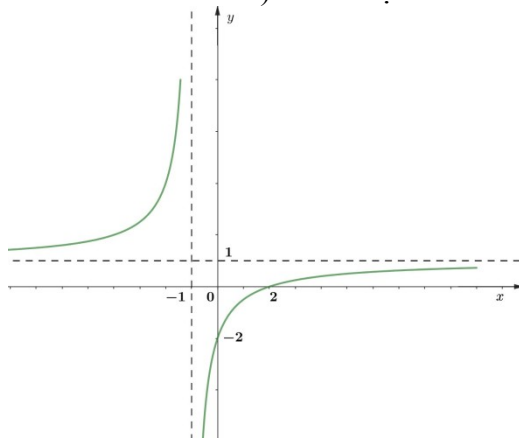


PHẦN I: TRẮC NGHIỆM 4 PHƯƠNG ÁN

Câu 1. Cho hàm số $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ (với $c \neq 0, ad-bc \neq 0$) có đồ thị như hình dưới đây.



Tiệm cận ngang của đồ thị hàm số là

- A. $y = -1$. B. $x = -1$. C. $y = 1$. D. $x = 1$.

Câu 2. Gọi V là thể tích khối tròn xoay tạo thành khi quay hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = e^x$, trục hoành và hai đường thẳng $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox . Khi đó V bằng

- A. $\pi \int_0^2 e^x dx$. B. $\int_0^2 |e^x| dx$. C. $\pi \int_0^2 e^{2x} dx$. D. $\int_0^2 e^{2x} dx$.

Câu 3. Cho mẫu số liệu ghép nhóm có tứ phân vị thứ nhất, thứ hai và thứ ba lần lượt là Q_1, Q_2 và Q_3 . Khoảng tứ phân vị của mẫu số liệu ghép nhóm đó là

- A. $\Delta_Q = Q_1 - Q_3$. B. $\Delta_Q = Q_3 - Q_2$. C. $\Delta_Q = Q_2 - Q_1$. D. $\Delta_Q = Q_3 - Q_1$.

Câu 4. Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $\mathbb{R}$ có bảng biến thiên sau

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$	
y'	+	0	-	0	+
y	$-\infty$	4	2	$+\infty$	

Giá trị cực tiểu của hàm số đã cho bằng

- A. 1. B. 2. C. 3. D. 4.

Câu 5. Nghiệm của phương trình $\log_2(x-1) = 3$ là

- A. 9. B. 7. C. 10. D. 8.

Câu 6. Trong không gian $Oxyz$ cho đường thẳng d phương của đường thẳng d ?

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$$

- A. $\vec{u}_1(2; -1; 4)$. B. $\vec{u}_2(2; 1; 4)$. C. $\vec{u}_3(1; -3; 0)$. D. $\vec{u}_4(-1; 3; 0)$.

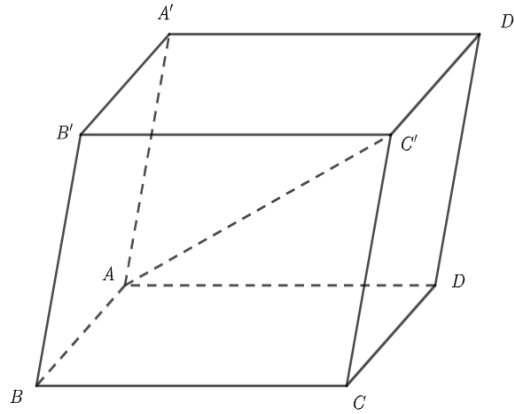
Câu 7. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$. Trong các đường thẳng sau, đường nào vuông góc với mặt phẳng (SAC) ?

- A. SB . B. BD . C. AB . D. CD .

Câu 8. Phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng 8, trục nhỏ bằng 6 là:

- A. $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{36} = 1$. B. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$. C. $9x^2 + 16y^2 = 1$. D. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Câu 9. Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$ (xem hình bên). Phát biểu nào sau đây đúng.



- A. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$. B. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD'}$.
C. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB'}$. D. $\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

Câu 10. Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 9^x$ là

- A. $\frac{9^{x+1}}{x+1} + C$. B. $\frac{9^x}{\ln 9} + C$. C. $9^{x-1} + C$. D. $9^x \cdot \ln 9 + C$.

Câu 11. Một trường học tổ chức trải nghiệm cho học sinh bằng cách tổ chức các trò chơi, trong đó có trò chơi sử dụng đồng xu để xếp thành một kim tự tháp. Yêu cầu mỗi nhóm học sinh sử dụng 253 đồng tiền xu để xếp một mô hình kim tự tháp. Biết rằng tầng dưới cùng có 58 đồng xu và cứ lên thêm một tầng thì số đồng xu giảm đi 7 đồng. Tập hợp số xu ở mỗi tầng tạo thành

- A. Một cấp số nhân với số hạng đầu và công bội lần lượt là $u_1 = 58; d = 7$.
B. Một cấp số cộng với số hạng đầu và công sai lần lượt là $u_1 = 58; d = -7$.
C. Một cấp số cộng với số hạng đầu và công sai lần lượt là $u_1 = 58; d = 7$.
D. Một cấp số nhân với số hạng đầu và công bội lần lượt là $u_1 = 58; d = -7$.

