

DẠNG 14: CÁC DẠNG KHÁC**A. Bài toán****Bài 1:** Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ô tô đi từ A đến B. Cùng một lúc ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB thì mất bao lâu?

Bài 2: Một khối 8 có $\frac{2}{3}$ số học sinh đội tuyển Toán bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh đội tuyển

Anh và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh đội tuyển Văn. Đội tuyển Văn có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của hai đội tuyển kia là 38 học sinh. Tính số học sinh của mỗi đội tuyển ?

Bài 3: Trong một đề thi có 3 Câu toán A, B, C. Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 Câu đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được Câu A thì số thí sinh đã giải được Câu B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được Câu C
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A nhiều hơn số thí sinh giải được Câu A và thêm Câu khác là 1 người
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A bằng số thí sinh chỉ giải được Câu B cộng với số thí sinh chỉ giải được Câu C.

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được Câu B?

Bài 4: Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số còn lại, rồi đến lớp thứ n ($n = 2; 3; 4; \dots$) nhận được $4n$ áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo. Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo ?

$$a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}, \text{ với}$$

Bài 5: Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2018}$ là 2018 số thực thỏa mãn $k=1, 2, 3, \dots, 2018$.

Tính $S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$

Bài 6: Rút gọn:

a) $M = 90 \cdot 10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}, k \in \mathbb{N};$

b) $N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2)$.

Bài 7: a) So sánh hai số $A = 3^{32} - 1$ và $B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

b) $C = \frac{2019-2018}{2019+2018}$ và $D = \frac{2019^2-2018^2}{2019^2+2018^2}$

Bài 8: Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{1+2 \cdot 3^6}{2^3 \cdot 3^6 - 2^3 \cdot 5^3} - \frac{1+3^6}{8(9^3-125)} - \frac{5^3}{18^3-10^3}$.

b) $B = \frac{x^3y + xy^3 + xy}{x^3 + y^3 + x^2y + xy^2 + x + y}$

Bài 9: a) Xác định $n \in \mathbb{N}$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên;

b) Tính tổng $S(n) = \frac{1}{2 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 8} + \dots + \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)}$

Bài 10: a) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết: $\left(1 - \frac{2}{2 \cdot 3}\right) \left(1 - \frac{2}{3 \cdot 4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}$.

b) Tính: $M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1 \cdot 3}\right) \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 4}\right) \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017 \cdot 2019}\right)$

Bài 11: So sánh A và B , biết: $A = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017}$;

$B = (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016}$.

Bài 12: Tìm một số có 8 chữ số: $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ thỏa mãn 2 điều kiện a và b sau:

a) $\overline{a_1 a_2 a_3} = (\overline{a_7 a_8})^2$

b) $\overline{a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = (\overline{a_7 a_8})^3$

Bài 13: Một số gồm 4 chữ số giống nhau chia cho một số gồm 3 chữ số giống nhau thì được thương là 16 và số dư là một số r nào đó

Nếu số bị chia và số chia đều bớt đi một chữ số thì thương không đổi và số dư giảm bớt 200. Tìm các số đó

Bài 14: Cho $a + b = 2$ và $a^2 + b^2 = 20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$

Bài 15: Cho $a + b + c = 0$ và $a^2 + b^2 + c^2 = 14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Bài 16: Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên

(những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

Bài 17: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Bài 18:

a) Chứng minh : $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$

b) Cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $x + y + z = xyz$ ($x, y, z \neq 0$)

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2$

Bài 19: Rút gọn biểu thức: $A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$

Bài 20: Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Bài 21:

Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức : $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Bài 22: Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$ với $x \neq y; xyz \neq 0; yz \neq 1; xz \neq 1$

Thì $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$

Bài 23: Cho $a > b > 0$ thỏa mãn $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a-b}{a+b}$$

Bài 24: Rút gọn biểu thức: $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 999^2 - 1000^2$

Bài 25: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản

Bài 26: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

Bài 27: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2011} + b^{2011}$

Bài 28: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Bài 29: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được $4m$ thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp $8m$ dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp $12m$ dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc $2m/\text{giây}$. Tính khoảng cách từ A đến B.

Bài 30: Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số gấp ba nghiệm số của phương trình: $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$

Bài 31: Cho $a < b < c < d$ và $x = (a+b)(c+d), y = (a+c)(b+d), z = (a+d)(b+c)$. Sắp xếp theo thứ tự giảm dần của x, y, z

Bài 32: Thực hiện các phép tính:

$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

a)

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$$

b)

Bài 33: Thực hiện phép tính

a) $9^8 \cdot 2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1)$

b) $(2x - 1)^2 + 2(2x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$

c) $\left(2x + 1 - \frac{1}{1 - 2x}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x - 1}\right)$

Bài 34: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình

Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày

Bài 35: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Bài 36: Khi xây dựng bể bơi, để thay nước thường xuyên cho bể người ta đặt một vòi nước chảy vào bể và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra và mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút thì đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh hơn gấp 2 lần vòi chảy ra.

a. Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.

b. Nếu chiều cao của bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

Bài 37: Tìm x, y biết :

$$(x + 2y)(x^2 - 2xy + 4y^2) = 0 \quad \text{và} \quad (x - 2y)(x^2 + 2xy + 4y^2) = 16$$

Bài 38: a) Tìm số có hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

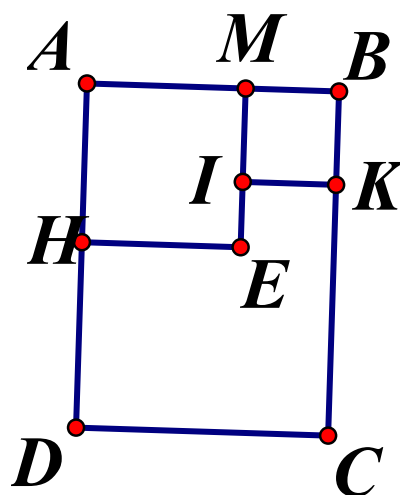
Bài 39: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều.

