

TRƯỜNG THCS QUẢNG THẠCH	ĐỀ THI GIAO LƯU HỌC SINH GIỎI NĂM HỌC 2023-2024 MÔN: TOÁN 7 Thời gian làm bài: 120 phút <i>(Không tính thời gian phát đề)</i>
-------------------------	---

Bài 1. (4,0 điểm)**1. Tính**

a. Thực hiện phép tính: $A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11}$

b. Tính giá trị biểu thức: $B = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{20^2}{19.21}$

2. Tính giá trị biểu thức

a. Tìm x : $3^{x+2} + 4 \cdot 3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6$.

b. Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2}$ và $x+y+z = -50$.

Bài 2. (4,0 điểm)

a. Tìm x , biết: $\left(\frac{21}{10} - |x+2| \right) : \left(\frac{19}{10} - \frac{7}{5} \right) + \frac{4}{5} = 1$

b. Nhà trường thành lập 3 nhóm học sinh khối 7 tham gia chăm sóc di tích lịch sử. Trong đó, $\frac{2}{3}$ số học sinh của nhóm I bằng $\frac{8}{11}$ số học sinh của nhóm II và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh nhóm III. Biết rằng số học sinh của nhóm I ít hơn tổng số học sinh của nhóm II và nhóm III là 18 học sinh. Tính số học sinh của mỗi nhóm

Bài 3. (4,0 điểm)

a. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Chứng minh rằng $f(-2) \cdot f(3) \leq 0$ biết $13a + 2b + c = 0$.

b. Cho a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.

Bài 4. (6,0 điểm)

1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A. Vẽ các tia Bx, Cy vuông góc với BC nằm trên nửa mặt phẳng bờ BC chứa điểm A. Gọi D là một điểm nằm giữa B và C. Đường thẳng vuông góc với AD tại A cắt Bx và Cy theo thứ tự tại E và F.

- a) Chứng minh $\triangle AEB = \triangle ADC$;
 b) Chứng minh tam giác EDF vuông cân;
 c) Xác định vị trí điểm D trên BC để EF có độ dài nhỏ nhất.

2. Một phòng học hình hộp chữ nhật có chiều dài $10m$, chiều rộng $5m$ và chiều cao $4m$. Người ta định sơn bốn bức tường căn phòng, biết giá công sơn là 45000 đồng một mét vuông. Hỏi chi phí tiền công là bao nhiêu? Cho biết căn phòng có 1 cửa chính cao $1,8m$ và rộng $2m$ và hai cửa sổ có cùng chiều dài $80cm$, chiều rộng $60cm$.

Bài 5. (2,0 điểm) Tìm các số hữu tỉ a, b, c thỏa mãn đồng thời:

$$ab = c ; \quad bc = 4a ; \quad ac = 9b$$

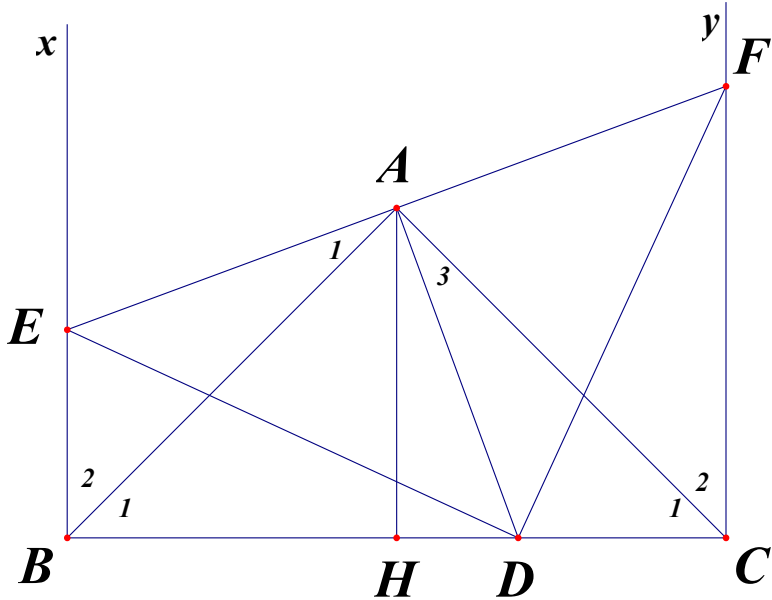
HƯỚNG DẪN CHẤM THI HỌC SINH GIỎI LỚP 7
MÔN THI: TOÁN

