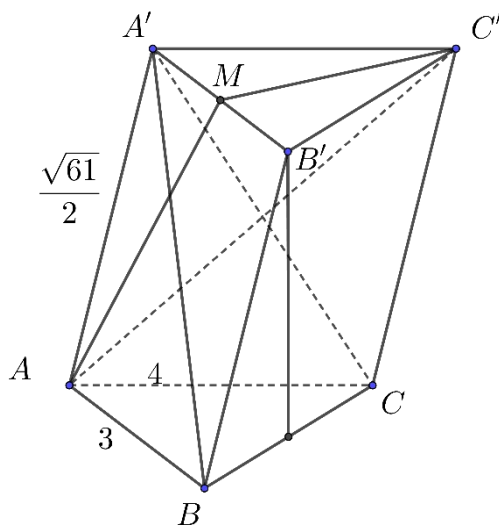
Chọn C.Gọi $I(x_I; y_I; z_I)$ là tâm đường tròn nội tiếp tam giác OAB .Dễ dàng tính được $OA = 3; OB = 4; AB = 5$.

$$\text{Khi đó } \begin{cases} x_I = \frac{0.5 + 2.4 + \frac{-4}{3}.3}{3 + 4 + 5} = \frac{1}{3} \\ y_I = \frac{0.5 + (-2).4 + \left(\frac{-8}{3}\right).3}{3 + 4 + 5} = \frac{-4}{3} \\ z_I = \frac{0.5 + (-1).4 + \frac{8}{3}.3}{3 + 4 + 5} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Và véc tơ pháp tuyến của mặt phẳng (OAB) là $\vec{n} = [\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}] = (-8; -4; -8)$.

$$\text{Phương trình đường thẳng } \Delta \text{ có dạng: } \begin{cases} x = \frac{1}{3} - 8t \\ y = \frac{-4}{3} - 4t \\ z = \frac{1}{3} - 8t \end{cases}$$

Thử 4 điểm vào phương trình đường thẳng Δ ta thấy chỉ có điểm $M(1; -1; 1)$ thỏa mãn.**Câu 110:** Cho hình lăng trụ tam giác $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $AB = 3$, $AC = 4$, $AA' = \frac{\sqrt{61}}{2}$; hình chiếu của B' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm cạnh BC . Gọi M là trung điểm cạnh $A'B'$ (tham khảo hình vẽ bên dưới).



Côsin của góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMC') và $(A'BC)$ bằng

A. $\frac{\sqrt{13}}{65}$.

B. $\frac{11}{\sqrt{3157}}$.

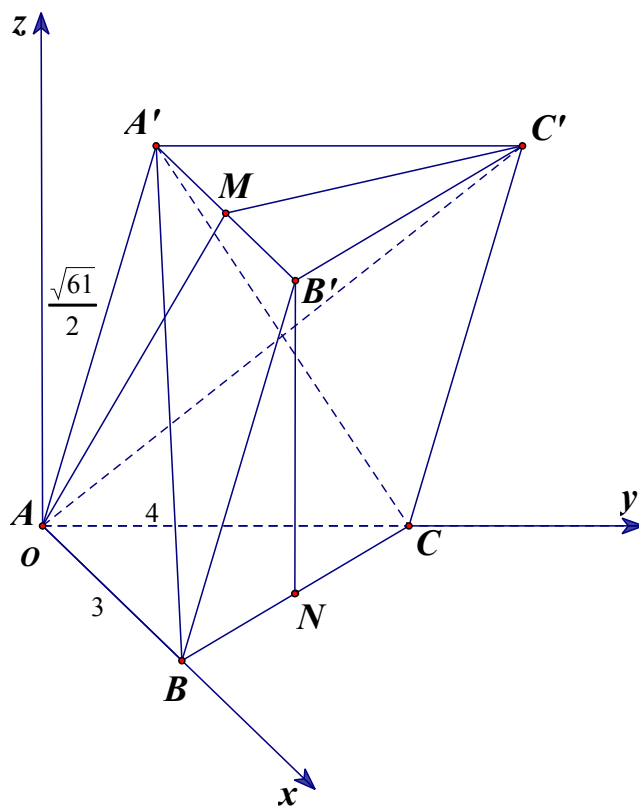
C. $\frac{33}{\sqrt{3157}}$.

D. $\frac{33}{\sqrt{3517}}$.

Lời giải

Chọn C.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



$$O \equiv A(0;0;0), \quad B(3;0;0), \quad C(0;4;0)$$

Gọi N là trung điểm $BC \Rightarrow N\left(\frac{3}{2}; 2; 0\right)$.

$$NB' = \sqrt{BB'^2 - BN^2} = 3 \Rightarrow B'\left(\frac{3}{2}; 2; 3\right)$$

$$\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = -\frac{3}{2} \\ y_{A'} = 2 \\ z_{A'} = 3 \end{cases} \Rightarrow A'\left(-\frac{3}{2}; 2; 3\right) \quad \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{BB'} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'} = -\frac{3}{2} \\ y_{C'} - 4 = 2 \Rightarrow C'\left(-\frac{3}{2}; 6; 3\right) \\ z_{C'} = 3 \end{cases}$$

M là trung điểm $A'B' \Rightarrow M(0; 2; 3)$.

$$\overrightarrow{AM} = (0; 2; 3); \overrightarrow{AC'} = \left(-\frac{3}{2}; 6; 3\right); \overrightarrow{A'B} = \left(\frac{9}{2}; -2; -3\right); \overrightarrow{A'C} = \left(\frac{3}{2}; 2; -3\right)$$

$$\overrightarrow{n_{(AMC')}} = [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AC'}] = \left(-12; -\frac{9}{2}; 3\right); \overrightarrow{n_{(A'BC)}} = [\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}] = (12; 9; 12)$$

$$\Rightarrow \cos[\overrightarrow{n_{(AMC')}}; \overrightarrow{n_{(A'BC)}}] = \cos[\overrightarrow{n_{(AMC')}}; \overrightarrow{n_{(A'BC)}}] = \frac{|\overrightarrow{n_{(AMC')}} \cdot \overrightarrow{n_{(A'BC)}}|}{|\overrightarrow{n_{(AMC')}}| \cdot |\overrightarrow{n_{(A'BC)}}|} = \frac{33}{\sqrt{3157}}$$

Câu 111: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + 2z - 13 = 0$. Xét các mặt cầu (S) có tâm $I(a; b; c)$, đi qua điểm A , tiếp xúc với mặt phẳng (P) . Tính giá trị của biểu thức $T = a^2 + 2b^2 + 3c^2$ khi (S) có bán kính nhỏ nhất.

A. $T = 35$.

B. $T = 20$.

C. $T = 25$.

D. $T = 30$.

Lời giải

Chọn C

Gọi H là hình chiếu của I trên mặt phẳng (P) ta có $IA + IH = 2R$ nên R nhỏ nhất khi I, A, H thẳng hàng và I là trung điểm của AH

Phương trình AH đi qua A và vuông góc với mặt phẳng (P) có phương trình là
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \Rightarrow H(3; 4; 3)$$

Tọa độ H là nghiệm $(x; y; z)$ của hệ $\begin{cases} x + y + 2z - 13 = 0 \\ \Rightarrow I(2; 3; 1) \end{cases}$

$$T = a^2 + 2b^2 + 3c^2 = 2^2 + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 1^2 = 25.$$

Câu 112: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 9$ tâm I và mặt phẳng $(P): 2x + 2y - z + 24 = 0$. Gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên (P) . Điểm M thuộc (S) sao cho đoạn MH có độ dài lớn nhất. Tìm tọa độ điểm M .

- A. $M(-1; 0; 4)$ B. $M(0; 1; 2)$ **C. $M(3; 4; 2)$** D. $M(4; 1; 2)$

Lời giải

Chọn C

Ta có tâm $I(1; 2; 3)$ và bán kính $R = 3$. Do $d(I; (P)) = 9 > R$ nên mặt phẳng (P) không cắt mặt cầu (S) . Do H là hình chiếu của I lên (P) và MH lớn nhất nên M là giao điểm của đường thẳng IH với mặt cầu (P) .

$$\overrightarrow{IH} = \overrightarrow{n_{(P)}} = (2; 2; -1).$$

Phương trình đường thẳng IH là $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 2 + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$.

Giao điểm của IH với (S) : $9t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 1 \Rightarrow M_1(3; 4; 2)$ và $M_2(-1; 0; 4)$.

$$M_1H = d(M_1; (P)) = 12, \quad M_2H = d(M_2; (P)) = 6.$$

Vậy điểm cần tìm là $M(3; 4; 2)$.

Câu 113: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 16$ và các điểm $A(1; 0; 2)$, $B(-1; 2; 2)$. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua hai điểm A , B sao cho thiết diện của (P) với mặt cầu (S) có diện tích nhỏ nhất. Khi viết phương trình (P) dưới dạng $(P): ax + by + cz + 3 = 0$. Tính $T = a + b + c$.

- A. 3 **B. -3** C. 0 D. -2

Lời giải

Chọn B

Ta có A, B nằm trong mặt cầu. Gọi K là hình chiếu của I trên AB và H là hình chiếu của I lên thiết diện.

Ta có $IA = IB = \sqrt{5}$ suy ra K là trung điểm của AB . Vậy $K(0;1;2)$ và $\overline{KI} = (1;1;1)$.

Câu 114: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(3; -1; 0)$ và đường thẳng d : $\frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt phẳng (α) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (α) lớn nhất có phương trình là:

- ## Lời giải

Trang 86

Ta có: $d(A, d) = AK$ cố định và $d(A, (\alpha)) = AH \leq AK \Rightarrow d(A, (\alpha))$ lớn nhất bằng AK khi $H \equiv K$.

$$d: \frac{x-2}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{1} \text{ qua } M(2; -1; 1), \text{ có VTCP } \vec{u}_d = (-1; 2; 1).$$

Gọi (P) là mặt phẳng qua A và chứa có VTPT $\vec{n}_p = [\vec{u}_d, \vec{AM}] = (2; 0; 2)$.

Mặt phẳng (α) có một VTPT là $\vec{n}_\alpha = [\vec{n}_p, \vec{u}_d] = (-4; -4; 4) = -4(1; 1; -1)$ và (α) qua $M(2; -1; 1)$ có phương trình: $1(x-2) + 1(y+1) - 1(z-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - z = 0$.

Câu 115: Cho đường thẳng $d: \begin{cases} x = -t \\ y = 2t - 1 \\ z = t + 2 \end{cases}$ và mặt phẳng $(\alpha): 2x - y - 2z - 2 = 0$. Mặt phẳng (P) qua d và tạo với (α) một góc nhỏ nhất. Một véc tơ pháp tuyến của (P) là:

A. $\vec{n}_p = (-1; 1; 1)$

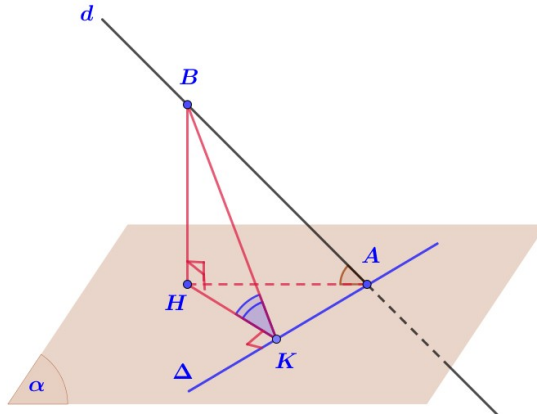
B. $\vec{n}_p = (1; 2; -3)$

C. $\vec{n}_p = (2; 1; 0)$

D. $\vec{n}_p = (3; -2; 7)$

Lời giải

Chọn A.



Gọi $\Delta = (\alpha) \cap (P)$, $A = d \cap (\alpha)$, $B \in d$ ($B \neq A$); H là hình chiếu vuông góc của B lên (α) ; K là hình chiếu của H lên Δ .

Suy ra: $(\overline{d}, (\alpha)) = \overline{BAH}$ cố định; $(\overline{(\alpha)}, (P)) = \overline{BKH}$.

Mà $\overline{BKH} \geq \overline{BAH}$ (vì $HK \leq HA$) $\Rightarrow (\overline{d}, (\alpha)) \leq (\overline{(P)}, (\alpha))$.

Suy ra $(\overline{(P)}, (\alpha))$ nhỏ nhất bằng $(\overline{d}, (\alpha))$ khi $K \equiv A$.

Khi đó $\Delta \perp d$ và có một VTCP $\vec{u}_\Delta = [\vec{u}_d, \vec{n}_\alpha] = -3(1; 0; 1)$.

(P) có một VTPT $\vec{n}_p = [\vec{u}_\Delta, \vec{u}_d] = 2(-1; 1; 1)$.

Câu 116: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song (P) , đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó là nhỏ nhất có phương trình là:

A. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

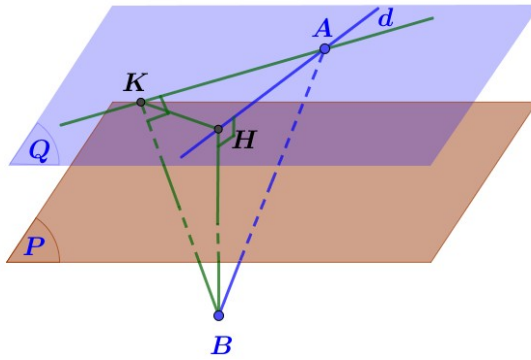
B. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{-2}$.

C. $\frac{x-3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z+1}{-2}$.

D. $\frac{x+2}{26} = \frac{y-1}{11} = \frac{z+3}{-2}$.

Lời giải

Chọn A.



Gọi (Q) là mặt phẳng qua A và song song (P) .

Ta có: $(-3 - 2 \cdot 0 + 2 \cdot 1 - 5)(1 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 5) < 0 \Rightarrow A, B$ nằm về hai phía với (P) .

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $(Q) \Rightarrow BH$ cố định và $d(B, (Q)) = BH$.

Gọi K là hình chiếu vuông góc của B lên d bất kì qua A và nằm trong (Q) hay $d \parallel (P)$.

Ta có: $BK \geq BH \Leftrightarrow d(B, d) > d(B, AH) \Rightarrow d(B, d)$ bé nhất bằng BH khi $K \equiv H$.

Gọi $\vec{n}$ là VTPT của $(ABH) \Rightarrow \vec{n} = [\vec{n}_p, \overrightarrow{AB}] = (-2; 6; 7)$.

d cần lập qua A, H và có VTCP $\vec{u}_d = [\vec{n}, \vec{n}_p] = (26; 11; -2)$.

Vậy phương trình đường thẳng d cần lập là: $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 117: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho tam giác ABC có phương trình đường phân giác trong góc A là $\frac{x}{1} = \frac{y-6}{-4} = \frac{z-6}{-3}$. Biết rằng điểm $M(0; 5; 3)$ thuộc đường thẳng AB và

điểm $N(1; 1; 0)$ thuộc đường thẳng AC . Véc tơ nào sau đây là véc tơ chỉ phương của đường thẳng AC ?

- A. $\vec{u}(1; 2; 3)$. B. $\vec{u}(0; -2; 6)$. C. $\vec{u}(0; 1; -3)$. D. $\vec{u}(0; 1; 3)$.

Lời giải

Chọn D.

Giả sử $A(t; 6-4t; 6-3t)$, ta có:

$$\vec{u_d} = (1; -4; -3), \vec{AM} = (-t; 4t-1; -3+3t), \vec{AN} = (1-t; -5+4t; 3t-6)$$

Theo bài ra: Vì d là đường phân giác của góc A nên:

$$\begin{aligned} |\cos(\vec{u_d}, \vec{AM})| &= |\cos(\vec{u_d}, \vec{AN})| \Leftrightarrow \frac{|26t-13|}{\sqrt{26t^2-26t+10}} = \frac{|26t-39|}{\sqrt{26t^2-78t+62}} \\ \Leftrightarrow \frac{|2t-1|}{\sqrt{13t^2-13t+5}} &= \frac{|2t-3|}{\sqrt{13t^2-39t+31}} \stackrel{BP2V}{\Leftrightarrow} (4t^2-4t+1)(13t^2-39t+31) = (4t^2-12t+9)(13t^2-13t+5) \\ \Leftrightarrow 14t &= 14 \Leftrightarrow t=1. \end{aligned}$$

$\Rightarrow A(1; 2; 3) \Rightarrow \vec{AN} = (0; -1; -3)$. Vậy một véc tơ chỉ phương của AC là $\vec{u}(0; 1; 3)$.

Câu 118: Trong không gian $Oxyz$ cho điểm $A(1; 2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x+2y-z+9=0$. Đường thẳng đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+4y-4z+5=0$ cắt mặt phẳng (P) tại B . Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới một góc vuông và độ dài MB lớn nhất. Tính độ dài MB .

- A. $MB = \frac{\sqrt{41}}{2}$. B. $MB = \frac{\sqrt{5}}{2}$. C. $MB = \sqrt{5}$. D. $MB = \sqrt{41}$.

Lời giải

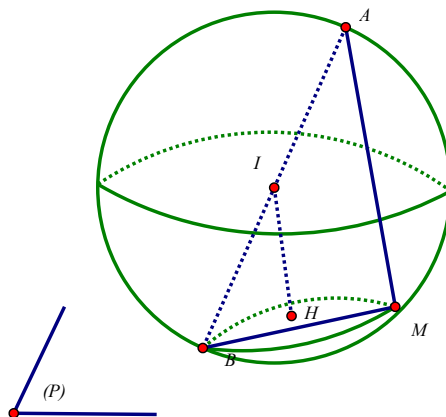
Chọn C

Ta có đường thẳng d đi qua A và vuông góc với mặt phẳng $(Q): 3x+4y-4z+5=0$ có phương trình:

$$(d): \begin{cases} x=1+3t \\ y=2+4t \\ z=-3-4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \text{ Ta có giao điểm của } d \text{ và mặt phẳng } (P) \text{ là } B:$$

$$B \in d \Rightarrow B(1+3t; 2+4t; -3-4t).$$

$$B \in (P) \Rightarrow 2(1+3t)+2(2+4t)+3+4t+9=0 \Leftrightarrow t=-1.$$



Điểm M nằm trong mặt phẳng (P) sao cho M luôn nhìn AB dưới một góc vuông nên M nằm trên đường tròn (C) là giao của mặt cầu đường kính AB với mặt phẳng (P) . Khi đó độ dài MB lớn nhất khi và chỉ khi độ dài MB bằng đường kính của (C) . Gọi bán kính của đường tròn (C) là r , trung điểm của AB là $I \Rightarrow I(-\frac{1}{2}; 0; -1)$, $d_{(I, (P))} = 3$.

Ta có $d^2_{(I,(P))} + r^2 = \frac{AB^2}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{5}}{2}$. Vậy độ dài MB lớn nhất là $\sqrt{5}$.

Câu 119: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$, trong đó $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$. Biết mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{72}{7}$. Thể tích của khối tứ diện $OABC$ là.

- A.** $\frac{2}{9}$ **B.** $\frac{1}{6}$ **C.** $\frac{3}{8}$ **D.** $\frac{5}{6}$

Lời giải

Chọn D.

Ta có $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow bcx + acy + abz - abc = 0$.

Theo bài ra có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7 \Leftrightarrow bc + 2ca + 3ab = 7abc$.

Mặt phẳng (ABC) tiếp xúc với mặt cầu $(S) \Rightarrow d(I, (ABC)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|bc + 2ca + 3ab - abc|}{\sqrt{b^2c^2 + c^2a^2 + a^2b^2}} = \sqrt{\frac{72}{7}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{36} \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) = \frac{7}{72} \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2}$$

Ta có $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7 \Leftrightarrow 49 = \left(\frac{1}{a} + 2 \cdot \frac{1}{b} + 3 \cdot \frac{1}{c} \right)^2 \leq (1+4+9) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} \right) \Leftrightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{7}{2}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases} a = 2b = 3c \\ \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = \frac{2}{3} \end{cases}$

Vậy $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Cách 2:

Ta có $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 7$ suy ra $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right) \in (ABC)$

Lại có $M\left(\frac{1}{7}; \frac{2}{7}; \frac{3}{7}\right) \in (S)$ nên (ABC) tiếp xúc với (S) tại M .

Suy ra $(ABC): \frac{x}{2} + \frac{y}{1} + \frac{z}{\frac{2}{3}} = 1$ nên $V_{OABC} = \frac{1}{6}abc = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 1 \cdot \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

Câu 120: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(1; 0; 1)$, $B(0; 1; -1)$. Hai điểm D , E thay đổi trên các đoạn OA , OB sao cho đường thẳng DE chia tam giác OAB thành hai phần có diện tích bằng nhau. Khi DE ngắn nhất thì trung điểm I của DE có tọa độ là

A. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$ B. $I\left(\frac{\sqrt{2}}{3}; \frac{\sqrt{2}}{3}; 0\right)$ C. $I\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$ D. $I\left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; 0\right)$

Lời giải

Chọn A.