Bài 40: Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

Bài 41: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Một trường học được xây dựng trên khu đất hình chữ nhật ABCD có $AB = 50m$, $BC = 200m$. Ở phía chiều rộng AB tiếp giáp đường chính, người ra sử dụng hai lô đất hình vuông $AMEH$, $BMIK$ để xây dựng phòng làm việc và nhà để xe. Diện tích còn lại để xây phòng học và các công trình khác (như hình vẽ). Tính diện tích lớn nhất còn lại để xây phòng học và các công trình khác.



B. Lời giải

Bài 1: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một ô tô đi từ A đến B. Cùng một lúc ô tô thứ hai đi từ B đến A với vận tốc

bằng $\frac{2}{3}$ vận tốc ô tô thứ nhất. Sau 5 giờ chúng gặp nhau. Hỏi mỗi ô tô đi cả quãng đường AB thì mất bao lâu?

Lời giải

- Chọn ẩn và đặt điều kiện đúng
- Biểu thị được mỗi đại lượng theo ẩn và số liệu đã biết.
- Lập được phương trình .
- Giải đúng phương trình .
- Đối chiếu và trả lời đúng thời gian của một ô tô – Lập luận , tính và trả lời đúng thời gian của ô tô còn lại.

Bài 2:

Một khối 8 có $\frac{2}{3}$ số học sinh đội tuyển Toán bằng $\frac{3}{4}$ số học sinh đội tuyển Anh và bằng $\frac{4}{5}$ số học sinh đội tuyển Văn. Đội tuyển Văn có số học sinh ít hơn tổng số học sinh của hai đội tuyển kia là 38 học sinh. Tính số học sinh của mỗi đội tuyển ?

Lời giải

Gọi số học sinh đội tuyển Toán, Anh, Văn thứ tự là x, y, z ($x, y, z \in \mathbb{N}$)

Ta có:
$$\frac{2}{3}x = \frac{3}{4}y = \frac{4}{5}z \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{y}{16} = \frac{z}{15} = \frac{(x+y)-z}{(18+16)-15} = \frac{38}{19} = 2$$

Tính được $x = 36; y = 32; z = 30$ và kết luận

Bài 3:

Trong một đề thi có 3 Câu toán A, B, C . Có 25 học sinh mỗi người đều đã giải được ít nhất một trong 3 Câu đó. Biết rằng:

- Trong số thí sinh không giải được Câu A thì số thí sinh đã giải được Câu B nhiều gấp hai lần số thí sinh đã giải được Câu C
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A nhiều hơn số thí sinh giải được Câu A và thêm Câu khác là 1 người
- Số thí sinh chỉ giải được Câu A bằng số thí sinh chỉ giải được Câu B cộng với số thí sinh chỉ giải được Câu C.

Hỏi có bao nhiêu thí sinh chỉ giải được Câu B?

Lời giải

Gọi a là số học sinh chỉ giải được Câu A, b là số thí sinh chỉ giải được Câu B, c là số thí sinh chỉ giải được Câu C, d là số thí sinh giải được 2 Câu B và C nhưng không giải được Câu A. Khi đó số thí sinh giải được Câu A và thêm ít nhất một trong hai Câu B và C là : $25 - a - b - c - d$

Theo Câu ra ta có:

$$b + d = 2(c + d) \quad a = 1 + 25 - a - b - c - d \quad \text{và} \quad a = b + c$$

$$\text{Từ các đẳng thức trên ta có: } \begin{cases} 4b + c = 26 \\ d = b - 2c > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 6 \\ c = 2 \end{cases}$$

Vậy số thí sinh chỉ giải được Câu B là 6 thí sinh.

Bài 4: Để tham gia ngày chạy Olympic vì sức khỏe toàn dân, trường A đã nhận được một số chiếc áo và chia đều cho các lớp. Biết rằng theo thứ tự, lớp thứ nhất nhận được 4 áo và $\frac{1}{9}$ số còn lại, rồi đến lớp thứ n ($n = 2; 3; 4; \dots$) nhận được $4n$ áo và $\frac{1}{9}$ số áo còn lại. Cứ như thế các lớp đã nhận hết số áo. Hỏi trường A đã nhận được bao nhiêu chiếc áo ?

Lời giải

Gọi số lớp của trường A được nhận áo là x

Vì lớp thứ x nhận áo cuối cùng và số áo được phát hết nên số áo lớp thứ x nhận được là $4x$.

Lớp thứ $x - 1$ nhận số áo là :

$$4(x-1) + \frac{1}{8} \cdot 4x = 4,5x - 4$$

Vì số áo các lớp nhận được như nhau nên ta có phương trình:

$$4,5x - 4 = 4x \Rightarrow x = 8$$

Suy ra số áo mỗi lớp nhận được: $4 \cdot 8 = 32$ (áo)

Suy ra số áo trường A nhận được: $32 \cdot 8 = 256$ (áo)

Bài 5: Cho $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{2018}$ là 2018 số thực thoả mãn $a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2}$, với $k = 1, 2, 3, \dots, 2018$.