Câu 12. Trong không gian $Oxyz$, cho tam giác ABC có $A(2; -3; 1)$, $B(1; 3; -4)$ và $C(3; -3; 6)$. Trọng tâm tam giác ABC có tọa độ là:

- A. $(2; -1; 1)$. B. $(-6; 3; -3)$. C. $(6; -3; 3)$. D. $(-2; 1; -1)$.

PHẦN II: TRẮC NGHIỆM ĐÚNG SAI

Câu 1. Cho hàm số $y = f(x) = \frac{-x^2 + x - 2}{x + 1}$ có đồ thị (C) . Khi đó

- a) $y' = f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x + 1)^2}; \forall x \neq -1$.

b) Tiệm cận xiên của đồ thị hàm số là đường thẳng có phương trình $y = x - 2$.

c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị của đồ thị (C) bằng 4.

d) Trên đồ thị (C) có đúng 4 điểm M có tung độ và hoành độ là các số nguyên sao cho tiếp tuyến của (C) tại M tạo với hai đường tiệm cận (C) một tam giác có diện tích bằng 8.

Câu 2. Thời gian tập luyện trong một ngày(tính theo giờ) của ^{39} vận động viên được ghi lại ở bảng sau:

Thời gian luyện tập(giờ)	[0;2)	[2;4)	[4;6)	[6;8)	[8;10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

a) Bảng tần số ghép lớp trên có ^{5} nhóm.

b) Tứ phân vị thứ ba của mẫu số liệu trên (làm tròn đến hàng phần trăm) là ^{7,04} .

c) Giá trị đại diện của nhóm $[6;8)$ là ^{6,5} .

d) Giá trị trung bình của mẫu số liệu trên(làm tròn đến hàng phần trăm) là ^{5,31} .

Câu 3. Trong không gian với hệ trục tọa độ $Oxyz$, cho $\vec{u} = (2;1;-3)$, mặt phẳng $(P): x + 2y - 2z + 16 = 0$ và mặt cầu $(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$.

a) Mặt cầu (S) có tâm $I(-1;2;1)$.

b) Khoảng cách từ tâm I đến mặt phẳng (P) bằng 5.

c) Gọi α là góc giữa giá của $\vec{u}$ và mặt phẳng (P) . Khi đó $\sin \alpha = \frac{5\sqrt{14}}{7}$.

d) Gọi M, N là hai điểm lần lượt thuộc mặt cầu (S) và mặt phẳng (P) . Biết đường thẳng MN có vector chỉ phương là $\vec{u}$. Khi đó giá trị lớn nhất của đoạn MN bằng $\frac{12\sqrt{14}}{5}$.

Câu 4. Một cửa hàng đã bán 2 loại đồ chơi gồm 140 mô tô và 60 búp bê cho các bé ở một trường tiểu học. Qua thống kê thấy rằng trong số bé mua mô tô có 60% là nam, trong số bé mua búp bê có 80% là nữ. Biết rằng mỗi bé chỉ mua duy nhất một loại đồ chơi. Chọn ngẫu nhiên một bé đã mua đồ chơi trong trường tiểu học đó.

a) Xác suất bé được chọn đã mua mô tô bằng 0,7.

b) Xác suất bé được chọn là nữ, biết rằng bé đó mua mô tô bằng 0,28.

c) Xác suất bé được chọn là nam và không mua búp bê bằng 0,06.

d) Số bé nam mua đồ chơi là 96.

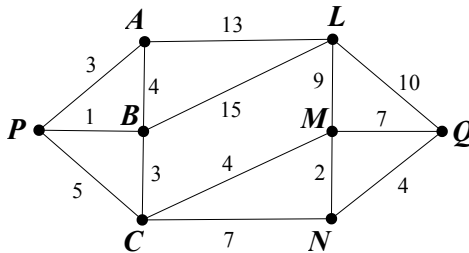
PHẦN III: TRẢ LỜI NGẮN

Câu 1. Một cơ sở sản xuất thiết bị cứu hộ chế tạo một chiếc phao cứu sinh như hình minh họa. Khi đó, theo mặt cắt qua tâm, người ta thấy, bán kính ngoài của phao bằng 35 cm, bán kính trong của phao bằng 25 cm.

Phao được làm từ một loại vật liệu đồng chất, có khối lượng riêng bằng $0,05 \text{ g/cm}^3$ (coi phao là khối đặc, không có khoang rỗng bên trong). Tính khối lượng của chiếc phao (đơn vị kg), biết kết quả làm tròn đến hàng phần trăm, số π nhận giá trị bằng 3,1416.