Ta thấy $OA = OB = \sqrt{2}$; $\angle AOB = 120^\circ$

Ta có D nằm trên đoạn OA nên $D(a; 0; a)$, $OD = a\sqrt{2}$, $(0 < a < 1)$

E nằm trên đoạn OB nên $E(0; b; -b)$, $OE = b\sqrt{2}$, ($0 < b < 1$)

$$\frac{S_{ODE}}{S_{OAB}} = ab = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{DE} = (-a; b; -b - a)$$

$$DE = \sqrt{2a^2 + 2b^2 + 2ab} \geq \sqrt{6ab} = \sqrt{3}$$

Dấu bằng xảy ra khi $a = b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ suy ra $D\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, $E\left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Vậy $\text{Min}(DE) = \sqrt{3}$ khi đó trung điểm của DE có tọa độ $I\left(\frac{\sqrt{2}}{4}; \frac{\sqrt{2}}{4}; 0\right)$

Câu 121: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, mặt phẳng (P) qua hai điểm $M(1; 8; 0)$, $C(0; 0; 3)$ cắt các tia Ox, Oy lần lượt tại A, B sao cho OG là nhỏ nhất, với G là trọng tâm tam giác ABC . Biết $G(a; b; c)$, hãy tính $T = a + b + c$.

A. $T = 7$.

B. $T = 3$.

C. $T = 12$.

D. $T = 6$.

Lời giải

Chọn D

Gọi $A(a_1; 0; 0); B(0; b_1; 0)$ với $(a_1, b_1 > 0)$. Suy ra: $G\left(\frac{a_1}{3}; \frac{b_1}{3}; 1\right)$.

Phương trình mặt phẳng (ABC) : $\frac{x}{a_1} + \frac{y}{b_1} + \frac{z}{3} = 1$.

Vì $M \in (ABC)$ nên $\frac{1}{a_1} + \frac{8}{b_1} = 1$.

Ta có: $OG = \frac{1}{3}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + 9}$.

Ta có: $1 = \frac{1}{a_1} + \frac{8}{b_1} = \frac{1}{a_1} + \frac{16}{2b_1} \geq \frac{25}{a_1 + 2b_1} \geq \frac{25}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$.

Suy ra: $a_1^2 + b_1^2 \geq 125$.

Do đó: $OG \geq \frac{\sqrt{134}}{3}$. Dấu bằng xảy ra khi $b_1 = 2a_1$.

Khi đó: $a_1 = 5; b_1 = 10$.

Vậy $a + b + c = 6$.

Câu 122: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $M(1; 2; 3)$. Hỏi có bao nhiêu mặt phẳng (P) đi qua M và cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$ lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $OA = 2OB = 3OC \neq 0$?

A. 4.

B. 3.

C. 1.

D. 8.

Lời giải

Chọn A.

Gọi tọa độ các điểm $A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$

lần lượt là tọa độ các điểm cắt các trục $x'Ox, y'Oy, z'Oz$. Ta có phương trình mặt phẳng

$$(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad \text{Mặt phẳng đi qua điểm } M(1; 2; 3) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1.$$

Mặt khác $OA = 2OB = 3OC$ hay $|a| = 2|b| = 3|c|$ Suy ra có 4 trường hợp xảy ra, mỗi trường hợp ta

$$\left[\begin{array}{l} a = 2b = 3c \\ a = -2b = -3c \\ a = 2b = -3c \\ a = -2b = 3c \end{array} \right.$$

có 1 phương trình mặt phẳng

Câu 123: Trong không gian $Oxyz$, Cho 3 điểm $A(3; 7; 1)$, $B(8; 3; 8)$ và $C(3; 3; 0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 3 và (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng 6. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đi qua C và tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình mặt phẳng qua C có dạng $(P): m(x-3) + n(y-3) + pz = 0, m^2 + n^2 + p^2 > 0$.

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ tiếp xúc } (S_1) \text{ ta có } |4n + p| = 3\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \quad (1)$$

$$\text{Mặt phẳng } (P) \text{ tiếp xúc } (S_2) \text{ ta có } |5m + 8p| = 6\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \quad (2)$$

$$|5m + 8p| = 2|4n + p| \Leftrightarrow \begin{cases} 5m = 8n - 6p & (3) \\ 5m = -8n - 10p & (4) \end{cases}$$

Từ đây ta có phương trình

Từ (1), (3) ta có:

$$(4n + p)^2 = 9 \left[\left(\frac{8n - 6p}{5} \right)^2 + n^2 + p^2 \right] \Leftrightarrow 401n^2 - 1064np + 524p^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 2p \\ n = \frac{262}{401}p \end{cases}$$

Trường hợp này ta tìm được hai mặt phẳng:

$$(P_1): 2x + 2y + z - 12 = 0, (P_2): 62x - 262y - 401z + 600 = 0$$

Từ (1), (4) ta có:

$$(4n+p)^2 = 9 \left[\left(\frac{8n+10p}{5} \right)^2 + n^2 + p^2 \right] \Leftrightarrow 401n^2 + 1240np + 1100p^2 = 0 \Leftrightarrow n = p = 0$$

Trường hợp này không có mặt phẳng nào.

Câu 124: Trong không gian $Oxyz$, Cho 3 điểm $A(0;0;1)$, $B(0;2;2)$ và $C(3;-1;-1)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 1 và (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng 3. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đi qua C và tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

A. 1.

B. 2.

C. 3.

D. 4.

Lời giải

Chọn B.

Phương trình mp qua C có dạng $(P): m(x-3) + n(y+1) + p(z+1) = 0, m^2 + n^2 + p^2 > 0$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S_1) ta có $|-3m + n + 2p| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ (1)

Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S_2) ta có $|-3m + 3n + 3p| = 3\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ (2)

$$|-3m + 3n + 3p| = 3|-3m + n + 2p| \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2m \\ 3p = 4m - 2n \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Từ đây ta có phương trình

$$\text{Từ (1), (3) ta có: } |m+n| = \sqrt{5m^2 + n^2} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ n = 2m \end{cases}$$

Trường hợp này ta tìm được hai mặt

$$(P_1): y+1=0, (P_2): x+2y+2z+1=0$$

$$\text{Từ (1), (4) ta có: } 4m^2 - 3mn + 2n^2 = 0 \Leftrightarrow m = n = 0$$

Trường hợp này không có mặt phẳng nào.

Kết luận có 2 mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán.

Bình luận: Từ (3) học sinh dễ nhầm lẫn chọn ngay $m=1 \Rightarrow p=2 \Rightarrow n=2$ dẫn tới chỉ tìm được 1 mặt phẳng thỏa mãn.

Câu 125: Trong không gian $Oxyz$, Cho 3 điểm $A(3;0;-2)$, $B(2;2;1)$ và $C(4;-2;0)$. Gọi (S_1) là mặt cầu tâm A bán kính bằng 1 và (S_2) là mặt cầu tâm B bán kính bằng 2. Hỏi có tất cả bao nhiêu mặt phẳng đi qua C và tiếp xúc đồng thời với cả hai mặt cầu $(S_1), (S_2)$.

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Lời giải

Chọn D.

Phương trình mp qua C có dạng $(P): m(x-4) + n(y+2) + pz = 0, m^2 + n^2 + p^2 > 0$

Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S_1) ta có $|-m+2n-2p| = \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ (1)

Mặt phẳng (P) tiếp xúc (S_2) ta có $|-2m+4n+p| = 2\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}$ (2)

Từ đây ta có phương trình
$$|-2m+4n+p| = 2|-m+2n-2p| \Leftrightarrow \begin{cases} p=0 & (3) \\ 4m=8n-3p & (4) \end{cases}$$

Từ (1), (3) ta có:
$$|-m+2n| = \sqrt{m^2 + n^2} \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ 3n=4m \end{cases}$$

Trường hợp này ta tìm được hai mặt phẳng $(P_1): x-4=0, (P_2): 3x+4y-4=0$

Từ (1), (4) ta có:
$$5n^2 - 3np = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n=0 \\ 5n=3p \end{cases}$$

Trường hợp này ta tìm được hai mặt phẳng nữa $(P_3): 3x-4z-12=0, (P_4): 9x+12y+20z-12=0$

Kết luận có 4 mặt phẳng thỏa yêu cầu bài toán

Câu 126: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1;2;5)$. Số mặt phẳng (α) đi qua M và cắt các trục Ox, Oy, Oz tại A, B, C sao cho $OA=OB=OC$ (A, B, C không trùng với gốc tọa độ O)

- A. 8. B. 3. C. 4. D. 1.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ điều kiện: $abc \neq 0$.

Phương trình mặt phẳng (α) là: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$. Do (α) đi qua M nên ta có: $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{5}{c} = 1$ (1)

Theo đề ra $OA = OB = OC$ nên ta có $|a| = |b| = |c| \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = c \\ a = b = -c \\ a = -b = -c \\ a = -b = c \end{cases}$

Với $a = b = c$ thay vào (1) ta được $a = b = c = 8$.

Với $a = b = -c$ thay vào (1) ta được $a = b = -c = -2$.

Với $a = -b = -c$ thay vào (1) ta được $a = -b = -c = -6$.

Với $a = -b = c$ thay vào (1) ta được $a = -b = c = 4$.

Vậy chọn đáp án (C).

Câu 127: Trong không gian hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 4; 5)$, $B(3; 4; 0)$, $C(2; -1; 0)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 3y - 2z - 12 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính tổng $a + b + c$.

A. 3.

B. 2.

C. -2.

D. -3.

Lời giải

Chọn A.

Giả sử $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$.

Khi đó $\overrightarrow{IA}(1-x; 4-y; 5-z)$, $\overrightarrow{IB}(3-x; 4-y; -z)$, $\overrightarrow{IC}(2-x; -1-y; -z)$,

$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = (10-5x; 5-5y; 5-5z)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow I(2; 1; 1).$$

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + 3MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})^2 + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB})^2 + 3(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IC})^2 \\ &= 5MI^2 + 2\overrightarrow{MI}(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC}) + IA^2 + IB^2 + IC^2 \\ &= 5MI^2 + IA^2 + IB^2 + IC^2 \quad (\text{vì } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}) \end{aligned}$$

Vì I cố định nên $MA^2 + MB^2 + 3MC^2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi MI nhỏ nhất, khi đó M là hình chiếu vuông góc của I lên (P) .

Gọi Δ là đường thẳng qua I và vuông góc với (P)

$$\Delta: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Phương trình đường thẳng

Tọa độ của M là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 1 - 2t \\ 3x - 3y - 2z - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} \\ x = \frac{7}{2} \\ y = \frac{-1}{2} \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{7}{2}; \frac{-1}{2}; 0\right) \Rightarrow a + b + c = 3.$$

Câu 128: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$ và mặt phẳng (P) có phương trình $x - 2y + 2z - 5 = 0$. Viết phương trình chính tắc của đường thẳng d đi qua A , song song với mặt phẳng (P) sao cho khoảng cách từ B đến đường thẳng d là nhỏ nhất.

A. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$.

B. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{-11} = \frac{z-1}{2}$.

C. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$.

D. $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{2}$.

Câu 129: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(-1; 3; -2)$, $B(-3; 7; -18)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho mặt phẳng (ABM) vuông góc với (P) và $MA^2 + MB^2 = 246$. Tính $S = a + b + c$.

A. 0.

B. -1.

C. 10.

D. 13.

Lời giải

Chọn B

Cách 1: + Gọi I là trung điểm của $AB \Rightarrow I(-2; 5; -10) \Rightarrow IA^2 = 69$.

Theo giả thiết M thỏa mãn $MA^2 + MB^2 = 246 \Leftrightarrow (\overline{MA})^2 + (\overline{MB})^2 = 246$

$$\Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} + \overline{IB})^2 = 246 \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA})^2 + (\overline{MI} - \overline{IA})^2 = 246 \Leftrightarrow 2MI^2 + 2IA^2 = 246$$

$$\Leftrightarrow IM^2 = 54 \Rightarrow M \text{ thuộc mặt cầu } (S) \text{ tâm } I \text{ bán kính } \sqrt{54}.$$

Suy ra phương trình mặt cầu $(S): (x+2)^2 + (y-5)^2 + (z+10)^2 = 54$.

+ Theo giả thiết (ABM) là mặt phẳng chứa đường thẳng AB và vuông góc với (P)

Suy ra phương trình $(ABM): 2x + 5y + z - 11 = 0$.

$$\begin{cases} (x+2)^2 + (y-5)^2 + (z+10)^2 = 54 \\ 2x - y + z + 1 = 0 \\ 2x + 5y + z - 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 2 \\ z = -7 \end{cases} \Rightarrow M(4; 2; -7)$$

Khi đó tọa độ M thỏa mãn hệ

$$\Rightarrow a + b + c = 4 + 2 + (-7) = -1$$

Cách 2:

Tọa độ trung điểm của AB là $I(-2; 5; -10)$.

$$MI^2 = \frac{2(MA^2 + MB^2) - AB^2}{4} = 54 \Rightarrow MI = 3\sqrt{6} = d(I, (P))$$

$\Rightarrow M$ là hình chiếu của I trên (P) .

$$\text{Phương trình } IM: \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 5 - t \\ z = -10 + t \end{cases} \text{ thay vào PT } (P) \text{ ta được } t = 3 \Rightarrow M(4; 2; -7) \Rightarrow a + b + c = -1.$$

* **Nhận xét:** Với cách giải trên và kết quả thu được thì giả thiết bài cho thừa điều kiện $(ABM) \perp (P)$.

Cách 3:

$$\overrightarrow{AB}(-2; 4; -16), \overrightarrow{n_p}(2; -1; 1) \Rightarrow \vec{n}_{ABM} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_p}] = (-12; -30; -6)$$

Khi đó, PT mặt phẳng $(ABM): 2x + 5y + z + 2 = 0$.

$$\text{Gọi } d = (ABM) \cap (P) \text{ khi đó, } \vec{u_d} = [\vec{n_p}, \vec{n}_{ABM}] = (-6; 0; 12). \text{ PT của } d: \begin{cases} x = t \\ y = 2 \\ z = 1 - 2t \end{cases}$$

Gọi $M(t; 2; 1 - 2t)$ ta có

$$MA^2 + MB^2 = 246 \Leftrightarrow (t+1)^2 + 1 + (3-2t)^2 + (t+3)^2 + 25 + (19-2t)^2 = 246$$

$$10t^2 - 80t + 160 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \Rightarrow M(4; 2; -7)$$

Câu 130: Cho hai điểm $A(2; 1; 3), B(-1; -2; -3)$ và mặt phẳng $(P): 2x - y - 2z + 18 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên (P) sao cho $2MA^2 + MB^2 = 144$. Tính $a + b + c$.

- A.** $a+b+c=0$. **B.** $a+b+c=4$. **C.** $a+b+c=10$. **D.** $a+b+c=7$

HD: Điểm $M(-3;2;5)$.

b) Cho các A, B, C và mặt phẳng (P) . Tìm tọa độ điểm M nằm trên (P) sao cho

$$a.MA^2 + b.MB^2 + c.MC^2 = (a+b+c)d^2(I, (P)) + a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 \text{ với } a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC} = \vec{0} .$$

Từ giả thiết ta có

$$(a+b+c)MI^2 + \overline{MI}(a\overline{IA} + b\overline{IB} + c\overline{IC}) + a.IA^2 + b.IB^2 + c.IC^2 = (a+b)d^2(I, (P)) + a.IA^2 + b.IB^2$$

$$\Leftrightarrow MI = d(I, (P)) \Rightarrow M \text{ là hình chiếu của } I \text{ trên } (P) .$$

Câu 131: Cho ba điểm $A(0;1;2), B(1;2;0), C(2;0;1)$ và mặt phẳng $(P): x+2z-13=0$. Điểm $M(a;b;c)$ nằm trên (P) sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 66$. Tính $a+b+c$.

- A.** $a+b+c=9$. **B.** $a+b+c=7$. **C.** $a+b+c=1$. **D.** $a+b+c=0$

Câu 132: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $N(4;2;-1), A(-1;3;-2), B(-3;7;-18)$ và mặt phẳng $(P): 2x-y+z+1=0$. Điểm M thuộc (P) sao cho $MA^2 + MB^2 = 258$. Tìm giá trị lớn nhất của độ dài đoạn MN .

HD giải:

Tọa độ trung điểm của AB là $I(-2;5;-10)$.

$$MI^2 = \frac{2(MA^2 + MB^2) - AB^2}{4} = 60 \Rightarrow MI = \sqrt{60} > d(I, (P)) = 3\sqrt{6}$$

Do đó, điểm M nằm trên đường tròn tâm $H(4;2;-7)$, là hình chiếu của I trên (P) , bán kính $r = \sqrt{MI^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{6}$.

Gọi K là hình chiếu của N lên (P) , E, F là giao điểm của HK với đường tròn trên. Khi đó, $KM \leq KH + HF = KF$ dấu bằng xảy ra khi $M \equiv F$.

Mà $MN^2 = NK^2 + KM^2$ nên $MN_{\max} \Leftrightarrow KM_{\max} = KF$.

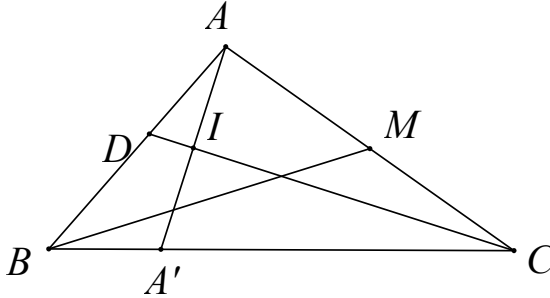
$$MN_{\max} = r + KH = \sqrt{6} + \sqrt{NH^2 - d^2(N, (P))} = \sqrt{6} + \sqrt{30}$$

Câu 133: Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2;3;3)$, phương trình đường trung tuyến kẻ từ B là $\frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$, phương trình đường phân giác trong của góc C là $\frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$. Đường thẳng AB có một vectơ chỉ phương là

- A. $\vec{u}_3 = (2;1;-1)$. B. $\vec{u}_2 = (1;-1;0)$. C. $\vec{u}_4 = (0;1;-1)$. D. $\vec{u}_1 = (1;2;1)$.

Lời giải

Chọn C



Gọi M là trung điểm của AC và D là chân đường phân giác trong kẻ từ góc C của tam giác ABC .

Do $M \in BM: \frac{x-3}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$ nên $M(3-t_0; 3+2t_0; 2-t_0)$.

Mặt khác M là trung điểm của AC nên $C(4-2t_0; 3+4t_0; 1-2t_0)$.

Mà $C \in CD: \frac{x-2}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-2}{-1}$ nên ta tìm được điểm $C(4;3;1)$.

Gọi A' là điểm đối xứng với A qua CD , suy ra $AA' \perp CD$ và $A' \in BC$.

Gọi I là trung điểm của AA' , khi đó ta có $AA' \perp CD$ tại I .

Do vậy điểm $I \in CD \Rightarrow I(2+2t_1; 4-t_1; 2-t_1)$.

Kết hợp với $AI \perp CD$ nên ta có $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{u_{CD}} = 0 \Rightarrow t_1 = 0 \Rightarrow I(2;4;2)$.

Mà I là trung điểm của AA' nên $A'(2;5;1)$.

Đường thẳng BC đi qua A' và C nên phương trình tham số là
$$\begin{cases} x = 2+t \\ y = 5-t \\ z = 1 \end{cases}$$
.

Điểm $B = BC \cap BM$ nên $B(2;5;1)$. Vậy VTCP của AB là $\vec{u}_4 = (0;1;-1)$.

Câu 134: Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{4} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z + 1 = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2;1;-2)$, song song với (P) đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (m;n;1)$. Tính $T = m^2 - n^2$.

A. $T = -5$. B. $T = 4$. C. $T = 3$. D. $T = -4$.

Lời giải

Chọn D

Cách 1:

d có một VTCP là $\vec{u}_d = (4;-4;3)$, Δ có một VTCP là $\vec{u}_\Delta = (m;n;1)$, (P) có một VTPT là $\vec{n}_P = (2;-1;2)$.

Do $\Delta \perp (P)$ nên $\vec{n}_P \cdot \vec{u}_\Delta = 0 \Leftrightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2 \quad (1)$.

$$\cos(\Delta; d) = \frac{|\vec{u}_d \cdot \vec{u}_\Delta|}{|\vec{u}_d| |\vec{u}_\Delta|} = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \frac{|4m - 4n + 3|}{\sqrt{m^2 + n^2 + 1}} \quad (2)$$

Ta có

$$\text{Từ (1), (2) ta có} \quad \cos(\Delta; d) = \frac{1}{\sqrt{41}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}}$$

$$\text{Xét hàm số} \quad f(m) = \frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5} \Rightarrow f'(m) = \frac{-18m(4m + 5)}{(5m^2 + 8m + 5)^2}$$

Bảng biến thiên:

Từ bảng biến thiên ta có $(\Delta; d)$ bé nhất $\Leftrightarrow \cos(\Delta; d)$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0$.