Tính $S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$

Ta có :
$$a_k = \frac{2k+1}{(k^2+k)^2} = \frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2(k+1)^2} = \frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}$$

Do đó, $S_{2018} = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{2017} + a_{2018}$

$$= \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) + \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) + \dots + \left(\frac{1}{2018^2} - \frac{1}{2019^2} \right) = \frac{2019^2 - 1}{2019^2}$$

Bài 6: Rút gọn:

a) $M = 90.10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}, k \in N;$

b) $N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2)$

Lời giải

a) $M = 90.10^k - 10^{k+2} + 10^{k+1}, k \in N;$

$$= 90.10^k - 100.10^k + 10.10^k = 0$$

b) $N = (20^2 + 18^2 + \dots + 2^2) - (19^2 + 17^2 + \dots + 1^2)$

$$= (20^2 - 19^2) + (18^2 - 17^2) + \dots + (2^2 - 1^2)$$

$$= (20+19)(20-19) + (18+17)(18-17) + \dots + (2+1)(2-1)$$

$$= 20+19+18+17+\dots+2+1 = 210$$

Bài 7: a) So sánh hai số $A = 3^{32} - 1$ và $B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

b) $C = \frac{2019-2018}{2019+2018}$ và $D = \frac{2019^2-2018^2}{2019^2+2018^2}$

Lời giải

a) Ta có: $B = (3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$

$$\Leftrightarrow B.(3-1) = (3-1)(3+1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^2-1)(3^2+1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^4-1)(3^4+1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^8-1)(3^8+1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = (3^{16}-1)(3^{16}+1)$$

$$\Leftrightarrow B.2 = 3^{32} - 1 = A$$

Vậy, $A = 2.B$

b) C/m BĐT phụ: $\frac{x-y}{x+y} = \frac{x^2-y^2}{(x+y)^2} < \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ với $x > y > 0$

Xem $x = 2019$ và $y = 2018$ suy ra $C < D$

Bài 8: Thực hiện phép tính:

a) $A = \frac{1+2.3^6}{2^3.3^6-2^3.5^3} - \frac{1+3^6}{8(9^3-125)} - \frac{5^3}{18^3-10^3}$

b) $B = \frac{x^3y+xy^3+xy}{x^3+y^3+x^2y+xy^2+x+y}$

Lời giải

Thực hiện phép tính:

a)

$$\begin{aligned} A &= \frac{1+2.3^6}{2^3.3^6-2^3.5^3} - \frac{1+3^6}{8(9^3-125)} - \frac{5^3}{18^3-10^3} = \frac{1+2.3^6}{2^3(3^6-5^3)} - \frac{1+3^6}{2^3(3^6-5^3)} - \frac{5^3}{2^3(3^6-5^3)} \\ &= \frac{1+2.3^6-1-3^6-5^3}{2^3(3^6-5^3)} = \frac{3^6-5^3}{2^3(3^6-5^3)} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

b) $B = \frac{x^3y+xy^3+xy}{x^3+y^3+x^2y+xy^2+x+y}$

$$= \dots = \frac{xy(x^2+y^2+1)}{(x+y)(x^2+y^2+1)} = \frac{xy}{x+y}$$

Vậy, $B = \frac{xy}{x+y}, x \neq -y$

Bài 9: a) Xác định $n \in N$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên;

b) Tính tổng $S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)}$

Lời giải

a) Xác định $n \in N$ để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

Để $A = \frac{5n-11}{4n-13}$ là số tự nhiên

$$\Rightarrow (5n-11):(4n-13) \Rightarrow 4(5n-11):(4n-13)$$

$$\Rightarrow [5(4n-13)+21):(4n-13) \Rightarrow 21:(4n-13)$$

$$\Rightarrow (4n-13) \in U(21) = \{\pm 1; \pm 3; \pm 7; \pm 21\}$$

Lập bảng :

$4n-13$	-21	-7	-3	-1	1	3	7	21
$4n$	-8	6	10	12	14	16	20	34
n	-2	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	3	$\frac{7}{2}$	4	5	$\frac{17}{2}$

Vì $n \in N$ nên chọn $n \in \{3; 4; 5\}$

Thử lại:

+ Với $n=3$, ta có: $A = \frac{5.3-11}{4.3-13} = -4 \notin N$ (Loại)

+ Với $n=4$, ta có: $A = \frac{5.4-11}{4.4-13} = 3 \in N$ (Nhận)

+ Với $n=5$, ta có: $A = \frac{5.5-11}{4.5-13} = 2 \in N$ (Nhận)

KL : $n \in \{4; 5\}$

b) Tính tổng
$$S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)}$$

Ta có:
$$S(n) = \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.8} + \dots + \frac{1}{(3n-1).(3n+2)} = \frac{1}{3} \left[\frac{3}{2.5} + \frac{3}{5.8} + \dots + \frac{3}{(3n-1).(3n+2)} \right]$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{3n-1} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3n+2} \right) = \frac{n}{2(3n+2)}$$

Bài 10: a) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết:
$$\left(1 - \frac{2}{2.3}\right) \left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}$$

b) Tính:
$$M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$$

Lời giải

a) Tìm số tự nhiên n khác 0, biết: $\left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{2017}{6045}$.

Ta có:
$$\left(1 - \frac{2}{2.3}\right)\left(1 - \frac{2}{3.4}\right) \dots \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right) = \frac{4}{2.3} \cdot \frac{10}{3.4} \cdot \frac{18}{4.5} \dots \frac{n(n+1)-2}{n(n+1)}$$
$$= \frac{1.4}{2.3} \cdot \frac{2.5}{3.4} \cdot \frac{3.6}{4.5} \dots \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)} = \frac{1.2.3.4 \dots (n-1)}{2.3.4 \dots n} \cdot \frac{4.5.6 \dots (n+2)}{3.4.5 \dots (n+1)} = \frac{n+2}{3n}$$

Khi đó, ta có: $\frac{n+2}{3n} = \frac{2017}{6045} \Leftrightarrow n = 2015$

Vậy, $n = 2015$.

b) Ta có:
$$M = \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{1.3}\right) \left(1 + \frac{1}{2.4}\right) \left(1 + \frac{1}{3.5}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{2017.2019}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{1.3}\right) \left(\frac{9}{2.4}\right) \left(\frac{16}{3.5}\right) \dots \left(\frac{2017.2019+1}{2017.2019}\right)$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2.2}{1.3}\right) \left(\frac{3.3}{2.4}\right) \left(\frac{4.4}{3.5}\right) \dots \left(\frac{2018.2018}{2017.2019}\right)$$
$$= \frac{2.3 \dots 2018}{2.3.4 \dots 2017} \cdot \frac{2.3 \dots 2018}{2.3.4 \dots 2019} = 2018 \cdot \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}$$

Vậy, $M = \frac{2018}{2019}$.