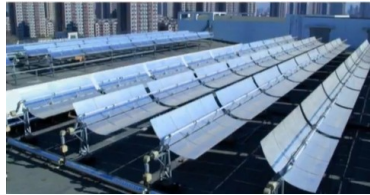


Câu 2. Tại một địa phương, có 8 điểm du lịch, giả sử được kí hiệu A, B, C, L, M, N, P, Q . Nếu có ít nhất một tuyến xe bus đi trực tiếp từ điểm du lịch này đến điểm du lịch kia thì ta nối hai điểm đó bởi một đoạn thẳng và gắn với đoạn thẳng đó độ dài quãng đường của tuyến xe bus có cự ly ngắn nhất (đơn vị: km). Ta được sơ đồ như hình vẽ



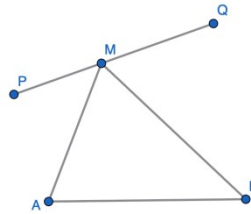
Cô Hằng đang ở địa điểm du lịch P và muốn di chuyển bằng xe bus đến điểm du lịch Q . Độ dài đường đi ngắn nhất của cô Hằng từ P đến Q bằng bao nhiêu kilômét?

Câu 3. Một nhà máy nhiệt điện sử dụng 90 máng Parabol thu nhiệt năng lượng mặt trời có cùng kích thước, bề mặt cong đều nhau (tham khảo hình ảnh). Mỗi máng có chiều rộng 2m (tính trong lòng máng), bề dày của khối silic làm mặt máng là 2dm , chiều dài 3m . Đặt máng tiếp giáp mặt đất có điểm cao nhất của khối silic làm mặt máng so với mặt đất là 5dm . Khi đó thể tích của khối silic làm 90 mặt máng bằng bao nhiêu m^3 ?

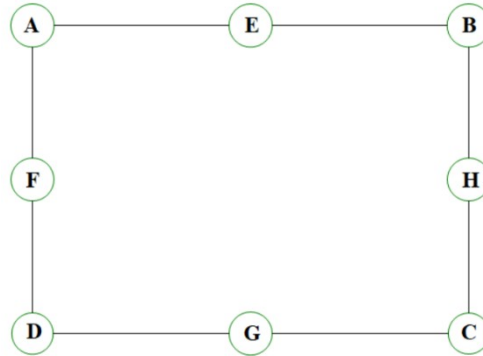


Câu 4. Một công ty muốn đầu tư vào hệ thống điện mặt trời có công suất x (đơn vị tính: MW). Theo nghiên cứu cho thấy một số thông tin sau: Chi phí đầu tư ban đầu là $C_1(x) = 1400 + 55x$ (tỷ đồng). Doanh thu hàng năm là $R(x) = 28x - 0,15x^2$ (tỷ đồng/năm). Chi phí vận hành hàng năm là $C_2(x) = 12 + 0,35x + 0,012x^2$ (tỷ đồng/năm). Hãy tìm công suất x (làm tròn đến hàng đơn vị) để tối đa hóa lợi nhuận trên đầu tư, được tính là tỷ lệ lợi nhuận hàng năm trên chi phí đầu tư ban đầu.

Câu 5. Chuẩn bị đến ngày sinh nhật, bạn Bình muốn trang trí căn phòng trọ của mình đẹp hơn. Trước khi trang trí, Bình gắn 2 móc treo vào các vị trí P, Q , rồi căng một sợi dây từ P đến Q . Tiếp theo, bạn gắn 2 móc treo vào các vị trí A và B , sau đó lấy một điểm M nằm giữa đoạn thẳng PQ rồi tiếp tục căng dây từ M đến A và từ M đến B . Xét một hệ trục tọa độ $Oxyz$ sao cho đơn vị trên mỗi trục là mét. Khi tổng độ dài các đoạn dây mà Bình sử dụng là ngắn nhất thì khoảng cách từ M đến P bằng bao nhiêu mét? (Làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



Câu 6. Trên mỗi cạnh của một hình vuông $ABCD$, lấy các điểm E, F, G, H . Sau đó ta điền trên 8 điểm nằm trên hình vuông 8 số khác nhau trong tập hợp các số tự nhiên từ một đến tám, sao cho độ dài của các cạnh bằng tổng của các số hạng nằm trên cạnh đó, nghĩa là độ dài cạnh của hình vuông bằng $A + E + B; B + H + C; D + G + C; A + F + G$. Số trường hợp xảy ra bằng bao nhiêu?



ĐÁP ÁN THAM KHẢO

Phần I.

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Đáp án	C	C	D	B	C	A	B	D	D	B	B	A

Phần II.

Câu	a	b	c	d
Câu 1	Đ	Đ	S	S
Câu 2	Đ	Đ	S	Đ
Câu 3	S	Đ	S	Đ
Câu 4	Đ	S	S	Đ

Phần III.

Câu	1	2	3	4	5	6
Đáp án	$0,7$ 4	14	108	$\frac{4}{6}$	0,8	48

LỜI GIẢI THAM KHẢO

Phần I.

Câu 1.

$$x \rightarrow \pm\infty$$

Quan sát đồ thị, đường tiệm cận ngang là đường thẳng mà đồ thị tiến gần đến khi .

Trên hình, đường tiệm cận ngang là:

$$y = 1$$

Chọn **C**.