Khi $m = 0$ ta có $n = 2$. Do vậy $T = m^2 - n^2 = -4$.

Cách 2:

$$\sin(d, \Delta) = \sin(d', \Delta) = \frac{MK}{ME} \geq \frac{MH}{ME}$$

Vector chỉ phương $\vec{u}_\Delta = \left[\left[\vec{u}_d, \vec{n}_p \right], \vec{n}_p \right] = (0; 18; 9) \Rightarrow \vec{u} = (0; 2; 1) \Rightarrow m^2 - n^2 = -4$.

Do Δ song song với (P) nên $\vec{u} \cdot \vec{n_P} = 0 \Rightarrow 2m - n + 2 = 0 \Leftrightarrow n = 2m + 2 \Rightarrow \vec{u}(m, 2m + 2; 1)$

$$\cos(d, \Delta) = \left| \cos(\vec{u}, \vec{u}_\Delta) \right| = \frac{|4m+5|}{\sqrt{57}\sqrt{5m^2+8m+5}} = \frac{1}{\sqrt{57}} \cdot \sqrt{\frac{16m^2+40m+25}{5m^2+8m+5}}$$

Xét hàm số $y = \frac{16m^2 + 40m + 25}{5m^2 + 8m + 5}$, $y' = \frac{-18m(4m + 5)}{(5m^2 + 8m + 5)^2}$

Nhân xét rằng (d, Δ) nhỏ nhất khi và chỉ khi $\cos(d, \Delta)$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = 0 \Rightarrow \vec{u}(0; 2; 1)$.

$$\Rightarrow m^2 - n^2 = -4$$

Nhận xét: Cả hai cách giải đều có thể sử dụng cho trường hợp tổng quát. Ta có thể thay giả thiết song song với (P) bằng một giả thiết tương tự. Một số bài toán tương tự:

1) Trong không gian $Oxyz$, cho đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và mặt phẳng $(P): 2x + y + 2z = 0$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2; 1; -2)$, song song với (P) đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (10; b; c)$. Tính $S = b + c$.

HD. $\vec{u}(10; -6; -7) \Rightarrow b + c = -13$.

2) Trong không gian $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d: \frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+2}{3}$ và $d_1: \frac{x}{3} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{2}$. Đường thẳng Δ đi qua $E(-2; 1; -2)$, vuông góc với d_1 , đồng thời tạo với d góc bé nhất. Biết rằng Δ có một véc tơ chỉ phương $\vec{u} = (a; 17; c)$. Tính $S = a + b$.

HD. $\vec{u}(-19; 17; 20) \Rightarrow a + b = 1$.

Câu 135: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(1; 0; 0)$, $B(3; 2; 1)$, $C\left(-\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; \frac{8}{3}\right)$. M là điểm thay đổi sao cho hình chiếu của M lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC và các mặt phẳng (MAB) , (MBC) , (MCA) hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau. Tính giá trị nhỏ nhất của OM .

A. $\frac{\sqrt{26}}{3}$.

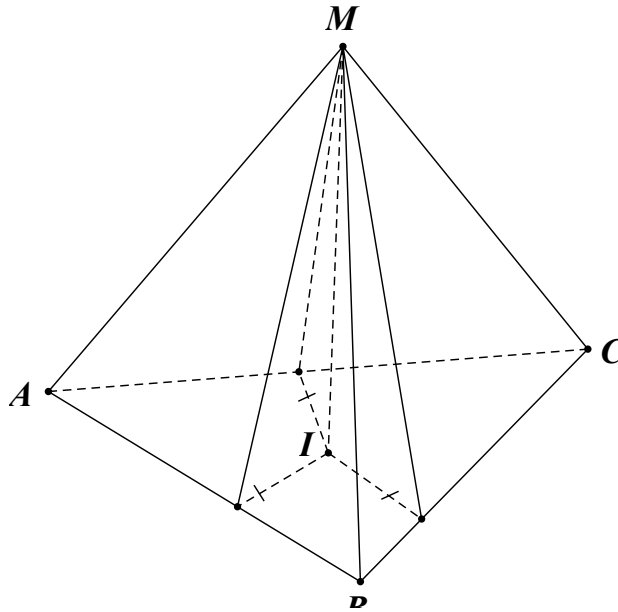
B. $\frac{5}{3}$.

C. $\sqrt{3}$.

D. $\frac{\sqrt{28}}{3}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có phương trình mặt phẳng (ABC) : $x - 2y + 2z - 1 = 0$.

Gọi I là hình chiếu vuông góc của điểm M lên mặt phẳng (ABC) . Do các mặt phẳng (MAB) , (MBC) , (MCA) cùng hợp với mặt phẳng (ABC) các góc bằng nhau nên I cách đều ba cạnh của tam giác ABC . Lại có I nằm trong tam giác ABC nên I chính là tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC .

Ta có $AB = 3$; $AC = 4$; $BC = 5$.

Sử dụng công thức: $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow 5\vec{IA} + 4\vec{IB} + 3\vec{IC} = \vec{0} \Leftrightarrow I(1;1;1)$

Đường thẳng Δ qua I và vuông góc với mặt phẳng (ABC) có phương trình là:
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - 2t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Kẻ $OH \perp \Delta$. Ta có M thuộc Δ nên $OM \geq OH, \forall M$

$$\Rightarrow \min OM = OH = d(O; \Delta) = \frac{|\vec{IO} \cdot \vec{u}|}{|\vec{u}|} = \frac{\sqrt{26}}{3}.$$

Tổng quát: Tọa độ điểm I thỏa mãn $a\vec{IA} + b\vec{IB} + c\vec{IC} = \vec{0}, (a + b + c \neq 0)$ là

$$\left(\frac{ax_A + bx_B + cx_C}{a + b + c}; \frac{ay_A + by_B + cy_C}{a + b + c}; \frac{az_A + bz_B + cz_C}{a + b + c} \right)$$

Bình luận: Giả thiết bài toán nêu không cho hình chiếu của M lên mặt phẳng (ABC) nằm trong tam giác ABC thì sẽ có bốn điểm I thỏa mãn cách đều ba cạnh của tam giác ABC (một tâm nội tiếp và ba tâm bàng tiếp), khi đó bài toán phải xét cả bốn trường hợp và ta chọn min của bốn trường hợp đó.

Câu 136: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho bốn điểm $M(2;0;0), N(0;-3;0), P(0;0;4), Q(2;3;4)$. Tìm số mặt phẳng (α) đi qua M, N và khoảng cách từ Q đến (α) gấp hai lần khoảng cách từ P đến (α) .

- A. Vô số. B. 0. C. 1. D. 2

Lời giải

Chọn C.

$$+ \text{) Nhận thấy } \begin{cases} \overrightarrow{MN} = (-2; -3; 0) \\ \overrightarrow{MP} = (-2; 0; 4) \\ \overrightarrow{PQ} = (2; 3; 0) \end{cases} \Rightarrow MN \text{ song song với } PQ.$$

+) Từ kết luận trên ta có $\forall (\alpha) \supset MN$ thì $d_{(P;(\alpha))} = d_{(Q;(\alpha))}$.

+) Vậy : $d_{(Q;(\alpha))} = 2d_{(P;(\alpha))} \Leftrightarrow d_{(Q;(\alpha))} = d_{(P;(\alpha))} = 0$ hay $(\alpha) \equiv (MNPQ)$. Vậy có duy nhất một mặt phẳng thỏa mãn điều kiện bài toán.

Câu 137: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho 3 đường thẳng $(d_1): \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-2}$, $(d_2): \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-2}{2}$, $(d_3): \frac{x-4}{2} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z-1}{1}$. Mặt cầu bán kính nhỏ nhất tâm $I(a,b,c)$,

tiếp xúc với 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$, tính $S = a + 2b + 3c$:

- A. $S = 10$. B. $S = 11$. C. $S = 12$. D. $S = 13$.

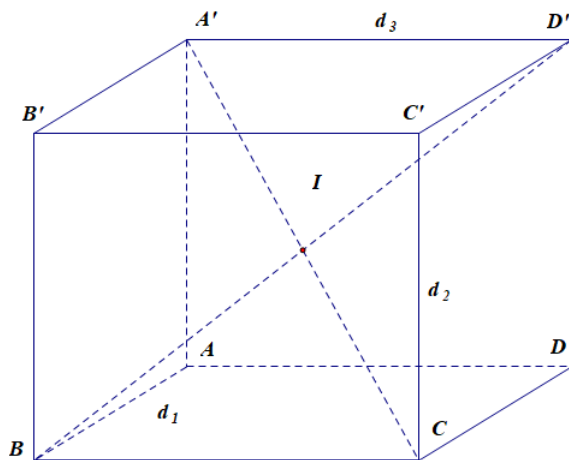
Lời giải:

Chọn B.

Nhận xét: 3 đường thẳng $(d_1), (d_2), (d_3)$ đôi một vuông góc và cách đều nhau.

Dựng hình lập phương sao cho $(d_1), (d_2), (d_3)$ chứa 3 cạnh.

Ta có cạnh hình lập phương là $d = 3$.



Ta có

$$d^2(I; d_1) = d^2(I; (ABCD)) + d^2(I; (ABB'A')) = x^2 + y^2,$$

$$d^2(I; d_2) = d^2(I; (BCB'C')) + d^2(I; (CDD'C')) = z^2 + t^2,$$

$$d^2(I; d_3) = d^2(I; (A'B'C'D')) + d^2(I; (ADD'A')) = u^2 + v^2$$

Ta có: $3r^2 = x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + u^2 + v^2 \geq \frac{1}{2}(x+u)^2 + \frac{1}{2}(y+t)^2 + \frac{1}{2}(z+v)^2 \Rightarrow r \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}.$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow I$ là tâm hình lập phương $\Leftrightarrow I\left(\frac{7}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right).$

$$S = \frac{7}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} = 11.$$

Vậy

Cách 2:

Gọi $I(a; b; c)$

$$\Rightarrow R = d(I, d_1) = d(I, d_2) = d(I, d_3)$$

Mẫu đều bằng³ nên bình phương các vế, ta được

$$9R^2 = A = B = C$$

$$\Rightarrow 27R^2 = A + B + C = 18(a^2 + b^2 + c^2) - 126a - 54b - 54c + 423$$

$$= 18\left(a - \frac{7}{2}\right)^2 + 18\left(b - \frac{3}{2}\right)^2 + 18\left(c - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{234}{2} \geq \frac{234}{2}.$$

$$\begin{cases} a = \frac{7}{2} \\ b = \frac{3}{2} \\ c = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi

$$\text{Vậy } S = \frac{7}{2} + 2 \cdot \frac{3}{2} + 3 \cdot \frac{3}{2} = 11.$$

Câu 138: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(0;8;2)$ và mặt cầu $(S): (x-5)^2 + (y+3)^2 + (z-7)^2 = 72$ và điểm $B(9;-7;23)$. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A và tiếp xúc với (S) sao cho khoảng cách từ B đến (P) là lớn nhất. Giả sử $\vec{n} = (1; m; n)$ là một vector pháp tuyến của (P) . Khi đó

A. $m.n = 2$.

B. $m.n = -2$.

C. $m.n = 4$.

D. $m.n = -4$.

Lời giải

Chọn D.

Giả sử mặt phẳng (P) có dạng $a(x-0) + b(y-8) + c(z-2) = 0$, $(a^2 + b^2 + c^2 \neq 0)$.

$ax + by + cz - 8b - 2c = 0$. Mặt cầu (S) có tâm $I(5;-3;7)$ và bán kính $R = 6\sqrt{2}$.

Điều kiện tiếp xúc:

$$d(I, (P)) = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a - 3b + 7c - 8b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{|5a - 11b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 6\sqrt{2} \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Mà } d(B, (P)) &= \frac{|9a - 7b + 23c - 8b - 2c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{|9a - 15b + 21c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &= \frac{|5a - 11b + 5c + 4(a - b + 4c)|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \leq \frac{|5a - 11b + 5c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} + 4 \frac{|a - b + 4c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \\ &\leq 6\sqrt{2} + 4 \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 4^2} \cdot \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = 18\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{1} = \frac{b}{-1} = \frac{c}{4}$. Chọn $a = 1; b = -1; c = 4$ thỏa mãn $(*)$.

Khi đó $(P): x - y + 4z = 0$. Suy ra $m = -1; n = 4 \Rightarrow m.n = -4$.

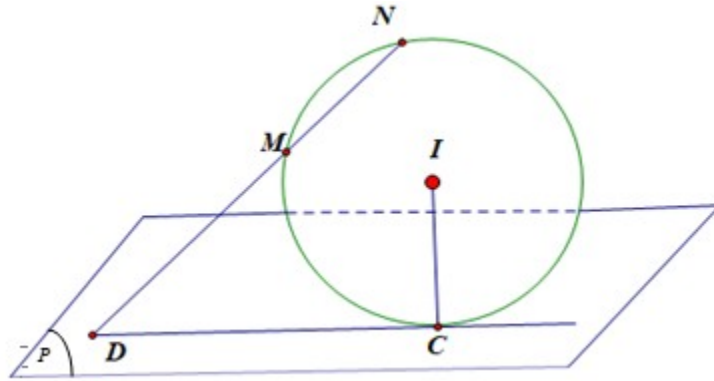
Câu 139: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ cho mặt phẳng $(P): x - y - z + 3 = 0$ và hai điểm $M(-1;1;-1); N(3;-3;3)$. Mặt cầu (S) đi qua hai điểm M, N và tiếp xúc với (P) tại C . Biết rằng C luôn thuộc một đường tròn cố định. Tính chu vi của đường tròn đó.

A. $8p$.

B. $8p\sqrt{3}$.

C. $12p\sqrt{2}$.

D. $12p$.

Chọn D

Ta có MN đi qua $M(-1;1;-1)$, nhận $\frac{1}{4}\overline{MN} = \frac{1}{4}(4;-4;4) = (1;-1;1)$ là một vectơ chỉ phương nên

$$MN: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t \end{cases} (t \in \mathbb{R}).$$

Thay $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + t \end{cases}$ vào (P) ta được $-1 + t + 1 + t + 1 - t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = 4$

Tọa độ điểm $D(3;3;3)$ là giao điểm của của MN và (P) . Do đó theo tính chất của phương tích ta được $DM \cdot DN = DI^2 - R^2$. Mặt khác vì DC là tiếp tuyến của mặt cầu (S) cho nên $DC^2 = DI^2 - R^2$. Do vậy $DC^2 = DM \cdot DN = 36 \Rightarrow DC = 6$ (là một giá trị không đổi).

Vậy C luôn thuộc một đường tròn cố định tâm D với bán kính $R = 6$ suy ra chu vi của đường tròn là 12π

(Chú ý rằng điểm I không nhất thiết nằm trên $mp(DM, DC)$, hình ảnh trên minh họa, mang tính tương đối_Cao Thời PB)

Câu 140: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3;0;1)$, $B(1;-1;3)$. Trong tất cả các đường thẳng đi qua A và song song với (P) , gọi Δ là đường thẳng sao cho khoảng cách từ B đến Δ là lớn nhất. Viết phương trình đường thẳng Δ .

A. $\Delta: \frac{x-5}{2} = \frac{y}{-6} = \frac{z}{-7}$.

B. $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+12}{6} = \frac{z+13}{7}$.

C. $\Delta: \frac{x+3}{-2} = \frac{y}{-6} = \frac{z-1}{7}$.

D. $\Delta: \frac{x-1}{-2} = \frac{y+1}{6} = \frac{z-3}{7}$.

Chọn B.

Ta có: $\overrightarrow{AB}(4; -1; 2), \overrightarrow{n_{(P)}} = (1; -2; 2)$.

$$\Rightarrow \overrightarrow{u_{\Delta}} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{n_{(P)}}] = (2; -6; -7)$$

$$\Rightarrow \Delta: \begin{cases} \text{Đ qua } A(-3; 0; 1) \\ \text{vtcp } \overrightarrow{u_{\Delta}}(2; -6; -7) \end{cases} \text{ . Chọn B.}$$

Câu 141: Trong không gian $Oxyz$, cho điểm $A(1; 1; 2)$ và $(P): (m-1)x + y + mz - 1 = 0$ với m là tham số. Biết khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P) lớn nhất. Khẳng định đúng trong bốn khẳng định dưới đây là

A. $2 < m < 6$.

B. Không có m .

C. $-2 < m < 2$.

D. $-6 < m < -2$.

Lời giải**Chọn A.***** Phân tích:**

- Đây là bài toán mà giả thiết có liên quan trực tiếp đến kết luận thông qua công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng, mấu chốt của bài toán là tìm giá trị nhỏ nhất của hàm

phân thức dạng $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x^2 + b'x + c'}$.

- Học sinh có thể sử dụng MTCT để tìm được phương án trả lời đúng.

*** Giải**

Ta có: $d = d(M, (P)) = \frac{|3m-1|}{\sqrt{2m^2-2m+2}}$.

$$\Rightarrow d^2 = y(m) = \frac{9m^2 - 6m + 1}{2m^2 - 2m + 2}$$

Xét hàm $y(m)$ có $y'(m) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-3m^2 + 16m - 5}{(m^2 - m + 1)^2} \quad y'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 5 \\ m = \frac{1}{3} \end{cases}$.

Bảng biến thiên

m	$-\infty$	$\frac{1}{3}$	5	$+\infty$	
$y'(m)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$y(m)$	$\frac{9}{2}$		$\frac{14}{3}$		$\frac{9}{2}$
		0			

Suy ra d lớn nhất $\Leftrightarrow y(m)$ lớn nhất $\Leftrightarrow m = 5$. Chọn đáp án A.

Câu 142: Trong không gian $Oxyz$, cho hai điểm $A(0; -1; 2)$, $B(1; 1; 2)$ và đường thẳng

$d: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$. Biết điểm $M(a; b; c)$ thuộc đường thẳng d sao cho tam giác MAB có diện tích nhỏ nhất. Khi đó, giá trị $T = a + 2b + 3c$ bằng

A. 4.

B. 5.

C. 10.

D. 3.

Lời giải:

Chọn C

$$AB: \begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 \end{cases}$$

+) Phương trình đường thẳng

Nhận xét: đường thẳng AB và d chéo nhau.

+ Đặt MH vuông góc với AB . Ta có $S_{\Delta MAB} = \frac{1}{2} AB \cdot MH$. Do AB cố định nên diện tích tam giác MAB nhỏ nhất khi và chỉ khi MH là đoạn vuông góc chung của AB và d .

$$M \in (d) \Rightarrow M(-1+t_1; t_1; 1+t_1); H \in AB \Rightarrow H(t_2; -1+2t_2; 2)$$

+)

$$\Rightarrow \overrightarrow{MH}(t_2 - t_1 + 1; 2t_2 - t_1 - 1; -t_1 + 1).$$

MH là đoạn vuông góc chung của AB và d khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{MH} \cdot \vec{u}_d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 - t_1 + 1 + 2(2t_2 - t_1 - 1) = 0 \\ t_2 - t_1 + 1 + 2t_2 - t_1 - 1 - t_1 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = \frac{4}{3} \\ t_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; \frac{7}{3}\right)$$

Vậy $T = 10$.

Câu 143: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt phẳng $(\alpha): 2x + y - 2z + 9 = 0$ và ba điểm $A(2;1;0)$, $B(0;2;1), C(1;3;-1)$. Điểm $M \in (\alpha)$ sao cho $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất. Khẳng định nào sau đây đúng?

- A.** $x_M + y_M + z_M = 4$. **B.** $x_M + y_M + z_M = 2$.
C. $x_M + y_M + z_M = 3$. **D.** $x_M + y_M + z_M = 1$.

Lời giải:

Chọn A

+) Gọi điểm I thỏa mãn $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(0; -4; 7)$. ($x_I = \frac{2x_A + 3x_B - 4x_C}{2 + 3 - 4}$)

+) Ta có $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}| = |2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} - 4\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IM}| = |\overrightarrow{IM}| = IM$

Do đó, $|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 4\overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi và chỉ khi IM nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) .

+) Phương trình đường thẳng d qua I và vuông góc với (α) là:
$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -4 + t \\ z = 7 - 2t \end{cases}$$

$M \in d \Rightarrow M(2t; -4 + t; 7 - 2t)$. $M \in (\alpha) \Rightarrow t = 1 \Rightarrow M(2; -3; 5)$.