Bài 11: So sánh A và B , biết: $A = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017}$;
 $B = (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2017} = (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2016} \cdot (2017^{2016} + 2016^{2016}) \\ &> (2017^{2016} + 2016^{2016})^{2016} \cdot 2017^{2016} \\ &= \left[(2017^{2016} + 2016^{2016}) \cdot 2017 \right]^{2016} \\ &> (2017^{2017} + 2016^{2016} \cdot 2016)^{2016} \\ &= (2017^{2017} + 2016^{2017})^{2016} = B \end{aligned}$$

Bài 12: Tìm một số có 8 chữ số: $\overline{a_1 a_2 \dots a_8}$ thỏa mãn 2 điều kiện a và b sau:

$$a) \overline{a_1 a_2 a_3} = (\overline{a_7 a_8})^2$$

$$b) \overline{a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = (\overline{a_7 a_8})^3$$

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{a_1 a_2 a_3} = (\overline{a_7 a_8})^2 \quad (1) \quad \overline{a_4 a_5 a_6 a_7 a_8} = (\overline{a_7 a_8})^3 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 22 \leq \overline{a_7 a_8} \leq 31$$

$$\Rightarrow (\overline{a_7 a_8})^3 = \overline{a_4 a_5 a_6 00} + \overline{a_7 a_8} \Leftrightarrow (\overline{a_7 a_8})^3 - \overline{a_7 a_8} = \overline{a_4 a_5 a_6 00}$$

$$\Leftrightarrow (\overline{a_7 a_8} - 1) \overline{a_7 a_8} (\overline{a_7 a_8} + 1) = 4.25. \overline{a_4 a_5 a_6}$$

Do $(\overline{a_7 a_8} - 1); \overline{a_7 a_8}; (\overline{a_7 a_8} + 1)$ là 3 số tự nhiên liên tiếp nên có 3 khả năng:

$$a) \overline{a_7 a_8} = 24 \Rightarrow \overline{a_1 a_2 a_3 \dots a_8} \text{ là số } 57613824$$

$$b) \overline{a_7 a_8} - 1 = 24 \Rightarrow \overline{a_7 a_8} = 25 \Rightarrow \text{số đó là } 62515625$$

$$c) \overline{a_7 a_8} = 26 \Rightarrow \text{không thỏa mãn}$$

Bài 13: Một số gồm 4 chữ số giống nhau chia cho một số gồm 3 chữ số giống nhau thì được thương là 16 và số dư là một số r nào đó

Nếu số bị chia và số chia đều bớt đi một chữ số thì thương không đổi và số dư giảm bớt 200. Tìm các số đó

Lời giải

$$\text{Ta có: } \overline{aaaa} = 16\overline{bbb} + r \quad \overline{aaa} = 16\overline{bb} + (r - 200)$$

$$\text{Với } 200 \leq r < \overline{bbb}$$

Trừ các đẳng thức ta có:

$$1000a = 1600b + 200 \Leftrightarrow 5a = 8b + 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = 3 \end{cases}$$

Ta có các số 5555 và 333 thỏa mãn.

Bài 14: Cho $a + b = 2$ và $a^2 + b^2 = 20$. Tính giá trị của biểu thức $M = a^3 + b^3$

Lời giải

$$a^2 + b^2 = 20 \Rightarrow (a + b)^2 - 2ab = 20 \Rightarrow ab = -8$$

Từ

$$M = a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) = 2^3 - 3 \cdot (-8) \cdot 2 = 56$$

Bài 15: Cho $a+b+c=0$ và $a^2+b^2+c^2=14$. Tính giá trị của biểu thức $N = a^4 + b^4 + c^4$

Lời giải

$$a^2 + b^2 + c^2 = 14 \Rightarrow (a^2 + b^2 + c^2)^2 = 196$$

Từ

$$\Rightarrow a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2)$$

Ta lại có: $a+b+c=0 \Rightarrow (a+b+c)^2 = 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$$

$$\Rightarrow ab + bc + ca = -7$$

$$\Rightarrow (ab + bc + ca)^2 = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) = 49$$

$$\Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = 49$$

Do đó: $N = a^4 + b^4 + c^4 = 196 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 196 - 2 \cdot 49 = 98$

Bài 16: Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây:

$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên

(những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

Lời giải

$$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$$

Vì $q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q=4 \\ q=9 \end{cases} \Rightarrow a, d$ phải là những số thuộc $\{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$

Do $\overline{abcd} = \overline{dcba} \times q$ nên $d < 3 \Rightarrow d = 1$

Giả sử $q = 4$ khi đó $\overline{1cba} \cdot 4 = \overline{abcd}$ (vô lý) vì $\overline{1cba} \cdot 4$ phải là một số chẵn nên $q = 9$

Với $q=9$ ta có: $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abcd}$ suy ra $a = 9, c < 2$ vì tích $\overline{1cba} \times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c \neq d$ tức là $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b = 8$

Tóm lại ta có: $9801:1089 = 9$

Bài 17: Cho $x + \frac{1}{x} = 3$. Tính giá trị biểu thức $A = x^3 + \frac{1}{x^3}$

Lời giải

$$A = x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3 \cdot \left(x + \frac{1}{x}\right) = 3^3 - 3 \cdot 3 = 18$$

Bài 18:

a) Chứng minh: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$

b) Cho: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$ và $x + y + z = xyz$ ($x, y, z \neq 0$)