Câu 2.

Khi quay hình phẳng giới hạn bởi $y = e^x$, trục hoành, $x = 0$, $x = 2$ quanh trục Ox , thể tích khối tròn xoay là:

$$V = \pi \int_0^2 [f(x)]^2 dx$$

$$f(x) = e^x$$

Với , ta có:

$$V = \pi \int_0^2 (e^x)^2 dx = \pi \int_0^2 e^{2x} dx$$

Chọn **C**.

Câu 3.

Khoảng tứ phân vị được tính bởi công thức:

$$\Delta_Q = Q_3 - Q_1$$

Chọn **D**.

Câu 4.

Từ bảng biến thiên:

- Hàm số tăng trên $(-\infty; 1)$.
- Hàm số giảm trên $(1; 3)$.
- Hàm số tăng trên $(3; +\infty)$.
- Hàm số tăng trên .

Vì đạo hàm đổi dấu từ âm sang dương tại $x = 3$, nên hàm số đạt cực tiểu tại $x = 3$.

Từ bảng biến thiên, giá trị cực tiểu là:

$$y = 2$$

Chọn **B**.

Câu 5.

Ta có:

$$\log_2(x-1) = 3$$

Suy ra:

$$x-1 = 2^3 = 8$$

Do đó:

$$x = 9$$

Chọn **A**.

Câu 6.

Đường thẳng có dạng:

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{-1} = \frac{z}{4}$$

Với phương trình chính tắc:

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$

thì một vectơ chỉ phương là:

$$\vec{u} = (a; b; c)$$

d

Vậy vectơ chỉ phương của d là:

$$\vec{u} = (2; -1; 4)$$

Chọn **A**.

Câu 7.

$$SA \perp (ABCD) \quad SA$$

 BD

Ta có nên vuông góc với mọi đường thẳng nằm trong mặt phẳng đáy, trong đó có .

Suy ra:

$$BD \perp SA$$

 $ABCD$

Trong hình vuông , hai đường chéo vuông góc với nhau nên:

$$BD \perp AC$$

 (SAC)
 SA
 AC
 BD
 SA
 AC

Mặt phẳng chứa hai đường thẳng cắt nhau là và . Vì vuông góc với cả và , nên:

$$BD \perp (SAC)$$

Chọn **B**.

Câu 8.

Phương trình chính tắc của elip có dạng:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad a > b > 0$$

, với

 8

Độ dài trục lớn bằng nên:

$$2a = 8 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

 6

Độ dài trục nhỏ bằng nên:

$$2b = 6 \Rightarrow b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$$

Vậy phương trình elip là:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$$

Chọn **D**.

Câu 9.

$ABCD.A'B'C'D'$ A C'

Trong hình hộp , để đi từ đến , ta đi theo ba hướng:

$$\overrightarrow{AA'} \quad \overrightarrow{AB} \quad \overrightarrow{AD}$$

Do đó:

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

Chọn **D**.

Câu 10.

Ta cần tìm nguyên hàm của:

$$f(x) = 9^x$$

Công thức:

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$

Suy ra:

$$\int 9^x dx = \frac{9^x}{\ln 9} + C$$

Chọn **B**.

Câu 11.

58

7

Tầng dưới cùng có đồng xu. Cứ lên thêm một tầng thì số đồng xu giảm đi đồng.

Dãy số xu ở các tầng là:

$$58; 51; 44; 37; \dots$$

-7

Mỗi số hạng sau bằng số hạng trước cộng với , nên đây là một cấp số cộng có:

$$u_1 = 58, d = -7$$

Chọn **B**.

Câu 12.

ABC

Trọng tâm tam giác có tọa độ:

$$G\left(\frac{x_A + x_B + x_C}{3}; \frac{y_A + y_B + y_C}{3}; \frac{z_A + z_B + z_C}{3}\right)$$

Theo đề:

$$A(2; -3; 1) \quad B(1; 3; -4) \quad C(3; -3; 6)$$

,

Ta tính:

$$x_G = \frac{2 + 1 + 3}{3} = 2$$

$$y_G = \frac{-3 + 3 - 3}{3} = -1$$

$$z_G = \frac{1 - 4 + 6}{3} = 1$$

Vậy trọng tâm là:

$$G(2; -1; 1)$$

Chọn **A**.

Phần II.

Câu 1

Cho hàm số:

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} \quad x \neq -1$$

, với .

Ta chia đa thức:

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+1}$$

Vậy đồ thị có hai tiệm cận:

$$x = -1 \quad y = x - 2$$

và .

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

a)

Ta có:

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+1}$$

Suy ra:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2}$$

Quy đồng:

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

Mệnh đề **đúng**.

$$y = x - 2$$

b) Tiệm cận xiên là

Từ dạng:

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+1}$$

$$x \rightarrow \pm\infty \quad \frac{4}{x+1} \rightarrow 0$$

Khi $x \rightarrow \pm\infty$ thì $f(x) \rightarrow x - 2$.

Do đó đồ thị có tiệm cận xiên:

$$y = x - 2$$

Mệnh đề **đúng**.