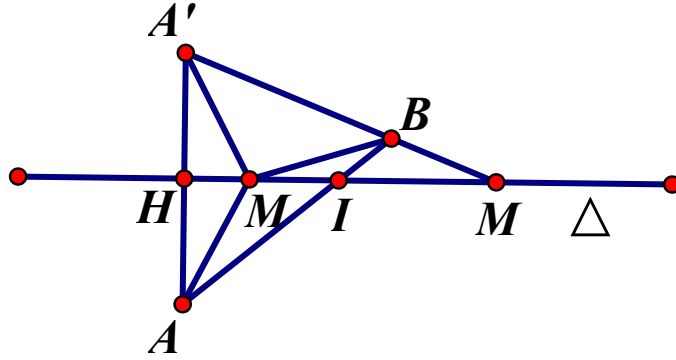
Vậy $x_M + y_M + z_M = 4$.

Câu 144: Trong không gian với hệ trục $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{1}$ và hai điểm $A(1;2;-5), B(-1;0;2)$. Biết điểm M thuộc Δ sao cho biểu thức $T = |MA - MB|$ đạt giá trị lớn nhất là T_{max} . Khi đó, T_{max} bằng bao nhiêu?

- A.** $T_{max} = \sqrt{57}$. **B.** $T_{max} = 3$. **C.** $T_{max} = 2\sqrt{6} - 3$. **D.** $T_{max} = 3\sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B



Ta có $\overline{AB}(-2; -2; 7)$ suy ra phương trình đường thẳng $AB: \begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = -2t \\ z = 2 + 7t \end{cases}$

$\Delta: \begin{cases} x = t' \\ y = 1 + t' \\ z = t' \end{cases}$. Xét hệ $\begin{cases} -1 - 2t = t' \\ -2t = 1 + t' \\ 2 + 7t = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -\frac{1}{3} \\ t' = -\frac{1}{3} \end{cases}$, do đó đường thẳng AB và Δ cắt nhau tại $I\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}\right)$. Thấy $\overline{IA} = \left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{14}{3}\right)$; $\overline{IB} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{7}{3}\right) \Rightarrow \overline{IA} = -2\overline{IB}$ nên hai điểm A, B nằm về hai phía của đường thẳng Δ . Gọi H, A' lần lượt là hình chiếu của A trên Δ và là điểm đối xứng với A qua Δ . $H(t'; 1+t'; t') \in \Delta \Rightarrow \overline{AH}(t'-1; t'-1; t'+5) \perp \vec{u}_{\Delta}(1; 1; 1) \Rightarrow t'-1+t'-1+t'+5=0 \Rightarrow t'=-1 \Rightarrow H(-1; 0; -1) \Rightarrow A'(-3; -2; 3)$.

Với mọi điểm $M \in \Delta$ ta đều có $MA = MA'$ do đó $T = |MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B = 3$ dấu bằng xảy ra khi M là giao điểm của đường thẳng $A'B$ và Δ . Vậy $T_{\max} = 3$.

Câu 145: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ và mặt phẳng $(P): y - z + 1 = 0$. Biết $b, c > 0$ và $(ABC) \perp (P); d(O; (ABC)) = \frac{1}{3}$. Tính $T = b + c$.

A. $T = \frac{5}{2}$.

B. $T = 2$.

C. $T = \frac{1}{2}$.

D. $T = 1$.

Lời giải

Chọn D

Áp dụng pt mp theo đoạn chắn, mp (ABC) có phương trình: $x + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$, do đó VTPT của (ABC) là $\vec{n}_1\left(1; \frac{1}{b}; \frac{1}{c}\right)$ và VTPT của (P) là $\vec{n}_2(0; 1; -1)$. Vì $(ABC) \perp (P); d(O; (ABC)) = \frac{1}{3}$ nên

$$\begin{cases} b = c \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

ta thu được hệ:

Giải hệ với điều kiện $b, c > 0$ ta được $b = c = \frac{1}{2}$. Vậy $T = 1$.

Câu 146: Trong không gian $Oxyz$, cho mp (P) cắt ba trục tọa độ tại ba điểm $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$. Biết $a, b, c > 0$ và $M(9; 1; 1) \in (P)$, khi $OA + 4OB + OC$ đạt GTNN hãy tính $T = a - bc$

- A. $T = 4$. B. $T = 36$. C. $T = 0$. D. $T = 8$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng pt mp theo đoạn chắn, mp (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Vì $M(9; 1; 1) \in (P)$ nên ta có $\frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, suy ra $1 = \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3^2}{a} + \frac{2^2}{4b} + \frac{1^2}{c} \geq \frac{(3+2+1)^2}{a+4b+c}$.

Do đó: $a + 4b + c \geq 36 \Rightarrow OA + 4OB + OC \geq 36$. Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} \frac{3}{a} = \frac{1}{2b} = \frac{1}{c} \\ \frac{9}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 18 \\ b = 3 \\ c = 6 \end{cases}$

Câu 147: Trong không gian $Oxyz$, cho mp (P) đi qua $M(1; 2; 1), N(-1; 0; -1)$ đồng thời cắt Ox, Oy theo thứ tự tại A, B (khác O) sao cho $\frac{AM}{BN} = \sqrt{3}$. Khi đó (P) có một VTPT $\vec{n}(1; m; n)$ thì tổng $m + n$ bằng

- A. 2. B. -1. C. 1. D. 0.

Chọn B

Giả sử (P) cắt ba trục tọa độ tại các điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c); (abc \neq 0)$, theo ptmp

theo đoạn chắn ta có ptmp (P) có dạng: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$\text{Vì } (P) \text{ qua } M, N \text{ nên: } \begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{1}{c} = 1 \\ \frac{-1}{a} + \frac{-1}{c} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a + c = -ac \end{cases}$$

$$AM = \sqrt{3}BN \Leftrightarrow (a-1)^2 + 5 = 3(2+b^2) \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = -1 \end{cases}$$

Từ

$$a = 3 \Rightarrow c = -\frac{3}{4} \text{ nên ptmp là } x + 3y - 4z - 3 = 0 \Rightarrow m + n = -1.$$

$$a = -1 \Rightarrow -1 + c = c \text{ không có giá trị thỏa mãn.}$$

Câu 148: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(0;0;-3), B(2;0;-1)$ và mặt phẳng $(P): 3x - 8y + 7z - 1 = 0$. Điểm $C(a;b;c)$ là điểm nằm trên mặt phẳng (P) , có hoành độ dương để tam giác ABC đều. Tính $a - b + 3c$.

A. -7.

B. -9.

C. -5.

D. -3.

Lời giải**Chọn C.**

Viết phương trình mặt phẳng (Q) là trung trực đoạn AB

$$(Q): \begin{cases} \text{đi qua } I(1;0;-2) \\ \text{vtp } \overline{AB} = (1;0;1) \end{cases} \Leftrightarrow (Q): x + z + 1 = 0$$

Viết phương trình đường thẳng d là giao tuyến (P) và (Q)

$$d: \begin{cases} x + z + 1 = 0 \\ 3x - 8y + 7z - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow d: \begin{cases} x = 2t \\ y = -1 - t \\ z = -1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow C(2t; -1 - t; -1 - 2t)$$

Tam giác ABC đều khi và chỉ khi $AB = AC$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(2t)^2 + (-1 - t)^2 + (-1 - 2t)^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 6t - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow C(2; -2; -3)$$

Vậy $a - b + 3c = -5$.

Vậy đáp án **C**.

Câu 149: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1; 0; 0); B(2; 1; 3); C(0; 2; -3)$. Biết rằng quỹ tích các điểm M thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8$ là đường tròn cố định, tính bán kính r đường tròn này.

A. $r = \sqrt{3}$.

B. $r = 6$

C. $r = 3$.

D. $r = \sqrt{6}$.

Lời giải

Chọn B

Cách 1:

$$\begin{aligned} \text{Mặt cầu } (S) \text{ có tâm } I(3; 3; 2), \text{ bán kính } R = 3. \text{ Gọi } M(x, y, z), \text{ khi đó } MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} &= 8 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + z^2 + 2[x(x-2) + (1-y)(2-y) + z^2 - 9] &= 8 \\ \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 &= 9(S') \end{aligned}$$

Vậy M cũng thuộc mặt cầu có tâm $I'(1; 1; 0)$, bán kính $R' = 3$. Do đó M thuộc đường tròn là giao của hai mặt cầu (S) và (S') có bán kính $r = \sqrt{R^2 - \left(\frac{II'}{2}\right)^2} = \sqrt{6}$ (do $R = R' = 3$).

Cách 2:

Gọi N là trung điểm BC , khi đó ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} &= 8 \Leftrightarrow MA^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 - MB^2 - MC^2 = 8 \Leftrightarrow MA^2 + 4MN^2 - MB^2 - MC^2 = 8 \\ \Leftrightarrow MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 - BC^2 - MB^2 - MC^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 - BC^2 &= 8 \\ \Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 - BC^2 &= 8 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + MB^2 + MC^2 = 49.$$

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC . Khi đó $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 49 \Leftrightarrow$

$$3MG^2 + MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = 49 \Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 = 49$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = 27 \Leftrightarrow MG^2 = 9. \text{ Vậy } M \text{ cũng thuộc mặt cầu có tâm } I'(1;1;0), \text{ bán kính } R' = 3.$$

Đến đây thì làm tương tự cách 1.

Cách 3.

(S) có tâm $I(3;3;2)$ bán kính $R_1 = 3$.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , khi đó tọa độ $G(1;1;0)$.

$$\overrightarrow{GA}(0;-1;0), \overrightarrow{GB}(1;0;3), \overrightarrow{GC}(-1;1;-3).$$

$$MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 8 \Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + 2\overrightarrow{MG}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + 2\overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} = 8$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + 1 - 20 = 8 \Leftrightarrow MG = 3.$$

Do đó, M nằm trên mặt cầu (S_1) tâm G bán kính $R_2 = 3$ có phương trình $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = 9$.

Vì $IG = 2\sqrt{3} < R_1 + R_2$ nên hai mặt cầu cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn tâm H , bán kính r , nằm trên mặt phẳng $x + y + z - 5 = 0$.

$$\text{Từ đó suy ra } r = \sqrt{R^2 - d^2(I, (P))} = \sqrt{6}.$$

Nhận xét: Ta có thể mở rộng bài toán như sau

Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm M thuộc mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 9$ và ba điểm $A(1;0;0); B(2;1;3); C(0;2;-3)$. Gọi k là số thực thỏa mãn $MA^2 + 2\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = k$, $k > -19$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của k .

HD: Với cách làm tương tự như trên ta được $MG = \frac{k+19}{3}$. Khi đó, M nằm trên mặt cầu (S_1) có tâm G bán kính $R_2 = \frac{k+19}{3}$.

Để tồn tại điểm M thì hai mặt cầu $(S), (S_1)$ có điểm chung. Khi đó,

$$|R_1 - R_2| \leq IG \leq R_1 + R_2 \Leftrightarrow \left| 3 - \frac{k+19}{3} \right| \leq 2\sqrt{3} \leq 3 + \frac{k+19}{3} \Leftrightarrow 6\sqrt{3} - 28 \leq k \leq 6\sqrt{3} - 10$$

Câu 150: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1;2;3)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$

B. $(P): 6x + 3y + 2z - 18 = 0$

C. $(P): 3x + 2y + z - 10 = 0$

D. $(P): 6x - 3y + 2z - 6 = 0$

Lời giải

Chọn A.

Dựa vào các hệ thức lượng trong tam giác vuông và các mối quan hệ vuông góc trong không gian

ta chứng minh được rằng với H là trực tâm tam giác ABC thì $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ và $OH \perp (ABC)$

Do đó $T = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất khi OH lớn nhất.

Mà $OH \leq OM$ nên muốn OH lớn nhất thì $M \equiv H$, khi đó $\overrightarrow{OM} = (1;2;3)$ là véc tơ pháp tuyến của (P) .

Do đó phương trình mặt phẳng (P) cần tìm là $1(x-1) + 2(y-2) + 3(z-3) = 0$ hay $(P): x + 2y + 3z - 14 = 0$

Câu 151: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(2;3;4)$ và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho M là trực tâm của tam giác ABC ?

A. $(P): 2x + 3y + 4z - 29 = 0$

B. $(P): 2x + 3y + 4z = 0$

C. $(P): 6x + 4y + 3z - 12 = 0$

D. $(P): 6x + 4y + 3z - 36 = 0$

Lời giải

Chọn A.

M là trực tâm $\triangle ABC \Rightarrow OM \perp (ABC)$, do đó (P) nhận $\overline{OM} = (2; 3; 4)$ làm VTPT.

Phương trình mặt phẳng (P) là: $2(x-2) + 3(y-3) + 4(z-4) = 0$ hay $2x + 3y + 4z - 29 = 0$.

Câu 152: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua $M(1; 3; 5)$ và cắt các tia Ox, Oy, Oz lần lượt tại các điểm A, B, C sao cho thể tích khối tứ diện $OABC$ đạt giá trị nhỏ nhất?

- A. $(P): 15x + 5y + 3z - 45 = 0$ B. $(P): x + 3y + 5z - 35 = 0$
C. $(P): 15x + 5y + 3z + 1 = 0$ D. $(P): x + y + z - 9 = 0$

Lời giải

Chọn A.

Gọi $A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c)$ với $a, b, c > 0$.

Phương trình mặt phẳng $(ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

$$M \in (ABC) \Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} = 1$$

Ta có:
$$V_{OABC} = \frac{1}{6} \cdot OA \cdot OB \cdot OC = \frac{abc}{6}$$

$$1 = \frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} \geq 3\sqrt{\frac{15}{abc}} \Rightarrow abc \geq 405 \Rightarrow V_{OABC} \geq \frac{135}{2}, \text{ dấu "}" xảy ra khi } \frac{1}{a} = \frac{3}{b} = \frac{5}{c} = \frac{1}{3} \Rightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 9 \\ c = 15 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (P): 15x + 5y + 3z - 45 = 0$$

Câu 153: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và $(S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm J của đường tròn (C) .

- A. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ B. $J\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ C. $J\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ D. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

Câu 154: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $A(4; 2; 5)$, $B(0; 4; -3)$, $C(2; -3; 7)$.
 Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng (Oxy) sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.
 Tính tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$.
A. $P = -3$. **B.** $P = 0$. **C.** $P = 3$. **D.** $P = 6$.

Câu 155: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; -2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.
A. $M(5; 2; -4)$. **B.** $M(-1; -1; -1)$. **C.** $M(1; 0; -2)$. **D.** $M(3; 1; -3)$.

Câu 156: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S_1): (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16$ và $(S_2): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9$ cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C) . Tìm tọa độ tâm J của đường tròn (C) .
A. $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ **B.** $J\left(\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; \frac{1}{4}\right)$ **C.** $J\left(-\frac{1}{3}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$ **D.** $J\left(-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}; -\frac{1}{4}\right)$

Lời giải

Chọn D.

Các điểm thuộc đường tròn (C) có tọa độ thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 16 \\ (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 4x - 2y + 6z + 7 = 0$$

Hay (C) luôn nằm trên mặt phẳng $(P): 4x - 2y + 6z + 7 = 0$. Suy ra tâm J của đường tròn (C) hình chiếu vuông góc của I (là tâm của mặt cầu (S_1)) nên mặt phẳng (P)

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$$

+ Phương trình đường thẳng IJ là: $\begin{cases} z = 2 + 3t \end{cases}$. Suy ra, tọa độ của J là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} x=1+2t \\ y=1-t \\ 2+3t \\ 4x-2y+6z+7=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t=-\frac{3}{4} \\ x=-\frac{1}{2} \\ y=\frac{7}{4} \\ z=-\frac{1}{4} \end{cases} \Rightarrow J\left(\frac{-1}{2}; \frac{7}{4}; \frac{-1}{4}\right). \text{ Chọn D}$$

Phân tích: Bài toán trên có thể giải quyết bằng cách khác : Tìm tâm J bằng cách tính tỉ lệ J chia đoạn thẳng nối tâm hai mặt cầu. Ở lời giải trên, ta sử dụng một kỹ thuật quen thuộc trong việc tìm phương trình của « phần chung » của các đường, mặt bậc 2 : Ta thường khéo léo kết hợp hai phương trình để tạo ra phương trình của phần tương giao (Ở bài này (hoặc các bài về tương giao của hai đường tròn trong phẳng) thì ta trừ hai phương trình cho nhau, ta sẽ thu được phương trình một mặt phẳng (hoặc một đường thẳng))

Câu 157: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$ và điểm $M(1; 3; -1)$. Biết rằng các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M tới mặt cầu đã cho luôn thuộc vào đường tròn (C) . Tìm tâm J và bán kính r của đường tròn (C)

A. $r = \frac{12}{25}, J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$

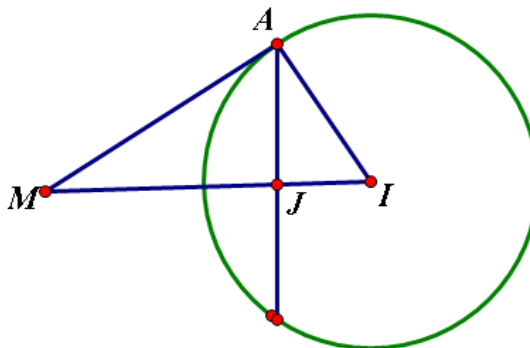
B. $r = \frac{12}{5}, J\left(\frac{41}{25}; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$

C. $r = \frac{12}{5}, J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$

D. $r = \frac{12}{25}, J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{73}{25}\right)$

Lời giải

Chọn C.



Cách 1: Ta có $(S): (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9$

có tâm $I(1; -1; 2)$, bán kính $R = 3$ $IM = \sqrt{0^2 + 4^2 + 3^2} = 5$. Gọi A là một tiếp điểm. Sử dụng định lý Pytago, ta dễ dàng tính được $MA = \sqrt{IM^2 - IA^2} = 4$.

+ Do $AJ \perp IM$ nên ta có: $AJ = MA \cdot \sin \angle AMJ = MA \cdot \frac{IA}{IM} = \frac{12}{5} = r$.

+ $MJ = MA \cdot \cos \angle AMJ = MA \cdot \frac{MA}{IM} = \frac{16}{5}$.

Vậy $\frac{MJ}{MI} = \frac{16}{25} \Rightarrow \overrightarrow{MJ} = \frac{16}{25} \overrightarrow{MI} \Rightarrow J\left(1; \frac{11}{25}; \frac{23}{25}\right)$

Cách 2: Gọi $A(x; y; z)$ là một tiếp điểm,

$MA = \sqrt{IM^2 - IA^2} = 4 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$. Vậy tọa độ của A là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 9 \end{cases} \Rightarrow 4y - 3z + 1 = 0$$

Hay $A \in (P): 4y - 3z + 1 = 0$

Vậy: $r = \frac{\sqrt{R^2 - d^2(I, (P))}}{5} = \frac{12}{5}$, J là hình chiếu vuông góc của I lên $(P): 4y - 3z + 1 = 0$. Tọa độ

của J là nghiệm của hệ:
$$\begin{cases} 4y - 3z + 1 = 0 \\ x = 1 \\ y = -1 + 4t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = \frac{11}{25} \\ z = \frac{23}{25} \end{cases}$$

Câu 158: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho các điểm $A(4; 2; 5)$, $B(0; 4; -3)$, $C(2; -3; 7)$.

Biết điểm $M(x_0; y_0; z_0)$ nằm trên mặt phẳng Oxy sao cho $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Tính tổng $P = x_0 + y_0 + z_0$.

A. $P = -3$.

B. $P = 0$.

C. $P = 3$.

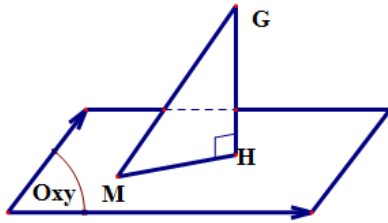
D. $P = 6$.

Lời giải

Chọn C.

Gọi $G(2; 1; 3)$ là trọng tâm $\Delta ABC \Rightarrow |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |3\overrightarrow{MG}| = 3MG$.

Do đó $|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$ nhỏ nhất khi MG nhỏ nhất.



Mà $MG \geq d[G, (Oxy)] = GH$ nên MG nhỏ nhất khi $M \equiv H$ khi đó M là hình chiếu vuông góc của G lên $(Oxy) \Rightarrow M(2; 1; 0) \Rightarrow x_0 + y_0 + z_0 = 3$.

Câu 159: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và hai điểm $A(0; -1; 3)$, $B(1; -2; 1)$. Tìm tọa độ điểm M thuộc đường thẳng Δ sao cho $MA^2 + 2MB^2$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A. $M(5; 2; -4)$ B. $M(-1; -1; -1)$ C. $M(1; 0; -2)$ D. $M(3; 1; -3)$

Lời giải

Chọn B.