Câu	Nội dung	Điểm
1 (4đ)	Câu 1 (4,0 điểm).	
	Câu 1. 1 (2 điểm)	
	$A = \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) : \frac{7}{11} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) : \frac{7}{11}$ <p>a.</p> $= \left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) \cdot \frac{11}{7} + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) \cdot \frac{11}{7}$ $= \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{4}{11} \right) + \left(\frac{-4}{7} + \frac{7}{11} \right) \right]$ $= \frac{11}{7} \left[\left(\frac{-3}{7} + \frac{-4}{7} \right) + \left(\frac{4}{11} + \frac{7}{11} \right) \right]$ $= \frac{11}{7} \left(\frac{-7}{7} + \frac{11}{11} \right)$ $= \frac{11}{7} (-1 + 1) = 0$ <p>Vậy $A = 0$</p>	0,25 0,25 0,25 0,25
	<p>Ta có $B = \frac{2^2}{1.3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{4^2}{3.5} \cdots \frac{20^2}{19.21}$</p> <p>b.</p>	0,25 0,25 0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$= \frac{2.2}{1.3} \cdot \frac{3.3}{2.4} \cdot \frac{4.4}{3.5} \dots \frac{20.20}{19.21}$ $= \frac{(2.3.4 \dots 20) \cdot (2.3.4 \dots 20)}{(1.2.3 \dots 19)(3.4.5 \dots 21)}$ $= \frac{20.2}{21} = \frac{40}{21}$ <p>Vậy $B = \frac{40}{21}$</p>	0,25
Câu 1.2(2 điểm)		
	<p>a. Tìm x:</p> $3^{x+2} + 4.3^{x+1} + 3^{x-1} = 6^6 \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^2 + 4.3^x \cdot 3 + \frac{3^x}{3} = 6^6 \Leftrightarrow 3^x \cdot 3^3 + 4.3^x \cdot 3^2 + 3^x = 6^6$ $\Leftrightarrow 27.3^x + 36.3^x + 3^x = 3 \cdot (2.3)^6 \Leftrightarrow 64.3^x = 64.3^7 \Leftrightarrow 3^x = 3^7 \Leftrightarrow x = 7$ <p>Vậy $x = 7$.</p>	0,5
	<p>b. Tìm x, y, z biết: $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2}$ và $x+y+z = -50$.</p> <p>Ta có</p> $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2} = \frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4}$ <p>Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:</p> $\frac{3x-2y}{5} = \frac{2z-5x}{3} = \frac{5y-3z}{2} = \frac{15x-10y}{25} = \frac{6z-15x}{9} = \frac{10y-6z}{4} = \frac{15x-10y-6z+15x-10y-6z}{25+9+4} = \frac{30x-20y-12z}{38}$ $\Rightarrow 3x-2y = 2z-5x = 5y-3z = 0$ $\Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+3+5} = \frac{-50}{10} = -5$ <p>Vì $\frac{x}{2} = -5 \Rightarrow x = -5.2 = -10$.</p> <p>Vì $\frac{y}{3} = -5 \Rightarrow y = -5.3 = -15$.</p> <p>Vì $\frac{z}{5} = -5 \Rightarrow z = -5.5 = -25$.</p>	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	Vậy $x = -10; y = -15; z = -25$.	0,25
2 (4đ)	Câu 2 (4,0 điểm).	
	$1/\left(\frac{21}{10}- x+2 \right):\left(\frac{19}{10}-\frac{7}{5}\right)+\frac{4}{5}=1$	0,5
	$\Leftrightarrow \frac{21}{10}- x+2 =\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{10}=\frac{1}{10}$	0,5
	$\Rightarrow x+2 =\frac{21}{10}-\frac{1}{10}=2$	0,25
	$\Rightarrow \begin{cases} x+2=2 \\ x+2=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-4 \end{cases}$	0,25
	Vậy : $x = 0 ; x = -4$	0,25
2 (4đ)	Gọi số học sinh của nhóm I, II, III lần lượt là x, y, z (em) (x, y, z nguyên dương)	0,25
	Theo đề bài, ta có : $y+z-x=18$	
	$\frac{2}{3}x=\frac{8}{11}y=\frac{4}{5}z$	0,5
	Vì $\frac{2}{3}x=\frac{8}{11}y=\frac{4}{5}z$ chia các tỉ số trên cho $BCNN(2,4,8)=8$ ta được	0,25
	$\frac{2x}{3 \cdot 8}=\frac{8y}{11 \cdot 8}=\frac{4z}{5 \cdot 8} \Rightarrow \frac{x}{12}=\frac{y}{11}=\frac{z}{10}$	0,5
	Mặt khác: $y+z-x=18$	
2 (4đ)	Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau	0,25
	$\frac{x}{12}=\frac{y}{11}=\frac{z}{10}=\frac{y+z-x}{11+10-12}=\frac{18}{9}=2$	
	$\Rightarrow \begin{cases} x=12 \cdot 2=24 \\ y=11 \cdot 2=22 \\ z=10 \cdot 2=20 \end{cases}$	0,25
	Vậy số học sinh: Nhóm I là 24 em; nhóm II là 22 em, nhóm	