4

c) Khoảng cách giữa hai điểm cực trị bằng

Ta có:

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = 0$$

Cho $f'(x) = 0$:

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$(x-1)(x+3) = 0$$

Suy ra:

$$x = 1 \quad \text{hoặc} \quad x = -3$$

Tính tọa độ hai điểm cực trị:

$$f(1) = \frac{1^2 - 1 + 2}{1+1} = 1$$

$$A(1;1)$$

nên một điểm cực trị là $A(1;1)$.

$$f(-3) = \frac{(-3)^2 - (-3) + 2}{-3 + 1} = \frac{14}{-2} = -7$$

$$B(-3; -7)$$

nên điểm cực trị còn lại là .

Khoảng cách giữa hai điểm cực trị:

$$AB = \sqrt{(1+3)^2 + (1+7)^2}$$

$$AB = \sqrt{4^2 + 8^2} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5}$$

$$4\sqrt{5} \neq 4$$

Vì , nên mệnh đề **sai**.

M

d) Có đúng 4 điểm *M* có hoành độ và tung độ nguyên sao cho tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có diện tích bằng 8

Ta có:

$$f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+1}$$

Đặt:

$$X = x + 1, \quad Y = y - x + 2$$

Khi đó đồ thị trở thành:

$$XY = 4$$

Hai tiệm cận tương ứng là:

$$X = 0, \quad Y = 0$$

$$M(X_0; Y_0)$$

Với điểm trên đồ thị, ta có:

$$X_0 Y_0 = 4$$

Tiếp tuyến của $XY = 4$ tại $M(X_0; Y_0)$ là:

$$Y_0 X + X_0 Y = 8$$

Tiếp tuyến này cắt hai tiệm cận tại hai điểm có tọa độ:

$$(2X_0; 0) \quad (0; 2Y_0)$$

và .

Diện tích tam giác tạo bởi tiếp tuyến và hai tiệm cận là:

$$S = \frac{1}{2} |2X_0 \cdot 2Y_0|$$

$$S = 2 |X_0 Y_0| = 2 \cdot 4 = 8$$

8

Vậy điều kiện diện tích bằng luôn đúng với mọi điểm trên đồ thị.

Bây giờ ta đếm số điểm có hoành độ và tung độ nguyên.

Vì:

$$y = x - 2 + \frac{4}{x+1}$$

Để x, y đều nguyên thì $x+1$ phải là ước nguyên của 4.

Do đó:

$$x+1 \in \{-4; -2; -1; 1; 2; 4\}$$

Có tất cả 6 giá trị, nên có 6 điểm thỏa mãn, không phải 4 điểm.

Mệnh đề **sai**.

Vậy Câu 1: **Đ D S S**.

Câu 2

Bảng tần số ghép lớp:

Thời gian luyện tập	[0; 2)	[2; 4)	[4; 6)	[6; 8)	[8; 10)
Số vận động viên	3	8	12	12	4

Tổng số vận động viên:

$$n = 3 + 8 + 12 + 12 + 4 = 39$$

a) Bảng tần số ghép lớp có 5 nhóm

Các nhóm là:

$$[0; 2), [2; 4), [4; 6), [6; 8), [8; 10)$$

5

Có đúng nhóm.

Mệnh đề **đúng**.

7,04

b) Tứ phân vị thứ ba là

Vị trí của tứ phân vị thứ ba:

$$\frac{3n}{4} = \frac{3 \cdot 39}{4} = 29,25$$

Tần số tích lũy:

- Nhóm [0; 2) : 3
- Nhóm [2; 4) : 3 + 8 = 11
- Nhóm [4; 6) : 11 + 12 = 23
- Nhóm [6; 8) : 23 + 12 = 35
- Nhóm [8; 10) : 35 + 4 = 39

$$23 < 29,25 \leq 35 \quad Q_3 \quad [6; 8)$$

Vì , nên thuộc nhóm .

Áp dụng công thức:

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - F}{f} \cdot h$$

Trong đó:

$$L = 6, \quad F = 23, \quad f = 12, \quad h = 2$$

Suy ra:

$$Q_3 = 6 + \frac{29,25 - 23}{12} \cdot 2$$

$$Q_3 = 6 + \frac{6,25}{12} \cdot 2$$

$$Q_3 \approx 7,04$$

Mệnh đề **đúng**.

$$[6; 8) \quad 6,5$$

c) Giá trị đại diện của nhóm là

Giá trị đại diện của nhóm là trung điểm của khoảng:

$$x = \frac{6+8}{2} = 7$$

$$6,5$$

Không phải .

Mệnh đề **sai**.

$$5,31$$

d) Giá trị trung bình là

Giá trị đại diện các nhóm lần lượt là:

$$1; 3; 5; 7; 9$$

Giá trị trung bình:

$$\bar{x} = \frac{1 \cdot 3 + 3 \cdot 8 + 5 \cdot 12 + 7 \cdot 12 + 9 \cdot 4}{39}$$

$$\bar{x} = \frac{3 + 24 + 60 + 84 + 36}{39}$$

$$\bar{x} = \frac{207}{39} \approx 5,31$$

Mệnh đề **đúng**.