Vì M thuộc đường thẳng Δ nên $M(1+2t; t; -2-t)$.

$$\text{Ta có } MA^2 + 2MB^2 = (2t+1)^2 + (t+1)^2 + (t+5)^2 + 2[(2t)^2 + (t+2)^2 + (t+3)^2] = 18t^2 + 36t + 53$$

$$\Leftrightarrow MA^2 + 2MB^2 = 18(t+1)^2 + 35 \geq 35, \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Vậy } \min(MA^2 + 2MB^2) = 35 \Leftrightarrow t = -1 \text{ hay } M(-1; -1; -1).$$

Bài phát triển

Hai bài ở trên là bài toán cực trị hình học tìm $M(a, b, c)$ nằm trên đường thẳng hay mặt phẳng, dạng này ra rất nhiều trong các đề thi thử gần đây và cũng đã có khá phong phú bài tập. Bên dưới, em phát triển một bài tìm $M(a, b, c)$ nằm trên mặt cầu. Kỹ thuật dùng là hình học kết hợp với biến đổi tí về đại số. Ý tưởng tạo ra bài đó là khi $MA = kMB$ (với k là một số thích hợp) thì M sẽ di động trên mặt cầu.

Câu 160: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): (x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4$, $A(-1; 2; 1)$ và $B(2; 5; 1)$. Cho $M(a, b, c)$ là điểm di động trên mặt cầu (S) sao cho $MA + 2MB$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $a + b + c$.

- A. $5 + \sqrt{3}$ B. $5 - \sqrt{3}$ C. $4 + \sqrt{3}$ D. $4 - \sqrt{3}$

Lời giải

Chọn A.

$$(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 4 \text{ có tâm } I(3;2;1), R=2.$$

Ta có $IA = 4 > R \Rightarrow A$ nằm ngoài khối cầu.

$$IB = \sqrt{10} > R \Rightarrow B \text{ nằm ngoài khối cầu.}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } MA &= \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2} \\ &= \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 + 3[(x-3)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 - 4]} \\ &= \sqrt{4(x-2)^2 + 4(y-2)^2 + 4(z-1)^2} = 2MC \text{ với } C(2;2;1). \end{aligned}$$

Ta có $IC = 1 < R \Rightarrow C$ nằm bên trong khối cầu.

$$\text{Ta có } MA + 2MB = 2MC + 2MB \geq 2BC.$$

$\text{Min}(MA + 2MB) = 2BC \Leftrightarrow M$ là giao điểm của đoạn thẳng BC và mặt cầu (S) (nghĩa là M nằm giữa B, C).

$$\text{Phương trình đường thẳng } BC \text{ là } \begin{cases} x=2 \\ y=2-3t \\ z=1 \end{cases} \Rightarrow M(2;2-3t;1).$$

$$M(2;2-3t;1) \in (S) \Rightarrow (2-3)^2 + (2-3t-2)^2 + (1-1)^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$\text{Vậy } \begin{cases} M(2;2+\sqrt{3};1) \\ M(2;2-\sqrt{3};1) \end{cases}.$$

Do M nằm giữa B, C nên $M(2;2+\sqrt{3};1)$ (do $\overline{MC}$ cùng hướng $\overline{BC}$).

Câu 161: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x-2y+z-1=0$ và điểm $A(0;-2;3), B(2;0;1)$. Điểm $M(a;b;c)$ thuộc (P) sao cho $MA+MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a^2+b^2+c^2$ bằng

A. $\frac{41}{4}$.

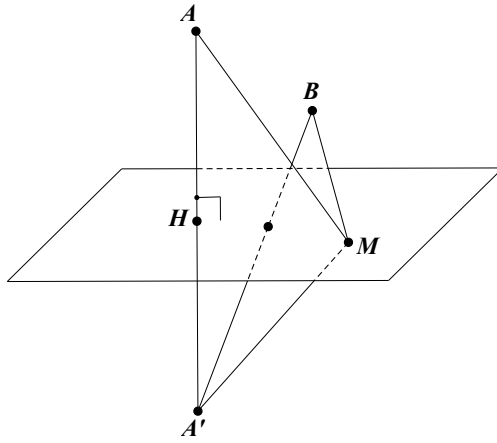
B. $\frac{9}{4}$.

C. $\frac{7}{4}$.

D. 3.

Lời giải

Chọn B.



$A(0; -2; 3), B(2; 0; 1)$ nằm cùng phía so với mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$

Đường thẳng Δ đi qua $A(0; -2; 3)$ và vuông góc với $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ có phương trình

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2 - 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$$

Gọi H là hình chiếu của A lên mặt phẳng (P) thì $H = \Delta \cap (P)$

Ta có phương trình $t + 4 + 4t + 3 + t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Rightarrow H(-1; 0; 2)$

Tọa độ điểm đối xứng với A qua (P) là: $A'(-2; 2; 1)$

Ta có $MA + MB = MA' + MB \geq A'B$

Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi A', M, B thẳng hàng

Do đó $M = A'B \cap (P)$

Đường thẳng $A'B$ có phương trình là
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

Ta có phương trình $-2 + 2t - 4 + 2t + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$

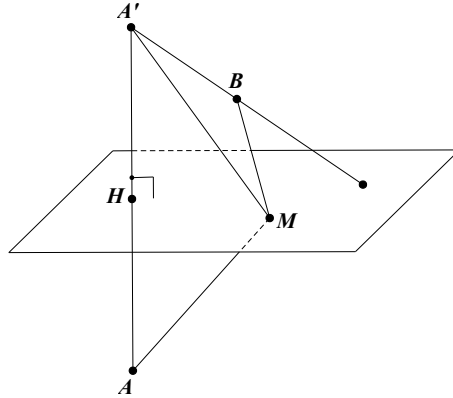
Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{9}{4}$

Câu 162: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ và điểm $A(-2; 2; 1), B(2; 0; 1)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) . Tìm giá trị lớn nhất của $|MA - MB|$.

A. $\sqrt{20}$. B. $2\sqrt{3}$. C. $3\sqrt{2}$. D. 3.

Lời giải

Chọn B.



$A(-2; 2; 1), B(2; 0; 1)$ nằm khác phía so với (P)

Tọa độ điểm đối xứng với A qua (P) là: $A'(0; -2; 3)$.

Ta có $|MA - MB| = |MA' - MB| \leq A'B = 2\sqrt{3}$

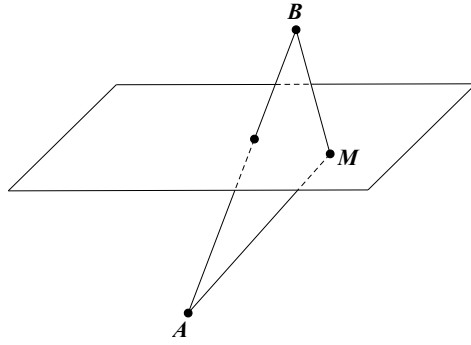
Vậy $|MA - MB|$ lớn nhất khi và chỉ khi A', M, B thẳng hàng.

Câu 163: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): x - 2y + z - 1 = 0$ và điểm $A(-2; 2; 1), B(2; 0; 1)$. Điểm $M(a; b; c)$ thuộc (P) sao cho $MA + MB$ nhỏ nhất. Giá trị của $a - c$ bằng

A. $\frac{3}{2}$. B. 0. C. $\frac{-1}{2}$. D. 1.

Lời giải

Chọn B.



$A(-2;2;1), B(2;0;1)$ nằm khác phía so với (P)

Ta có $MA + MB \geq AB$

Vậy $MA + MB$ nhỏ nhất khi và chỉ khi A, M, B thẳng hàng

Do đó $M = AB \cap (P)$

Đường thẳng AB có phương trình là
$$\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = 2 - t \\ z = 1 \end{cases}$$

Ta có phương trình $-2 + 2t - 4 + 2t + 1 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Rightarrow M\left(1; \frac{1}{2}; 1\right)$

$$a - c = 0.$$

Vậy

Câu 164: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $A(2;1;3)$, $B(6;5;5)$. Gọi (S) là mặt cầu đường kính AB . Mặt phẳng (P) vuông góc với đoạn AB tại H sao cho khối nón đỉnh A và đáy là hình tròn tâm H (giao của mặt cầu (S) và mặt phẳng (P)) có thể tích lớn nhất, biết rằng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ với $b, c, d \in \mathbb{Z}$. Tính $S = b + c + d$.

A. $S = -18$.

B. $S = -11$.

C. $S = -24$.

D. $S = -14$.

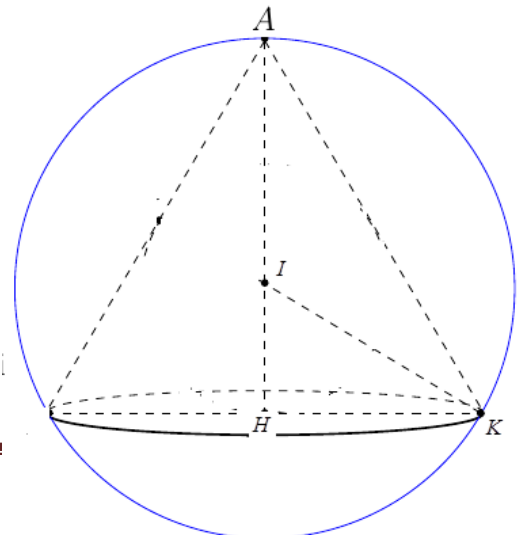
Lời giải

Chọn A.

$\overrightarrow{AB} = (4; 4; 2) = 2(2; 2; 1)$, $\overrightarrow{AB}$ là vector pháp tuyến của mặt phẳng (P) suy ra phương trình mặt phẳng (P) có dạng $2x + 2y + z + d = 0$.

Gọi I là tâm mặt cầu thì I là trung điểm của AB

suy ra $I(4; 3; 4)$, bán kính mặt cầu $R = \frac{AB}{2} = 3$.



Đặt $IH = x$ suy ra $HK = \sqrt{R^2 - x^2} = \sqrt{9 - x^2}$.

Thể tích khối nón

$$V = \frac{1}{3} IH \cdot \pi \cdot HK^2 = \frac{1}{3} \pi (9 - x^2)(3 + x) = \frac{1}{6} \pi (6 - 2x)(3 + x)(3 + x) \leq \frac{1}{6} \pi \left(\frac{6 + 3 + 3}{3} \right)^3$$

Dấu bằng xảy ra khi $6 - 2x = 3 + x \Leftrightarrow x = 1$.

$$\begin{cases} d(A, (P)) = 4 \\ d(I, (P)) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{|d+9|}{3} = 4 \\ \frac{|d+18|}{3} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = 3 \\ d = -21 \\ d = -21 \\ d = -15 \end{cases} \Leftrightarrow d = -21$$

Ta có hệ:

$$\text{Vậy } (P): 2x + 2y + z - 21 = 0$$

$$\text{Suy ra: } b + c + d = -18.$$

Câu 165: Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$, và điểm $A(2; 2; 4)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Viết phương trình đường thẳng Δ nằm trong (P) cắt d sao cho khoảng cách từ A đến Δ lớn nhất.

A. $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

B. $\frac{x-3}{1} = \frac{y+4}{-2} = \frac{z-3}{1}$.

C. $\frac{x-2}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-4}{1}$.

D. $\frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

Lời giải

Chọn B.

Ta có điểm $A(2; 2; 4)$ thuộc $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$. Gọi $B = d \cap (P)$ suy ra tọa độ điểm B là

$$\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3} \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(1; 0; 1)$$

Đường thẳng Δ cắt d mà $d \not\subset (P)$ nên Δ đi qua $B(1; 0; 1)$. Khi đó để thỏa mãn yêu cầu bài toán thì Δ đi qua $B(1; 0; 1)$ và vuông góc với d . Suy ra Δ đi qua $B(1; 0; 1)$ và có VTCP là

$$[\vec{n_P}, \vec{u_d}] = (1; -2; 1) \text{ là VTCP nên } \Delta: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-1}{1}.$$

Câu 166: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm $A(2; 1; 0)$, song song với mặt phẳng $(P): x - y - z = 0$ và có tổng khoảng cách từ các điểm $M(0; 2; 0), N(4; 0; 0)$

$M(0;2;0), N(4;0;0)$ tới đường thẳng đó đạt giá trị nhỏ nhất? Vector chỉ phương của Δ là vector nào sau đây?

A. $\overrightarrow{u_\Delta} = (0;1;-1)$

B. $\overrightarrow{u_\Delta} = (1;0;1)$

C. $\overrightarrow{u_\Delta} = (3;2;1)$

D. $\overrightarrow{u_\Delta} = (2;1;1)$

Lời giải

Chọn B.

Phân tích

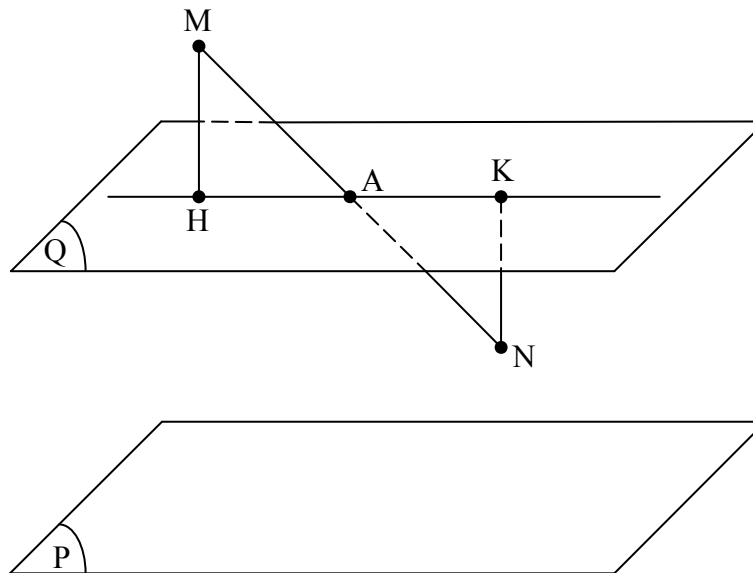
+ Δ nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với mặt phẳng (P) ;

+ A là trung điểm của MN nên $d(M, \Delta) = d(N, \Delta) = m$;

+ Nhận thấy $d(M, (Q)) = h$ không đổi và $m \geq h$;

Do đó tổng khoảng cách nhỏ nhất khi và chỉ khi $d(M, \Delta) = d(N, \Delta) = m$ nhỏ nhất. Khi đó Δ nằm trong mặt phẳng chứa MN và vuông góc với (Q) .

Giải:



Gọi (R) là mặt phẳng chứa MN và vuông góc với (Q) ta có $\overrightarrow{n_R} = [\overrightarrow{n_P}, \overrightarrow{AM}] = (1;2;-1)$

Δ là giao tuyến của (Q) và (R) nên $\overrightarrow{u_\Delta} = [\overrightarrow{n_Q}, \overrightarrow{n_R}] = (3;0;3) \rightarrow$ chọn B.

Câu 167: Cho mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z - 5 = 0$ và hai điểm $A(-3; 0; 1)$, $B(1; -1; 3)$. Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P) , hãy tìm một vectơ chỉ phương của đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đường thẳng đó nhỏ nhất?

- A. $\vec{u} = (26; 11; -2)$ B. $\vec{u} = (26; -11; -2)$ C. $\vec{u} = (26; 11; 2)$ D. $\vec{u} = (26; 3; -2)$

Câu 168: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$ gọi Δ là đường thẳng đi qua $A(1; 1; 1)$, vuông góc với đường thẳng $d: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{2}$ và cách điểm $B(2; 0; 1)$ một khoảng cách nhỏ nhất.

- A. $\vec{u}_{\Delta} = (0; 1; -1)$ B. $\vec{u}_{\Delta} = (1; 0; 1)$ C. $\vec{u}_{\Delta} = (1; -1; 0)$ D. $\vec{u}_{\Delta} = (0; 1; 1)$

Câu 169: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0; 10)$, $N(100; 10)$, $P(100; 0)$. Gọi S là tập các điểm $A(x; y)$, $(x; y \in \mathbf{Z})$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của hình chữ nhật $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên một điểm $A(x; y) \in S$. Xác suất để $x + y \leq 90$ bằng

- A. $\frac{845}{1111}$ B. $\frac{473}{500}$ C. $\frac{169}{200}$ D. $\frac{86}{101}$

Câu 170: Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật $OMNP$ với $M(0; 10)$, $N(100; 10)$, $P(100; 0)$. Gọi S là tập các điểm $A(x; y)$, $(x; y \in \mathbf{Z})$ nằm bên trong (kể cả trên cạnh) của hình chữ nhật $OMNP$. Lấy ngẫu nhiên một điểm $A(x; y) \in S$. Xác suất để $OA \leq 100$ bằng

- A. $\frac{90}{1111}$ B. $\frac{1000}{1111}$ C. $\frac{900}{1111}$ D. $\frac{1101}{1111}$

Câu 171: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 10y - 2z - 6 = 0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $y = m$ và $x + z - 3 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) . Tích tất cả các giá trị mà m có thể nhận được bằng

- A. -11 B. -10 C. -5 D. -8

Lời giải

Chọn A.

“Nhận xét: Dùng điều kiện tiếp xúc của mặt cầu với đường thẳng”

Mặt cầu (S) có tâm $I(2; -5; 1)$ và bán kính $R = \sqrt{4 + 25 + 1 + 6} = 6$

Đặt $(P): y = m$ và $(Q): x + z - 3 = 0$

Gọi $d = (P) \cap (Q)$

Chọn $A(0; m; 3) \in (P) \cap (Q)$ và $B(1; m; 2) \in (P) \cap (Q)$.

Ta có: AB qua $A(0; m; 3)$ và có VTCP $\vec{AB} = (1; 0; -1)$

$\vec{IA} = (-2; m+5; 2)$

$\vec{IA}, \vec{AB} \perp \vec{d} \Rightarrow \vec{d} = (m+5; 0; m+5)$

$$d(I, d) = \frac{|\vec{IA}, \vec{AB}|}{|\vec{AB}|} = \frac{\sqrt{(m+5)^2 + 0 + (m+5)^2}}{\sqrt{2}} = |m+5|$$

$$d \text{ tiếp xúc với mặt cầu } (S) \Leftrightarrow d(I, d) = R \Leftrightarrow |m+5| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -11 \end{cases}$$

Suy ra tích các giá trị m bằng -11

Câu 172: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - m = 0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $x = 1$ và $y + z + 1 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) . Tổng tất cả các giá trị mà m có thể nhận được bằng

- A. 4. B. -10. C. -4. D. 10.

Câu 173: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 2z - 1 = 0$. Cho m là số thực thỏa mãn giao tuyến của hai mặt phẳng $z = m$ và $x + y - 1 = 0$ tiếp xúc với mặt cầu (S) . Tổng bình phương tất cả các giá trị mà m có thể nhận được bằng

- A. 0. B. 9. C. 2. D. 7.

Câu 174: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 0), B(0; 4; 0), C(0; 0; 6)$, điểm M thay đổi trên mặt phẳng (ABC) , N là điểm trên tia OM sao cho $OM \cdot ON = 12$. Biết khi M thay đổi thì điểm N luôn nằm trên mặt cầu cố định. Tính bán kính mặt cầu đó

- A. $\frac{7}{2}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $2\sqrt{3}$. D. $\frac{5}{2}$.

Lời giải

Chọn A.*** Phân tích:**

Trước khi tìm ra bán kính đường tròn thì hiểu rằng đây là bài toán quỹ tích, cần chỉ ra quỹ tích của điểm N . Theo giả thiết thì từ tọa độ của M ta có thể suy ra được tọa độ của điểm N , mặt khác M lại chạy “tung tăng” trên mặt phẳng (ABC) , từ đó liên hệ ra quỹ tích của điểm N .

*** Giải**

Giả sử $N(x; y; z) \Rightarrow ON = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Do O, M, N thẳng hàng và N thuộc tia ON nên suy ra:

$$OM \cdot ON = 12 \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} = \frac{12}{x^2 + y^2 + z^2} \cdot \overrightarrow{ON} \Rightarrow N \left(\frac{12x}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{12y}{x^2 + y^2 + z^2}; \frac{12z}{x^2 + y^2 + z^2} \right).$$

Do $N \in (ABC) \Rightarrow 6x + 3y + 2z = x^2 + y^2 + z^2 \Leftrightarrow (x-3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + (z-1)^2 = \frac{49}{4}$.

Vậy N thuộc mặt cầu cố định bán kính $R = \frac{7}{2}$.

Câu 175: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho hai điểm $M(1; 0; 2)$, $N(1; -1; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y - z + 2 = 0$. Một mặt cầu đi qua M, N tiếp xúc với mặt phẳng (P) tại điểm E . Biết E thuộc một đường tròn cố định, tính bán kính của đường tròn đó.