Chứng minh $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} = 2$

Lời giải

a)

$$\begin{aligned} VT &= a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2 \\ &= a^2c^2 + b^2d^2 - 2abcd + a^2d^2 + b^2c^2 + 2abcd \\ &= (ac - bd)^2 + (bc + ad)^2 = VP \end{aligned}$$

b) Bình phương 2 vế ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{xy} + \frac{2}{xz} + \frac{2}{yz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2z}{xyz} + \frac{2y}{xyz} + \frac{2x}{xyz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2(x+y+z)}{xyz} &= 4 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{2xyz}{xyz} &= 4 \quad (x+y+z=xyz) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} &= 2 \quad (đpcm) \end{aligned}$$

Bài 19: Rút gọn biểu thức:

$$A = \frac{3}{(1.2)^2} + \frac{5}{(2.3)^2} + \frac{7}{(3.4)^2} + \dots + \frac{2n+1}{[n(n+1)]^2}$$

$$\frac{2n+1}{[n(n+1)]^2} = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n^2(n+1)^2} = \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2}$$

Ta có:

$$\Rightarrow B = \dots = 1 - \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$$

Bài 20: Cho $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$. Tính $A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2}$

Lời giải

Ta có $a+b+c=0$ thì :

$$a^3 + b^3 + c^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b) + c^3 = -c^3 - 3ab(-c) + c^3 = 3abc$$

(vì $a+b+c=0 \Rightarrow a+b=-c$)

Theo giả thiết $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} = \frac{3}{xyz}$

$$A = \frac{yz}{x^2} + \frac{xz}{y^2} + \frac{xy}{z^2} = \frac{xyz}{x^3} + \frac{xyz}{y^3} + \frac{xyz}{z^3}$$

$$= xyz \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{z^3} \right) = xyz \cdot \frac{3}{xyz} = 3$$

Bài 21:

Cho a, b, c là ba số đôi một khác nhau thỏa mãn: $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Tính giá trị của biểu thức : $P = \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab}$

Lời giải

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 \Leftrightarrow ab + ac + bc = 0$$

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} = \frac{a^2}{a^2 - ab - ac + bc} = \frac{a^2}{(a-b)(a-c)}$$

Tương tự: $\frac{b^2}{b^2 + 2ac} = \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} ; \quad \frac{c^2}{c^2 + 2ab} = \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ac} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \\
 &= \frac{a^2}{(a-b)(a-c)} - \frac{b^2}{(b-a)(b-c)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)} \\
 &= \frac{(a-b)(a-c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)} = 1
 \end{aligned}$$

Bài 22: Chứng minh rằng nếu $\frac{x^2 - yz}{x(1 - yz)} = \frac{y^2 - xz}{y(1 - xz)}$ với $x \neq y; xyz \neq 0; yz \neq 1; xz \neq 1$

Thì $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
 \text{Từ gt} \Rightarrow (x^2 - yz)y(1 - xz) &= x(1 - yz)(y^2 - xz) \\
 \Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 &= xy^2 - x^2z - xy^3z + x^2yz^2 \\
 \Leftrightarrow x^2y - x^3yz - y^2z + xy^2z^2 - xy^2 &+ x^2z + xy^3z - x^2yz^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow xy(x - y) + xyz(yz + y^2 - xz - x^2) &+ z(x^2 - y^2) = 0 \\
 \Leftrightarrow y(x - y) + xyz(x - y)(x + y + z) &+ z(x - y)(x + y) = 0 \\
 \Leftrightarrow (x - y)[xy - xyz(x + y + z) + xz &+ yz] = 0
 \end{aligned}$$

Do $x - y \neq 0$ nên $xy + xz + yz - xyz(x + y + z) = 0$

Hay $xy + xz + yz = xyz(x + y + z)$ (đpcm)

Bài 23: Cho $a > b > 0$ thỏa mãn $3a^2 + 3b^2 = 10ab$. Tính giá trị của biểu thức

$$P = \frac{a - b}{a + b}$$

Lời giải

$$P^2 = \frac{(a - b)^2}{(a + b)^2} = \frac{a^2 - 2ab + b^2}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{3a^2 + 3b^2 - 6ab}{3a^2 + 3b^2 + 6ab} = \frac{4ab}{16ab} = \frac{1}{4}$$

Xét

$$\text{Vì } a > b > 0 \Rightarrow P > 0 \Rightarrow P = \frac{1}{2}$$

Bài 24: Rút gọn biểu thức: $A = 1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + 999^2 - 1000^2$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned}
 A &= (1^2 - 2^2) + (3^2 - 4^2) + \dots + (999^2 - 1000^2) \\
 &= (1-2)(1+2) + (3-4)(3+4) + \dots + (999-1000)(999+1000) \\
 &= -(1+2+3+4+\dots+999+1000) \\
 &= -500.1001 = -500500
 \end{aligned}$$

Bài 25: Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n thì phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản

Lời giải

Gọi $d = \text{UCLN}(21n+4; 14n+3)$ với $d \in \mathbb{N}, d \geq 1$

Ta có: $21n+4 \vdots d$ và $14n+3 \vdots d$

Khi đó $2(21n+4) \vdots d$ và $3(14n+3) \vdots d$

Hay $42n+8 \vdots d$ và $42n+9 \vdots d$

$\Rightarrow (42n+9 - 42n-8) \vdots d$ hay $1 \vdots d \Rightarrow d = 1$

Vậy phân số $\frac{21n+4}{14n+3}$ là phân số tối giản với mọi số tự nhiên n

Bài 26: Cho $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} = 0$$

Lời giải

Nhân cả 2 vế của $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 1$ với $a+b+c$, rút gọn suy ra đpcm

Bài 27: Cho a, b dương và $a^{2000} + b^{2000} = a^{2001} + b^{2001} = a^{2002} + b^{2002}$.