Vậy Câu 2: **Đ Đ S Đ**.

Câu 3

Cho:

$$\vec{u} = (2; 1; -3)$$

$$(P): x + 2y - 2z + 16 = 0$$

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 2z - 3 = 0$$

$$I(-1; 2; 1)$$

a) Mặt cầu có tâm

Ta biến đổi phương trình mặt cầu:

$$x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 + 2z - 3 = 0$$

$$(x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z+1)^2 - 1 - 3 = 0$$

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 9$$

Vậy mặt cầu có tâm:

$$I(1; -2; -1)$$

Bán kính:

$$R = 3$$

$$I(-1; 2; 1)$$

Đề nói tâm là nên mệnh đề **sai**.

$$I(P) \quad 5$$

b) Khoảng cách từ tâm đến mặt phẳng bằng

Tâm đúng của mặt cầu là:

$$I(1; -2; -1)$$

$$I(P): x + 2y - 2z + 16 = 0$$

Khoảng cách từ đến mặt phẳng là:

$$d = \frac{|1 + 2(-2) - 2(-1) + 16|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}}$$

$$d = \frac{|1 - 4 + 2 + 16|}{3}$$

$$d = \frac{15}{3} = 5$$

Mệnh đề **đúng**.

$$\sin \alpha = \frac{5\sqrt{14}}{7}$$

c)

$$(P)$$

Vector pháp tuyến của mặt phẳng là:

$$\vec{n} = (1; 2; -2)$$

$\vec{u}$ (P)

Góc giữa đường thẳng có vectơ chỉ phương và mặt phẳng thỏa mãn:

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

Ta có:

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + (-3)(-2) = 10$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-3)^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{n}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

Suy ra:

$$\sin \alpha = \frac{10}{3\sqrt{14}} = \frac{5\sqrt{14}}{21}$$

$$\frac{5\sqrt{14}}{7}$$

Không phải .

Mệnh đề **sai**.

d) Giá trị lớn nhất của MN bằng $\frac{12\sqrt{14}}{5}$

Gọi M thuộc mặt cầu, N thuộc mặt phẳng (P) và đường thẳng MN có vectơ chỉ phương $\vec{u}$.

Khi đó có thể viết:

$$N = M + t\vec{u}$$

Vì N thuộc mặt phẳng (P), nên:

$$x_N + 2y_N - 2z_N + 16 = 0$$

Đặt:

$$P(M) = x_M + 2y_M - 2z_M + 16$$

$$N = M + t\vec{u}$$

Khi thay vào phương trình mặt phẳng, ta được:

$$P(M) + t(\vec{n} \cdot \vec{u}) = 0$$

Do đó:

$$|t| = \frac{|P(M)|}{|\vec{n} \cdot \vec{u}|} = \frac{|P(M)|}{10}$$

Suy ra:

$$MN = |t| \cdot |\vec{u}| = \frac{|P(M)|\sqrt{14}}{10}$$

Ta cần tìm giá trị lớn nhất của $|P(M)|$ khi M chạy trên mặt cầu tâm $I(1; -2; -1)$, bán kính $R = 3$.

Ta có:

$$P(I) = 1 + 2(-2) - 2(-1) + 16 = 15$$

$$|\vec{n}| = 3 \quad R = 3$$

Vì và , nên:

$$|P(M)|_{\max} = 15 + 3 \cdot 3 = 24$$

Vậy:

$$MN_{\max} = \frac{24\sqrt{14}}{10} = \frac{12\sqrt{14}}{5}$$

Mệnh đề **đúng**.

Vậy Câu 3: **S Đ S Đ**.

Câu 4

Cửa hàng bán:

- 140 mô tô.
- 60 búp bê.

Tổng số bé mua đồ chơi:

$$140 + 60 = 200$$

Trong số bé mua mô tô, 60% là nam:

$$\text{Nam mua mô tô} = 140 \cdot 60\% = 84$$

$$\text{N? mua mô tô} = 140 - 84 = 56$$

Trong số bé mua búp bê, 80% là nữ:

$$\text{N? mua búp bê} = 60 \cdot 80\% = 48$$

$$\text{Nam mua búp bê} = 60 - 48 = 12$$

Bảng thống kê:

	Mua mô tô	Mua búp bê	Tổng
Nam	84	12	96
Nữ	56	48	104
Tổng	140	60	200

0,7

a) Xác suất bé được chọn đã mua mô tô bằng

$$P(\text{mua mô tô}) = \frac{140}{200} = 0,7$$

Mệnh đề **đúng**.

b) Xác suất bé được chọn là nữ, biết rằng bé đó mua mô tô bằng

Đây là xác suất có điều kiện:

$$P(n? | \text{mua mô tô}) = \frac{56}{140} = 0,4$$

$$0,28 = \frac{56}{200}$$

Còn là xác suất bé được chọn vừa là nữ vừa mua mô tô, không phải xác suất có điều kiện.