A. $R = \frac{\sqrt{10}}{2}$. B. $R = \sqrt{10}$. C. $R = 10$. D. $R = 2\sqrt{5}$.

Câu 176: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; -1; 1)$, $M(5; 3; 1)$, $N(4; 1; 2)$ và mặt phẳng $(P): y + z = 27$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM , điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ của điểm C là

A. $(-15; 21; 6)$. B. $(21; 21; 6)$. C. $(-15; 7; 20)$. D. $(21; 19; 8)$.

Lời giải**Chọn B.***** Phân tích:**

- Tham số hóa tọa độ điểm M, N

- Từ điều kiện tứ giác $ABCD$ là hình thoi suy ra $A + C = B + D$, suy ra C theo tham số.

- Từ điều kiện C thuộc (P) suy ra mối quan hệ của 2 tham số.
- Từ điều kiện tứ giác là hình thoi suy ra 2 cạnh kề bằng nhau suy ra C .

*** Giải**

$$B \in AM : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + 4t \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow B(2 + 3t; -1 + 4t; 1).$$

Ta có

$$D \in AN : \begin{cases} x = 2 + 2u \\ y = -1 + 2u \\ z = 1 + u \end{cases} \Rightarrow D(2 + 2u; -1 + 2u; 1 + u).$$

Và

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên suy ra $C(3t + 2u + 2; 4t + 2u - 1; u + 1)$.

$$\text{Mà } C \in (P) \Rightarrow 4t + 3u = 27 \quad (1)$$

Vì tứ giác $ABCD$ là hình thoi nên suy ra $AB^2 = AD^2 \Rightarrow 25t^2 = 9u^2 \quad (2)$.

$$\text{Từ (1) và (2) tìm được } \begin{cases} t = 3 \\ u = 5 \end{cases} \text{ suy ra } C(21; 21; 6).$$

Câu 177: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 1), M(4; 5; 1), N(0; 3; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 8 = 0$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM , điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ của điểm C là

- A.** $(-15; 21; 6)$. **B.** $(2; 4; 2)$. **C.** $(-15; 7; 20)$. **D.** $(21; 19; 8)$.

Câu 178: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 3; 4), M(5; 1; 5), N(0; 0; 5)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 15 = 0$. Biết rằng tồn tại điểm B trên tia AM , điểm C trên (P) và điểm D trên tia AN sao cho tứ giác $ABCD$ là hình thoi. Tọa độ của điểm C là

- A.** $(-15; 21; 6)$. **B.** $(-1; 18; -2)$. **C.** $(-15; 7; 20)$. **D.** $(21; 19; 8)$.

Câu 179: Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x - 2y + 2z + 1 = 0$, $(Q): x - 2y + 2z - 8 = 0$, $(R): x - 2y + 2z + 4 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại các điểm A, B, C . Giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB + \frac{96}{AC^2}$ là

A. $\frac{41}{3}$.

B. 99.

C. 18.

D. 24.

Lời giải

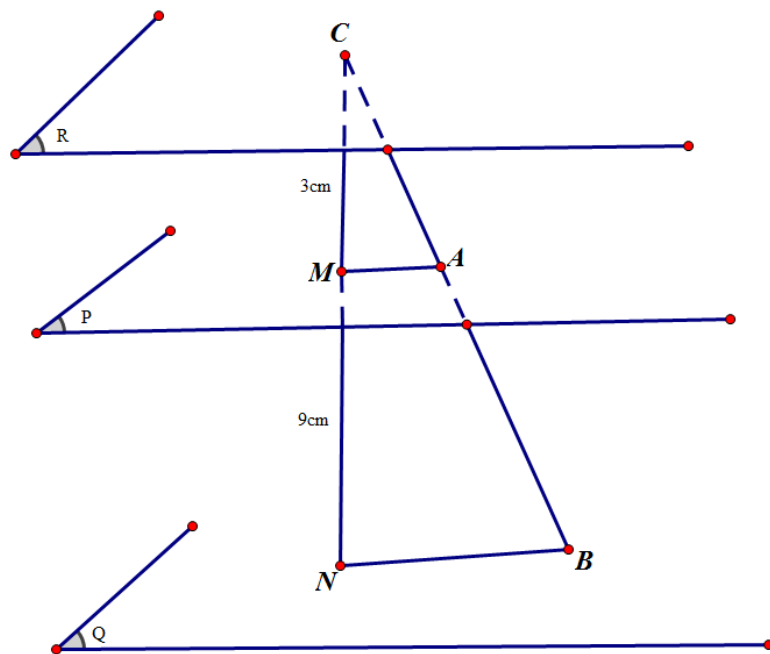
Chọn C.*** Phân tích:**

Ta nhận thấy ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ là ba mặt phẳng phân biệt và song song với nhau. Dựa vào chỉ số d của ba mặt phẳng ta nhận thấy mặt phẳng (P) nằm giữa hai mặt phẳng $(Q), (R)$.

+) Ba mặt phẳng song song với nhau ta nghĩ đến định lý Ta let để có thể rút ra được mối quan hệ giữa AB, AC . Từ đó đánh giá được giá trị nhỏ nhất của biểu thức $AB + \frac{96}{AC^2}$.

*** Giải**

Ba mặt phẳng cùng có véc tơ pháp tuyến là $(1; -2; 2)$ nên chúng song song với nhau. Khi đó ta có $d((P); (Q)) = \frac{|1 - (-8)|}{3} = 3$; $d((P); (R)) = \frac{|1 - 4|}{3} = 1$; $d((Q); (R)) = \frac{|4 - (-8)|}{3} = 4$.



Dựng đường thẳng qua C vuông góc với mặt phẳng $(P), (Q), (R)$. Đường thẳng đó cắt mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt tại $M; N$. Khi đó ta có $CM = 1; MN = 3$.

Xét $\triangle CNB$ có $MA \parallel NB$ nên $\frac{AC}{AB} = \frac{MC}{MN} = \frac{1}{3} \Rightarrow AB = 3AC$.

Khi đó $AB + \frac{96}{AC^2} = 3AC + \frac{96}{AC^2} = \frac{3AC}{2} + \frac{3AC}{2} + \frac{96}{AC^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{3AC}{2} \cdot \frac{3AC}{2} \cdot \frac{96}{AC^2}} = 3.6 = 18$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{3AC}{2} = \frac{96}{AC^2} \Leftrightarrow AC = 4$

Câu 180: Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x + 2y + 3z + 4 = 0$, $(Q): x + 2y + 3z + 2 = 0$, $(R): x + 2y + 3z + 6 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại các điểm A, B, C . Độ dài đoạn AC nằm trong khoảng nào khi biểu thức $AB + \frac{27}{AC^2}$ đạt giá trị nhỏ nhất?

A. $(2; 3)$

B. $[3; 4)$

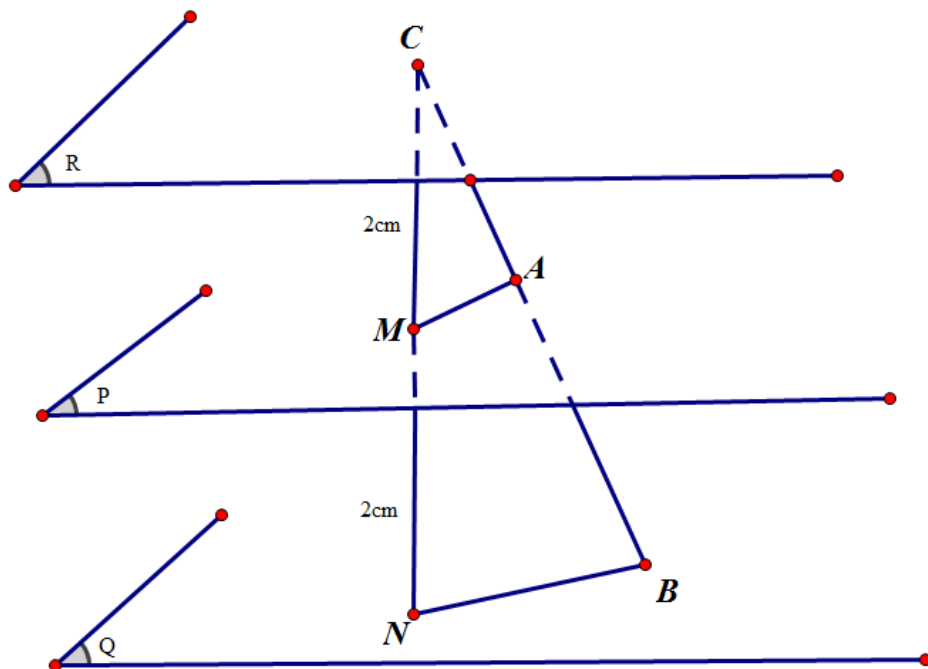
C. $[4; 5)$

D. $(5; 6)$

Lời giải

Chọn B.

Ba mặt phẳng cùng có véc tơ pháp tuyến là $(1; 2; 3)$ nên chúng song song với nhau. Khi đó ta có $d((P); (Q)) = \frac{|4-2|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $d((P); (R)) = \frac{|4-6|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$; $d((Q); (R)) = \frac{|2-6|}{\sqrt{14}} = \frac{4}{\sqrt{14}}$.



Dựng đường thẳng qua C vuông góc với mặt phẳng $(P), (Q), (R)$. Đường thẳng đó cắt mặt phẳng $(P), (Q)$ lần lượt tại $M; N$. Khi đó ta có $CM = \frac{2}{\sqrt{14}}; MN = \frac{2}{\sqrt{14}}$.

Xét $\triangle CNB$ có $MA \square NB$ nên $\frac{AC}{AB} = \frac{MC}{MN} = \frac{1}{1} \Rightarrow AB = AC$.

Khi đó $AB + \frac{27}{AC^2} = AC + \frac{27}{AC^2} = \frac{AC}{2} + \frac{AC}{2} + \frac{27}{AC^2} \geq 3\sqrt{\frac{AC}{2} \cdot \frac{AC}{2} \cdot \frac{27}{AC^2}} = 3 \cdot \frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{9}{\sqrt[3]{4}}$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow \frac{AC}{2} = \frac{27}{AC^2} \Leftrightarrow AC = 3\sqrt[3]{2}$.

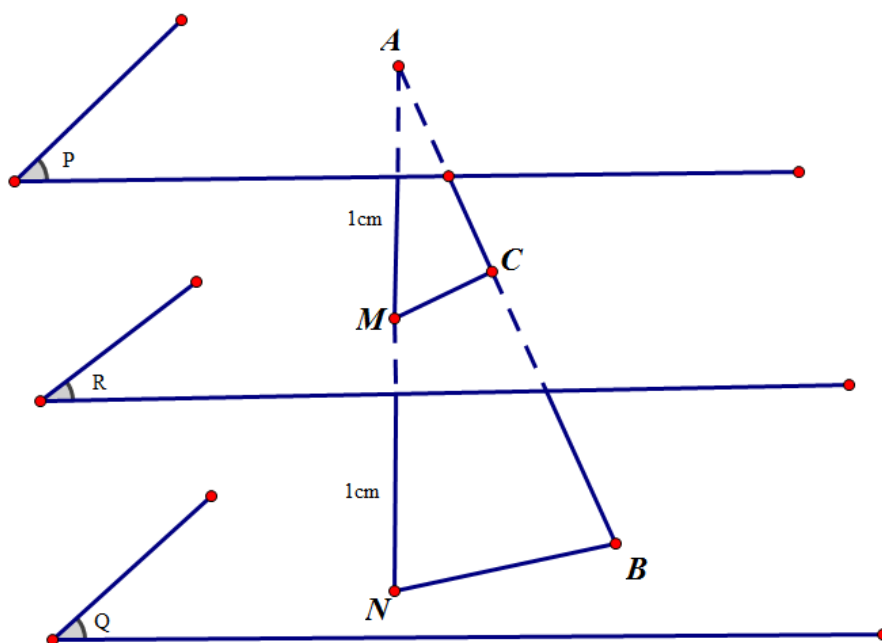
Câu 181: Trong không gian $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): x + y + 2z = 0$, $(Q): x + y + 2z + 2 = 0$, $(R): x + y + 2z + 1 = 0$. Một đường thẳng Δ thay đổi cắt ba mặt phẳng $(P), (Q), (R)$ lần lượt tại các điểm A, B, C . Tính cosin góc tạo bởi Δ và mặt phẳng (R) khi biểu thức $AB^2 + \frac{8}{AC}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

- A.** $\frac{\sqrt{30}}{6}$ **B.** 1 **C.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D.** $\frac{2}{3}$

Lời giải

Chọn A.

Ba mặt phẳng cùng có véc tơ pháp tuyến là $(1; 1; 2)$ nên chúng song song với nhau. Khi đó ta có $d((P); (Q)) = \frac{|0-2|}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$; $d((P); (R)) = \frac{|0-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$; $d((Q); (R)) = \frac{|2-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$.



Dựng đường thẳng qua C vuông góc với mặt phẳng $(P), (Q), (R)$. Đường thẳng đó cắt mặt phẳng $(R), (Q)$ lần lượt tại $M; N$. Khi đó ta có $AM = \frac{1}{\sqrt{6}}; AN = \frac{2}{\sqrt{6}}$.

Xét $\triangle CNB$ có $MA \parallel NB$ nên $\frac{AC}{AB} = \frac{AM}{AN} = \frac{1}{2} \Rightarrow AB = 2AC$.

$$\text{Khi đó } AB^2 + \frac{8}{AC} = AB^2 + \frac{8}{\frac{AB}{2}} = AB^2 + \frac{16}{AB} = AB^2 + \frac{8}{AB} + \frac{8}{AB} \geq 3\sqrt[3]{AB^2 \cdot \frac{8}{AB} \cdot \frac{8}{AB}} = 3 \cdot 4 = 12$$

$$\text{Dấu "=" xảy ra} \Leftrightarrow AB^2 = \frac{8}{AB} \Leftrightarrow AB = 2 \quad \text{Khi đó } NB = \frac{\sqrt{30}}{3} \quad \text{nên } \cos(\angle A; (R)) = \frac{NB}{AB} = \frac{\sqrt{30}}{6}$$

Câu 182: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có A trùng với gốc tọa độ. Cho $B(a; 0; 0)$, $D(0; a; 0)$, $A'(0; 0; b)$ với $a > 0, b > 0$. Gọi M là trung điểm

của cạnh CC' . Xác định tỉ số $\frac{a}{b}$ để $mp(A'BD)$ vuông góc $mp(BDM)$.

A. $\frac{a}{b} = 1$

B. $\frac{a}{b} = 2$

C. $\frac{a}{b} = \frac{1}{2}$

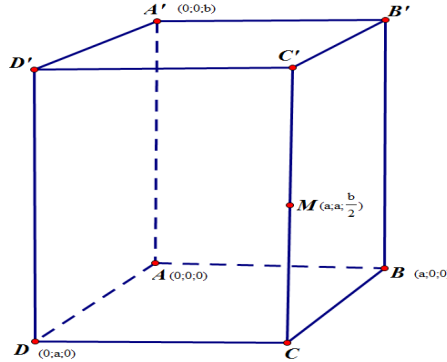
D. $\frac{a}{b} = -1$

Lời giải.

Chọn A

Phân tích bài: Phương pháp tọa độ luôn mang đến hiệu quả cao khi sử dụng. Thay vì tư duy tìm lời giải ta chuyển sang kỹ thuật tính toán.

Chú ý: Đề bài đã chọn sẵn hệ trục tọa độ với A trùng với gốc tọa độ, trục Ox trùng với AB , trục Oy trùng với AD và trục Oz trùng với AA' . Để hai mặt phẳng vuông góc với nhau khi và chỉ khi tích vô hướng của hai véc tơ pháp tuyến của hai mặt phẳng bằng 0 .



Ta có

$$\overrightarrow{A'B} = (a; 0; -b); \overrightarrow{A'D} = (0; a; -b) \Rightarrow \vec{n}_1 = (ab; ab; a^2)$$

$$\overrightarrow{MB} = \left(0; -a; \frac{-b}{2}\right); \overrightarrow{MD} = \left(-a; 0; \frac{-b}{2}\right) \Rightarrow \vec{n}_2 = \left(\frac{ab}{2}; \frac{ab}{2}; -a^2\right)$$

$$\text{Khi đó } \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \Leftrightarrow \frac{a^2 b^2}{2} + \frac{a^2 b^2}{2} - a^4 = 0 \Leftrightarrow a^2 \cdot (b^2 - a^2) = 0 \Leftrightarrow a = b \text{ (Do } a > 0, b > 0 \text{)}.$$

Vậy để thỏa mãn yêu cầu đề bài ta được tỉ số $\frac{a}{b} = 1$.

Câu 183: Trong mặt phẳng tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a, b, c > 0$. Biết mặt cầu (S) cắt 3 mặt phẳng tọa độ theo 3 đường tròn có bán kính $r = 5$ và mặt cầu (S) đi qua điểm $M(0; 1; 2)$. Tính tổng $a + b + c + d$.

25. B. 75. C. 40. D. 10.
A.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) , vì (S) cắt 3 mặt phẳng tọa độ theo 3 đường tròn có bán kính bằng nhau $\Rightarrow I(a, a, a); a > 0 \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + 25}$.

$$\text{Mặt khác: } (S) \text{ đi qua điểm } M(0; 1; 2) \Rightarrow IM = R \Leftrightarrow a^2 + 25 = 3a^2 - 6a + 5 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -2(ktm). \end{cases}$$

Với $a = 5 \Rightarrow R = \sqrt{50}$, khi đó ta có: $a = b = c = 5, d = 25 \Rightarrow a + b + c + d = 40$.

Câu 184: Trong mặt phẳng toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a, b, c > 0$. Biết mặt cầu (S) cắt 3 mặt phẳng toạ độ theo 3 đường tròn có bán kính bằng nhau và mặt cầu (S) đi qua điểm 2 điểm $M(0;1;2)$; $N(0;0;5)$. Tính tổng $a+b+c+d$.

25.

B. 75.

C. 40.

D. 10.

A.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) , vì (S) cắt 3 mặt phẳng toạ độ theo 3 đường tròn có bán kính bằng nhau $\Rightarrow I(a, a, a); a > 0$.

Mặt khác: (S) đi qua 2 điểm $M(0;1;2)$; $N(0;0;5)$

$$\Rightarrow IM = IN \Leftrightarrow 3a^2 - 6a + 5 = 3a^2 - 10a + 25 \Leftrightarrow a = 5 \Rightarrow I(5;5;5)$$

$$\Rightarrow R = IM = \sqrt{50}, \text{ khi đó ta có: } a = b = c = 5, d = 25 \Rightarrow a + b + c + d = 40.$$

Câu 185: Trong mặt phẳng toạ độ $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$, với $a, b, c > 0$. Biết mặt cầu (S) cắt 3 mặt phẳng toạ độ theo 3 đường tròn có bán kính $r = 5$ và mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + y = 0$. Tính tổng $a+b+c+d$.

25.

B. 75.

C. 40.

D. 10.

A.

Lời giải

Chọn C

Gọi I là tâm của mặt cầu (S) , vì (S) cắt 3 mặt phẳng toạ độ theo 3 đường tròn có bán kính bằng nhau $\Rightarrow I(a, a, a); a > 0 \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + 25}$.

Mặt khác: (S) tiếp xúc với mặt phẳng $(P): x + y = 0$

$$\Rightarrow d(I, (P)) = R \Leftrightarrow \frac{|2a|}{\sqrt{2}} = \sqrt{a^2 + 25} \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 5 \\ a = -5(ktm). \end{cases}$$

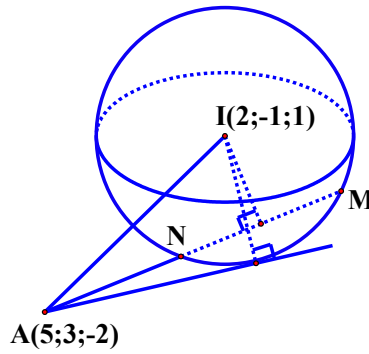
$$\text{Với } a = 5 \Rightarrow R = \sqrt{50}, \text{ khi đó ta có: } a = b = c = 5, d = 25 \Rightarrow a + b + c + d = 40.$$

Câu 186: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 2z - 3 = 0$ và điểm $A(5;3;-2)$. Một đường thẳng d thay đổi luôn đi qua A và luôn cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt M, N . Tính giá trị nhỏ nhất của biểu thức $S = AM + 4AN$.