Tính: $a^{2011} + b^{2011}$

Lời giải

$$(a^{2001} + b^{2001})(a + b) - (a^{2000} + b^{2000})ab = a^{2002} + b^{2002}$$

$$\Rightarrow (a + 1) - ab = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 1)(b - 1) = 1 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \end{cases}$$

$$\text{Vi } a = 1 \Rightarrow b^{2000} = b^{2001} \Rightarrow \begin{cases} b = 1(tm) \\ b = 0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vi } b = 1 \Rightarrow a^{2000} = a^{2001} \Rightarrow \begin{cases} a = 1(tm) \\ a = 0(ktm) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } a = 1; b = 1 \Rightarrow a^{2011} + b^{2011} = 2$$

Bài 28: Cho $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ và $\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0$. Chứng minh rằng: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$

Lời giải

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} = 0 \Leftrightarrow \frac{ayz + bxz + cxy}{xyz} = 0$$

Từ

$$\Leftrightarrow ayz + bxz + cxy = 0$$

$$\text{Ta có: } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right)^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \left(\frac{xy}{ab} + \frac{xz}{ac} + \frac{yz}{bc} \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} + 2 \frac{cxy + bxz + ayz}{abc} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1(dfcm)$$

Bài 29: Một vật thể chuyển động từ A đến B theo cách sau: đi được 4^m thì dừng lại 1 giây, rồi đi tiếp 8^m dừng lại 2 giây, rồi đi tiếp 12^m dừng lại 3 giây... Cứ như vậy đi từ A đến B kể cả dừng hết tất cả 155 giây. Biết rằng khi đi vật thể luôn có vận tốc 2^m /giây. Tính khoảng cách từ A đến B.

Lời giải

Gọi x là số lần đi ($x \in \mathbb{N}, x > 0$), số lần dừng là $x - 1$

Thời gian đi

$$\frac{4}{2} + \frac{8}{2} + \frac{12}{2} + \dots + \frac{4x}{2} = 2 + 4 + 6 + \dots + 2x$$

$$= 2(1 + 2 + 3 + \dots + x) = x(x+1)$$

Thời gian dừng:

$$1 + 2 + 3 + \dots + (x-1) = \frac{(x-1+1)(x-1)}{2} = \frac{x(x-1)}{2}$$

Lập được phương trình

$$\frac{x(x-1)}{2} + x(x+1) = 155 \Leftrightarrow 3x^2 + x - 310 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10 \text{ (tm)} \\ x = \frac{-31}{3} \text{ (ktm)} \end{cases}$$

Khoảng cách AB là $10 \cdot (10+1) \cdot 2 = 220(m)$

Bài 30: Tìm giá trị của m để cho phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm số

gấp ba nghiệm số của phương trình: $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$

Lời giải

$$(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 1 - x^2 - 4x - 4 = 3$$

$$\Leftrightarrow -4x = 8 \Leftrightarrow x = -2$$

Để phương trình $6x - 5m = 3 + 3mx$ có nghiệm gấp ba lần nghiệm của phương

trình $(x+1)(x-1) - (x+2)^2 = 3$ hay $x = -6$

Ta có:

$$6 \cdot (-6) - 5m = 3 + 3m \cdot (-6)$$

$$\Leftrightarrow -5m + 18m = 39 \Leftrightarrow 13m = 39 \Leftrightarrow m = 3$$

Vậy $m = 3$

Bài 31: Một người đi xe gắn máy từ A đến B dự định mất 3 giờ 20 phút. Nếu người ấy tăng vận tốc thêm $5km/h$ thì sẽ đến B sớm hơn 20 phút. Tính khoảng cách AB và vận tốc dự định đi của người đó.

Lời giải

Gọi khoảng cách giữa A và B là $x(km)$ ($x > 0$)

$$\frac{x}{3\frac{1}{3}} = \frac{3x}{10} (km/h) \quad 3h20' = 3\frac{1}{3}(h)$$

Vận tốc dự định của người đi xe gắn máy là:

Vận tốc của người đi xe gắn máy khi tăng lên $5km/h$ là: $\frac{3x}{10} + 5(km/h)$

Theo đề bài ta có phương trình: $\left(\frac{3x}{10} + 5\right) \cdot 3 = x \Leftrightarrow x = 150(tm)$

Vậy khoảng cách giữa A và B là $150km$

Vận tốc dự định là: $\frac{3 \cdot 150}{10} = 45(km/h)$

Bài 32: Cho

$$a < b < c < d \text{ và}$$

$x = (a+b)(c+d), y = (a+c)(b+d), z = (a+d)(b+c)$. Sắp xếp theo thứ tự giảm dần của x, y, z

Lời giải

Xét hiệu $x - y = (a+b)(c+d) - (a+c)(b+d) = (d-a)(b-c)$

Vì $b > a, b < c$ nên $(d-a)(b-c) < 0$. Suy ra $x < y$ (1)

Xét hiệu $y - z = (a+c)(b+d) - (a+d)(b+c) = (a-b)(d-c)$

Vì $b > a, c < d$ nên $(a-b)(d-c) < 0$. Suy ra $y < z$ (2)

Từ (1) và (2) ta sắp xếp theo thứ tự giảm dần là $z > y > x$

Bài 33: Thực hiện các phép tính:

a)
$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

b)
$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51}$$

Lời giải

a)
$$A = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{x+1} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8}$$

Ta có:
$$\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} = \frac{2}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow A &= \frac{2}{1-x^2} + \frac{2}{1+x^2} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{4}{1-x^4} + \frac{4}{1+x^4} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{8}{1-x^8} + \frac{8}{1+x^8} \\
&= \frac{16}{1-x^{16}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b) B &= \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{49.51} \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots + \left(\frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{49} - \frac{1}{51}\right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{51}\right) = \frac{25}{51}
\end{aligned}$$

Bài 34: Thực hiện phép tính

a) $9^8 \cdot 2^8 - (18^4 - 1)(18^4 + 1)$

b) $(2x - 1)^2 + 2(2x - 1)(x + 1) + (x + 1)^2$

c) $\left(2x+1 - \frac{1}{1-2x}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x-1}\right)$