Mệnh đề **sai**.

c) Xác suất bé được chọn là nam và không mua búp bê bằng

“Không mua búp bê” nghĩa là mua mô tô.

Vậy:

$$P(\text{nam và không mua búp bê}) = P(\text{nam và mua mô tô})$$

$$P = \frac{84}{200} = 0,42$$

Không phải .

Mệnh đề **sai**.

d) Số bé nam mua đồ chơi là

Số bé nam mua đồ chơi là:

$$84 + 12 = 96$$

Mệnh đề **đúng**.

Vậy Câu 4: **Đ S S Đ**.

Phần III.

Câu 1

Phao cứu sinh có dạng **hình xuyên**.

Bán kính ngoài là 35 cm, bán kính trong là 25 cm.

Gọi:

R
là bán kính từ tâm phao đến tâm tiết diện tròn.

r
là bán kính tiết diện tròn của phao.

Ta có:

$$R + r = 35$$

$$R - r = 25$$

Cộng hai phương trình:

$$2R = 60 \Rightarrow R = 30$$

$$r = 35 - 30 = 5$$

Suy ra:

$$V = 2\pi^2 R r^2$$

Thể tích khối xuyên là:

$$V = 2 \cdot 3,1416^2 \cdot 30 \cdot 5^2$$

Thay số:

$$V = 1500 \cdot 3,1416^2 \approx 14804,41 \text{ cm}^3$$

$$0,05 \text{ g/cm}^3$$

Khối lượng riêng là $0,05 \text{ g/cm}^3$, nên khối lượng phao là:

$$m = 14804,41 \cdot 0,05 \approx 740,22 \text{ g}$$

Đổi ra kg:

$$740,22 \text{ g} = 0,74022 \text{ kg}$$

Làm tròn đến hàng phần trăm:

$$m \approx 0,74 \text{ kg}$$

Đáp án: 0,74.

Câu 2

Ta cần tìm đường đi ngắn nhất từ P đến Q trên sơ đồ.

Quan sát hình, các cạnh chính có độ dài:

$$PB = 1, BC = 3, CM = 4, MN = 2, NQ = 4$$

Xét đường đi:

$$P \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow Q$$

Độ dài là:

$$PB + BC + CM + MN + NQ = 1 + 3 + 4 + 2 + 4 = 14$$

Thử một số đường khác:

$$P \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow Q = 5 + 4 + 2 + 4 = 15$$

$$P \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow N \rightarrow Q = 1 + 3 + 7 + 4 = 15$$

$$P \rightarrow A \rightarrow L \rightarrow Q = 3 + 13 + 10 = 26$$

Vậy đường đi ngắn nhất là:

$$P \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow Q$$

Độ dài ngắn nhất bằng:

$$14 \text{ km}$$

Đáp án: 14.

Câu 3

Đổi đơn vị:

$$2 \text{ dm} = 0,2 \text{ m}$$

$$5 \text{ dm} = 0,5 \text{ m}$$

3

90

Mỗi máng dài m. Ta tính diện tích mặt cắt của phần silic rồi nhân với chiều dài và nhân với máng.

Xét mặt cắt vuông góc với chiều dài máng.

$$2 + 2 \cdot 0,2 = 2,4 \text{ m}$$

Vành ngoài có chiều rộng:

$$1,2 \text{ m}$$

nên nửa chiều rộng là:

$$0,5$$

Chiều cao vành ngoài là m.

Chọn hệ trục tọa độ sao cho parabol ngoài có dạng:

$$y = ax^2 + b$$

$$(0; 0,5) \quad (1,2; 0)$$

Parabol ngoài đi qua và .

$$(0; 0,5) \quad b = 0,5 = \frac{1}{2}$$

Từ suy ra:

$$(1,2; 0) \quad 0 = a \cdot 1,2^2 + \frac{1}{2}$$

Thay vào:

$$a = -\frac{1}{2 \cdot 1,2^2} = -\frac{25}{72}$$

$$y_1 = -\frac{25}{72}x^2 + \frac{1}{2}$$

Vậy parabol ngoài là:

Vành trong có chiều rộng $\frac{2}{1}$ m nên nửa chiều rộng là $\frac{1}{2}$ m.

Chiều cao vành trong là:

$$0,5 - 0,2 = 0,3 \text{ m}$$

Parabol trong đi qua $(0; 0,3)$ và $(1; 0)$.

$$y_2 = -\frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{10}$$

Suy ra:

Diện tích mặt cắt phần silic là diện tích dưới parabol ngoài trừ diện tích dưới parabol trong:

$$S = 2 \left[\int_0^{1,2} \left(-\frac{25}{72}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx - \int_0^1 \left(-\frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{10} \right) dx \right]$$

Tính từng phần:

$$\int_0^{1,2} \left(-\frac{25}{72}x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \frac{2}{5}$$

$$2 \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

nên diện tích ngoài là:

$$\int_0^1 \left(-\frac{3}{10}x^2 + \frac{3}{10} \right) dx = \frac{1}{5}$$

Tiếp theo:

$$2 \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}$$

nên diện tích trong là:

$$S = \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \text{ m}^2$$

Do đó diện tích phần silic là:

$$V_1 = S \cdot 3 = \frac{2}{5} \cdot 3 = \frac{6}{5} \text{ m}^3$$

Thể tích silic của một máng là:

$$V = 90 \cdot \frac{6}{5} = 108 \text{ m}^3$$

Thể tích silic của máng là:

Đáp án: 108.