A. $S_{\min} = 50$.B. $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$ C. $S_{\min} = 5$.D. $S_{\min} = 20$.

Lời giải

Đáp án B



Tâm $I(2; -1; 1)$ và bán kính mặt cầu $R = 3$

$$AI = \sqrt{(2-5)^2 + (-1-3)^2 + (1+2)^2} = \sqrt{34}$$

Giá trị nhỏ nhất xảy ra trong trường hợp $AM > AN$

Đặt $AN = x \Rightarrow \sqrt{34} - 3 \leq x < 5$

$$AM \cdot AN = 25 \Rightarrow AM = \frac{25}{x}$$

$$S = 4AN + AM = 4x + \frac{25}{x} = f(x)$$

Xét $f(x) = 4x + \frac{25}{x}$ trên $[\sqrt{34} - 3; 5)$

$$f'(x) = 4 - \frac{25}{x^2} = \frac{4x^2 - 25}{x^2} > 0 \quad \forall x \in [\sqrt{34} - 3; 5)$$

$$\Rightarrow S_{\min} \text{ khi } x = \sqrt{34} - 3 \quad S_{\min} = 4(\sqrt{34} - 3) + \frac{25}{\sqrt{34} - 3} = 5\sqrt{34} - 9$$

Vậy GTNN $S_{\min} = 5\sqrt{34} - 9$ khi $x = \sqrt{34} - 3$.

Phân tích ý tưởng:

- Bài này cái cốt lõi thực hiện được chính là sử dụng ý tưởng phương tích của một điểm đối với mặt cầu.

- Tuy nhiên bài này có lỗi mà học sinh kể cả giáo viên hay mắc phải là xét dấu bằng khi đánh giá

bất đẳng thức cô-si $4x + \frac{25}{x} \geq 2\sqrt{4x \cdot \frac{25}{x}} = 20 \Rightarrow S_{\min} = 20$. Tuy nhiên điều này không thể xảy ra dấu bằng được vì điều kiện để đường thẳng d cắt mặt cầu (S) tại hai điểm phân biệt thì ta có không chế điều kiện là: $\sqrt{34} - 3 \leq AN < 5$.

Câu 187: Trong không gian $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 = 9$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 3 = 0$. Gọi (S') là mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) đồng thời (S') tiếp xúc với mặt phẳng $(Q): x - y + z - 5 = 0$. Gọi $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S') . Tính $T = abc$.

- A. $T = 1$. B. $T = -\frac{1}{8}$. C. $T = -1$. D. $T = \frac{1}{8}$.

Lời giải

Chọn D.

Cách 1 :

Ta có phương trình của mặt cầu (S') có dạng: $x^2 + y^2 + z^2 - 9 + m(x + y + z - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + mx + my + mz - 9 - 3m = 0$$

mặt cầu (S') có tâm $I\left(\frac{-m}{2}; \frac{-m}{2}; \frac{-m}{2}\right)$, bán kính $R = \sqrt{\frac{3m^2}{4} + 3m + 9}$

(S') tiếp xúc với mặt phẳng (Q) nên $d(I, (Q)) = R \Leftrightarrow \frac{\left|-\frac{m}{2} - 5\right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{3m^2}{4} + 3m + 9}$

$\Leftrightarrow |m + 10| = \sqrt{9m^2 + 36m + 108} \Leftrightarrow m = -1$ suy ra $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Vậy $T = abc = \frac{1}{8}$.

Tổng quát

+ Phương trình mặt cầu đi qua giao tuyến của một mặt cầu

$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$ có dạng

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d + m(Ax + By + Cz + D) = 0 \quad (m \text{ là tham số})$$

+ Căn cứ vào các giả thiết của bài toán ta tìm các điều kiện về tâm, bán kính, khoảng cách ... ta lập được phương trình để tìm tham số m .

Cách 2:

(S) Có tâm O , bán kính $R = 3$; $d = d(O; (P)) = \sqrt{3}$

Ta có bán kính của đường tròn giao tuyến của (S) và (P) là $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{6}$

(S') là mặt cầu chứa đường tròn giao tuyến của (S) và (P) nên :

+ Tâm $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S') nằm trên đường thẳng qua O và vuông góc với (P) có

$$\begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = t \end{cases}$$

phương trình

Suy ra $a = b = c$.

+ Bán kính của (S') là $(R')^2 = r^2 + d^2(I; (P)) = 6 + \left(\frac{3a-3}{\sqrt{3}}\right)^2$ (1)

Do (S') tiếp xúc với mặt phẳng $(Q): x - y + z - 5 = 0$ nên $R' = d(I; (Q)) = \frac{|a-5|}{\sqrt{3}}$ (2)

Từ (1), (2) ta có $\left(\frac{a-5}{\sqrt{3}}\right)^2 = 6 + \left(\frac{3a-3}{\sqrt{3}}\right)^2 \Leftrightarrow 8a^2 - 8a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$

suy ra $I\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$. Vậy $T = abc = \frac{1}{8}$.

Tổng quát

Với dạng toán viết PT (S') là mặt cầu chứa đường tròn thiết diện của (S) và (P)

$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0$ và mặt phẳng $(P): Ax + By + Cz + D = 0$

+ Trước hết ta tìm được tâm $K(-a; -b; -c)$ và bán kính r của đường tròn thiết diện.

+ Tâm $I(a; b; c)$ là tâm của mặt cầu (S') nằm trên đường thẳng qua K và vuông góc với (P) có

$$\begin{cases} x = -a + At \\ y = -b + Bt \\ z = -c + Ct \end{cases}$$

phương trình tham số. Tham số hóa tọa độ điểm I , căn cứ vào các giả thiết bài toán ta lập các PT tìm tham số t từ đó suy ra tọa độ tâm I .

Câu 188: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(1; 1; 0)$, $B(-2; 0; 1)$, $C(0; 0; 2)$ và mặt phẳng $(P): x + 2y + z + 4 = 0$. Gọi $M(a; b; c)$ là điểm thuộc mặt phẳng (P) sao cho $S = \overline{MA} \cdot \overline{MB} + \overline{MB} \cdot \overline{MC} + \overline{MC} \cdot \overline{MA}$ đạt giá trị nhỏ nhất. Tính $Q = a + b + 6c$.

A. $Q = 2$.

B. $Q = -2$.

C. $Q = 0$.

D. $Q = 1$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC , ta có
$$\begin{cases} G\left(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 1\right) \\ \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \end{cases}$$

Theo đề bài, ta có

$$\begin{aligned} S &= \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA} \\ &= (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}) \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 3MG^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \vec{0} + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 3MG^2 + 0 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \\ &= 3MG^2 + \overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA} \end{aligned}$$

Vì $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GB} \cdot \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GC} \cdot \overrightarrow{GA}$ là một hằng số nên ta có S đạt giá trị nhỏ nhất khi MG đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu của G trên mặt phẳng (P) .

Gọi Δ là đường thẳng đi qua điểm G và vuông góc với mặt phẳng (P) , ta có $M = \Delta \cap (P)$.

Phương trình đường thẳng Δ là
$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + 2t \\ z = 1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$
. Thế x, y, z từ phương trình đường thẳng

Δ vào phương trình mặt phẳng (P) , ta được:
$$-\frac{1}{3} + t + \frac{2}{3} + 4t + 1 + t + 4 = 0 \Leftrightarrow 6t + \frac{16}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{8}{9}$$

Suy ra
$$M = (a; b; c) = \left(-\frac{11}{9}; -\frac{13}{9}; \frac{1}{9}\right)$$

Vậy
$$Q = a + b + 6c = -\frac{11}{9} - \frac{13}{9} + \frac{6}{9} = -2$$

Tổng quát, ta có bài toán: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(x_A; y_A; z_A)$, $B(x_B; y_B; z_B)$, $C(x_C; y_C; z_C)$ và mặt phẳng $(\alpha): Ax + By + Cz + D = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên mặt phẳng (α) sao cho biểu thức $S = m\overline{MA}.\overline{MB} + n\overline{MB}.\overline{MC} + p\overline{MC}.\overline{MA}$

1) Đạt giá trị nhỏ nhất nếu $m + n + p > 0$.

2) Đạt giá trị lớn nhất nếu $m + n + p < 0$.

Phương pháp: Gọi $I(x; y; z)$ là điểm thỏa mãn $(m + p)\overline{IA} + (m + n)\overline{IB} + (n + p)\overline{IC} = \vec{0}$. Khi đó điểm $I(x; y; z)$ xác định. Ta có:

$$\begin{aligned} S &= m\overline{MA}.\overline{MB} + n\overline{MB}.\overline{MC} + p\overline{MC}.\overline{MA} \\ &= (m + n + p)MI^2 + \overline{MI} \cdot \left[(m + p)\overline{IA} + (m + n)\overline{IB} + (n + p)\overline{IC} \right] + m\overline{IA}.\overline{IB} + n\overline{IB}.\overline{IC} + p\overline{IC}.\overline{IA} \\ &= (m + n + p)MI^2 + m\overline{IA}.\overline{IB} + n\overline{IB}.\overline{IC} + p\overline{IC}.\overline{IA} \end{aligned}$$

Do $m\overline{IA}.\overline{IB} + n\overline{IB}.\overline{IC} + p\overline{IC}.\overline{IA}$ không đổi nên ta có:

1) S đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow (m + n + p)MI^2$ đạt giá trị nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) .

2) S đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow (m + n + p)MI^2$ đạt giá trị lớn nhất $\Leftrightarrow MI$ đạt giá trị nhỏ nhất hay M là hình chiếu của I trên mặt phẳng (α) .

Chú ý: Trong trường hợp bài toán cho tìm điểm M trên đường thẳng Δ thì khi đó M là hình chiếu của I trên đường thẳng Δ .

Câu 189: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho ba điểm $A(2; 0; 1)$, $B(1; 0; 0)$, $C(1; 1; 1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 2 = 0$. Điểm $M(a; b; c)$ nằm trên mặt phẳng (P) thỏa mãn $MA = MB = MC$. Tính $T = a + 2b + 3c$.

A. $T = 5$.

B. $T = 3$.

C. $T = 2$.

D. $T = 4$.

Lời giải

Chọn D.

Ta có $\overline{AB}(-1; 0; -1)$, $\overline{AC}(-1; 1; 0)$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng AB đi qua trung điểm $I\left(\frac{3}{2}; 0; \frac{1}{2}\right)$ của AB và nhận $\overline{AB}(-1; 0; -1)$ làm véc tơ pháp nên có phương trình là: $x + z - 2 = 0$.

Mặt phẳng trung trực của đoạn thẳng BC đi qua trung điểm $J\left(1; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ của BC và nhận $\overrightarrow{BC}(0;1;1)$ làm véc tơ pháp nên có phương trình là: $y + z - 2 = 0$.

Do $MA = MB = MC$ nên M thuộc hai mặt phẳng trên, mặt khác M thuộc $(P): x + y + z - 2 = 0$ nên tọa độ M là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + z - 2 = 0 \\ y + z - 1 = 0 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M(1; 0; 1). \text{ Vậy } T = a + 2b + 3c = 4.$$

Cách khác:

Ta có $AB = BC = AC = \sqrt{2}$ suy ra tam giác ABC đều. Vậy tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác

ABC là trọng tâm $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ của tam giác.

Do $MA = MB = MC$ nên M nằm trên trục của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC , trục này là

đường thẳng đi qua $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$ và nhận véc tơ $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = (1; 1; -1)$ là véc tơ chỉ phương nên

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} + t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{2}{3} - t \end{cases}$$

có phương trình là:

Mặt khác $M \in (P): x + y + z - 2 = 0 \Rightarrow t = -\frac{1}{3} \Rightarrow M(1; 0; 1)$. Suy ra $T = a + 2b + 3c = 4$.

Câu 190: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \begin{cases} x = 1 + 3a + at \\ y = -2 + t \\ z = 2 + 3a + (1+a)t \end{cases}$.

Biết rằng khi a thay đổi luôn tồn tại một mặt cầu cố định đi qua điểm $M(1; 1; 1)$ và tiếp xúc với đường thẳng Δ . Tìm bán kính của mặt cầu đó.

A. $5\sqrt{3}$.

B. $4\sqrt{3}$.

C. $7\sqrt{3}$.

D. $3\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A

Ta thấy đường thẳng Δ luôn đi qua điểm $A(1; -5; -1)$ và Δ luôn nằm trên mặt phẳng $(\alpha): x + y - z + 3 = 0$. Do đó mặt cầu (S) tiếp xúc với mặt phẳng (α) tại điểm A thì tiếp xúc với đường thẳng Δ .

Mặt cầu cần tìm có tâm I thuộc đường thẳng $\begin{cases} x=1+t \\ y=-5+t \\ z=-1-t \end{cases} \quad (t \in \mathbf{R}) \Rightarrow I(1+t; -5+t; -1-t)$.

Ta có: $IM = d(I, (\alpha))$ hay $\sqrt{t^2 + (t-6)^2 + (t+2)^2} = \sqrt{3}|t| \Leftrightarrow 8t + 40 = 0 \Leftrightarrow t = -5$.

Khi đó $R = 5\sqrt{3}$.

Nhận xét

Cách làm không thay đổi khi đường thẳng Δ đi qua một điểm cố định và nằm trên một mặt phẳng cố định.

Câu 191: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(1; 2; 1)$ và hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-3}{-1}$, $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-2}{1}$. Viết phương trình đường thẳng d song song với mặt phẳng $(P): 2x + 3y + 4z - 6 = 0$, cắt đường thẳng d_1 và d_2 lần lượt tại M và N sao cho $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 5$ và điểm N có hoành độ nguyên.

A. $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z-2}{1}$.

B. $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$.

C. $d: \frac{x}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-3}$.

D. $d: \frac{x-1}{4} = \frac{y+1}{-4} = \frac{z-3}{1}$.

Phân tích: Tham số hóa tọa độ điểm M , điểm N theo các tham số t_1, t_2 ; do $d \parallel (P)$ nên $\overrightarrow{MN} \cdot \vec{n} = 0$, đưa về một ẩn t_1 và thay vào giả thiết $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 5$.

Lời giải

Chọn B.

Gọi $M(1+t_1; -1+t_1; 3-t_1)$, $N(1+t_2; -2+t_2; 2+t_2) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = (t_2-t_1; t_2-t_1-1; t_2+t_1-1)$.

Do d song song với mặt phẳng (P) nên $2(t_2-t_1) + 3(t_2-t_1-1) + 4(t_2+t_1-1) = 0$

$$\Leftrightarrow 9t_2 - t_1 - 7 = 0 \Leftrightarrow t_1 = 9t_2 - 7$$

Khi đó, $M(9t_2-6; 9t_2-8; 10-9t_2) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = (9t_2-7; 9t_2-10; 9-9t_2)$, $\overrightarrow{AN} = (t_2; t_2-4; t_2+1)$.

Theo giả thiết, $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN} = 5 \Leftrightarrow t_2(9t_2-7) + (t_2-4)(9t_2-10) + (t_2+1)(9-9t_2) = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = 1 \\ t_2 = \frac{44}{9} \end{cases}$.

Với $t = \frac{44}{9} \Rightarrow N\left(\frac{53}{9}; \frac{26}{9}; \frac{62}{9}\right)$ (loại).

Với $t = 1 \Rightarrow N(2; -1; 3)$, $M(3; 1; 1)$.

Đường thẳng cần tìm qua $M(3; 1; 1)$, nhận $\overrightarrow{NM} = (1; 2; -2)$ là véc tơ pháp tuyến nên có phương trình $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{-2}$.

Câu 192: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho ba mặt phẳng $(P): 2x - y + z + 1 = 0$, $(Q): x - y + 2z + 3 = 0$ và $(R): x + y + 1 = 0$ và đường thẳng $\Delta: \frac{x-2}{-2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3}$. Gọi d là giao tuyến của hai mặt phẳng (P) , (Q) . Biết rằng d' là đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (R) , cắt cả hai đường thẳng d và Δ lần lượt tại A , B . Đường thẳng d' đi qua điểm nào sau đây?
A. $H(9; 0; -6)$ **B.** $L(7; 1; -6)$ **C.** $P(6; 3; -5)$ **D.** $K(5; -4; -5)$.

Lời giải

Chọn A

Có $M(2; 5; 0) \in (P) \cap (Q) \Rightarrow M \in d$.

Đường thẳng d qua M , nhận $\vec{u} = [\vec{n}_{(Q)}; \vec{n}_{(P)}] = (1; 3; 1)$ là véc tơ chỉ phương nên có phương trình $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{1}$.

Gọi $A(2+a; 5+3a; a)$, $B(2-2b; -1+b; 3b) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-a-2b; b-3a-6; 3b-a)$ là véc tơ chỉ phương của d' .

Do $d' \perp (R)$ nên $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\vec{n}_{(R)} = (1; 1; 0)$, suy ra $\overrightarrow{AB} = k \cdot \vec{n}_{(R)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -a-2b = k \cdot 1 \\ b-3a-6 = k \cdot 1 \\ 3b-a = k \cdot 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -6 \\ b = -2 \\ c = 10 \end{cases} \Rightarrow A(-4; -13; -6)$$

Đường thẳng d' qua A , nhận $\vec{n} = (1; 1; 0)$ là véc tơ chỉ phương nên có phương trình $d': \begin{cases} x = -4 + t \\ y = -13 + t \\ z = -6 \end{cases}$.

Ta thấy $H(9; 0; -6)$ thuộc đường thẳng d' nên chọn đáp án A.

Câu 193: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho hai đường thẳng $d_1: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và $d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-2}{-2}$. Gọi Δ là đường thẳng song song với $(P): x+y+z-7=0$ và cắt d_1, d_2 lần lượt tại hai điểm A, B sao cho AB ngắn nhất. Phương trình của đường thẳng Δ là

- A. $\begin{cases} x=12-t \\ y=5 \\ z=-9+t \end{cases}$ B. $\begin{cases} x=6-t \\ y=\frac{5}{2} \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$ C. $\begin{cases} x=6 \\ y=\frac{5}{2}-t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$ D. $\begin{cases} x=6-2t \\ y=\frac{5}{2}+t \\ z=-\frac{9}{2}+t \end{cases}$

Lời giải

Chọn B

$A \in d_1 \Rightarrow A(1+2a; a; -2-a)$, $B \in d_2 \Rightarrow B(1+b; -2+3b; 2-2b)$.
Gọi

Δ có vector chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (b-2a; 3b-a-2; -2b+a+4)$

(P) có vector pháp tuyến $\overrightarrow{n_p} = (1; 1; 1)$

Vì $\Delta // (P)$ nên $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{n_p} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{n_p} = 0 \Leftrightarrow b = a - 1$. Khi đó $\overrightarrow{AB} = (-a-1; 2a-5; 6-a)$

$$AB = \sqrt{(-a-1)^2 + (2a-5)^2 + (6-a)^2} = \sqrt{6a^2 - 30a + 62} = \sqrt{6\left(a - \frac{5}{2}\right)^2 + \frac{49}{2}} \geq \frac{7\sqrt{2}}{2}; \forall a \in \mathbb{R}$$

Dấu "=" xảy ra khi $a = \frac{5}{2}$. Vậy AB ngắn nhất khi $a = \frac{5}{2} \Rightarrow A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$, $\overrightarrow{AB} = \left(-\frac{7}{2}; 0; \frac{7}{2}\right)$

Đường thẳng Δ đi qua điểm $A\left(6; \frac{5}{2}; -\frac{9}{2}\right)$ và vector chỉ phương $\overrightarrow{u_d} = (-1; 0; 1)$

$$\Delta \text{ là } \begin{cases} x = 6 - t \\ y = \frac{5}{2} \\ z = -\frac{9}{2} + t \end{cases}.$$

Vậy phương trình của

Câu 194: Cho Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho mặt cầu $(S): (x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-1)^2 = 3$, và hai điểm $A(1;0;4)$, $B(0;1;4)$. Các mặt phẳng (P_1) , (P_2) cùng chứa đường thẳng AB và hai mặt phẳng này lần lượt tiếp xúc với mặt cầu (S) tại các điểm H_1 , H_2 . Điểm K nào trong số các điểm sau đây nằm trên đường thẳng H_1H_2 .

A. $K(1;4;2)$ **B.** $K(-1;3;2)$ **C.** $K(1;5;3)$ **D.** $K(-1;3;-2)$.

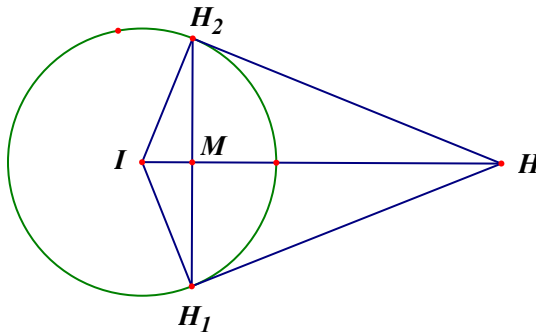
Phân tích

Gọi H là hình chiếu của I lên đường thẳng AB và $M = H_1H_2 \cap IH$.

Do $H_1H_2 \perp IH$; $H_1H_2 \perp AB$ nên để viết được phương trình đường thẳng H_1H_2 ta cần tìm tọa độ điểm H và điểm M . Từ đó suy đáp án đúng.