Lời giải

$$\begin{aligned}
a/ &= 18^8 - (18^8 - 1) \\
&= 18^8 - 18^8 + 1 = 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b/ &= [(2x-1) + (x+1)]^2 \\
&= (3x)^2 = 9x^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c/ &= \left(2x+1 + \frac{1}{2x-1}\right) : \left(2 - \frac{4x}{2x-1}\right) = \frac{4x^2 - 1 + 1}{2x-1} : \frac{4x-2-4x}{2x-1} \\
&= \frac{4x^2}{2x-1} : \frac{-2}{2x-1} = -2x^2
\end{aligned}$$

Bài 35: Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình

Một tổ sản xuất lập kế hoạch sản xuất, mỗi ngày sản xuất được 50 sản phẩm. Khi thực hiện, mỗi ngày tổ đó sản xuất được 57 sản phẩm. Do đó đã hoàn thành trước kế hoạch 1 ngày và còn vượt mức 13 sản phẩm. Hỏi theo kế hoạch tổ phải sản xuất bao nhiêu sản phẩm và thực hiện trong bao nhiêu ngày

Lời giải

Gọi số ngày tổ dự định sản xuất là : x ngày ($x \in \mathbb{N}^*, x > 1$)

Vậy số ngày tổ đã thực hiện $x-1$ (ngày)

Số sản phẩm làm theo kế hoạch là : $50x$ (sản phẩm)

Số sản phẩm thực hiện là : $57.(x-1)$ (sản phẩm)

Theo đề bài ta có phương trình : $57(x-1) - 50x = 13$

$$\Leftrightarrow 57x - 57 - 50x = 13 \Leftrightarrow 7x = 70 \Leftrightarrow x = 10 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy số ngày dự định sản xuất là 10 ngày

Số sản phẩm phải làm theo kế hoạch là : $50.10 = 500$ (sản phẩm)

Bài 36: Giải bài toán bằng cách lập phương trình

Một phân số có tử số bé hơn mẫu số là 11. Nếu bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số lên 4 đơn vị thì sẽ được phân số nghịch đảo của phân số đã cho. Tìm phân số đó

Lời giải

Gọi tử số của phân số cần tìm là x thì mẫu số của phân số cần tìm là $x + 11$.

Phân số cần tìm là $\frac{x}{x+11}$ ($x \neq -11$)

Khi bớt tử số đi 7 đơn vị và tăng mẫu số 4 đơn vị ta được phân số $\frac{x-7}{x+15}$ ($x \neq -15$)

Theo bài ta có phương trình $\frac{x}{x+11} = \frac{x+15}{x-7} \Leftrightarrow x = -5$ (t/m)

Vậy phân số cần tìm là $-\frac{5}{6}$

Bài 37: Khi xây dựng bể bơi, để thay nước thường xuyên cho bể người ta đặt một vòi nước chảy vào bể và một vòi chảy ra ở lưng chừng bể. Khi bể cạn, nếu

mở cả hai vòi thì sau 2 giờ 42 phút bể đầy nước. Còn nếu đóng vòi chảy ra và mở vòi chảy vào thì sau 1 giờ 30 phút thì đầy bể. Biết vòi chảy vào mạnh hơn gấp 2 lần vòi chảy ra.

- Tính thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra.
- Nếu chiều cao của bể là 2m thì khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là bao nhiêu?

Lời giải

- Gọi thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là x giờ

Trong 1 giờ vòi chảy vào bể được $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ bể

Trong 1 giờ vòi chảy ra được $\frac{2}{3} : 2 = \frac{1}{3}$ bể

Nếu mở cả hai vòi, lượng nước chảy vào bể trong một giờ được $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

Trong x giờ đầu, chỉ có vòi chảy vào làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{2}{3}x$ bể

Trong 2 giờ 42 phút – x giờ (tức là 2,7 giờ - x giờ) còn lại, cả hai vòi làm việc nên lượng nước chảy vào bể là $\frac{1}{3}(2,7 - x)$

Ta có phương trình: $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}(2,7 - x) = 1$

Do đó $x = 0,3$. Thời gian nước chảy vào từ lúc bể cạn đến lúc mực nước ngang chỗ đặt vòi chảy ra là 0,3 giờ

- Theo đề bài, nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 1,5 giờ thì mực nước cao 2m. Vậy nếu riêng vòi chảy vào làm việc trong 0,3 giờ thì mực nước cao $\frac{2m \cdot 0,3}{1,5} = 0,4m$

Khoảng cách từ chỗ đặt vòi chảy ra đến đáy bể là 0,4 m

Bài 38: Tìm x, y biết :

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0 \quad \text{và} \quad (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16$$

Lời giải

$$(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0 \quad \text{và} \quad (x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16$$

Ta có: $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)=0 \Leftrightarrow x^3+8y^3=0(1)$

và $(x-2y)(x^2+2xy+4y^2)=16 \Leftrightarrow x^3-8y^3=16(2)$

Từ (1) và (2) suy ra $2x^3=16 \Leftrightarrow x=2$.

Thay $x=2$ vào (1) suy ra $y=-1$.

Vậy, $x=2$ và $y=-1$.

Bài 39: a) Tìm số có hai chữ số mà bình phương của nó bằng lập phương của tổng các chữ số của nó.

b) Tìm ba số tự nhiên liên tiếp biết rằng nếu cộng ba tích, mỗi tích của hai trong ba số đó thì được 26.

c) Tìm bốn số nguyên dương liên tiếp, biết rằng tích của chúng bằng 120

Lời giải

a) Số cần tìm có dạng $\overline{ab}$, với $a, b \in N; 1 \leq a \leq 9; 0 \leq b \leq 9$

Theo đề bài ta có: $\overline{ab}^2 = (a+b)^3 \Leftrightarrow (10a+b)^2 = (a+b)^3 (1)$

Hệ thức (1) chứng tỏ $\overline{ab}$ phải là một số lập phương và $(a+b)$ phải là một số chính phương.