Câu 4

$$C_1(x) = 1400 + 55x$$

Chi phí đầu tư ban đầu:

$$R(x) = 28x - 0,15x^2$$

Doanh thu hằng năm:

$$C_2(x) = 12 + 0,35x + 0,012x^2$$

Chi phí vận hành hằng năm:

$$L(x) = R(x) - C_2(x)$$

Lợi nhuận hằng năm là:

$$L(x) = 28x - 0,15x^2 - (12 + 0,35x + 0,012x^2)$$

$$L(x) = -0,162x^2 + 27,65x - 12$$

Tỷ lệ lợi nhuận trên đầu tư là:

$$f(x) = \frac{L(x)}{C_1(x)} = \frac{-0,162x^2 + 27,65x - 12}{1400 + 55x}$$

Ta cần tìm để $f(x)$ lớn nhất.

0

Tính đạo hàm và cho tử số bằng 0, ta được phương trình:

$$891x^2 + 45360x - 3937000 = 0$$

$$x \approx 45,73$$

Giải phương trình, nghiệm dương là:

$$x \approx 46$$

Vì là công suất cần làm tròn đến hàng đơn vị, nên:

Đáp án: 46.

Câu 5

$$P(1;1;0) \quad Q(3;0;1)$$

Ta có: ,

$$\overrightarrow{PQ} = (2; -1; 1)$$

Suy ra:

Vì M nằm giữa P và Q , đặt:

$$M = P + t\overrightarrow{PQ} \quad 0 \leq t \leq 1$$

, với

$$M(1+2t; 1-t; t)$$

Khi đó:

$$PQ + MA + MB$$

Tổng độ dài dây gồm .

Vì PQ cố định nên ta chỉ cần làm nhỏ nhất $MA + MB$:

$$A(1;0;-1) \quad \overrightarrow{MA} = (2t; 1-t; t+1)$$

Với , ta có:

Suy ra:

$$MA = \sqrt{(2t)^2 + (1-t)^2 + (t+1)^2}$$

$$MA = \sqrt{6t^2 + 2}$$

$$B(2;1;1) \quad \overrightarrow{MB} = (2t-1; -t; t-1)$$

Với , ta có:

Suy ra:

$$MB = \sqrt{(2t-1)^2 + t^2 + (t-1)^2}$$

$$MB = \sqrt{6t^2 - 6t + 2}$$

$$f(t) = \sqrt{6t^2 + 2} + \sqrt{6t^2 - 6t + 2}$$

Cần tối thiểu hóa:

$$f'(t) = \frac{6t}{\sqrt{6t^2 + 2}} + \frac{6t - 3}{\sqrt{6t^2 - 6t + 2}}$$

Đạo hàm:

$$f'(t) = 0 \quad t = \frac{1}{3}$$

Cho , giải được:

$$PM = t \cdot PQ$$

Vậy:

$$PQ = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$$

Mà:

$$PM = \frac{1}{3}\sqrt{6} \approx 0,816$$

Do đó:

$$PM \approx 0,8 \text{ m}$$

Làm tròn đến hàng phần chục:

Đáp án: 0,8.

Câu 6

Ta có 8 số khác nhau từ 1 đến 8 , tổng là:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36$$

Theo điều kiện, bốn tổng trên bốn cạnh bằng nhau.

$$x_1, x_2, x_3, x_4$$

Gọi bốn số nằm ở các vị trí xuất hiện trong hai tổng cạnh là:

$$y_1, y_2, y_3, y_4$$

Gọi bốn số còn lại là:

Khi đó bốn cạnh có dạng:

$$x_1 + y_1 + x_2 = S$$

$$x_2 + y_2 + x_3 = S$$

$$x_3 + y_3 + x_4 = S$$

$$x_4 + y_4 + x_1 = S$$

$$4S = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4)$$

Cộng bốn phương trình:

$$36$$

Mà tổng cả 8 số là , nên:

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 36 - (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

$$4S = 36 + (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)$$

Suy ra:

$$S = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 36}{4}$$

Vì là số nguyên nên: phải chia hết cho .

$$4$$

Sau khi kiểm tra các bộ 4 số có tổng chia hết cho , các bộ thỏa mãn là:

Bộ 4 số ở vị trí xuất hiện hai lần	Số cách sắp xếp
1, 2, 3, 6	8
1, 2, 5, 8	8
1, 4, 5, 6	8
1, 4, 7, 8	8
3, 4, 5, 8	8
3, 6, 7, 8	8

$$6 \cdot 8 = 48$$

Vậy tổng số trường hợp là:

Đáp án: 48.