Lời giải

Chọn A.



Ta có (S) có tâm $I(-1;2;1)$ và bán kính $R = \sqrt{3}$

Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A, B có phương trình
$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4 \end{cases}$$

Mặt phẳng (IH_1H_2) đi qua I và vuông góc với AB nên có phương trình $-x + y - 3 = 0$.

Gọi H là giao điểm của AB và (IH_1H_2) . Khi đó $H(-1; 2; 4)$.

Gọi M là giao điểm của H_1H_2 và IH . Khi đó $H_1M \perp IH$

Ta có $\frac{IM}{IH} = \frac{IM \cdot IH}{IH^2} = \frac{R^2}{IH^2} = \frac{1}{3}$ nên $\overline{IM} = \frac{1}{3} \overline{IH}$. Do đó $M(-1; 2; 2)$.

H_1H_2 vuông góc với IH và AB nên có vector chỉ phương $\vec{u} = -\frac{1}{3}[\overline{IH}, \overline{AB}] = (1; 1; 0)$

Phương trình $H_1H_2: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 2 \end{cases}$. Vậy khi $t = 2$ ta được đáp án **A**.

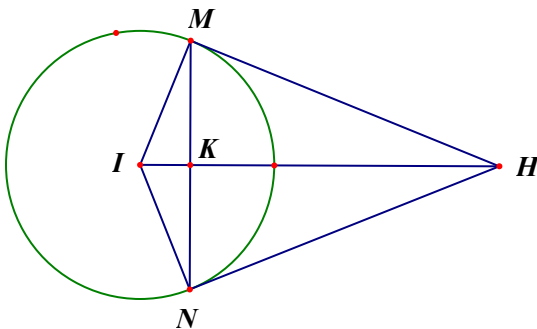
Câu 195: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt cầu (S) có tâm $I(1; 2; 3)$ và có bán kính

$r = 2$. Xét đường thẳng $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -mt \\ z = (m-1)t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$, m là tham số thực. Giả sử $(P), (Q)$ là mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với (S) lần lượt tại M, N . Khi độ dài đoạn MN ngắn nhất hãy tính khoảng cách từ điểm $B(1; 0; 4)$ đến đường thẳng d .

- A.** $\sqrt{5}$. **B.** $\frac{5\sqrt{3}}{3}$. **C.** $\frac{4\sqrt{237}}{21}$. **D.** $\frac{4\sqrt{273}}{21}$.

Lời giải

Chọn D



Mặt phẳng thiết diện đi qua tâm I, M, N cắt đường thẳng d tại $H \Rightarrow IH \perp d, d(I, d) = IH$.

Gọi $K = MN \cap IH$. Suy ra $MN_{\min} \Leftrightarrow MH_{\min} \Leftrightarrow IH_{\min}$.

Ta có $\vec{u}_d = (1; -m; m-1)$, $A(1; 0; 0) \in d$, suy ra $d(I, d) = \frac{|\vec{u}_d, \vec{IA}|}{|\vec{u}_d|} = \frac{\sqrt{25m^2 - 20m + 17}}{\sqrt{2m^2 - 2m + 2}}$.

Xét hàm số $f(m) = \frac{25m^2 - 20m + 17}{2m^2 - 2m + 2}$; $f'(x) = \frac{-10m^2 + 32m - 6}{(2m^2 - 2m + 2)^2}$; $f'(m) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{1}{5} \\ m = 3 \end{cases}$.

Bảng biến thiên

Suy ra $IH_{\min}$ khi $m = \frac{1}{5}$. Đường thẳng d có phương trình là $d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -\frac{1}{5}t (t \in \mathbb{R}) \\ z = -\frac{4}{5}t \end{cases}$.

Khoảng cách $d(B, d) = \frac{|\vec{AB}, \vec{u}_d|}{|\vec{u}_d|} = \frac{\sqrt{416}}{\sqrt{42}} = \frac{4\sqrt{273}}{21}$.

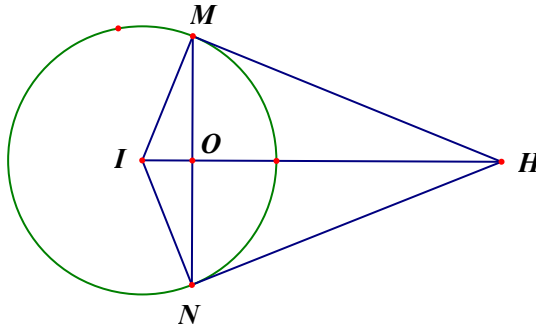
Câu 196: Trong không gian $Oxyz$, cho mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ và đường thẳng $d: \frac{x-7}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-2}{1}$. Gọi (P) , (Q) lần lượt là hai mặt phẳng chứa d và tiếp xúc với mặt cầu (S) tại M và N . Độ dài đoạn MN bằng:

- A. $\frac{3\sqrt{31302}}{222}$. B. $\frac{3\sqrt{31302}}{111}$. C. $\frac{\sqrt{141}}{3}$. D. $\frac{2\sqrt{141}}{3}$.

Lời giải

Chọn B.

Cắt mặt cầu theo giao tuyến chứa đoạn MN được như hình vẽ.



$$IA = d(I, d) = \frac{\sqrt{222}}{3}; \quad IM = r \Rightarrow MH = \frac{\sqrt{141}}{3} \Rightarrow MO = \frac{3\sqrt{31302}}{222}$$

$$\Rightarrow MN = \frac{3\sqrt{31302}}{111}$$

Câu 197: Cho mặt cầu (S_1) có tâm (O) , bán kính là $\sqrt{3}$ và mặt cầu (S_2) có tâm $O'(2;3;6)$ và bán kính bằng 4. Biết tập hợp các điểm A trong không gian mà độ dài tiếp tuyến kẻ từ A tới (S_1) và (S_2) bằng nhau là một mặt phẳng (còn gọi là mặt phẳng đẳng phương). Viết phương trình mặt phẳng đó .

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$. B. $\frac{x}{9} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$. C. $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$. D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$.

Lời giải

Chọn C.

Mặt phẳng đẳng phương là mặt phẳng tập hợp tất cả các điểm có cùng phương tích với hai mặt cầu không đồng tâm . Và mặt đẳng phương vuông góc với trục nối hai tâm của mặt cầu .

Gọi (P) là mặt phẳng đẳng phương của (S_1) và $(S_2) \Rightarrow (P)$ nhận $\Rightarrow \overrightarrow{OO'}(2,3,6)$ là vector pháp tuyến $\Rightarrow \vec{n}_P = \overrightarrow{OO'}(2,3,6)$.

Mặt khác mặt phẳng đẳng phương (P) của (S_1) và (S_2) đi qua một điểm M thuộc OO' có cùng phương tích với hai mặt cầu.

$$\text{Phương trình đường thẳng } OO' : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \\ z = 6t \end{cases} \quad \text{tọa độ điểm } M(2t; 3t; 6t)$$

$$\text{Mà } P_{M/(O,R)} = P_{M/(O',R')} \Rightarrow MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2$$

$$\Rightarrow (2t)^2 + (3t)^2 + (6t)^2 - 3 = (2t-2)^2 + (3t-3)^2 + (6t-6)^2 - 16 \Rightarrow t = \frac{18}{49}$$

$$\text{Vậy tọa độ điểm } M \text{ là : } M\left(\frac{36}{49}; \frac{54}{49}; \frac{108}{49}\right)$$

$$\Rightarrow (P) : 2x + 3y + 6z - 18 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$$

Câu 198: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) : $(m^2 + 1)x - (2m^2 - 2m + 1)y + (4m + 2)z - m^2 + 2m = 0$ luôn chứa một đường thẳng Δ cố định khi m thay đổi. Đường thẳng d đi qua $M(1; -1; 1)$ vuông góc (Δ) và cách O một khoảng lớn nhất có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (-1; b; c)$. Tính $b^2 - c$?

A. 2.

B. 23.

C. 19.

D. -1.

Lời giải

Chọn C.

Cho $m = 0$ có mặt phẳng $(P_0): x - y + 2z = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 = (1; -1; 2)$

Cho $m = 1$ có mặt phẳng $(P_1): 2x - y + 6z + 1 = 0 \Rightarrow \vec{n}_2 = (2; -1; 6)$

Suy ra Δ có VTCP $\vec{u}_\Delta = [\vec{n}_1, \vec{n}_2] = (-4; -2; 1)$

Gọi H là hình chiếu của O trên d thì $OH = d(O, (d))$, có $OH \leq OM$. Do đó đẳng thức xảy ra khi $d \perp OM$ d có VTCP $\vec{u} = [\vec{u}_\Delta, \overrightarrow{OM}] = (-1; 5; 6)$. Vậy $b = 6, c = 5$.

Phân tích:

Đây là dạng toán: Cho họ mặt phẳng (P_m) luôn tìm được đường thẳng cố định khi thể các giá trị m rồi lấy tích có hướng lại sẽ được VTCP của đường thẳng cố định đó. Tiếp theo là dạng toán lập phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P) , đi qua điểm A cho trước sao cho khoảng cách từ B đến d lớn nhất? nhỏ nhất?

Phương pháp giải:

Kẻ $AB \perp d; BK \perp (P) \Rightarrow BH = d(B, (d))$ và K cố định.

Ta có $BH \leq BA \Rightarrow d(B, (d))_{\max} = BA \Leftrightarrow H \equiv A$. Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và vuông góc với AB , suy ra d có một VTCP là $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, \overline{AB}]$

Mặt khác, $BH \geq BK \Rightarrow d(B, (d))_{\min} = BK \Leftrightarrow H \equiv K$. Khi đó đường thẳng d nằm trong (P) , đi qua A và đi qua hình chiếu K của B , suy ra d có một VTCP là $\vec{u}_d = [\vec{n}_P, [\vec{n}_P, \vec{AB}]]$

Câu 199: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng (P) :
 $(a+b)x + ay + bz - 3(a+b) = 0, a \neq 0, b \neq 0$ luôn chứa một đường thẳng Δ cố định khi a, b thay
đổi. Đường thẳng d đi qua $M(1; 2; 3)$ vuông góc (Δ) và cách $A(2, 1, -4)$ một khoảng lớn nhất có
vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; m; n)$. Tính $m^2 - n^2$?

- A.** 1. **B.** $\frac{5}{2}$. **C.** 2. **D.** 5.

Lời giải

Chọn A.

$$\Delta_{\text{c6o VTCP}} \vec{u}_{\Delta} = (1; -1; 1)$$

do có VTCP $\vec{u} = [\vec{u}_\Delta, \overrightarrow{AM}] = (-6; 6; 0) = -6(1; 1; 0)$

Câu 200: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$ cho hai điểm $A(3;1;2)$ và $B(5;7;0)$. Có tất cả bao nhiêu giá trị thực của m để phương trình $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2my - 2(m+1)z + m^2 + 2m + 3 = 0$ là phương trình mặt cầu (S) sao cho qua A, B có duy nhất một mặt phẳng cắt (S) theo một giao tuyến có bán kính bằng 1?

- A.** 1. **B.** 4. **C.** 3. **D.** 2.

Lời giải

Ta có $R = \sqrt{m^2 + 4} > 1$ nên để có đúng duy nhất một mặt phẳng qua AB và cắt (S) theo một đường tròn có bán kính 1 khi và chỉ khi $R^2 - 1^2 = d^2(I; AB)$.

$$m^2 + 4 - 1 = \frac{6(m-2)^2}{11} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{-12+3\sqrt{11}}{5} \\ m = \frac{-12-3\sqrt{11}}{5} \end{cases}.$$

Vậy có hai giá trị m .

Câu 201: Phương trình mặt phẳng (P) qua đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{-1}$ và cách điểm $M(2;1;1)$ một khoảng cách lớn nhất đi qua điểm nào sau đây?

- A. $E(2;1;2)$. B. $F(0;-5;0)$. C. $G(0;0;6)$. D. $H(0;1;6)$.

Lời giải

Gọi $\vec{u}_d = (2;1;-1)$, $A(1;0;-2) \in d \Rightarrow \vec{AM} = (1;1;3)$. Phương trình mặt phẳng cần tìm nhận vector $\vec{n} = \left[\begin{bmatrix} \vec{r}_d, \vec{u}_d \end{bmatrix}, \vec{r}_d \right]$ làm vector pháp tuyến. $(P): x + y + 3z + 5 = 0$.

Câu 202: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(-1;-4;4)$, $B(1;7;-2)$, $C(1;4;-2)$. Mặt phẳng $(P): 2x + by + cz + d = 0$ qua A và thỏa mãn $T = d(B, (P)) + 2d(C, (P))$ đạt giá trị lớn nhất. Tính $b + c + d$.

- A. 65 . B. 77 . C. 52 . D. 10 .

Lời giải

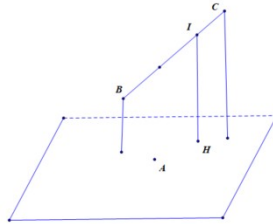
Chọn .

TH 1: B, C cùng phía so với (P) .

Gọi I thỏa mãn $\vec{IB} + 2\vec{IC} = \vec{0} \Rightarrow I(1;5;-2)$.

Có $T = d(B, (P)) + 2d(C, (P)) = 3d(I, (P)) \leq 3IA$. $\text{Max } T = 3IA$ khi

$IA \perp (P) \Rightarrow (P): 2x + 9y - 6z + 62 = 0 \Rightarrow b + c + d = 65$.

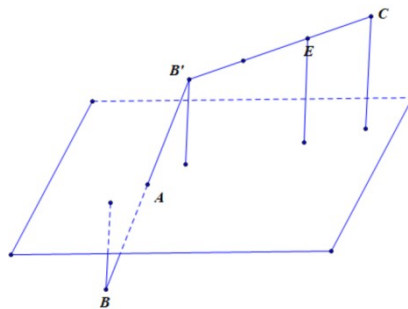


TH 2: B, C khác phía so với (P) .

Gọi $B' = D_A(B) \Rightarrow B'(-3;-15;10)$.

Gọi E thỏa mãn $\vec{EB'} + 2\vec{EC} = \vec{0} \Rightarrow E\left(-\frac{1}{3}; -\frac{7}{3}; 2\right)$

Có $T = d(B, (P)) + 2d(C, (P)) = d(B', (P)) + 2d(C, (P)) = 3d(E, (P)) \leq 3EA$. $\text{Max} T = 3EA$ khi $EA \perp (P) \Rightarrow (P): 2x + 5y - 6z + 46 = 0 \Rightarrow b + c + d = 45$



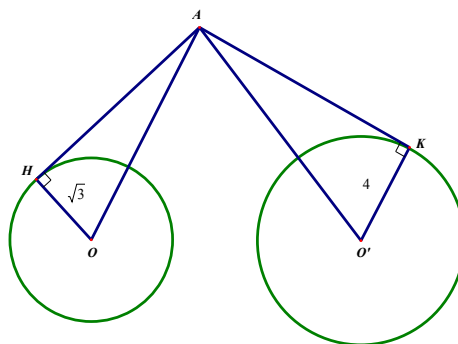
Từ hai trường hợp suy ra khi $T = d(B, (P)) + 2d(C, (P))$ đạt giá trị lớn nhất. Ta có $b + c + d = 65$

Câu 203: Cho mặt cầu (S_1) có tâm O , bán kính là $\sqrt{3}$ và mặt cầu (S_2) có tâm $O'(2; 3; 6)$ và bán kính bằng 4. Biết rằng tập hợp các điểm A trong không gian mà độ dài tiếp tuyến kẻ từ A đến $(S_1), (S_2)$ bằng nhau là một mặt phẳng (còn gọi là mặt phẳng đẳng phương). Viết phương trình của mặt phẳng đó

- A. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{6} = 1$ B. $\frac{x}{9} + \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 1$ C. $\frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$ D. $\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$

Lời giải

Chọn C.



Gọi $A(x; y; z)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Gọi H, K lần lượt là tiếp điểm các tiếp tuyến kẻ từ A tới mặt cầu tâm O, O' .

Khi đó ta có $AH = AK \Leftrightarrow AO^2 - 3 = AO'^2 - 16$.

$$\Leftrightarrow AO^2 - AO'^2 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - (x-2)^2 - (y-3)^2 - (z-6)^2 + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 6y + 12z - 36 = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{9} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 1$$

Câu 204: Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho điểm $A(2; 5; 3)$ và đường thẳng $d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}$. Gọi (P) là mặt phẳng chứa đường thẳng d sao cho khoảng cách từ A đến (P) lớn nhất. Tính khoảng cách từ điểm $M(1; 2; -1)$ đến mặt phẳng (P) .

- A. $\frac{11\sqrt{18}}{18}$. B. $3\sqrt{2}$. C. $\frac{\sqrt{11}}{18}$. D. $\frac{4}{3}$.

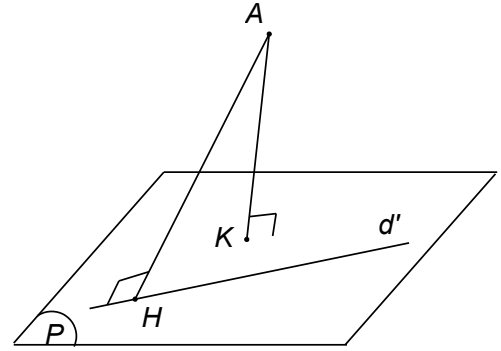
Lời giải

Gọi H là hình chiếu của A trên d ; K là hình chiếu của A trên (P) .

Ta có $d(A, (P)) = AK \leq AH$ (Không đổi)

$\Rightarrow$ GTLN của $d(d, (P))$ là AH

$\Rightarrow d(A, (P))$ lớn nhất khi $K \equiv H$.



Ta có $H(3; 1; 4)$, (P) qua H và $\perp AH \Rightarrow (P): x - 4y + z - 3 = 0$ Vậy $d(M, (P)) = \frac{11\sqrt{18}}{18}$.

Câu 205: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho các điểm $B(2; -1; -3)$, $C(-6; -1; 3)$. Trong các tam giác ABC thỏa mãn các đường trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau, hãy tìm điểm $A(a; b; 0)$, $b > 0$ sao cho góc A lớn nhất. Tính giá trị $\frac{a+b}{\cos A}$.

- A. 10. B. -20. C. 15. D. $-\frac{\sqrt{31}}{3}$;

Lời giải

Chọn C.

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của cạnh AC, AB .

Gọi $P = BM \cap CN$, ta có $BM \perp CN$ nên $BC^2 = BP^2 + CP^2$.

Theo công thức tính đường trung tuyến, ta có

$$BP^2 = \left(\frac{2}{3}BM\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2(BA^2 + BC^2) - AC^2}{4}, \quad CP^2 = \left(\frac{2}{3}CN\right)^2 = \frac{4}{9} \cdot \frac{2(CA^2 + CB^2) - AB^2}{4}$$

$$\Rightarrow BC^2 = \frac{AB^2 + AC^2 + 4BC^2}{9} \Rightarrow AB^2 + AC^2 = 5BC^2$$

Góc A lớn nhất $\Leftrightarrow \cos A$ nhỏ nhất.

$$\begin{aligned} \text{Ta có } \cos A &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} = \frac{5(AB^2 + AC^2) - (AB^2 + AC^2)}{10AB \cdot AC} \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{AB^2 + AC^2}{AB \cdot AC} \geq \frac{2}{5} \cdot \frac{2AB \cdot AC}{AB \cdot AC} = \frac{4}{5}, \text{ dấu "=" xảy ra } \Leftrightarrow AB = AC. \end{aligned}$$

Ta có $A(a; b; 0)$, $b > 0$ và $B(2; -1; -3)$, $C(-6; -1; 3)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \overline{AB} = (2-a; -1-b; -3) \Rightarrow AB^2 = (2-a)^2 + (b+1)^2 + 9 \\ \overline{AC} = (-6-a; -1-b; 3) \Rightarrow AC^2 = (a+6)^2 + (b+1)^2 + 9 \end{cases}$$

$$\Rightarrow (2-a)^2 + (b+1)^2 + 9 = (a+6)^2 + (b+1)^2 + 9 \Rightarrow 4 - 4a = 12a + 36 \Rightarrow a = -2$$

Ta có $\overline{BC} = (-8; 0; 6) \Rightarrow BC^2 = 8^2 + 6^2 = 100$. Khi đó từ $AB^2 + AC^2 = 5BC^2$ và $AB = AC$

$$\Rightarrow 2[(2-a)^2 + (b+1)^2 + 9] = 5 \cdot 100 \Rightarrow 4^2 + (b+1)^2 + 9 = 250. \text{ Mà } b > 0 \text{ nên ta được } b = 14.$$

$$\frac{a+b}{\cos A} = \frac{-2+14}{\frac{4}{5}} = 15$$

Vậy