Câu	Nội dung	Điểm
	III là 20 em	0,25
3 (4đ)	Câu 3(4 điểm)	
	<p>a. Cho đa thức $f(x) = ax^2 + bx + c$ với $a, b, c \in \mathbb{Q}$.</p> <p>Ta có $f(-2) = 4a - 2b + c$</p> <p>$f(3) = 9a + 3b + c$</p> <p>Suy ra $f(-2) + f(3) = 13a + 2b + c = 0$. Do đó $f(-2)$ và $f(3)$ là hai số đối nhau nên</p> <p>$f(-2)f(3) \leq 0$</p>	<p>1.0</p> <p>1.0</p>
	<p>b. Vì a, b, c là độ dài 3 cạnh của một tam giác nên</p> <p>$0 < a < b + c \Rightarrow a^2 < ab + ac$</p> <p>$0 < b < a + c \Rightarrow b^2 < ab + bc$</p> <p>$0 < c < a + b \Rightarrow c^2 < ac + bc$</p> <p>Do đó $a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$.</p>	<p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p> <p>0,5</p>
	Câu 4 (6 điểm)	

Câu	Nội dung	Điểm
4 (6đ)		0,25
Câu 4.1(5 điểm)		
	<p>a) Do ΔABC vuông cân tại A nên $AB = AC; \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ$</p> <p>Do $BH \perp AC$ nên $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 90^\circ$ mà $\hat{B}_1 = 45^\circ$ suy ra</p> <p>$\hat{B}_2 = 90^\circ - \hat{B}_1 = 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$</p> <p>Chứng minh tương tự ta được $\hat{C}_2 = 45^\circ$</p> <p>Ta có: $\hat{A}_1 + \hat{BAD} = 90^\circ = \hat{A}_3 + \hat{BAD} \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{A}_3$</p> <p>Xét ΔAEB và ΔADC có: $\hat{A}_1 = \hat{A}_3; AB = AC; \hat{B}_1 = \hat{C}_1 = 45^\circ$</p> <p>$\Rightarrow \Delta AEB = \Delta ADC$ (g - c - g)</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>
	<p>b) Do $\Delta AEB = \Delta ADC \Rightarrow AE = AD$ mà ΔAED vuông tại A</p> <p>Suy ra ΔAED vuông cân tại A</p> <p>$\Rightarrow \hat{AED} = 45^\circ$</p> <p>Chứng minh tương tự phần a) suy ra $\Delta ADB = \Delta AFC$ (g - c - g)</p> <p>$\Rightarrow AD = AF \Rightarrow \Delta DAF$ vuông cân tại A</p> <p>$\Rightarrow \hat{DFA} = 45^\circ$</p>	<p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p> <p>0,25</p>

Câu	Nội dung	Điểm
	ΔEDF có $\widehat{AED} = 45^\circ = \widehat{DFA}$ $\Rightarrow \Delta EDF$ vuông cân tại D.	0,25
c)	c) Kẻ $AH \perp BC \Rightarrow \Delta ABH$ vuông tại H có $\widehat{B_1} = 45^\circ$ $\Rightarrow \Delta ABH$ vuông cân tại H $\Rightarrow HB = HA$ ΔABC vuông cân tại A có đường cao AH đồng thời là trung tuyến suy ra $BH = HC$ mà $HB = HA$ suy ra $BC = 2AH$ $EF = AE + AF = AD + AD = 2AD \geq 2AH = BC$ đẳng thức xảy ra khi $D \equiv H$.	0,25 0,25 0,25 0,25
Câu 4.2(1 điểm)		
	Diện tích xung quanh của hình phòng học là: $2.(10+5)4 = 120 m^2$	0,25
	Diện tích cửa là: $1,8.2 + 0,8.0,6.2 = 4,56 m^2$	0,25
	Diện tích cần sơn là $120 - 4,56 = 115,44 m^2$	0,25
	Chi phí tiền công sơn: $45000.115,44 = 5194800$ (đồng)	0,25
5	Câu 5(2 điểm)	
(2đ)	Nhân từng vế ba đẳng thức ta được $(abc)^2 = 36abc$	0,25
	Nếu $abc = 0$ thì kết hợp với đề bài ta được $a = b = c = 0$	0,25
	Nếu $abc \neq 0$ thì $abc = 36$	0,25
	Kết hợp $ab = 6 \Rightarrow c = \pm 6$	0,25
	Kết hợp $bc = 4a \Rightarrow a = \pm 3$	0,25
	Kết hợp $ac = 9b$ suy ra $b = \pm 2$	0,25
	Với $c = 6$ thì $ab = 6 \Rightarrow \begin{cases} a = 3, b = 2 \\ a = -3, b = -2 \end{cases}$	0,25
	Với $c = -6$ thì $ab = -6 \Rightarrow \begin{cases} a = 3, b = -2 \\ a = -3, b = 2 \end{cases}$	0,25
	Vậy có 5 bộ (a, b, c) thỏa mãn là	

Câu	Nội dung	Điểm
	$(0;0;0);(3;2;6);(-3;-2;6);(3;-2;-6);(-3;2;-6)$	0,25