Do $10 \leq \overline{ab} \leq 99 \Rightarrow \overline{ab} = 27$ hoặc $\overline{ab} = 64$

+Nếu $\overline{ab} = 27 \Leftrightarrow a+b=9=3^2$ (chính phương)

+Nếu $\overline{ab} = 64 \Leftrightarrow a+b=10$ (không chính phương nên loại)

Vậy, số cần tìm là $\overline{ab} = 27$.

b) Gọi ba số tự nhiên liên tiếp là $(x-1), x, (x+1)$ (ĐK : $x \geq 1, x \in N$)

Ta có : $(x-1)x+x(x+1)+(x-1)(x+1)=26 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow 3x^2-1=26 \Leftrightarrow x=3$ (Vì $x \geq 1, x \in N$)

Vậy, ba số tự nhiên liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4.

c) Gọi bốn số nguyên dương liên tiếp là $(x-1), x, (x+1), (x+2)$ (ĐK: $x \geq 2, x \in \mathbb{Z}$)

Ta có: $(x-1)x(x+1)(x+2) = 120 \Leftrightarrow [x(x+1)][(x-1)(x+2)] = 120$

$$\Leftrightarrow (x^2+x)[(x^2+x)-2] = 120 \Leftrightarrow (x^2+x)-2(x^2+x)+1 = 121$$

$$\Leftrightarrow (x^2+x-1)^2 = 11^2$$

Vì $x \geq 2, x \in \mathbb{Z}$ nên $x^2+x-1=11 \Rightarrow (x-3)(x+4)=0 \Rightarrow x=3$ (Vì $x+4 > 0$)

Vậy, bốn số nguyên dương liên tiếp phải tìm là 2, 3, 4, 5

Bài 40: Gọi a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác thỏa mãn $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$. Chứng minh tam giác đều

Lời giải

a) C/m: $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

+) Từ giả thiết suy ra: $(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = 0$

$$\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc = 0 \quad (a+b+c > 0)$$

Biến đổi được kết quả: $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=0 \\ b-c=0 \\ c-a=0 \end{cases} \Rightarrow a=b=c$$

Tam giác đó là đều (đpcm)

Bài 41: Hãy tính số bị chia, số chia và thương số trong phép chia sau đây: $\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$ biết rằng cả ba số đều là bình phương của những số nguyên (những chữ khác nhau là các chữ số khác nhau)

Lời giải

$$\overline{abcd} : \overline{dcba} = q$$

Vì $q \neq 1 \Rightarrow \begin{cases} q=4 \\ q=9 \end{cases} \Rightarrow a, d$ phải là những số thuộc $\{1; 4; 5; 6; 9\}, a, d \neq 0$

Do $\overline{abcd} = \overline{dcba} \times q$ nên $d < 3 \Rightarrow d = 1$

Giả sử $q = 4$ khi đó $\overline{1cba} \cdot 4 = \overline{abcd}$ (vô lý) vì $\overline{1cba} \cdot 4$ phải là một số chẵn nên $q = 9$

Với $q=9$ ta có: $\overline{1cba} \times 9 = \overline{abc1}$ suy ra $a=9, c < 2$ vì tích $\overline{1cba} \times 9$ là số có 4 chữ số nên ta lại có $c \neq d$ tức là $c \neq 1 \Rightarrow c = 0$

Ta thấy $\overline{abcd} = \overline{9b01} = \overline{10b9} \times 9$ vậy $\overline{9b01}$ là số chia hết cho 9 nên $b = 8$

Tóm lại ta có: $9801:1089 = 9$

Bài 42: Biết $a^3 - 3ab^2 = 5$ và $b^3 - 3a^2b = 10$. Tính $M = \frac{a^2 + b^2}{2018}$

Lời giải

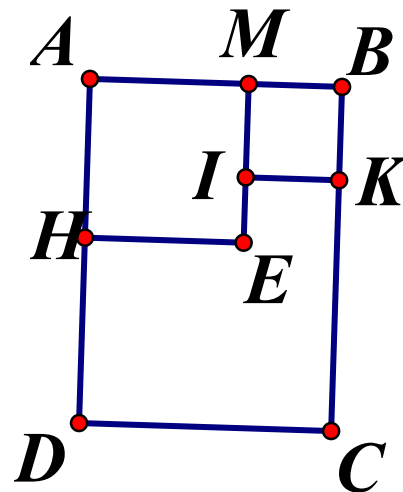
$$a^3 - 3ab^2 = 5 \Rightarrow a^6 - 6a^4b^2 + 9a^2b^4 = 25$$

$$b^3 - 3a^2b = 10 \Rightarrow b^6 - 6a^2b^4 + 9a^4b^2 = 100$$

$$\Rightarrow a^6 + 3a^4b^2 + 3a^2b^4 + b^6 = 125$$

$$\Rightarrow (a^2 + b^2)^3 = 5^3 \Rightarrow \frac{a^2 + b^2}{2018} = \frac{5}{2018}$$

Một trường học được xây dựng trên khu đất hình chữ nhật ABCD có $AB = 50m$, $BC = 200m$. Ở phía chiều rộng AB tiếp giáp đường chính, người ra sử dụng hai lô đất hình vuông $AMEH$, $BMIK$ để xây dựng phòng làm việc và nhà để xe. Diện tích còn lại để xây phòng học và các công trình khác (như hình vẽ). Tính diện tích lớn nhất còn lại để xây phòng học và các công trình khác.



Lời giải

Đặt: $AM = a, MB = b \Rightarrow (a + b)^2 = 50^2$

$$(a - b)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab$$

$$2(a^2 + b^2) \geq (a + b)^2 = 50^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 1250$$

Diện tích nhỏ nhất $S_{AMEH} + S_{BIMK} = 1250(m^2)$

Diện tích lớn nhất còn lại: $10000 - 1250 = 8750(m^2)$